



ЗАТВЕРДЖУЮ

Директор Інституту математики
Національної академії наук України
академік НАН України

[Signature] Олександр ТИМОХА

” *Квітень* 2026 р.

В И С Н О В О К

про наукову новизну, теоретичне й практичне значення результатів дисертаційної роботи ЗАБОЛОТНОГО Ярослава Володимировича **“Конформні відображення та симетризаційні методи в екстремальних задачах геометричної теорії функцій комплексної змінної”**, підготовленої на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.01 — математичний аналіз та 111 — математика (фізико-математичні науки)

Призначені рішенням Вченої ради Інституту математики НАН України від 24 лютого 2026 року, протокол № 3 рецензенти:

– Романюк Анатолій Сергійович — доктор фізико-математичних наук (01.01.01 – “математичний аналіз”), професор, завідувач відділу теорії функцій Інституту математики НАН України,

– Салімов Руслан Радікович — доктор фізико-математичних наук (01.01.01 – “математичний аналіз”), старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України;

– Шпаківський Віталій Станіславович — доктор фізико-математичних наук (01.01.01 – “математичний аналіз”), старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України;

за результатами попередньої експертизи докторської дисертації Заболотного Ярослава Володимировича та тему “Конформні відображення та симетризаційні методи в екстремальних задачах геометричної теорії функцій комплексної змінної” (тема дисертації затверджена на засіданні Вченої ради Інституту математики НАН України 18 червня 2024 року, протокол № 3, з 01.09.2024 р. і дотепер здобувач навчається на денній формі навчання у докторантурі Інституту математики НАН України за спеціальністю 111 — математика, наказ про зарахування до докторантури № 19а від 20 серпня 2024 р.), а також розглянувши наукові публікації, в яких висвітлені основні наукові результати, і за результатами фахового семінару (витяг з протоколу № 4 від 1 квітня 2026 р., розширеного засідання семінару відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України), ухвалили прийняти такий висновок:

1. Актуальність теми дослідження. Дисертаційну роботу Я. В. Заболотного присвячено розв’язанню широкого кола екстремальних задач геометричної теорії функцій, зокрема знаходженню максимуму добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей як з фіксованими, так і вільними полюсами відповідних квадратичних диференціалів. Напрямок досліджень, пов’язаний з цими задачами, бере початок від класичної роботи М. О. Лаврентьева 1934 року, надалі розвивався в різних напрямках. Зокрема, екстремальні проблеми вивчалися як в класичних формулюваннях, а саме досліджувалося

екстремальне розбиття комплексної площини з полюсами в заданих фіксованих точках, так і для випадку, коли ці полюси не були зафіксовані спочатку, однак задовольняли певну умову, наприклад, всі належали одиничному колу. Цю тематику вивчали в своїх роботах багато відомих вчених: М.О. Лаврентьев, Г. Пойя, Г. Грьотш, О. Тейхмюллер, Л. Альфорс, Г.М. Голузин, Г. Льовнер, А. Шеффер, Д. Спенсер, Н.І. Колбіна, П.П. Куфарев, З. Нехарі, М.О. Лебедєв, В.К. Хейман, І.М. Мілін, П.М. Тамразов, К. Померенке, Ю.Є. Аленіцин, І.Є. Базілевич, К. Фітцджеральд, Дж.А. Дженкінс, В.Я. Гутлянський, М. Шиффер, П.Л. Дюрен, О.К. Бахтін, Г.П. Бахтіна, В.І. Рязанов та інші. Для дослідження було розроблено багато нових методів геометричної теорії функцій, зокрема параметричний метод Г. Льовнера, метод внутрішніх варіацій, розроблений в роботах М. Шиффера та Г.М. Голузїна, метод смуг Х. Грьотша, на основі якого був розвинений метод екстремальної метрики, метод розділяючого перетворення, в основі якого лежить ідея, що екстремальні конфігурації потрібно шукати серед об'єктів, які мають певну симетрію. Результати, отримані при розв'язуванні екстремальних задач, а також розроблені методи знайшли численні застосування в механіці, теорії наближення, геометрії і топології, алгебрі многочленів, теорії струн.

Попри значні успіхи, досягнуті завдяки класичним підходам, чимало фундаментальних проблем геометричної теорії функцій комплексної змінної залишаються невирішеними на даний момент. Оскільки екстремальні задачі є базовим інструментом для встановлення теорем спотворення, оцінювання коефіцієнтів та аналізу властивостей однолистих і багатолістих функцій, то пріоритетною є задача розробки нових та вдосконалення вже відомих методів для отримання точних розв'язків екстремальних задач, а також отримання ефективних оцінок відповідних функціоналів.

З огляду на вище сказане, тематика дослідження є актуальною.

2. Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана у відділі комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України в рамках наукових тем "Аналітичні та геометричні проблеми комплексного і гіперкомплексного аналізу" (номер державної реєстрації 0121U100414), "Метричні та геометричні задачі теорії аналітичних і субгармонічних функцій та множин" (номер державної реєстрації 0116U003060) та "Розробка аналітичних та чисельно-аналітичних методів дослідження задач сучасного природознавства" (номер державної реєстрації 0117U004077).

3. Наукова новизна отриманих результатів. Отримані в роботі результати є новими. Дослідження, які проведені у представленій дисертаційній роботі, спрямовані на вдосконалення відомих і формування нових методів та підходів до розв'язання широкого кола екстремальних задач геометричної теорії функцій, зокрема, за рахунок модифікації та вдосконалення методів теорії конформних відображення та методу розділяючого перетворення вперше було одержано низку нових важливих наукових результатів, а саме:

- отримано оцінки зверху добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей розширеної комплексної площини з фіксованими полюсами; за допомогою цих оцінок було доведено низку нерівностей в інших екстремальних задачах геометричної теорії функцій, а також доведено нові багатоточкові теореми спотворення як для функцій, регулярних і однолистих в одиничному крузі, так і для функцій, які регулярно і однолисто відображають вказаний круг на області, зіркоподібні відносно точки нуль;

- отримано оцінки зверху добутку степенів внутрішніх радіусів n неперетинних областей розширеної комплексної площини з фіксованими полюсами, причому встановлено достатню умову для показників степенів, за якої вказаний добуток обмежений, а також отримані оцінки використано для доведення багатоточкових теорем спотворення;
- отримано оцінки добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей, які лежать у відкритому одиничному крузі, а також за допомогою отриманих оцінок одержано оцінку добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей з полюсами на еліпсі, одній чи двох гілках канонічної гіперболи;
- для багатьох частинних випадків розв'язано відкриту проблему про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів n областей відносно точок одиничного кола на степінь γ внутрішнього радіусу області відносно точки нуль за умови, що всі області попарно не перетинаються, а також для багатьох частинних випадків розв'язано аналогічну проблему, за умовами якої області, які містять точки одиничного кола, симетричні відносно даного кола;
- розв'язано декілька варіантів задачі про екстремальне розбиття комплексної площини з полюсами на довільній прямій, зокрема розглянуто випадок, коли n точок лежать на дійсній прямій, а одна точка поза прямою; випадок, коли всі полюси лежать на прямій, але внутрішній радіус однієї з областей береться в деякому дійсному додатному степені γ ; також отримано оцінку добутків внутрішніх радіусів неперетинних областей з вільними полюсами на відрізку $[-1; 1]$.

4. Ступінь обґрунтованості і достовірності наукових положень та висновків, сформульованих у дисертаційній роботі. У дисертаційній роботі використано строгі математичні означення усіх досліджуваних об'єктів, які наводяться з усіма відповідними посиланнями. Отримані результати мають чіткі і детально обґрунтовані математичні доведення, які проведені з використанням сучасних методів математичного аналізу, загальних методів розв'язування екстремальних задач геометричної теорії функцій, зокрема, методів теорії конформних відображень та методу розділячого перетворення, які, відповідно до розглядуваних задач, були вдало вдосконалені, розвинені та модифіковані здобувачем.

5. Теоретичне та практичне значення результатів роботи. Дисертаційна робота Заболотного Я. В. має теоретичний характер. Одержані результати і розвинені в ній методи можуть бути використані, насамперед, при вивченні питань комплексного та гіперкомплексного аналізів, теорії многочленів, теорії функцій, теорії апроксимації, теорії струн. На основі доведених оцінок можна одержати нові оцінки для функцій, що реалізують конформне відображення кола на області з деякими спеціальними властивостями. Результати також можуть бути застосовані до теорем спотворення, оцінок коефіцієнтів однолистих функцій та в голоморфній динаміці.

6. Оцінка змісту дисертації. Дисертацію виконано фаховою українською мовою. Стиль подання матеріалу відповідає прийнятим у науково-дослідній літературі нормам. Дисертація є логічно завершеною науковою працею. Назва дисертації відповідає її змісту.

7. Апробація результатів дисертації. Основні результати роботи пройшли достатню апробацію, доповідалися і обговорювалися на багатьох міжнародних конференціях

в Україні та за її межами, наукових семінарах відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу, а також на семінарах у провідних наукових центрах України, де отримали схвальні відгуки, зокрема:

- Ukraine Scientific Conference “Modern Problems Theory of Probability and Mathematical Analysis” (February 22 – 25, 2017, Vorokhta, Ivano-Frankivsk Region, Ukraine);

- Ukraine Scientific Conference “Modern Problems Theory of Probability and Mathematical Analysis” (February 25 – March 1, 2020, Vorokhta, Ivano-Frankivsk Region, Ukraine);

- International conference Complex Analysis and Related Topics dedicated to the 90-th anniversary of A. A. Goldberg (1930-2008) (June 28 – July 1, 2021, Lviv, Ivan Franko National University of Lviv, Ukraine);

- The International Conference in Complex and Functional Analysis dedicated to the memory of Bohdan Vynnytskyi (13–16 September, 2021, Drohobych, Ukraine);

- Конференція молодих вчених “Підстригачівські читання” (25–27 травня 2022р., Львів, Україна);

- Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми механіки та математики - 2023” (23–25 травня 2023р., Львів, Україна);

- International Conference of Young Mathematicians (1–3 June 2023, 2023, Kyiv, Ukraine);

- 14 ISAAC Congress 2023 (17–21 July, 2023, *Ribeirão Preto – São Paulo*, Brazil);

- Конференція молодих вчених “Підстригачівські читання” (27–29 травня 2024р., Львів, Україна);

- Конференція молодих вчених “Підстригачівські читання” (27–29 травня 2025р., Львів, Україна);

- International Conference of Young Mathematicians (June 4–6, 2025, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine);

- 15 ISAAC Congress 2025 (Astana, Nazarbayev University, Kazakhstan, 21–25 July 2025);

- International conference “Complex and hypercomplex analysis and their applications” (Ukraine, Zhytomyr, August 6–10, 2025);

- Hypercomplex Seminar 2021: (Hyper)Complex Analysis 2021 in memoriam of prof. Julian Lawrynówicz. Bedlewo, Poland, November 11–14, 2021;

- Hypercomplex Seminar 2024: (Hyper)Complex Analysis in fundamental modelling in memoriam of prof. Julian Lawrynówicz. Bedlewo, Poland, September 14–18, 2024;

- International Workshop within the framework of the HORIZON-2020 project SOMPATY, May 12-16, 2025, Kyiv, Ukraine (SOMPATY-2025);

- семінарах відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор С.А. Плакса);

- семінарі кафедри математичного аналізу, бізнес-аналізу та статистики Житомирського державного університету імені Івана Франка (керівник: доктор фіз.-мат. наук Є.О. Севостьянов);

- Львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор О.Б. Скасків);

- семінарі відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор А.С. Романюк);

— Семінарі “Сучасний аналіз” в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка (керівники: академік НАН України І.О. Шевчук, доктори фіз.-мат. наук О.О. Курченко, В.М. Радченко, А.В. Чайковський).

8. Повнота викладу матеріалів дисертації в публікаціях та особистий внесок автора. Основні положення дисертаційної роботи висвітлені у 38 наукових публікаціях, з них 17 статей у наукових виданнях, внесених до переліку наукових фахових видань України та закордонних виданнях, а також 14 публікацій у тезах доповідей і матеріалах міжнародних та вітчизняних конференцій. 15 статей проіндексовані у міжнародних наукометричних базах Scopus або Web of Science, з них 1 стаття опублікована у виданні з квартиля Q1 відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, 4 — у виданнях з квартиля Q2, 10 — у виданнях з квартиля Q3. Серед публікацій по 1 статті в іноземних журналах Complex Anal Synerg., Complex Variables and Elliptic Equations, An. St. Univ. Ovidius Constanta, Eurasian Math. J., українських журналах Carpathian Math. Publ., Researches in Mathematics, Matematychni Studii, 2 статті у Proceedings of the International Geometry Center, 4 статті в Ukrainian Math. J., який є перекладом Українського математичного журналу — категорії A, 4 статті в J. of Math. Sci. (N. Y.), який є перекладом Українського математичного вісника — категорії A.

У дисертаційній роботі чітко вказано про внесок здобувача у роботи, опубліковані разом з іншими авторами. Зокрема, у роботах з О.К. Бахтінім особистий внесок здобувача полягає у перевірці робочих гіпотез і детальному доведенні тверджень. У статтях з І.В. Денегою особистий внесок здобувача полягає у виборі методів розв’язання задач та доведенні результатів. Всі спільні статті здобувача зі співавторами, результати яких було включено в дисертацію, були опубліковані вже після здобуття останніми наукового ступеня доктора фізико-математичних наук. Доведення всіх результатів, які виносяться на захист, здобувач провів особисто.

Відповідно до п. 2 Наказу № 1220 МОН України від 23.09.2019 “Про опублікування результатів дисертації на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук” (зі змінами) вказані 17 статей зараховуються як 37 наукових публікацій.

9. Дотримання принципів академічної доброчесності. За результатами вивчення дисертаційної роботи та наукових публікацій Заболотного Я.В. не виявлено елементів фальсифікації та плагіату.

ЗАГАЛЬНИЙ ВИСНОВОК

Дисертаційна робота ЗАБОЛОТНОГО Ярослава Володимировича на тему “Конформні відображення та симетризаційні методи в екстремальних задачах геометричної теорії функцій комплексної змінної”, що представлена на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук, є кваліфікаційною науковою працею, виконаною здобувачем самостійно. Робота має важливе значення для розвитку теорії функцій комплексної змінної, а також суміжних галузей науки і техніки, містить обґрунтовані й достовірні висновки, характеризується єдністю змісту, за своїм науковим рівнем, практичною та теоретичною цінністю повністю відповідає спеціальності 01.01.01 — математичний аналіз та вимогам п. 7 та 9 “Порядку присудження та позбавлення наукового ступеня доктора наук”, затвердженого постановою Кабінету міністрів України від 17 листопада 2021 р., № 1197 “Деякі питання присудження (позбавлення) наукових ступенів” (зі змінами), та вимогам до оформлення дисертації, затвердженими наказом Міністерства освіти і науки України від 12.01.2017 № 40 (зі змінами).

Рекомендувати дисертаційну роботу “Конформні відображення та симетризаційні методи в екстремальних задачах геометричної теорії функцій комплексної змінної”, підготовлену ЗАБОЛОТНИМ Ярославом Володимировичем на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук, до захисту на спеціалізованій вченій раді за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз.

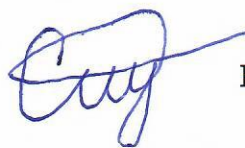
Рецензенти:

доктор фіз.-мат. наук, професор,
завідувач відділу теорії функцій
Інститут математики НАН України



Анатолій РОМАНЮК

доктор фіз.-мат. наук,
старший науковий співробітник,
провідний науковий співробітник
Інститут математики НАН України



Руслан САЛІМОВ

доктор фіз.-мат. наук,
старший науковий співробітник,
провідний науковий співробітник
Інститут математики НАН України



Віталій ШПАКІВСЬКИЙ