

В І Д Г У К

офіційного опонента на дисертаційну роботу
ЗАБОЛОТНОГО Ярослава Володимировича

**“Конформні відображення та симетризаційні методи в екстремальних
задачах геометричної теорії функцій комплексної змінної”,**

представлену на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз.

Актуальність теми дисертаційного дослідження. Дисертаційна робота Я. В. Заболотного присвячена розв’язанню широкого кола екстремальних задач геометричної теорії функцій комплексної змінної, що полягають у знаходженні максимуму функціоналів, складених із добутків внутрішніх радіусів областей. Ця тематика є важливою частиною математичного аналізу, її вивчали в своїх роботах багато відомих вчених, відзначених на другій сторінці дисертаційної роботи. Дослідження, представлені в цій роботі, безпосередньо інтегровані в один із фундаментальних напрямів геометричної теорії функцій комплексної змінної, що присвячений екстремальним задачам на класах взаємно неперетинних областей. Розвиток цього напрямку історично й методологічно тісно пов’язаний із загальною теорією однолистих функцій, центральне місце в якій тривалий час посідала проблема Бібербаха (сформульована 1916 року й остаточно доведена Л. де Бранжем у 1984 році) щодо оцінки коефіцієнтів Тейлора однолистих функцій. Пошук інструментів для розв’язання проблеми Бібербаха та споріднених із нею екстремальних задач на класах однолистих функцій спричинив нові геометричні характеристики конформних відображень. Це дало потужний імпульс для дослідження внутрішніх та конформних радіусів областей.

Інтерес до досліджень такого типу значно зріс після появи у 1934 році класичної статті М. О. Лаврентьева. У ній було вперше знайдено максимум добутку конформних радіусів двох неперетинних областей із двома фіксованими точками на комплексній площині. З того часу і досі тривають дослідження, спрямовані на узагальнення цього результату, зокрема на випадок n областей $n = 3, 4, 5, \dots$. Значний внесок у розвиток цього напрямку зробили Г. М. Голузін, який розробив метод варіацій у конформному відображенні, та Дж. Дженкінс, чий метод екстремальних метрик на основі квадратичних диференціалів дозволив досліджувати складніші топологічні структури. Важливим етапом стали також праці П. М. Тамразова та вчених Інституту математики НАН України. Так, О. К. Бахтін розробив метод керуючих функціоналів і застосував його до переходу від фіксованих точок до вивчення задач із так званими «вільними полюсами».

Практична та теоретична цінність результатів теорії екстремального розбиття виявляється в багатьох суміжних розділах математичного аналізу та математичної фізики. Зокрема, отримані оцінки добутків внутрішніх радіусів слугують інструментом для доведення нових теорем спотворення у класах однолистих відображень. Результати, отримані при розв’язуванні екстремальних задач, а також розроблені методи знайшли численні застосування в механіці, теорії наближення, геометрії і топології, алгебрі многочленів, теорії струн.

Попри вагомні здобутки, низка фундаментальних проблем геометричної теорії функцій комплексної змінної досі залишається відкритою.

Зважаючи на все викладене, вважаю тему дисертаційного дослідження, обрану здобувачем, актуальною.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика дисертації пов'язана з науковими дослідженнями відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України в рамках наукових тем "Аналітичні та геометричні проблеми комплексного і гіперкомплексного аналізу" (номер державної реєстрації 0121U100414), "Метричні та геометричні задачі теорії аналітичних і субгармонічних функцій та множин" (номер державної реєстрації 0116U003060) та "Розробка аналітичних та чисельно-аналітичних методів дослідження задач сучасного природознавства" (номер державної реєстрації 0117U004077).

Зміст дисертаційної роботи та новизна наукових результатів. Дисертаційна робота Я.В. Заболотного є завершеною науковою працею, в якій отримано нові, науково обґрунтовані результати теоретичного характеру. Дисертація складається з анотацій українською та англійською мовами, переліку умовних позначень, вступу, шести розділів, висновків до кожного розділу, загальних висновків, списку використаних джерел і додатка, що містить список публікацій автора та відомості про апробацію результатів дисертації.

У **першому** розділі здійснено огляд літератури за темою дослідження, наведено базові означення та стисло викладено методи, які застосовуються для обґрунтування й доведення основних наукових результатів дисертації.

У **другому** розділі дисертаційної роботи досліджується проблема про екстремальне розбиття комплексної площини з n вільними полюсами на одиничному колі та з фіксованим полюсом в точці нуль для випадку, коли внутрішній радіус області, яка містить початок координат, береться в деякому додатному степені γ , де $0 < \gamma \leq n$. Попри те, що ця проблема відома з 1994 року і була предметом вивчення в низці праць (включаючи попередні дослідження автора), її повне розв'язання донині залишалося відкритим. В дисертаційній роботі отримано нові результати як для випадку, коли n – деяке фіксоване натуральне число, так і для випадку, коли n – довільне натуральне число, більше деякого фіксованого n_0 . Додатково вивчено випадок, коли області, що містять точки одиничного кола, мають властивість симетрії відносно цього кола.

Найбільше враження на мене справили результати **третього** розділу, де розглядається класична проблема про максимум добутку внутрішніх радіусів системи неперетинних областей з полюсами в заданих n фіксованих точках. Повний розв'язок даної задачі відомий тільки для випадків $n = 2, 3, 4$. При дослідженні даної проблеми дисертант отримав оцінки зверху для згаданого добутку для довільного натурального $n \geq 5$, причому як у випадку, коли всі точки скінченні, так і тоді, коли одна з точок нескінченно віддалена.

У **четвертому** розділі автором отримано оцінки зверху добутку деяких степенів внутрішніх радіусів n неперетинних областей розширеної комплексної площини, тобто у більш загальній проблемі. Повні розв'язки даної проблеми відомі тільки для початкових значень n і певних заданих степенів γ_k . Відзначу, що на даний момент немає необхідних і достатніх умов на вказані степені γ_k , коли функціонал, який досліджується в проблемі, обмежений для довільної конфігурації фіксованих точок. Дисертанту вдалося отримати достатню умову на показники степенів, яка гарантує обмеженість досліджуваного добутку. Також автору вдалося знайти застосування отриманих результатів в інших задачах геометричної теорії функцій, зокрема і в задачах з вільними полюсами.

П'ятий розділ присвячено проблемі екстремального розбиття відкритого одиничного круга на n неперетинних областей із вільними полюсами. Варто зазначити, що повний розв'язок цієї задачі досі був відомий тільки для $n = 2$ і $n = 3$. Оскільки будь-яку однозв'язну ріманову поверхню можна конформно відобразити на відкритий одиничний круг, комплексну площину чи розширену комплексну площину (за теоремою про уніформізацію), задача екстремального розбиття обмеженої області є принципово новою порівняно з уже вивченими. В дисертаційній роботі отримано оцінки максимуму добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей, які лежать у відкритому одиничному крузі, причому знайдено як верхню, так і нижню оцінку даного максимуму. На основі знайдених оцінок встановлено нерівності для добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей із полюсами на еліпсі, а також на одній або двох гілках канонічної гіперболи.

У шостому розділі дисертаційної роботи розглядається задача про екстремальне розбиття комплексної площини з полюсами на прямій та деякі її модифікації. Для випадку дійсної прямої та n довільних фіксованих скінченних точок на ній точна оцінка була отримана в 2006 році. В дисертаційній роботі отримано оцінку добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей, які містять точки довільної прямої; $n + 1$ неперетинних областей, які містять точки деякої прямої, яка проходить через точку 0; $n + 1$ неперетинних областей, які містять точки деякої прямої, де один з полюсів — нескінченно віддалена точка, а також деякі аналогічні результати.

Обґрунтованість і достовірність результатів дисертаційного дослідження. Дисертація Заболотного Я. В. виконана на високому науковому рівні і є логічно завершеною науковою працею. Результати роботи одержано із застосуванням строгих математичних методів, супроводжуються повними і правильними доведеннями, а отже є достовірними і строго обґрунтованими.

Повнота викладу результатів дисертації в наукових публікаціях та їх апробація. Основні результати дисертаційної роботи висвітлені у 38 наукових публікаціях, з них 17 статей, внесених до переліку наукових фахових видань України та закордонних виданнях. Зокрема, опубліковано 15 статей, проіндексованих у міжнародних наукометричних базах Scopus та/або Web of Science, з них 1 стаття опублікована у виданні з квартиля Q1 відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, 4 статті — у виданнях з квартиля Q2, 10 статей — у виданнях з квартиля Q3. Крім цього, опубліковано 2 статті в наукових фахових виданнях України категорії Б.

Результати дисертаційної роботи пройшли належну апробацію, доповідалися і обговорювалися на 14 міжнародних конференціях в Україні та за її межами, а також на наукових семінарах у провідних наукових центрах України, де отримали позитивну оцінку і схвальні відгуки.

Дотримання принципів академічної доброчесності. За результатами перевірки та аналізу матеріалів дисертації та наукових публікацій, у яких висвітлено основні результати дисертаційної роботи Заболотного Я. В. не було виявлено ознак академічного плагіату, самоплагіату, фабрикації, фальсифікації або інших порушень академічної доброчесності. Особистий внесок здобувача в статті, опубліковані в співавторстві, чітко окреслений. Представлені в роботі результати були одержані автором особисто і пройшли належне рецензування та апробацію, а ідеї, результати і тексти інших авторів мають посилання на відповідні джерела.

Зауваження та побажання.

1. В дисертаційній роботі наведені декілька списків математиків (біля 50 прізвищ), включно з рядом вчених ІМ НАН України, яким належить вагомий внесок у геометричну теорію функцій комплексної змінної та її напрямки. Проте

- прізвище Дзядик В. К. відсутнє,
- не завжди зрозуміло, за яким принципом визначався порядок слідування прізвищ у списку.

2. Відсутній коментар про точність оцінки (3.2.13) $(T_n \leq (n-1)^{-n/4})$ за порядком. Також було б доцільно порівняти цю оцінку з оцінкою (5.2.3).

3. Дисертаційна робота оформлена якісно, хоча зауваження до оформлення є. Серед них такі.

- Опис поняття n -го діаметра системи точок (стор. 189) слід було б подати у вигляді означення.
- Формулювання теорем 2.2.3 та 2.3.1 правильне, але дещо заплутане.
- У підрозділах 2.2 і 2.3 замість повторення однієї і тієї ж умови в кожній теоремі краще було б написати цю умову один раз на початку підрозділу.
- Функціонал конфігурації позначається то буквою J , то I , а от різні фігури позначені однаковою буквою M .

Нарешті,

- лапки в різних місцях позначаються по-різному.

Висновок. Представлені в дисертаційній роботі результати є новими, правильними і обґрунтованими. Вважаю, що за обсягом виконаних досліджень, новизною отриманих результатів, практичною та науковою значимістю робота відповідає вимогам "Порядку присудження та позбавлення наукового ступеня доктора наук", затвердженого постановою Кабінету міністрів України від 17 листопада 2021 р., № 1197 "Деякі питання присудження (позбавлення) наукових ступенів" (зі змінами) щодо докторських дисертацій, а її автор, Заболотний Ярослав Володимирович, заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз.

Офіційний опонент
академік НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри математичного аналізу
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка



ПІСЛИС ЗАСВІДЧУЮ
ВЧЕНИЙ СЕКРЕТАР
КАРАУЛЬНА Н.В.
18.09.2026

Ігор ШЕВЧУК

Надійшов до спеціалізованої ради 2026.04.18 09.2026
Учений секретар Інституту математики НАН України І.С.Соловйов Ігор СОЛОВЬОВ