

Віталій Шпаківський

ЧАСТИНА 1

Операторні алгебри та їх застосування

1 Основні поняття

Нехай $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ і нехай D — область в $\mathbb{K}^n$. Нехай X — лінійний топологічний простір над полем $\mathbb{K}$. Прикладами простору X можуть бути наступні простори:

- $X = \mathbb{R}^n$ з топологією $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$;
- $X = \mathbb{C}^n$;
- простір неперервних функцій $X = C(D)$ в області D ;
- простір функцій $X = C^m(D)$, які мають неперервні частинні похідні до порядку m включно;
- простір нескінченно диференційовних функцій $X = C^\infty(D)$ в області D ;
- простір аналітичних функцій $X = \mathcal{O}(D)$,
- $X = L_p(D)$, $1 \leq p \leq \infty$ тощо.

Позначимо через $\mathcal{A}(X)$ **комутативну асоціативну алгебру** лінійних операторів, які відображають простір X в себе. З означення комутативної асоціативної алгебри випливає, що для довільних операторів $K, M, N \in \mathcal{A}(X)$ справедливі рівності

1. $MN = NM$,
2. $K(M + N) = KM + KN$,
3. $K(MN) = (KM)N$,

де через MN для спрощення будемо позначати композицію $M \circ N$ операторів M і N . Оскільки $\mathcal{A}(X)$ — це алгебра, то виконуються всі аксіоми алгебри. Зокрема, $\mathcal{A}(X)$ замкнена відносно операції додавання і множення на скаляр з $\mathbb{K}$. Очевидним також є твердження: якщо до комутативної асоціативної алгебри лінійних операторів $\mathcal{A}(X)$ приєднати нульовий оператор, то ми знову отримаємо комутативну асоціативну алгебру лінійних операторів.

Наведемо деякі приклади алгебр $\mathcal{A}(X)$.

Приклад 1. Оператори множення на функцію. Нехай $X = C(D)$. Для кожної функції $a(x)$ визначимо $(M_a f)(x) = a(x)f(x)$. Тоді $M_a M_b = M_{ab} = M_{ba} = M_b M_a$. Отже, $\mathcal{A} = \{M_a : a \in C(D)\}$ є комутативною асоціативною алгеброю.

Приклад 2. Алгебра многочленів від одного оператора. Нехай $T = x \frac{d}{dx}$. Розглянемо $\mathcal{A} = \{P(T) := a_0 I + a_1 T + \dots + a_n T^n : a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}\}$. Для будь-яких многочленів P, Q $P(T)Q(T) = Q(T)P(T)$. Тоді $\mathcal{A}$ є комутативною асоціативною алгеброю лінійних операторів.

Приклад 3. Нехай $X = \mathbb{R}^n$. Розглянемо всі діагональні матриці

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

Тоді $AB = BA$. Отже всі діагональні оператори утворюють комутативну асоціативну алгебру.

Приклад 4. Частинні похідні. Нехай $X = C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Розглянемо алгебру

$$\mathcal{A} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha : c_\alpha \in \mathbb{K}, m \in \mathbb{N} \right\},$$

де

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Тобто $\mathcal{A}$ складається з усіх лінійних диференціальних операторів зі сталими коефіцієнтами. Множина $\mathcal{A}$ утворює комутативну асоціативну алгебру внаслідок рівності $\partial_{x_i} \partial_{x_j} = \partial_{x_j} \partial_{x_i}$.

Приклад 5. Комутуючі оператори зі змінними коефіцієнтами. Нехай

$$A = \partial_x + y \partial_y, \quad B = e^x \partial_y.$$

Вони комутують. Тому всі оператори $P(A, B)$, де P — поліном над полем $\mathbb{K}$, утворюють комутативну асоціативну алгебру. Наприклад, $A + B$, $A^2 + 3AB + B^2$, $5A^3 - 2B$ і т. д. Усі вони попарно комутують.

Приклад 6. Тривимірний випадок. Нехай $A_1 = \partial_x + y\partial_y + z\partial_z$, $A_2 = e^x\partial_y$, $A_3 = e^x\partial_z$. Маємо $A_i A_j = A_j A_i$. Тоді $\mathcal{A} = P(A_1, A_2, A_3)$, де P — поліном над полем $\mathbb{K}$, утворюють комутативну асоціативну алгебру.

Приклад 7. Алгебра многочленів від інтегрального оператора. Нехай

$$(\mathcal{V}f)(x) = \int_0^x f(t)dt$$

— оператор Вольтерри, який є лінійним оператором. Тоді всі оператори вигляду

$$P(\mathcal{V}) = a_0 I + a_1 \mathcal{V} + \dots + a_n \mathcal{V}^n, \quad a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$$

утворюють комутативну асоціативну алгебру, бо вони є многочленами від одного оператора $\mathcal{V}$.

Приклад 8. Оператори згортки. Нехай $X = L_1(\mathbb{R})$. Для функції k визначимо

$$(T_k f)(x) = (k * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} k(x - t)f(t)dt.$$

Тоді $T_{k_1} T_{k_2} = T_{k_1 * k_2}$. Оскільки згортка комутативна, $k_1 * k_2 = k_2 * k_1$, то $T_{k_1} T_{k_2} = T_{k_2} T_{k_1}$. Отже, всі оператори згортки утворюють комутативну асоціативну алгебру лінійних операторів.

2 Алгебра з операторними структурними константами

Означення 1. Нехай X — лінійний топологічний простір над полем $\mathbb{K}$. І нехай $\mathcal{A}(X)$ — комутативна асоціативна алгебра лінійних операторів, які відображають простір X в себе. **Алгеброю з операторними структурними константами** (коротко — операторною алгеброю) розмірності n назвемо множину $\mathfrak{A}_n(\mathcal{A}(X), \star)$ елементів вигляду

$$A := \sum_{k=1}^n A_k E_k,$$

де $A_k \in \mathcal{A}(X)$ при $k = 1, 2, \dots, n$, а $E_1, E_2, \dots, E_n$ — деякі символи, які назвемо базисними елементами алгебри $\mathfrak{A}_n(\mathcal{A}(X), \star)$. При цьому постулюється виконання наступних аксіом:

1. рівність

$$\sum_{k=1}^n A_k E_k = \sum_{k=1}^n B_k E_k$$

означає, що $A_k \equiv B_k$ на X при всіх $k = 1, 2, \dots, n$;

2.

$$0 = 0E_1 + 0E_2 + \dots + 0E_n;$$

3.

$$\sum_{k=1}^n A_k E_k + \sum_{k=1}^n B_k E_k = \sum_{k=1}^n (A_k + B_k) E_k;$$

4.

$$\Lambda \star \sum_{k=1}^n A_k E_k = \left(\sum_{k=1}^n A_k E_k \right) \star \Lambda = \sum_{k=1}^n \Lambda A_k E_k \quad \forall \Lambda \in \mathcal{A}(X);$$

5.

$$E_i \star E_j = \sum_{k=1}^n \Upsilon_{ij}^k E_k, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

де $\Upsilon_{ij}^k \in \mathcal{A}(X)$ при $i, j, k = 1, \dots, n$, — деякі оператори, які назвемо структурними операторами алгебри.

6.

$$\left(\sum_{i=1}^n A_i E_i \right) \star \left(\sum_{j=1}^n B_j E_j \right) = \sum_{i,j=1}^n A_i B_j (E_i \star E_j). \quad (2)$$

Означення 2. Операторна алгебра $\mathfrak{A}_n(\mathcal{A}(X), \star)$ називається алгеброю з одиницею, якщо існує елемент алгебри E_0 такий, що для довільного $A \in \mathfrak{A}_n(\mathcal{A}(X), \star)$ справедлива рівність $E_0 \star A = A \star E_0 = A$. При цьому елемент E_0 називається одиницею алгебри $\mathfrak{A}_n(\mathcal{A}(X), \star)$.

Означення 3. Операторна алгебра $\mathfrak{A}_n(\mathcal{A}(X), \star)$ називається комутативною, якщо для всіх $i, j = 1, 2, \dots, n$ справедливі рівності $E_i \star E_j = E_j \star E_i$.

Означення 4. Операторна алгебра $\mathfrak{A}_n(\mathcal{A}(X), \star)$ називається асоціативною, якщо для всіх $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ справедливі рівності

$$(E_i \star E_j) \star E_k = E_i \star (E_j \star E_k).$$

Розглянемо приклади операторних алгебр.

Приклад 10. Нехай $X = \mathbb{K}$ і $\Upsilon_{ij}^k \in \mathbb{K}$. Тоді отримуємо звичайну скінченновимірну алгебру над $\mathbb{K}$.

Приклад 11. Нехай X — довільний лінійний топологічний простір і $\mathcal{A}(X)$ — комутативна асоціативна алгебра лінійних операторів, які відображають простір X в себе. Нехай A і B — довільні фіксовані оператори з алгебри $\mathcal{A}(X)$.

Розглянемо двовимірну операторну алгебру $\mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$ з базисом E_1, E_2 і таблицею множення

$$\begin{array}{c|c|c} \star & E_1 & E_2 \\ \hline E_1 & E_1 & E_2 \\ \hline E_2 & E_2 & AE_1 + BE_2 \end{array}. \quad (3)$$

Зокрема, в ролі операторів A і B можна взяти довільну пару операторів з прикладів 1 – 9. Також очевидно, що елемент E_1 є одиницею $1_{\mathfrak{A}_2}$ алгебри $\mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$.

Алгебра $\mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$ буде основним об'єктом нашого подальшого дослідження у цій статті.

Приклад 12. Розглянемо частинні випадки попередньої алгебри $\mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$. Покладемо $X = C^\infty(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$.

1. Нехай $A = \partial_x$, $B = \partial_y$. Тоді отримаємо таку операторну алгебру

$$\begin{array}{c|c|c} \star & E_1 & E_2 \\ \hline E_1 & E_1 & E_2 \\ \hline E_2 & E_2 & \partial_x E_1 + \partial_y E_2 \end{array}.$$

2. В рівностях (3), наприклад, покладемо

$$A = x\partial_x + y\partial_y, \quad B = x^2\partial_{xx} + x\partial_x + y^2\partial_{yy} + y\partial_y.$$

3. Або в рівностях (3) можемо покласти

$$A = x \int_{\mathbb{R}} k_1(x-t)f(t)dt + y \int_{\mathbb{R}} k_2(x-t)f(t)dt,$$

$$B = y \int_{\mathbb{R}} k_3(x-t)f(t)dt + x \int_{\mathbb{R}} k_4(x-t)f(t)dt.$$

4. Або в рівностях (3) покладемо

$$A = x \int_0^x f(t)dt, \quad B = y \int_0^x \int_0^t f(s)ds.$$

тощо.

3 Комутативна операторна алгебра $\mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$

Розглянемо алгебру $\mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$ з таблицею множення (3).

Теорема 1. Алгебра $\mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$ з таблицею множення (3) є комутативною та асоціативною.

Доведення. Комутативність достатньо перевірити на базисних елементах. Маємо

$$E_1 \star E_2 = E_2 \star E_1 = E_2,$$

а також

$$E_1 \star E_1 = E_1, \quad E_2 \star E_2 = AE_1 + BE_2.$$

Отже таблиця множення є симетричною, тому алгебра є комутативною.

Перевіримо асоціативність. Оскільки E_1 є одиничним елементом, усі рівності асоціативності, у яких бере участь E_1 , виконуються автоматично. Тому достатньо перевірити лише рівність

$$(E_2 \star E_2) \star E_2 = E_2 \star (E_2 \star E_2).$$

Маємо

$$(E_2 \star E_2) \star E_2 = (AE_1 + BE_2) \star E_2.$$

Звідси

$$(AE_1 + BE_2) \star E_2 = A(E_1 \star E_2) + B(E_2 \star E_2).$$

Тому

$$(E_2 \star E_2) \star E_2 = AE_2 + B(AE_1 + BE_2) = AB E_1 + (A + B^2)E_2.$$

З іншого боку,

$$E_2 \star (E_2 \star E_2) = E_2 \star (AE_1 + BE_2).$$

Тому

$$E_2 \star (AE_1 + BE_2) = A(E_2 \star E_1) + B(E_2 \star E_2).$$

Отже,

$$E_2 \star (E_2 \star E_2) = AE_2 + B(AE_1 + BE_2) = AB E_1 + (A + B^2)E_2.$$

Таким чином,

$$(E_2 \star E_2) \star E_2 = E_2 \star (E_2 \star E_2).$$

Отже, алгебра є асоціативною.

Очевидно, що одиницею алгебри $\mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$ є елемент E_1 .

Означення 5. Елемент $A \in \mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$ називається оборотним, якщо існує елемент $A^{-1} \in \mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$ такий, що $A \star A^{-1} = E_0$, де E_0 — одиниця алгебри. При цьому елемент A^{-1} називається оберненим до елемента A .

Теорема 2. Елемент $\Phi = UE_1 + VE_2$ алгебри $\mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$ є оборотним тоді і тільки тоді, коли оператор $\Delta := U^2 + BUV - AV^2$ є оборотним в алгебрі $\mathcal{A}(X)$. При цьому обернений елемент має вигляд

$$\Phi^{-1} = \Delta^{-1}((U + BV)E_1 - VE_2).$$

Доведення. Нехай

$$\Phi = UE_1 + VE_2, \quad U, V \in \mathcal{A}(X).$$

Шукаємо обернений елемент у вигляді

$$\Psi = PE_1 + QE_2, \quad P, Q \in \mathcal{A}(X).$$

Тоді умова $\Phi \star \Psi = E_1$ еквівалентна рівності

$$(UE_1 + VE_2) \star (PE_1 + QE_2) = E_1.$$

Використовуючи таблицю множення (3), одержуємо

$$\Phi \star \Psi = (UP + AVQ)E_1 + (UQ + VP + BVQ)E_2.$$

Отже, елемент Ψ є оберненим до Φ тоді і тільки тоді, коли виконуються рівності

$$UP + AVQ = I, \quad UQ + VP + BVQ = 0.$$

Покладемо $\Delta := U^2 + BUV - AV^2$. Припустимо, що Δ є оборотним елементом алгебри $\mathcal{A}(X)$. Візьмемо

$$P = \Delta^{-1}(U + BV), \quad Q = -\Delta^{-1}V.$$

Тоді

$$UP + AVQ = U\Delta^{-1}(U + BV) - AV\Delta^{-1}V.$$

Оскільки алгебра $\mathcal{A}(X)$ комутативна, то маємо

$$UP + AVQ = \Delta^{-1}(U^2 + BUV - AV^2) = \Delta^{-1}\Delta = I.$$

Далі

$$UQ + VP + BVQ = -U\Delta^{-1}V + V\Delta^{-1}(U + BV) - BV\Delta^{-1}V.$$

Знову використовуючи комутативність $\mathcal{A}(X)$, одержуємо

$$UQ + VP + BVQ = \Delta^{-1}(-UV + UV + BV^2 - BV^2) = 0.$$

Отже,

$$\Psi = \Delta^{-1}((U + BV)E_1 - VE_2)$$

є оберненим елементом до Φ .

Таким чином, якщо Δ є оборотним в $\mathcal{A}(X)$, то елемент $\Phi = UE_1 + VE_2$ є оборотним в алгебрі $\mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$, причому

$$\Phi^{-1} = \Delta^{-1}((U + BV)E_1 - VE_2).$$

Навпаки, нехай Φ є оборотним. Тоді існує $\Psi = PE_1 + QE_2$ такий, що $\Phi \star \Psi = E_1$. З уже отриманої системи маємо

$$UP + AVQ = I, \quad UQ + VP + BVQ = 0.$$

З другої рівності маємо $VP = -(U + BV)Q$. Помножимо першу рівність на $U + BV$. Отримаємо $(U + BV)(UP + AVQ) = U + BV$. Звідси

$$U(U + BV)P + AV(U + BV)Q = U + BV.$$

Оскільки з рівності $VP = -(U + BV)Q$ випливає рівність

$$V(U + BV)P = -(U + BV)^2Q,$$

то після елементарних перетворень одержуємо, що елемент $\Delta = U^2 + BUV - AV^2$ має обернений елемент в $\mathcal{A}(X)$.

Отже, Φ є оборотним тоді і тільки тоді, коли $\Delta = U^2 + BUV - AV^2$ є оборотним в $\mathcal{A}(X)$. Теорему доведено.

Означення 6. Відмінний від нуля елемент $\Phi \in \mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$ називається дільником нуля, якщо існує інший відмінний від нуля елемент $\Psi \in \mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$ такий, що $\Phi \star \Psi = 0$.

Означення 7. Елемент $\Delta_\Phi := U^2 + BUV - AV^2 \in \mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$ назвемо нормою елемента $\Phi \in \mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$.

Теорема 3. Якщо елемент $\Phi = UE_1 + VE_2$ є дільником нуля в алгебрі $\mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$, то його норма $\Delta_\Phi = U^2 + BUV - AV^2$ є необоротним елементом алгебри $\mathcal{A}(X)$. Якщо, крім того, алгебра $\mathcal{A}(X)$ є полем, то Φ є дільником нуля тоді і тільки тоді, коли $\Delta_\Phi = 0$.

Доведення. Нехай $\Phi = UE_1 + VE_2$ є дільником нуля. Тоді існує ненульовий елемент $\Psi = PE_1 + QE_2$ такий, що $\Phi \star \Psi = 0$.

Обчислимо добуток

$$\Phi \star \Psi = (UE_1 + VE_2) \star (PE_1 + QE_2).$$

Використовуючи таблицю множення, маємо

$$\Phi \star \Psi = (UP + AVQ)E_1 + (UQ + VP + BVQ)E_2.$$

З рівності $\Phi \star \Psi = 0$ випливає система

$$UP + AVQ = 0, \quad VP + (U + BV)Q = 0.$$

Припустимо, що $\Delta_\Phi = 0$ є оборотним елементом алгебри $\mathcal{A}(X)$. Тоді, за теоремою про обернений елемент,

$$\Phi^{-1} = \Delta_\Phi^{-1}((U + BV)E_1 - VE_2)$$

існує. Але тоді з рівності $\Phi \star \Psi = 0$ одержуємо

$$\Psi = \Phi^{-1} \star (\Phi \star \Psi) = \Phi^{-1} \star 0 = 0,$$

що суперечить вибору $\Psi \neq 0$.

Отже, якщо Φ є дільником нуля, то Δ_Φ не може бути оборотним в $\mathcal{A}(X)$.

Нехай тепер алгебра $\mathcal{A}(X)$ є полем. Тоді кожен ненульовий елемент не є дільником нуля, а в полі кожен ненульовий елемент є оборотним. У цьому випадку з необоротності Δ_Φ випливає $\Delta_\Phi = 0$. Отже, для поля Φ є дільником нуля тоді і тільки тоді, коли $\Delta_\Phi = 0$.

Навпаки, нехай $\Delta_\Phi = 0$. Розглянемо елемент $\tilde{\Phi} := (U + BV)E_1 - VE_2$. Тоді

$$\begin{aligned} \Phi \star \tilde{\Phi} &= (UE_1 + VE_2) \star ((U + BV)E_1 - VE_2) \\ &= (U(U + BV) - AV^2)E_1 + (-UV + V(U + BV) - BV^2)E_2. \end{aligned}$$

Оскільки $\mathcal{A}(X)$ комутативна, друга компонента дорівнює нулю: $-UV + VU + BV^2 - BV^2 = 0$. Перша компонента дорівнює $U^2 + BUV - AV^2 = N(\Phi)$. Тому

$$\Phi \star \tilde{\Phi} = \Delta_\Phi E_1.$$

Якщо $\Delta_\Phi = 0$, то $\Phi \star \tilde{\Phi} = 0$.

Отже, якщо $\tilde{\Phi} \neq 0$, то Φ є дільником нуля.

Таким чином, у випадку поля маємо критерій: Φ є дільником нуля тоді і тільки тоді, коли $\Delta_\Phi = 0$. Теорему доведено.

Теорема 4. Елемент $\Phi = UE_1 + VE_2 \in \mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$ є ідемпотентом тоді і тільки тоді, коли виконуються співвідношення

$$U^2 + AV^2 = U, \quad 2UV + BV^2 = V.$$

Доведення. Нехай $\Phi = UE_1 + VE_2$. Тоді $\Phi \star \Phi = (UE_1 + VE_2) \star (UE_1 + VE_2)$. Враховуючи комутативність алгебри і її таблицю множення, одержуємо

$$\Phi \star \Phi = U^2E_1 + 2UVE_2 + V^2(AE_1 + BE_2).$$

Після зведення подібних доданків маємо

$$\Phi \star \Phi = (U^2 + AV^2)E_1 + (2UV + BV^2)E_2 = \Phi = UE_1 + VE_2.$$

З огляду на аксіому лінійної незалежності базисних елементів E_1, E_2 , одержуємо систему

$$U^2 + AV^2 = U, \quad 2UV + BV^2 = V.$$

Теорему доведено.

Наслідок 1. Якщо $V = 0$, то всі ідемпотенти мають вигляд $\Phi = UE_1$, де $U^2 = U$. Зокрема, якщо алгебра $\mathcal{A}(X)$ не містить нетривіальних ідемпотентів, то $\Phi = 0$ або $\Phi = E_1$.

Теорема 5. Нехай V є оборотним елементом алгебри $\mathcal{A}(X)$. Тоді будь-який нетривіальний ідемпотент $\Phi = UE_1 + VE_2$ задовольняє співвідношення $(B^2 + 4A)V^2 = I$.

Доведення. Із системи $U^2 + AV^2 = U$, $2UV + BV^2 = V$ та оборотності V одержуємо $2U + BV = I$, тобто $U = \frac{I-BV}{2}$. Підставляючи цей вираз у рівняння $U^2 + AV^2 = U$, маємо

$$\left(\frac{I-BV}{2}\right)^2 + AV^2 = \frac{I-BV}{2}.$$

Після множення на 4, одержуємо $(I-BV)^2 + 4AV^2 = 2(I-BV)$. Розкриваючи дужки та скорочуючи однакові доданки, одержуємо $(B^2 + 4A)V^2 = I$. Теорему доведено.

Наслідок 2. Нехай існує оборотний оператор $S \in \mathcal{A}(X)$, для якого $S^2 = B^2 + 4A$. Тоді алгебра $\mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$ містить два нетривіальні ідемпотенти

$$\begin{aligned} P_+ &= \frac{I - BS^{-1}}{2}E_1 + S^{-1}E_2, \\ P_- &= \frac{I + BS^{-1}}{2}E_1 + S^{-1}E_2. \end{aligned} \tag{4}$$

Доведення. Покладемо $V = S^{-1}$. Тоді

$$(B^2 + 4A)V^2 = (B^2 + 4A)S^{-2} = I.$$

З попередньої теореми випливає, що $U = \frac{I-BV}{2}$. Отже,

$$P_+ = \frac{I - BS^{-1}}{2}E_1 + S^{-1}E_2$$

є ідемпотентом.

Аналогічно для $V = -S^{-1}$ одержуємо

$$P_- = \frac{I + BS^{-1}}{2}E_1 + S^{-1}E_2.$$

Безпосередня перевірка показує, що $P_{\pm} \star P_{\pm} = P_{\pm}$. Теорему доведено.

Наслідок 3 (розклад Пірса). Нехай P_+ та P_- — два ідемпотенти алгебри $\mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$ вигляду (4). Тоді

$$\mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star) = P_+ \star \mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star) \oplus P_- \star \mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star).$$

Доведення. Оскільки $P_+ + P_- = E_1$ і $P_+ \star P_- = 0$, то для довільного елемента $\Phi \in \mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$ маємо

$$\Phi = E_1 \star \Phi = (P_+ + P_-) \star \Phi = P_+ \star \Phi + P_- \star \Phi. \quad (5)$$

Отже,

$$\mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star) = P_+ \star \mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star) + P_- \star \mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star).$$

Оскільки

$$P_+ \star \mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star) \cap P_- \star \mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star) = 0,$$

то маємо (5).

Таким чином, алгебра $\mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$ розкладається у пряму суму двох ідеалів, породжених взаємно доповняльними ідемпотентами P_+ та P_- .

Розглянемо питання про максимальні ідеали.

Нехай маємо розклад

$$\mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star) = P_+ \star \mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star) \oplus P_- \star \mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star).$$

Тоді кожен з ідеалів

$$P_+ \star \mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star), \quad P_- \star \mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$$

ізоморфний базовій алгебрі операторів $\mathcal{A}(X)$, тобто

$$P_+ \star \mathfrak{A}_2 \simeq \mathcal{A}(X), \quad P_- \star \mathfrak{A}_2 \simeq \mathcal{A}(X).$$

Отже,

$$\mathfrak{A}_2 \simeq \mathcal{A}(X) \oplus \mathcal{A}(X).$$

Розглянемо питання про максимальність ідеалів $P_+ \star \mathfrak{A}_2$ та $P_- \star \mathfrak{A}_2$.
Маємо

$$\mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star) / (P_+ \star \mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)) \simeq P_- \star \mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star) \simeq \mathcal{A}(X).$$

Аналогічно

$$\mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star) / (P_- \star \mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)) \simeq P_+ \star \mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star) \simeq \mathcal{A}(X).$$

Оскільки ідеал є максимальним тоді й тільки тоді, коли фактор-алгебра за ним є полем, то одержуємо наступний результат: $P_+ \star \mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$ та $P_- \star \mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$ є максимальними ідеалами тоді й тільки тоді, коли $\mathcal{A}(X)$ є полем.

Зокрема, якщо $\mathcal{A}(X) = \mathbb{R}$ або $\mathcal{A}(X) = \mathbb{C}$, то обидва ідеали є максимальними.

Теорема 7. Нехай $\mathfrak{m}$ — максимальний ідеал алгебри $\mathcal{A}(X)$. Тоді ідеал $\mathfrak{m} \oplus \mathcal{A}(X)$ є максимальним ідеалом алгебри $\mathcal{A}(X) \oplus \mathcal{A}(X)$.

Доведення. Позначимо $\mathfrak{M} = \mathfrak{m} \oplus \mathcal{A}(X)$. Тоді

$$(\mathcal{A}(X) \oplus \mathcal{A}(X)) / \mathfrak{M} \simeq \mathcal{A}(X) / \mathfrak{m}.$$

Оскільки $\mathfrak{m}$ є максимальним ідеалом алгебри $\mathcal{A}(X)$, то фактор-алгебра $\mathcal{A}(X) / \mathfrak{m}$ є полем. Отже, $(\mathcal{A}(X) \oplus \mathcal{A}(X)) / \mathfrak{M}$ є полем, а тому $\mathfrak{M}$ є максимальним ідеалом алгебри $\mathcal{A}(X) \oplus \mathcal{A}(X)$. Теорему доведено.

Насправді, має місце й обернена теорема: всі максимальні ідеали алгебри $\mathcal{A}(X) \oplus \mathcal{A}(X)$ мають вигляд $\mathfrak{m} \oplus \mathcal{A}(X)$.

Таким чином, опис максимальних ідеалів алгебри $\mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$ зводиться до опису максимальних ідеалів базової операторної алгебри $\mathcal{A}(X)$.

Теорема 8. Якщо оператор $D := B^2 + 4A$ є оборотним в алгебрі $\mathcal{A}(X)$, то алгебра $\mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$ не містить нетривіальних нільпотентних елементів другого порядку. Якщо ж $D := B^2 + 4A = 0$, то елемент $N := E_2 - \frac{B}{2}E_1$ є нільпотентом другого порядку:

Доведення. Нехай $\Phi = UE_1 + VE_2$. Тоді

$$\Phi^2 = (U^2 + AV^2)E_1 + (2UV + BV^2)E_2.$$

Отже, умова $\Phi^2 = 0$ еквівалентна системі

$$U^2 + AV^2 = 0, \quad 2UV + BV^2 = 0.$$

Якщо V оборотний, то з другого рівняння маємо $2U + BV = 0$, тобто $U = -\frac{B}{2}V$. Підставляючи це в перше рівняння, одержуємо $\left(\frac{B^2}{4} + A\right)V^2 = 0$,

або $(B^2 + 4A)V^2 = 0$. Тому, якщо $B^2 + 4A$ є оборотним, то $V = 0$, а звідси й $U = 0$. Отже, нетривіальних нільпотентів другого порядку немає.

Нехай тепер $B^2 + 4A = 0$. Покладемо $N = E_2 - \frac{B}{2}E_1$. Тоді

$$N^2 = E_2^2 - BE_2 + \frac{B^2}{4}E_1.$$

Оскільки $E_2^2 = AE_1 + BE_2$, то маємо

$$N^2 = AE_1 + BE_2 - BE_2 + \frac{B^2}{4}E_1 = \left(A + \frac{B^2}{4}\right)E_1$$

Але з умови $B^2 + 4A = 0$ випливає $A + \frac{B^2}{4} = 0$. Тому $N^2 = 0$. Теорему доведено.

4 Моногенні функції в операторній алгебрі $\mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$

Означення 8. Нехай D — область в $\mathbb{R}^2$. Елемент $Z = xE_1 + yE_2$, $(x, y) \in D$, називатимемо **змінною операторної алгебри** $\mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$. А елемент $dZ = dxE_1 + dyE_2$ називається диференціалом змінної Z .

Означення 9. Нехай D — область в $\mathbb{R}^2$. Розглядаємо алгебру $\mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$ з таблицею множення (3), в якій A і B — фіксовані оператори з комутативної асоціативної алгебри лінійних операторів $\mathcal{A}(X)$. Нехай $U(x, y) : D \rightarrow \mathcal{A}(X)$ — операторнозначна функція, яка залежить від змінних x, y . Частинні похідні операторнозначної функції U розуміються у звичайному сенсі як похідні за змінними $(x, y) \in D$. Тепер частинна похідна від $\mathfrak{A}_2$ -значної функції $\Phi(Z) = U(x, y)E_1 + V(x, y)E_2$ розуміється як частинні похідні від відповідних $\mathcal{A}(X)$ -значних компонент U і V .

Зауваження 1. Надалі змінні x та y позначають координати точки області $D \subset \mathbb{R}^2$. Змінні s, t, τ, ξ, η та інші використовуються для опису простору X , на якому діють оператори алгебри $\mathcal{A}(X)$. При диференціюванні операторнозначних функцій за змінними x та y внутрішні змінні простору X вважаються незалежними від x та y .

Приклад 13.

1. Для довільного сталого оператора $W \in \mathcal{A}(X)$ маємо $W_x = W_y = 0$. Наприклад,

$$(A^3 - 4A^2B^2 + AB - B^3)_x = 0.$$

2. Поліном від операторів $U(x, y) = xI + yA + x^2B + xyAB$. Тоді

$$U_x = I + 2xB + yAB, \quad U_y = A + xAB.$$

3. Маємо один фіксований оператор $A = \partial_s$ і будуємо операторнозначну функцію $U(x, y) = e^x I + \sin y A$. Тоді $U_x = e^x I$, $U_y = \cos y A$.
4. $U(x, y) = \sum_{k=0}^n a_k(x, y) A^k$. Тоді $U_x = \sum_{k=0}^n (a_k)_x A^k$.
5. Нехай $U(x, y) = Z = xE_1 + yE_2$. Тоді $Z_x = E_1$, а $Z_y = E_2$.
6. Нехай $U, V : D \rightarrow \mathcal{A}(X)$ — диференційовні операторнозначні функції. Тоді $(U + V)_x = U_x + V_x$, $(UV)_x = U_x V + UV_x$.

Означення 10. Нехай $\Phi(Z) = U(x, y)E_1 + V(x, y)E_2$, де $U, V : D \rightarrow \mathcal{A}(X)$ — операторнозначні функції, причому U і V мають частинні похідні U_x, U_y, V_x, V_y в D . Тоді

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy.$$

Означення 11. Функцію $\Phi : D \rightarrow \mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$ називатимемо **моногенною** в області D , якщо в D існують частинні похідні Φ_x, Φ_y і існує елемент $\Phi'(Z) \in \mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$ для якого в кожній точці з D виконується рівність

$$d\Phi = \Phi'(Z) \star dZ.$$

Елемент $\Phi'(Z)$ називається **похідною** $\mathfrak{A}_2$ -значної функції Φ в області D .

Теорема 9 (критерій моногенності). Нехай функція $\Phi : D \rightarrow \mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$ вигляду $\Phi(Z) = U(x, y)E_1 + V(x, y)E_2$ має частинні похідні Φ_x, Φ_y в D . Тоді Φ є моногенною в області D тоді і тільки тоді, коли в цій області її компоненти задовольняють систему рівнянь

$$U_y = AV_x, \quad V_y = U_x + BV_x. \quad (6)$$

Доведення. Нехай Φ — моногенна функція. Тоді існує елемент $\Phi'(Z) = P(x, y)E_1 + Q(x, y)E_2$ такий, що $d\Phi = \Phi'(Z) \star dZ$.

З одного боку,

$$d\Phi = (U_x E_1 + V_x E_2) dx + (U_y E_1 + V_y E_2) dy.$$

А з іншого боку, $dZ = dx E_1 + dy E_2$, тому

$$\Phi'(Z) \star dZ = (P E_1 + Q E_2) \star (dx E_1 + dy E_2).$$

Розкриваючи дужки та використовуючи таблицю множення, одержуємо

$$\begin{aligned} \Phi'(Z) \star dZ &= (P E_1 + Q E_2) dx + (P E_2 + Q(A E_1 + B E_2)) dy \\ &= (P E_1 + Q E_2) dx + (A Q E_1 + (P + B Q) E_2) dy. \end{aligned}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при dx , маємо $P = U_x$, $Q = V_x$. Прирівнюючи коефіцієнти при dy , отримуємо $U_y = AQ$, $V_y = P + BQ$. Підставляючи сюди $P = U_x$, $Q = V_x$, отримуємо систему $U_y = AV_x$, $V_y = U_x + BV_x$.

Навпаки, якщо ця система виконується, то, поклавши $\Phi'(Z) = U_x E_1 + V_x E_2$, безпосередньою перевіркою одержуємо $d\Phi = \Phi'(Z) \star dZ$.

Отже, Φ є моногенною функцією, причому

$$\Phi'(Z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(Z). \quad (7)$$

Теорему доведено.

Умови моногенності (6) є операторними аналогами умов Коші–Рімана.

Зауваження 2. Легко переконатися, що умови Коші–Рімана (6) можна записати у згорнутому вигляді:

$$\Phi_y = \Phi_x E_2. \quad (8)$$

Наведемо приклад моногенної функції.

Приклад 14. Функція $\Phi(Z) = Z = xE_1 + yE_2$ моногенна на $\mathbb{R}^2$. Дійсно, для функції $\Phi(Z) = Z$ маємо $U(x, y) = x$, $V(x, y) = y$. Тоді $U_x = 1$, $U_y = 0$, $V_x = 0$, $V_y = 1$. І система Коші–Рімана (6) перетворюється на тотожності $0 = A \cdot 0$, $1 = 1 + B \cdot 0$. Крім того, $(Z)' = E_1 = 1\mathfrak{A}_2$.

Теорема 10. Нехай функції $\Phi, \Psi : D \rightarrow \mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$ моногенні в області D . Тоді їхня сума $(\Phi + \Psi)(Z)$ також є моногенною $\mathfrak{A}_2$ -значною функцією в області D . Крім того,

$$(\Phi + \Psi)' = \Phi' + \Psi'. \quad (9)$$

Доведення. Нехай $\Phi(Z) = UE_1 + VE_1$, $\Psi(Z) = PE_1 + QE_1$. Оскільки Φ і Ψ є моногенними, то за критерієм моногенності їх компоненти задовольняють систему (6).

Розглянемо суму

$$\Theta(Z) := (\Phi + \Psi)(Z) = \tilde{U}E_1 + \tilde{V}E_2.$$

Тоді

$$\Theta(Z) = \tilde{U}E_1 + \tilde{V}E_2,$$

де $\tilde{U} = U + P$, $\tilde{V} = V + Q$.

Маємо $\tilde{U}_y = (U + P)_y = U_y + P_y$. Використовуючи умови Коші–Рімана для Φ і Ψ , одержуємо

$$\tilde{U}_y = AV_x + AQ_x = A(V_x + Q_x) = A(V + Q)_x = A\tilde{V}_x.$$

Далі $\tilde{V}_y = (V + Q)_y = V_y + Q_y$. Знову використовуючи умови Коші–Рімана, маємо

$$\tilde{V}_y = (U_x + BV_x) + (P_x + BQ_x).$$

Тому

$$\tilde{V}_y = (U_x + P_x) + B(V_x + Q_x) = (U + P)_x + B(V + Q)_x.$$

Отже,

$$\tilde{V}_y = \tilde{U}_x + B\tilde{V}_x.$$

Таким чином, компоненти $\tilde{U}, \tilde{V}$ задовольняють систему

$$\tilde{U}_y = A\tilde{V}_x, \quad \tilde{V}_y = \tilde{U}_x + B\tilde{V}_x.$$

За критерієм моногенності функція $\Theta = \Phi + \Psi$ є моногенною.

Крім того,

$$\Phi' = U_x E_1 + V_x E_2, \quad \Psi' = P_x E_1 + Q_x E_2.$$

Тому

$$(\Phi + \Psi)' = (U + P)_x E_1 + (V + Q)_x E_2$$

і, отже,

$$(\Phi + \Psi)' = (U_x + P_x) E_1 + (V_x + Q_x) E_2 = \Phi' + \Psi'.$$

Теорему доведено.

Теорема 11. Нехай $\Lambda \in \mathcal{A}(X)$ — фіксований оператор, а функція $\Phi : D \rightarrow \mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$ є моногенною в області D . Тоді функція $\Lambda\Phi$ також є моногенною в області D . Крім того,

$$(\Lambda\Phi)' = \Lambda\Phi'. \quad (10)$$

Доведення. Нехай $\Phi(Z) = U(x, y)E_1 + V(x, y)E_2$. Тоді $(\Lambda\Phi)(Z) = \Lambda U(x, y)E_1 + \Lambda V(x, y)E_2$. Позначимо $\tilde{U} = \Lambda U$, $\tilde{V} = \Lambda V$.

Оскільки Λ є фіксованим оператором, який не залежить від x та y , маємо $\tilde{U}_y = \Lambda U_y$, $\tilde{V}_x = \Lambda V_x$, а також $\tilde{V}_y = \Lambda V_y$, $\tilde{U}_x = \Lambda U_x$.

Оскільки Φ є моногенною, її компоненти задовольняють систему Коші–Рімана (6):

$$U_y = AV_x, \quad V_y = U_x + BV_x.$$

Тому $\tilde{U}_y = \Lambda U_y = \Lambda AV_x$. Оскільки алгебра $\mathcal{A}(X)$ комутативна, то $\Lambda AV_x = A\Lambda V_x = A\tilde{V}_x$. Отже, $\tilde{U}_y = A\tilde{V}_x$.

Далі

$$\tilde{V}_y = \Lambda V_y = \Lambda(U_x + BV_x) = \Lambda U_x + \Lambda BV_x.$$

Знову використовуючи комутативність алгебри $\mathcal{A}(X)$, одержуємо

$$\Lambda U_x = \tilde{U}_x, \quad \Lambda BV_x = B\Lambda V_x = B\tilde{V}_x.$$

Тому $\tilde{V}_y = \tilde{U}_x + B\tilde{V}_x$.

Отже, компоненти функції $\Lambda\Phi$ задовольняють систему Коші–Рімана. За критерієм моногенності функція $\Lambda\Phi$ є моногенною в області D .

Рівність $(\Lambda\Phi)' = \Lambda\Phi'$ безпосередньо випливає з означення похідної та з того, що Λ є фіксованим оператором. Теорему доведено.

Теорема 12. Нехай функції $\Phi, \Psi : D \rightarrow \mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$ є моногенними в області D . Тоді їхній добуток $\Phi \star \Psi$ також є моногенною $\mathfrak{A}_2$ -значною функцією в області D . Крім того,

$$(\Phi \star \Psi)' = \Phi' \star \Psi + \Phi \star \Psi'. \quad (11)$$

Доведення. Нехай

$$\Phi(Z) = U(x, y)E_1 + V(x, y)E_2, \quad \Psi(Z) = P(x, y)E_1 + Q(x, y)E_2.$$

Тоді

$$\Phi \star \Psi = (UP + AVQ)E_1 + (UQ + VP + BVQ)E_2.$$

Позначимо

$$R = UP + AVQ, \quad S = UQ + VP + BVQ.$$

Треба довести, що $R_y = AS_x$, $S_y = R_x + BS_x$.

Оскільки Φ та Ψ моногенні, то маємо

$$U_y = AV_x, \quad V_y = U_x + BV_x,$$

$$P_y = AQ_x, \quad Q_y = P_x + BQ_x.$$

Обчислимо R_y :

$$R_y = U_yP + UP_y + AV_yQ + AVQ_y.$$

Підставляємо умови Коші–Рімана:

$$\begin{aligned} R_y &= AV_xP + UAQ_x + A(U_x + BV_x)Q + AV(P_x + BQ_x) \\ &= A(V_xP + UQ_x + U_xQ + BV_xQ + VP_x + BVQ_x). \end{aligned}$$

Але $S_x = U_xQ + UQ_x + V_xP + VP_x + BV_xQ + BVQ_x$. Отже, $R_y = AS_x$.

Тепер обчислимо S_y :

$$S_y = U_yQ + UQ_y + V_yP + VP_y + BV_yQ + BVQ_y.$$

Підставляємо умови Коші–Рімана:

$$S_y = AV_xQ + U(P_x + BQ_x) + (U_x + BV_x)P + VAQ_x + B(U_x + BV_x)Q + BV(P_x + BQ_x).$$

З іншого боку,

$$R_x = U_xP + UP_x + AV_xQ + AVQ_x,$$

$$BS_x = B(U_xQ + UQ_x + V_xP + VP_x + BV_xQ + BVQ_x).$$

Тому

$$\begin{aligned} R_x + BS_x &= U_xP + UP_x + AV_xQ + AVQ_x \\ &+ BU_xQ + BUQ_x + BV_xP + BVP_x + B^2V_xQ + B^2VQ_x. \end{aligned}$$

Це збігається з отриманим виразом для S_y , оскільки алгебра $\mathcal{A}(X)$ є комутативною. Отже, $S_y = R_x + BS_x$.

Таким чином, компоненти R, S функції $\Phi \star \Psi = RE_1 + SE_2$ задовольняють систему Коші–Рімана, а отже, $\Phi \star \Psi$ є моногенною функцією в області D .

Залишається довести формулу для похідної. За означенням похідної моногенної функції маємо

$$\Phi' = \Phi_x = U_xE_1 + V_xE_2, \quad \Psi' = \Psi_x = P_xE_1 + Q_xE_2.$$

Тоді

$$(\Phi \star \Psi)' = (\Phi \star \Psi)_x = R_xE_1 + S_xE_2.$$

З іншого боку, за правилом диференціювання добутку операторнозначних компонент,

$$(\Phi \star \Psi)_x = \Phi_x \star \Psi + \Phi \star \Psi_x.$$

Отже,

$$(\Phi \star \Psi)' = \Phi' \star \Psi + \Phi \star \Psi'.$$

Теорему доведено.

З попередніх трьох теорем випливає такий наслідок.

Наслідок 4. Множина $\mathcal{M}(D, \mathfrak{A}_2)$ усіх моногенних в області D $\mathfrak{A}_2$ -значних функцій утворює комутативну функціональну алгебру відносно поточкового додавання та $\star$ -множення.

Наслідок 4 дає спосіб побудови моногенних функцій.

З прикладу 14 і теореми 12 випливає, що для довільного натурального n степенева функція

$$Z^{\star n} := \underbrace{Z \star Z \star \cdots \star Z}_{n \text{ times}}$$

є моногенною в $\mathbb{R}^2$.

Тепер з теорем 10, 11, 12 слідує, що поліном

$$P_n(Z) = \sum_{k=0}^n C_k Z^{\star k}, \quad C_k \in \mathcal{A}(X), \quad Z^{\star 0} = E_1$$

є моногенною функцією в $\mathbb{R}^2$. Причому,

$$(P_n(Z))' = \sum_{k=1}^n k C_k Z^{\star(k-1)}.$$

Теорема 13. Нехай функція $\Phi : D \rightarrow \mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$ вигляду $\Phi(Z) = U(x, y)E_1 + V(x, y)E_2$ моногенна в області D і компоненти $U, V \in C^2(D, \mathcal{A}(X))$. Тоді її похідна $\Phi'(Z) = \Phi_x(Z)$ також є моногенною в області D .

Доведення. Оскільки Φ є моногенною, то її компоненти задовольняють систему (6):

$$U_y = AV_x, \quad V_y = U_x + BV_x.$$

Диференціюючи ці рівності по змінній x , одержуємо

$$U_{xy} = AV_{xx}, \quad V_{xy} = U_{xx} + BV_{xx}.$$

З іншого боку, $\Phi'(Z) = \Phi_x(Z) = U_x E_1 + V_x E_2$. Позначимо $\tilde{U} = U_x$, $\tilde{V} = V_x$. Тоді останні рівності можна записати у вигляді

$$\tilde{U}_y = A\tilde{V}_x, \quad \tilde{V}_y = \tilde{U}_x + B\tilde{V}_x.$$

Отже, компоненти функції Φ' задовольняють систему Коші–Рімана. За критерієм моногенності функція Φ' є моногенною в області D .

Наслідок 5. Якщо функція $\Phi : D \rightarrow \mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$ є моногенною і $U, V \in C^n(D, \mathcal{A}(X))$, то всі похідні $\Phi^{(k)}(Z)$, $k = 1, \dots, n$, є моногенними в області D .

Зауваження 3. Подібно до класичного комплексного і гіперкомплексного аналізу можна формально розглядати степеневі ряди відносно операції $\star$ та вводити функції вигляду $\exp Z$, $\sin Z$, $\cos Z$. Однак дослідження питань збіжності відповідних рядів потребує введення на алгебрі $\mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$ додаткової топологічної структури і виходить за межі даної роботи.

5 Зв'язок моногенних функцій з операторно-диференціальними рівняннями

У цьому розділі встановлюється зв'язок між моногенними функціями в алгебрі $\mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$ та операторно-диференціальними рівняннями. Показано,

що компоненти моногенної функції задовольняють певні лінійні операторно-диференціальні рівняння. Це дає можливість будувати явні розв'язки широких класів операторно-диференціальних, інтегро-диференціальних та інших функціональних рівнянь за допомогою апарату моногенних функцій.

Теорема 14. Нехай $\Phi(Z) = U(x, y)E_1 + V(x, y)E_2$ — моногенна функція в області D і функції $U, V \in C^2(D, \mathcal{A}(X))$. Тоді її компоненти U, V задовольняють одне і те ж операторно-диференціальне рівняння

$$W_{yy} = AW_{xx} + BW_{xy}. \quad (12)$$

Доведення 1. Оскільки функція Φ моногенна, то її компоненти задовольняють систему Коші–Рімана (6):

$$U_y = AV_x, \quad V_y = U_x + BV_x.$$

Диференціюючи перше рівняння по змінній y , одержуємо $U_{yy} = AV_{xy}$. Диференціюючи друге рівняння по змінній x , маємо $V_{xy} = U_{xx} + BV_{xx}$. Підставляючи останню рівність у попередню, отримуємо

$$U_{yy} = A(U_{xx} + BV_{xx}) = AU_{xx} + ABV_{xx}.$$

Оскільки з першого рівняння системи Коші–Рімана $U_{xy} = AV_{xx}$, то $U_{yy} = AU_{xx} + BU_{xy}$.

Аналогічно, диференціюючи друге рівняння системи Коші–Рімана по змінній y , одержуємо $V_{yy} = U_{xy} + BV_{xy}$. З першого рівняння системи Коші–Рімана випливає $U_{xy} = AV_{xx}$. Тому $V_{yy} = AV_{xx} + BV_{xy}$. Теорему доведено.

Доведення 2. Наслідком умов Коші–Рімана (8) і рівності (7) є рівності

$$\Phi_x = \Phi', \quad \Phi_y = \Phi'E_2, \quad (13)$$

звідки

$$\Phi_{yy} = \Phi''E_2, \quad \Phi_{xy} = \Phi''E_2, \quad \Phi_{xx} = \Phi''.$$

Розглянемо рівність

$$\Phi_{yy} - A\Phi_{xx} - B\Phi_{xy} = \Phi''(E_2^2 - A - BE_2) = 0$$

внаслідок рівності $E_2^2 - AE_1 - BE_2 = 0$ (з таблиці множення алгебри). Отже, Φ задовольняє рівняння

$$\Phi_{yy} = A\Phi_{xx} + B\Phi_{xy}.$$

А оскільки це рівняння лінійне, то й операторнозначні компоненти U, V функції Φ задовольняють рівняння (12). Теорему доведено.

Тепер доведемо теорему, яка обернена до теореми 14.

Теорема 15. Нехай $\mathbb{R}^2 \supset D$ — однозв'язна область, $A, B \in \mathcal{A}(X)$ — сталі оператори такі, що існує обернений оператор A^{-1} , причому $A^{-1} \in \mathcal{A}(X)$. Нехай функція $U \in C^2(D, \mathcal{A}(X))$ задовольняє рівняння (12). Тоді існує єдина з точністю до сталого оператора з алгебри $\mathcal{A}(X)$ функція $V \in C^1(D, \mathcal{A}(X))$ така, що

$$\Phi(Z) = U(x, y)E_1 + V(x, y)E_2 \quad (14)$$

є моногенною в області D .

Доведення. Нехай операторнозначна функція U задовольняє рівняння (12). Шукатимемо функцію V з умов Коші–Рімана (6):

$$U_y = AV_x, \quad V_y = U_x + BV_x.$$

Оскільки A є оборотним елементом алгебри $\mathcal{A}(X)$, то $V_x = A^{-1}U_y$. Тоді $V_y = U_x + BA^{-1}U_y$.

Позначимо

$$P := A^{-1}U_y, \quad Q := U_x + BA^{-1}U_y.$$

Потрібно довести, що система

$$V_x = P, \quad V_y = Q$$

має розв'язок.

Для цього перевіримо умову сумісності $P_y = Q_x$. Маємо $P_y = A^{-1}U_{yy}$. Використовуючи рівняння для U , одержуємо

$$A^{-1}U_{yy} = A^{-1}(AU_{xx} + BU_{xy}).$$

Оскільки $A^{-1}A = I$ та $A^{-1}B = BA^{-1}$, то

$$A^{-1}U_{yy} = U_{xx} + BA^{-1}U_{xy}.$$

З іншого боку,

$$Q_x = U_{xx} + BA^{-1}U_{xy}.$$

Отже, $P_y = Q_x$.

Тому диференціальна форма $\omega = Pdx + Qdy$ є замкненою. Оскільки область D є однозв'язною, то форма ω є точною. Тому існує функція V , для якої $dV = \omega$. Звідси

$$V_x = P = A^{-1}U_y, \quad V_y = Q = U_x + BA^{-1}U_y. \quad (15)$$

Тому $U_y = AV_x$, а також $V_y = U_x + BV_x$.

Отже, умови Коші–Рімана виконуються, а тому функція (14) є моногенною.

Доведемо єдиність V . Нехай V_1 і V_2 — два розв’язки. Тоді з (15) отримуємо

$$(V_1 - V_2)_x = 0, \quad (V_1 - V_2)_y = 0.$$

Звідси випливає, що $V_1 - V_2 = C$, де $C \in \mathcal{A}(X)$ є сталою.

Таким чином, функція V визначається з точністю до сталого оператора з алгебри $\mathcal{A}(X)$. Теорему доведено.

Оскільки

$$\omega = A^{-1}U_y dx + (U_x + BA^{-1}U_y) dy,$$

і $dV = \omega$, то за умов теореми 15 одержуємо явну формулу для спряженої функції V :

$$V(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} A^{-1}U_y dx + (U_x + BA^{-1}U_y) dy,$$

причому інтеграл не залежить від вибору шляху інтегрування.

Зауваження 5. Отже, при існуванні $A^{-1} \in \mathcal{A}(X)$ множина двічі неперервно диференційовних розв’язків рівняння (12) в однозв’язній області D перебуває у взаємнооднозначній відповідності з множиною моногенних функцій $\mathcal{M}(D, \mathfrak{A}_2)$. Це означає, що всі розв’язки рівняння (12) в класі $C^2(D, \mathcal{A}(X))$ можна отримати у вигляді компонент моногенних функцій $\Phi : D \rightarrow \mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$. При цьому наслідок 4 дає спосіб побудови моногенних функцій.

Далі наведемо теорему про властивості розв’язків рівняння (12) — аналог інтегральної теореми Коші.

Означення 12. Нехай γ — кусково-гладка крива в $\mathbb{R}^2$. Інтеграл від функції (14) по кривій γ визначається рівністю

$$\int_{\gamma} \Phi dZ = E_1 \int_{\gamma} (U dx + AV dy) + E_2 \int_{\gamma} V dx + (U + BV) dy, \quad (16)$$

при умові, що операторнозначні інтеграли справа існують.

Теорема 16. Нехай функція $\Phi : D \rightarrow \mathfrak{A}_2(\mathcal{A}(X), \star)$ вигляду (14) моногенна в однозв’язній області D і γ — довільна замкнена кусково-гладка крива в D . Тоді

$$\int_{\gamma} \Phi dZ = 0.$$

Доведення впливає безпосередньо з рівності (16), формули Гріна і умов Коші–Рімана (6).

6 Приклади

Рівняння (12) є лінійним операторно-диференціальним рівнянням на класі операторно-значних функцій. Проте, реалізуючи оператори A і B на конкретних лінійних топологічних просторах X , будемо отримувати різні класи рівнянь або систем рівнянь різних порядків і від різної кількості змінних уже для $\mathbb{K}$ -значних функцій. Пояснимо все детальніше на прикладах.

Як ми зазначали у зауваженні 1, змінні x та y позначають координати точки області $D \subset \mathbb{R}^2$, а змінні s , t , τ , ξ , η та інші використовуються для опису простору X , на якому діють оператори алгебри $\mathcal{A}(X)$. При диференціюванні операторнозначних функцій за змінними x та y внутрішні змінні простору X вважаються незалежними від x та y .

Приклад 15. PDE зі сталими коефіцієнтами.

1. Нехай $X = C^\infty(\Omega_s)$, а оператори A і B задані формулами

$$A = \frac{\partial}{\partial s}, \quad B = 0.$$

Тоді функція w залежить від трьох змінних: $w = w(x, y, s)$, а рівняння (12) набуває вигляду

$$w_{yy} = \frac{\partial}{\partial s}(w_{xx}).$$

Отже,

$$w_{yy} = w_{xxs}. \quad (17)$$

Таким чином, у цьому випадку операторно-диференціальне рівняння (12) породжує лінійне рівняння в частинних похідних третього порядку для скалярної функції $w = w(x, y, s)$.

2. Диференціальні оператори другого порядку. Нехай $X = C^\infty(\Omega_{s,t})$ і

$$A(s, t) = \frac{\partial^2}{\partial s^2}, \quad B(s, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Тоді рівняння (12) для $\mathbb{K}$ -значної функції $w(x, y, s, t)$ набуває вигляду

$$w_{yy} = w_{xxss} + w_{xytt}.$$

Отже, у цьому випадку операторно-диференціальне рівняння (12) породжує рівняння з частинними похідними четвертого порядку для функції $w(x, y, s, t)$.

Зауваження 6. Легко бачити, що цей наш операторний метод узагальнює метод Мельниченка навіть для PDE зі сталими коефіцієнтами. Оскільки в його методі потрібно, щоб у всіх доданках похідна була одного і того ж порядку, а у нас — ні. І ми все одно можемо отримати усі розв’язки даного рівняння у вигляді компонент моногенної функції.

Приклад 16. PDE зі змінними коефіцієнтами.

1. Нехай $X = C^\infty(\Omega_s)$ і

$$A = s \frac{\partial}{\partial s}, \quad B = A^2.$$

Тоді оператори A і B комутують, оскільки B є степенем оператора A .

Обчислимо дію оператора B . Для довільної функції $f = f(s)$ маємо

$$Bf = A^2f = s \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial f}{\partial s} \right) = sf_s + s^2 f_{ss}.$$

Отже,

$$B = s \frac{\partial}{\partial s} + s^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2}.$$

Тоді для функції $w = w(x, y, s)$ рівняння (12) набуває вигляду

$$w_{yy} = sw_{xxs} + sw_{xys} + s^2 w_{xyss}.$$

Отже, одержуємо лінійне рівняння в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами.

2. Нехай $X = C^\infty(\Omega_{s,t})$. Розглянемо оператори Ейлера

$$E_s = s \frac{\partial}{\partial s}, \quad E_t = t \frac{\partial}{\partial t}.$$

Оскільки оператори E_s і E_t діють за різними змінними, то вони комутують: $E_s E_t = E_t E_s$.

Покладемо

$$A = E_s + E_t, \quad B = E_s E_t.$$

Тоді оператори A і B також комутують, оскільки вони є многочленами від комутуючих операторів E_s і E_t .

Обчислимо

$$A(w_{xx}) = sw_{xxs} + tw_{xxt}.$$

$$B(w_{xy}) = E_s E_t(w_{xy}).$$

Оскільки $E_t(w_{xy}) = tw_{xyt}$, то

$$E_s E_t(w_{xy}) = s \frac{\partial}{\partial s} (tw_{xyt}) = stw_{xyst}.$$

Тоді для функції $w = w(x, y, s, t)$ рівняння (12) набуває вигляду

$$w_{yy} = sw_{xxs} + tw_{xxt} + stw_{xyst}.$$

Знову одержуємо лінійне рівняння в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами.

Приклад 17. Системи диференціальних рівнянь з частинними похідними.

1. Нехай $X = C^\infty(\Omega_s, \mathbb{K}^2)$, тобто

$$w = w(x, y, s) = \begin{pmatrix} w_1(x, y, s) \\ w_2(x, y, s) \end{pmatrix}$$

Нехай

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = 0.$$

і покладемо

$$A = sI + N, \quad B = s^2I + sN.$$

Оператори A і B комутують, оскільки обидва є многочленами від одного й того самого оператора N з коефіцієнтами, що залежать від s . Тоді для функції $w = w(x, y, s)$ рівняння (12) набуває вигляду

$$\begin{cases} (w_1)_{yy} = s(w_1)_{xx} + (w_2)_{xx} + s^2(w_1)_{xy} + s(w_2)_{xy}, \\ (w_2)_{yy} = s(w_2)_{xx} + s^2(w_2)_{xy}. \end{cases}$$

Отже, одержуємо систему диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами для функцій $w_1(x, y, s)$ та $w_2(x, y, s)$.

Приклад 18. Різницево-диференціальні рівняння.

1. Нехай $X = C^\infty(\Omega_s)$, а оператори A і B задані формулами

$$(T_h f)(s) = f(s + h), \quad A = T_h, \quad B = 0.$$

Тоді для функції $w = w(x, y, s)$ рівняння (12) набуває вигляду

$$w_{yy}(x, y, s) = w_{xx}(x, y, s + h).$$

Отже, у цьому випадку операторно-диференціальне рівняння породжує різницево-диференціальне рівняння.

2. Нехай $X = C^\infty(\Omega_s)$, а оператор зсуву T_h і оператори A, B задані формули

$$(T_h f)(s) = f(s + h), \quad A = a(s)T_h, \quad B = b(s)T_h,$$

де функції a і b є h -періодичними, тобто

$$a(s+h) = a(s), \quad b(s+h) = b(s).$$

У цьому випадку

$$A(w_{xx})(x, y, s) = a(s)w_{xx}(x, y, s+h), \quad B(w_{xy})(x, y, s) = b(s)w_{xy}(x, y, s+h).$$

Тому рівняння (12) набуває вигляду

$$w_{yy}(x, y, s) = a(s)w_{xx}(x, y, s+h) + b(s)w_{xy}(x, y, s+h).$$

Отже, у цьому прикладі операторно-диференціальне рівняння породжує різницево-диференціальне рівняння зі сталими чи змінними коефіцієнтами.

Приклад 19. Інтегро-диференціальні рівняння.

1. Оператор Вольтерра. Нехай $X = C^\infty(\Omega_s)$, а оператор Вольтерра $\mathcal{V}$ заданий формулою

$$(\mathcal{V}f)(s) = \int_0^s f(\tau) d\tau.$$

Покладемо

$$A = \mathcal{V}, \quad B = 0.$$

Тоді для функції $w = w(x, y, s)$ рівняння (12) набуває вигляду

$$w_{yy}(x, y, s) = \int_0^s w_{xx}(x, y, \tau) d\tau.$$

2. Алгебра многочленів від оператора Вольтерра. Покладемо

$$A = I + \mathcal{V} + \mathcal{V}^2, \quad B = 0.$$

Тоді рівняння (12) набуває вигляду

$$w_{yy}(x, y, s) = w_{xx}(x, y, s) + \int_0^s w_{xx}(x, y, \tau) d\tau + \int_0^s \int_0^\sigma w_{xx}(x, y, \rho) d\rho d\sigma.$$

3. Резольвента оператора Вольтерра. Нехай

$$A = (I - \lambda\mathcal{V})^{-1}, \quad B = 0,$$

де $\lambda \in \mathbb{K}$ — спектральний параметр. Відомо, що для оператора Вольтерра

$$(I - \lambda\mathcal{V})^{-1}f = f + \lambda \int_0^s e^{\lambda(s-\tau)} f(\tau) d\tau.$$

Тому рівняння $w_{yy} = A(w_{xx})$ набуває вигляду

$$w_{yy}(x, y, s) = w_{xx}(x, y, s) + \lambda \int_0^s e^{\lambda(s-\tau)} w_{xx}(x, y, \tau) d\tau.$$

У цьому випадку спектральний параметр входить у ядро інтеграла.

4. Оператор Штурма–Ліувілля. Нехай

$$L = -\frac{d^2}{ds^2} + q(s),$$

і нехай $G(s, \tau; \lambda)$ — функція Гріна задачі

$$Lu = \lambda u.$$

Тоді можна покласти

$$(Af)(s) = \int_a^b G(s, \tau; \lambda) f(\tau) d\tau.$$

Рівняння $w_{yy} = A(w_{xx})$ перетворюється на

$$w_{yy}(x, y, s) = \int_a^b G(s, \tau; \lambda) w_{xx}(x, y, \tau) d\tau.$$

Таким чином, спектральний параметр входить у рівняння через функцію Гріна.

У цьому прикладі одержуємо різного типу інтегро-диференціальні рівняння.

Приклад 20. Рівняння зі згорткою.

Нехай $X = L_1(\mathbb{R})$, а оператори A і B задані формулами

$$(Af)(s) = (k_1 * f)(s) = \int_{\mathbb{R}} k_1(s - \tau) f(\tau) d\tau,$$

$$(Bf)(s) = (k_2 * f)(s) = \int_{\mathbb{R}} k_2(s - \tau) f(\tau) d\tau.$$

Зрозуміло, що $AB = BA$. Нехай $w = w(x, y, s)$. Тоді рівняння (12) набуває вигляду

$$w_{yy}(x, y, s) = \int_{\mathbb{R}} k_1(s - \tau) w_{xx}(x, y, \tau) d\tau + \int_{\mathbb{R}} k_2(s - \tau) w_{xy}(x, y, \tau) d\tau.$$

У цьому випадку операторно-диференціальне рівняння породжує інтегро-диференціальне рівняння згорткового типу.

Приклад 21. Змішані інтегро-диференціальні рівняння.

Нехай $X = C^\infty(\Omega_s)$, а оператор L заданий формулою

$$(Lf)(s) = f'(s) + \int_0^s f(\tau) d\tau.$$

Покладемо

$$A = L, \quad B = L^2.$$

Тоді оператори A і B комутують, оскільки вони є степенями одного й того самого оператора L .

Обчислимо

$$\begin{aligned} L^2 f &= L \left(f' + \int_0^s f(\tau) d\tau \right) = f'' + f + \int_0^s f'(\tau) d\tau \\ &+ \int_0^s \int_0^\sigma f(\rho) d\rho d\sigma = f'' + 2f - f(0) + \int_0^s \int_0^\sigma f(\rho) d\rho d\sigma. \end{aligned}$$

Тому для функції $w = w(x, y, s)$ рівняння (12) набуває вигляду

$$\begin{aligned} w_{yy}(x, y, s) &= w_{xys}(x, y, s) + \int_0^s w_{xx}(x, y, \tau) d\tau + w_{xyss}(x, y, s) \\ &+ 2w_{xy}(x, y, s) - w_{xy}(x, y, 0) + \int_0^s \int_0^\sigma w_{xy}(x, y, \rho) d\rho d\sigma. \end{aligned}$$

Отже, у цьому випадку операторно-диференціальне рівняння породжує змішане інтегро-диференціальне рівняння, яке містить як похідні, так і інтегральні члени від шуканої функції.

Якщо один з операторів A або B є диференціальним, а інший — інтегральним, то рівняння рівняння (12) породжує змішані інтегро-диференціальні рівняння. Такі рівняння широко застосовуються при моделюванні процесів із пам'яттю: в'язкопружність, теплопровідність із пам'яттю, теорія спадкових процесів, популяційна динаміка, керування системами із запізненням тощо.

Наприклад, класичне рівняння теплопровідності

$$u_t = u_{xx}$$

описує миттєву реакцію системи.

Якщо ж матеріал має пам'ять, то виникає інтегральний доданок, і рівняння набуває вигляду

$$u_t = u_{xx} + \int_0^t k(t - \tau) u_{xx}(x, \tau) d\tau,$$

де функція k є ядром пам'яті, а інтеграл враховує всю попередню історію процесу.

Висновок. Ці приклади добре демонструють, що наша теорія не прив'язана до конкретного типу рівнянь. Одне операторно-диференціальне рівняння (12), після реалізації операторів A і B породжує різні рівняння (або системи рівнянь) для $\mathbb{K}$ -значних функцій:

- лінійні диференціальні рівняння з частинними похідними зі сталими та змінними коефіцієнтами;
- системи диференціальних рівнянь з частинними похідними;
- різницево-диференціальні рівняння;
- інтегро-диференціальні рівняння;
- рівняння зі згортою;
- змішані інтегро-диференціальні рівняння.

При цьому, зрозуміло, що тип отриманого рівняння (системи) для $\mathbb{K}$ -значної функції визначається типом операторів A і B з деякої комутативної асоціативної алгебри лінійних операторів.

7 Побудова розв'язків рівнянь (систем рівнянь) для $\mathbb{K}$ -значних функцій

У параграфі 5 ми встановили зв'язок між моногенними функціями і розв'язками операторно-диференціального рівняння (12). А саме, всі розв'язки рівняння (12) можна отримати у вигляді компонент моногенних функцій. Потім у параграфі 6 ми продемонстрували як при різних реалізаціях операторів A і B , ми отримували різні типи рівнянь або систем рівнянь. Тепер виникає природне питання: як маючи операторнозначні розв'язки рівняння (12) будувати розв'язки відповідного йому рівняння (системи рівнянь) для $\mathbb{K}$ -значної функції? У цьому параграфі ми дамо відповідь на це питання.

Теорема 17. Нехай X — простір функцій від змінних $s, t, \dots$, а $A, B : X \rightarrow X$ — лінійні оператори з комутативної алгебри лінійних операторів $\mathcal{A}(X)$. Нехай операторнозначна функція $W : D \rightarrow \mathcal{A}(X)$ має необхідні частинні похідні за змінними x, y і задовольняє операторно-диференціальне рівняння (12) в області $D \subset \mathbb{R}^2$. Тоді для кожної функції $\varphi \in X$ функція

$$w(x, y; s, t, \dots) := (W(x, y)\varphi)(s, t, \dots)$$

задовольняє рівняння

$$w_{yy} = (Aw_{xx})(x, y; s, t, \dots) + (Bw_{xy})(x, y; s, t, \dots). \quad (18)$$

Доведення. Оскільки операторнозначна функція W задовольняє рівняння

$$W_{yy} = AW_{xx} + BW_{xy}, \quad (19)$$

то, діючи обома частинами цієї рівності на довільну функцію $\varphi \in X$, одержуємо

$$W_{yy}\varphi = A(W_{xx}\varphi) + B(W_{xy}\varphi).$$

За означенням функції

$$w(x, y; s, t, \dots) := (W(x, y)\varphi)(s, t, \dots)$$

та з огляду на лінійність операторів диференціювання маємо

$$W_{yy}\varphi = w_{yy}, \quad W_{xx}\varphi = w_{xx}, \quad W_{xy}\varphi = w_{xy}.$$

Тому функція w задовольняє рівняння

$$w_{yy} = Aw_{xx} + Bw_{xy}.$$

Теорему доведено.

Справедливе обернене твердження до теореми 17.

Теорема 18. Нехай X — простір функцій від змінних $(s, t, \dots)$, а $A, B : X \rightarrow X$ — лінійні оператори з комутативної алгебри лінійних операторів $\mathcal{A}(X)$. Нехай операторнозначна функція $W : D \rightarrow \mathcal{A}(X)$ має необхідні частинні похідні по змінних x, y . Припустимо, що для кожної функції $\varphi \in X$ функція

$$w(x, y; s, t, \dots) := (W(x, y)\varphi)(s, t, \dots)$$

задовольняє в області $D \subset \mathbb{R}^2$ рівняння (18). Тоді операторнозначна функція W задовольняє операторно-диференціальне рівняння (19) в області D .

Доведення. За означенням функції w для кожної $\varphi \in X$ маємо

$$w_{yy}(x, y; s, t, \dots) = (W_{yy}(x, y)\varphi)(s, t, \dots), \quad w_{xx}(x, y; s, t, \dots) = (W_{xx}(x, y)\varphi)(s, t, \dots)$$

а також

$$w_{xy}(x, y; s, t, \dots) = (W_{xy}(x, y)\varphi)(s, t, \dots).$$

Тому з рівняння для функції w випливає, що

$$(W_{yy}(x, y)\varphi)(s, t, \dots) = (AW_{xx}(x, y)\varphi)(s, t, \dots) + (BW_{xy}(x, y)\varphi)(s, t, \dots)$$

для всіх значень змінних $s, t, \dots$. Отже,

$$(W_{yy}(x, y) - AW_{xx}(x, y) - BW_{xy}(x, y))\varphi = 0$$

для кожної функції $\varphi \in X$.

Оскільки остання рівність виконується для всіх $\varphi \in X$, то

$$W_{yy}(x, y) - AW_{xx}(x, y) - BW_{xy}(x, y) = 0,$$

що й треба було довести.

Розглянемо приклади. Почнемо з прикладу 15.1.

Приклад 22. У прикладі 15.1 маємо

$$A = \frac{\partial}{\partial s}, \quad B = 0.$$

Тоді операторне рівняння (12) набуває вигляду

$$W_{yy} = AW_{xx}.$$

Після реалізації оператора A на просторі функцій від змінної s одержуємо рівняння (17):

$$w_{yy} = w_{xss}. \quad (20)$$

Розглянемо операторнозначну моногенну функцію

$$\Phi(Z) = Z^{\star 2} = UE_1 + VE_2,$$

де

$$U = x^2 + y^2 A, \quad V = 2xy. \quad (21)$$

Нехай $\varphi \in C^\infty(\Omega_s)$. Тоді для компоненти U маємо

$$u(x, y, s) := \left(U(x, y) \varphi \right)(s) = \left(x^2 + y^2 \frac{\partial}{\partial s} \right) \varphi(s),$$

тобто

$$u(x, y, s) = x^2 \varphi(s) + y^2 \varphi'(s). \quad (22)$$

Для компоненти V одержуємо

$$v(x, y, s) := \left(V(x, y) \varphi \right)(s) = 2xy \varphi(s). \quad (23)$$

Отже, за попередньою теоремою дійснозначні функції (22) і (23), в яких φ — довільна достатню кількість разів диференційовна функція, є розв'язками рівняння (20). І дійсно, в цьому легко переконатися. Аналогічно, довільна моногенна функція дає явні розв'язки рівняння (20).

Приклад 23. Розглянемо приклад 15.2. Отже маємо оператори

$$A = \frac{\partial^2}{\partial s^2}, \quad B = \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Тоді рівняння для $\mathbb{R}$ -значної функції $w(x, y, s, t)$ набуває вигляду

$$w_{yy} = w_{xss} + w_{ytt}. \quad (24)$$

Візьмемо моногенну функцію

$$\Phi(Z) = Z^{\star 3} = (x^3 + 3xy^2A + y^3AB) E_1 + (3x^2y + 3xy^2B + y^3(A + B^2)) E_2.$$

Отже,

$$U = x^3 + 3xy^2A + y^3AB, \quad V = 3x^2y + 3xy^2B + y^3(A + B^2). \quad (25)$$

Нехай $\varphi(s, t) \in C^\infty(\Omega_{s,t})$. Тоді для компоненти U маємо

$$u(x, y, s, t) := (U(x, y)\varphi)(s, t) = \left(x^3 + 3xy^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + y^3 \frac{\partial^4}{\partial s^2 \partial t^2} \right) \varphi(s, t).$$

Звідси

$$u(x, y, s, t) = x^3\varphi(s, t) + 3xy^2\varphi_{ss}(s, t) + y^3\varphi_{sstt}(s, t). \quad (26)$$

Для компоненти V одержуємо

$$v(x, y, s, t) := (V(x, y)\varphi)(s, t).$$

Отже,

$$v(x, y, s, t) = 3x^2y\varphi(s, t) + 3xy^2\varphi_{tt}(s, t) + y^3(\varphi_{ss}(s, t) + \varphi_{tttt}(s, t)). \quad (27)$$

Згідно з попередньою теоремою функції u і v є розв'язками рівняння (24).

Отже, за попередньою теоремою дійснозначні функції (26) і (27), в яких φ — довільна достатню кількість разів диференційовна функція, є розв'язками рівняння (24). І дійсно, в цьому легко переконатися.

Приклад 24. Тепер розглянемо PDE зі змінними коефіцієнтами. У прикладі 16.1. Отже маємо оператори

$$A = s \frac{\partial}{\partial s}, \quad B = A^2 = s \frac{\partial}{\partial s} + s^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2}.$$

Отже, рівняння зі змінними коефіцієнтами для функції $w = w(x, y, s)$ має вигляд

$$w_{yy} = sw_{xxs} + sw_{xys} + s^2w_{xyss}. \quad (28)$$

Візьмемо моногенну функцію $Z^{\star 2} = UE_1 + VE_2$, де U і V задані рівностями

$$U = x^2 + y^2A, \quad V = 2xy + y^2B. \quad (29)$$

Нехай $\varphi(s) \in C^\infty(\Omega_s)$. Тоді для компоненти U маємо

$$u(x, y, s) := (U(x, y)\varphi)(s) = x^2\varphi(s) + y^2s\varphi'(s). \quad (30)$$

Для компоненти V одержуємо

$$v(x, y, s) := (V(x, y)\varphi)(s) = 2xy\varphi(s) + y^2(s\varphi'(s) + s^2\varphi''(s)). \quad (31)$$

Згідно з попередньою теоремою $\mathbb{R}$ -значні функції (30) і (31) є розв'язками рівняння (28).

Приклад 25. Тепер розглянемо різницево-диференціальне рівняння з прикладу 18.1. Отже, маємо оператори зсуву

$$(T_h f)(s) = f(s + h), \quad A = T_h, \quad B = 0.$$

Тоді рівняння для $\mathbb{R}$ -функції $w = w(x, y, s)$ набуває вигляду

$$w_{yy}(x, y, s) = w_{xx}(x, y, s + h). \quad (32)$$

Візьмемо моногенну функцію $Z^{\star 3} = U E_1 + V E_2$, де U, V визначені рівності (25).

Нехай $\varphi(s) \in C^\infty(\Omega_s)$. Тоді для компоненти U маємо

$$u(x, y, s) := (U(x, y)\varphi)(s) = (x^3 + 3xy^2 T_h) \varphi(s) = x^3 \varphi(s) + 3xy^2 \varphi(s + h). \quad (33)$$

Для компоненти V маємо

$$v(x, y, s) := (V(x, y)\varphi)(s) = (3x^2 y + y^3 T_h) \varphi(s) = 3x^2 y \varphi(s) + y^3 \varphi(s + h). \quad (34)$$

Згідно з попередньою теоремою функції (33) і (34) є розв'язками рівняння (32). Легко перевірити істинність цього твердження.

Приклад 26. Тепер розглянемо інтегро-диференціальне рівняння з прикладу 19.1. Нехай

$$(\mathcal{V}f)(s) = \int_0^s f(\tau) d\tau, \quad A = \mathcal{V}, \quad B = 0.$$

Тоді рівняння для $\mathbb{R}$ -функції $w = w(x, y, s)$ має вигляд

$$w_{yy}(x, y, s) = \int_0^s w_{xx}(x, y, \tau) d\tau. \quad (35)$$

1. Випадок $Z^{\star 2}$. Маємо $Z^{\star 2} = U E_1 + V E_2$, де U і V задані рівностями (29).

Нехай $\varphi(s) \in C^\infty(\Omega_s)$. Тоді

$$u(x, y, s) := (U(x, y)\varphi)(s) = (x^2 + y^2 \mathcal{V}) \varphi(s) = x^2 \varphi(s) + y^2 \int_0^s \varphi(\tau) d\tau. \quad (36)$$

Для другої компоненти маємо

$$v(x, y, s) := (V(x, y)\varphi)(s) = 2xy \varphi(s) = 2xy \varphi(s). \quad (37)$$

Тому $\mathbb{R}$ -значні функції (36) і (37) є розв'язками рівняння (35).

2. Випадок $Z^{\star 3}$.

Оскільки $B = 0$, то

$$Z^{\star 3} = (x^3 + 3xy^2A) E_1 + (3x^2y + y^3A) E_2.$$

Отже,

$$U = x^3 + 3xy^2A, \quad V = 3x^2y + y^3A.$$

Нехай $\varphi(s) \in C^\infty(\Omega_s)$. Тоді

$$u(x, y, s) := (U(x, y)\varphi)(s) = (x^3 + 3xy^2\mathcal{V}) \varphi(s) = x^3\varphi(s) + 3xy^2 \int_0^s \varphi(\tau) d\tau. \quad (38)$$

Для компоненти V маємо

$$v(x, y, s) := (V(x, y)\varphi)(s) = (3x^2y + y^3\mathcal{V}) \varphi(s) = 3x^2y\varphi(s) + y^3 \int_0^s \varphi(\tau) d\tau. \quad (39)$$

Таким чином, функції (38) і (39) є розв'язками рівняння (35). Безпосередньою перевіркою, можна переконатися, що функції (36), (37), (38) і (39) є розв'язками рівняння (35).

Використовуючи інші моногенні функції, можемо будувати нескінченновимірні сім'ї явних розв'язків рівняння (35) та інших рівнянь.

8 Заключні положення

1. Будь-яке операторно-диференціальне рівняння вигляду

$$AW_{xx} + BW_{xy} + CW_{yy} = 0 \quad (40)$$

в якому хоча б один оператор A або B або C з комутативної алгебри $\mathcal{A}(X)$ має обернений у цій алгебрі, можна звести до рівняння (12).

2. Якщо ми хочемо, щоб моногенні функції замість операторно-диференціального рівняння (40) були пов'язані з операторно-диференціальним рівнянням з більшою кількістю незалежних змінних $x, y, z, \dots$, то потрібно розглянути комутативну алгебру з операторними структурними константами більшої розмірності.

3. Для дослідження розв'язків операторно-диференціального рівняння (40) або іншого операторно-диференціального рівняння більшої розмірності (і, відповідно, всіх рівнянь і систем для $\mathbb{K}$ -значних функцій) виникає необхідність побудувати аналог комутативного гіперкомплексного аналізу у введених нами операторних алгебр.