

В І Д Г У К

офіційного опонента на дисертаційну роботу
ЗАБОЛОТНОГО Ярослава Володимировича

**“Конформні відображення та симетризаційні методи в екстремальних
задачах геометричної теорії функцій комплексної змінної”,**
представлену на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз.

1. Актуальність теми дисертаційного дослідження. Дисертаційна робота Я.В. Заболотного присвячена розв’язанню екстремальних задач геометричної теорії функцій комплексної змінної. Точніше, в дисертації вивчаються властивості функціоналів, що визначаються геометричними властивостями різноманітних підкласів аналітичних функцій. Ця тематика бере свій початок в роботах таких видатних математиків як Л. Альфорс, Л. Бібербах, Д. Гільберт, Г.М. Голузін, К. Каратеодорі, М.О. Лаврентьев, Г. Льовнер, З. Нехарі, Г. Пойя, К. Померенке, А. Пуанкаре, О. Тейхмюллер, В.К. Хейман, та продовжувалась в роботах всесвітньо відомих українських математиків О.К. Бахтіна, Г.П. Бахтіної, В.Я. Гутлянського, І.П. Мітюка, В.І. Рязанова, П.М. Тамразова та багатьох інших.

Дослідження екстремальних задач у геометричній теорії функцій починалось з вивчення таких задач для однолистных функцій. Зокрема, такі властивості системно досліджувалися в роботах П. Кьобе, які дали поштовх для розвитку методу площ. Одним з перших результатів у цьому напрямку була так звана "теорема площ" Т. Гронуолла. Л. Бібербах у 1916 р. висловив гіпотезу, що для класу аналітичних однолистных у відкритому одиничному крузі функцій правильна нерівність $|c_n| \leq n$, де c_n — коефіцієнти розкладу згаданої функції в ряд Тейлора. Дана гіпотеза була доведена лише у 1984 р. Л. де Бранжем. Дослідження гіпотези Л. Бібербаха дало поштовх для розвитку ряду інших методів геометричної теорії функцій комплексної змінної: параметричного, екстремальних метрик, квадратичних диференціалів, симетризації, варіації.

З іншого боку, М.О. Лаврентьев у 1934 році розв’язав задачу про знаходження максимуму добутку конформних радіусів двох неперетинних областей відносно двох фіксованих точок комплексної площини. Використовуючи вищезгадані методи, було розв’язано різноманітні узагальнення задачі М.О. Лаврентьева, а саме досягнуто збільшення числа областей, відмови від фіксації точок, переходу до розширеної комплексної площини, розгляду більш загальних взаємно не перетинних або частково перетинних областей. Результати, отримані при розв’язуванні екстремальних задач, а також розроблені методи знайшли численні застосування в механіці, теорії наближення, геометрії і топології, алгебрі многочленів, теорії струн. Відзначимо, що такі задачі пов’язані з дослідженням структури траєкторій квадратичних диференціалів, оскільки межі екстремальних областей складаються із дуг цих траєкторій.

Суттєвий розвиток цієї тематики пов’язаний з київською науковою школою. Так, в роботах П.М. Тамразова було запропоновано метод, який полягає у відшукуванні континууму найменшої ємності, що містить дані фіксовані точки, ці результати є суттєвим вкладом в розв’язання відомої проблеми М.Г. Чеботарьова. К. Бахтіним був розроблений метод "керуючих" функціоналів, який дозволив суттєво розширити і доповнити відомі результати в екстремальних задачах геометричної теорії функцій, зокрема, отримати точні оцінки добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей з полюсами

відповідних квадратичних диференціалів на спеціальних системах точок. Важливі результати з даної тематики були отримані також в роботах Г.П. Бахтіної, А.Л. Таргонського, В.Є. В'юн, І.В. Денеги, Л.В. Вигівської, І.Я. Дворак.

Попри ці результати, чимало дуже важливих проблем геометричної теорії функцій комплексної змінної залишилося невирішеними. Зокрема, немає точних оцінок в задачі про екстремальне розбиття комплексної площини з n фіксованими полюсами для $n \geq 5$, немає точної оцінки максимуму добутку деяких степенів внутрішніх радіусів неперетинних областей для $n \geq 4$, відкритою також залишається проблема про екстремальне розбиття круга $|z| < 1$ на n неперетинних областей для $n \geq 4$ і т.д. Відзначимо, що екстремальні задачі про розбиття на неперетинні області є базовим інструментом для вивчення максимуму вищезгаданих функціоналів, встановлення нових теорем спотворення, оцінювання коефіцієнтів та аналізу властивостей однолистих і багатолістих функцій, тому пріоритетною є задача розробки нових та вдосконалення вже відомих методів для отримання точних розв'язків цих екстремальних задач, а також отримання ефективних оцінок відповідних функціоналів.

Зважаючи на все викладене, вважаю тему дисертаційного дослідження, обрану здобувачем, актуальною.

2. Структура та зміст дисертаційної роботи. Дисертаційна робота складається з анотацій українською та англійською мовами, переліку умовних позначень, вступу, шести розділів, висновків до кожного розділу, загальних висновків, списку використаних джерел і додатка, що містить список публікацій автора та відомості про апробацію результатів дисертації.

У **вступі** здобувач обґрунтовує вибір теми дисертаційного дослідження; вказує мету і завдання дослідження; зазначає зв'язок дисертаційної роботи з науковими програмами, планами, темами та грантами; перераховує методи дослідження; підкреслює новизну отриманих результатів; вказує на свій особистий внесок у спільних публікаціях; наводить інформацію стосовно апробації результатів дисертаційних досліджень; наводить інформацію стосовно структури та обсягу дисертації, а також стисло описує зміст основної частини роботи.

У **першому** розділі дисертаційної роботи введено необхідні означення, які використовуються для формулювання та доведення основних результатів роботи, та коротко описано методи досліджень. Зокрема, тут наведено деякі основні факти з теорії конформних відображень, описано властивості трансфінітного діаметра та сформульовано основні твердження з теорії квадратичних диференціалів, зроблено опис методу розділяючого перетворення, а також введено поняття (m, n) -променевої системи точок. Далі в цьому розділі дано огляд літератури за темою дисертації, зокрема наведено результати попередників.

У **другому** розділі дисертаційної роботи вивчається проблема екстремальних значень максимуму функціонала

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k),$$

$B_0, \dots, B_n$ — попарно неперетинні області в $\bar{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k$, $k = 0, \dots, n$, де $r(B_k, a_k)$ — внутрішні радіуси областей B_k відносно a_k . За різноманітних умов на $\gamma \in \mathbb{R}$ та верхніх оцінок на $r(B_k, a_k)$ знаходяться оцінки зверху цього максимуму, а в деяких випадках

знаходяться також і області B_k , коли цей максимум досягається. Окремо розглядаються випадки, коли n є конкретне число між 3 і 8, та коли n є велике число більш даного.

У третьому розділі дисертаційної роботи розглянута проблема екстремальних значень функціонала

$$T_n = \frac{\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)}{\prod_k |a_{k+1} - a_k|}$$

та її зв'язок з екстремумами функціонала $I_n(\gamma)$. Тут також розглядаються різноманітні умови на області B_k і точки a_k , знаходяться оцінки зверху вищенаведених функціоналів, а в деяких випадках і області, де цей екстремум досягається. У випадку однозв'язних областей дисертант одержує оцінки для їх конформних радіусів.

У четвертому розділі дисертаційної роботи розглядається екстремальна проблема для більш складного функціонала

$$P_n(\{B_k\}, \{a_k\}, \{\gamma_k\}) = \frac{\prod_{k=1}^n r^{\gamma_k}(B_k, a_k)}{\prod_{j \neq i} |a_i - a_j|^{2/(n-2)(\gamma_i + \gamma_j) - (2 \sum_k \gamma_k)/(n-1)(n-2)}}$$

у випадках як фіксованої конфігурації a_k , так і для вільних конфігурацій. Далі оцінки цього функціонала використовуються для оцінок функціонала $I_n(\gamma)$.

У п'ятому розділі дисертаційної роботи розглядаються задачі екстремуму функціонала T_n у випадках, коли області B_k є підмножини одиничного круга чи множини $\bar{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$.

У шостому розділі розглядаються випадки, коли точечі a_k належать до деякій прямій.

3. Новизна наукових положень та результатів. Дисертаційна робота Я.В. Заболотного є завершеною науковою працею, в якій отримано нові, науково обґрунтовані результати теоретичного характеру. Дослідження, які проведені у представлєній дисертаційній роботі, спрямовані на вдосконалення відомих і формування нових методів та підходів до розв'язання широкого кола екстремальних задач геометричної теорії функцій. Основними новими науковими результатами, отриманими автором в роботі, є такі:

- одержано нові оцінки зверху функціонала $I_n(1)$, $n \geq 3$ для променевої системи точок a_k ; ці оцінки є точними, тому що дисертантом знайдено конфігурації областей B_k та точок $a_k \in B_k$, для яких досягається максимум цього функціоналу,
- одержано точні оцінки зверху цього функціонала для $n = 3$, $0 < \gamma \leq 1,7$ та $5 \leq n \leq 8$, $1 < \gamma < \gamma_n$,
- отримано нові оцінки зверху функціонала $I_n(\gamma)$ для значень $n \geq 76$ та $\gamma \geq \gamma(n)$ за додаткових умов на $r(B_k, a_k)$ через внутрішні радіуси кругових областей D_k , пов'язаних з областями B_k , за деяких умов ці оцінки є точними,
- доведено незалежні від a_k , B_k оцінки зверху функціонала $I_n(\gamma)$ для $n \geq 3$ та $0 < \gamma \leq n$ за умови $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$ $k \geq 1$,
- отримано двосторонні оцінки максимуму функціонала $I_n(0)$ для неперетинних областей у відкритому одиничному крузі чи на множині $\bar{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$,

- доведено точні оцінки максимуму функціонала $I_n(0)$ у випадку, коли множини B_k лежать у фіксованому крузі радіуса R_0 з точками a_k на прямій, на еліпсі, на одній чи двох гілках канонічної гіперболи,
- застосування одержаних результатів для доведення нових так званих теорем спотворення – скінченного добутку похідних однолистої функції в точках одиничного круга.

4. Зв'язок з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в відділі комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту мавтематики НАН України в рамках наукових тем “Аналітичні та геометричні проблеми комплексного та гіперкомплексного аналізу” (номер державної реєстрації 0121U100414), “Метричні та аналітичні задачі теорії аналітичних та субгармонічних функцій та множин” (номер державної реєстрації 0116U003060), “Розробка аналітичних та числено-аналітичних методів дослідження задач сучасного природознавства” (номер державної реєстрації 0117U004077).

5. Обґрунтованість і достовірність результатів дисертаційного дослідження. Дисертація Заболотного Я.В. виконана на високому науковому рівні і є логічно завершеною науковою працею. Результати роботи супроводжуються повними і правильними доведеннями, є достовірними і строго обґрунтованими. Дисертація написана чіткою і зрозумілою мовою, виклад логічний і послідовний.

6. Повнота викладу результатів дисертації в наукових публікаціях та їх апробація. Основні результати дисертаційної роботи висвітлені у 38 наукових публікаціях, з них 17 статей у виданнях, внесених до переліку наукових фахових видань України, та закордонних виданнях. Зокрема, опубліковано 15 статей, проіндексованих у міжнародних наукометричних базах Scopus та/або Web of Science, з них 1 стаття опублікована у виданні з квартиля Q1 відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, 4 статті — у виданнях з квартиля Q2, 10 статей — у виданнях з квартиля Q3. Крім цього, опубліковано 2 статті в наукових фахових виданнях України категорії Б.

У дисертаційній роботі чітко вказано про внесок здобувача у роботах, опублікованих разом з іншими авторами.

Результати дисертаційної роботи пройшли належну апробацію, доповідалися і обговорювалися на 14 міжнародних конференціях в Україні та за її межами, а також на наукових семінарах у провідних наукових центрах України, де отримали позитивну оцінку і схвальні відгуки.

7. Дотримання принципів академічної доброчесності. За результатами перевірки та аналізу матеріалів дисертації та наукових публікацій Заболотного Я.В. не було виявлено ознак академічного плагіату, самоплагіату, фабрикації, фальсифікації або інших порушень академічної доброчесності. Використані ідеї, результати і тексти інших авторів мають посилання на відповідні джерела. Представлені в роботі результати були одержані автором особисто і пройшли належне рецензування та апробацію. Щодо статей, опублікованих у співавторстві, в дисертації зазначено особистий внесок здобувача.

8. Зауваження та побажання.

1. стор.38: вказати, як пов'язані поняття конформного радіуса та внутрішнього радіуса для однозв'язних областей,
2. стор.39: не можна різні сталі на одній сторінці визначати однаковою буквою γ ,
3. стор.68: в означенні конформності потрібна ін'єктивність, інакше функція e^z , наприклад, буде конформним відображенням в $\mathbb{C}$.
4. стор.77: в дисертації квадратичний диференціал використовується тільки на площині, для чого дається його визначення на Рімановій поверхні?
5. стор.79: що таке "максимальна регулярна крива"?
6. стор.79: що значить $Q(z)dz^2 > 0$?
7. стор.79: функція $\zeta = \int Q^{1/2}(z)dz$ не визначена,
8. стор.79: що значать записи $dz^2 > 0$, $dz \in \mathbb{R}$?
9. стор.88, перший рядок зверху: що таке *cap*?
10. стор.103: потрібно пояснити, чому при $\gamma > n$ маємо $I_n(\gamma) = \infty$,
11. Розділ 2, Проблеми 2.1.1 та 2.1.2 формулюються з умовою $|a_k| = 1 \ \forall k$, але деякі теореми цього розділу формулюються та доводяться без цієї умови,
12. стор.109, 4 рядок зверху: замінити $r(D, a_k)$ на $r(D, a)$,
13. стор.111: рядок " $\frac{o(1)}{|w-a_k|} \rightarrow 0$ якщо $w \rightarrow a_k$ " неправильний,
14. стор.161: в Теоремі 2.4.2 замінити $p(20)$ на $\frac{1}{2\sqrt{2}}$?
15. стор.180: не зрозуміло, чому Проблема 3.1.1* є модифікована Проблема 3.1.1, краще написати, що вона тісно пов'язана з Проблемою 3.1.1,
16. стор.194, Теорема 3.3.1: краще не вводити m , а розглядати випадки n парна та n непарна,
17. в підрозділах 4.2 та 4.3 γ_k іноді перетворюється на α_k ,
18. стор.271, 9 рядок зверху: раніше завжди було $\infty \in B_\infty$,
19. Розділ 6: означення прямої, яке присутнє у формулюванні ряду теорем цього розділу, краще навести перед їх формулюванням,
20. стор.299, формулювання Теорема 6.4.1: як умова "точки a_k на прямій" узгоджується з умовою $|a_k| = 1$?

9. Висновок. Не зважаючи на зроблені зауваження, одержані в дисертації результати є новими, правильними і обґрунтованими. Вважаю, що за обсягом виконаних досліджень, новизною отриманих результатів, практичною та науковою значимістю робота відповідає вимогам "Порядку присудження та позбавлення наукового ступеня доктора наук", затвердженого постановою Кабінету міністрів України від 17 листопада 2021 р., № 1197 щодо докторських дисертацій (зокрема, п.п. 7 та 9), а її автор, Заболотний Ярослав Володимирович, заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз.

Офіційний опонент

доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри фундаментальної математики
Харківського національного університету
імені В.Н. Каразіна

Слава

Сергій ФАВОРОВ

ПІДПИС ЗАСВІДЧУЮ
Начальник відділу



Надійшов до спеціалізованої вченої ради 226.706.01
13.09.2026р.

Учений секретар
Інституту математики
НАН України



Гор Соколенко