

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертацію

Заболотного Ярослава Володимировича

„Конформні відображення та симетризаційні методи в екстремальних задачах геометричної теорії функцій комплексної змінної“,

подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз (111 — математика).

Актуальність дослідження та його мета. Геометрична теорія функцій комплексної змінної є фундаментальною складовою сучасного математичного аналізу, що глибоко вивчає геометричні властивості відображень, здійснюваних аналітичними функціями, а також різноманітні геометричні характеристики спеціальних підкласів конформних відображень. Історично у розробку фундаменту цієї теорії зробили колосальний інноваційний внесок такі видатні вчені, як А. Пуанкаре, П. Кьобе, Л. Бібербах, К. Каратеодорі, М.О. Лаврентьєв, Г.М. Голузін, О. Тейхмюллер, П.П. Куфарєв, М.О. Лебедєв, В.М. Дубінін, П.М. Тамразов та багато інших визначних дослідників. Українська математична школа традиційно посідає одне з передових місць у цій галузі у світовій науці, розвиваючи потужні методи теорії потенціалу та екстремальних метрик. Представлена дисертаційна робота зосереджена на глибокому аналізі та дослідженні низки складних відкритих проблем про екстремальне розбиття комплексної площини. Основну увагу в ній приділено тонким геометричним властивостям конформних відображень та симетричних об'єктів, що в сукупності дозволяє виявляти і строго фіксувати нетривіальні геометричні характеристики шуканих екстремальних конфігурацій. Автором ретельно і всебічно досліджуються задачі екстремального розбиття як з вільними, так і з фіксованими полюсами відповідних квадратичних диференціалів. Високий рівень актуальності роботи зумовлений тим, що не зважаючи на майже столітню історію розвитку (починаючи з класичної задачі М.О. Лаврентьєва 1934 року), велика кількість принципових екстремальних задач у цій галузі досі залишалися відкритими як через відсутність адекватних аналітичних методів, так і через складність аналітичних досліджень цих задач, бо у цих задачах доводиться шукати екстремум в середині якоїсь області, а екстремум поміж областей та поміж точками у них. Така двоскладова задача — доволі цікава, нетривіальна та має свою внутрішню красу. Створення нових, а також суттєве вдосконалення й модифікація наявних потужних методів геометричної теорії функцій (зокрема методу розділювального перетворення та застосування властивостей квадратичних диференціалів) має величезне, без перебільшення, вагоме значення. Це збагачує як саму теорію функцій комплексної змінної, так і знаходить важливі застосування у суміжних розділах вищої математи-

ки: від теорії наближень, механіки та поліномів до голоморфної динаміки, теорії потенціалу та навіть сучасної теорії струн.

Наукова новизна результатів дисертаційної роботи. Усі без винятку результати, отримані та винесені на захист у дисертації, є абсолютно новими і пріоритетними. Дисертант не лише блискуче застосував наявні, але й розробив принципово нові підходи, при цьому вдосконаливши відомі симетризаційні методи для глибокого вивчення задач екстремального розбиття комплексної площини. Серед найзначущіших нових результатів варто виокремити такі: вперше отримано ефективні та точні оцінки зверху для добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей розширеної комплексної площини з фіксованими полюсами. До того ж ці оцінки встановлено як для випадку конфігурації, де всі полюси є скінченними, так і для значно складнішої ситуації за наявності однієї нескінченно віддаленої точки. Водночас дисертантом встановлено узагальнені оцінки зверху для добутку довільних додатних степенів внутрішніх радіусів та знайдено строгу достатню умову на показники цих степенів, яка аналітично гарантує обмеженість досліджуваного добутку. Одержано нові, суттєво посилені оцінки добутку внутрішніх радіусів для областей, що цілком лежать у відкритому одиничному крузі. Вагомим досягненням є також те, що для багатьох частинних випадків автором нарешті розв'язано давню відкриту проблему про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів n областей відносно точок одиничного кола на степінь внутрішнього радіуса області відносно початку координат. Це реалізовано як у найзагальнішому випадку, так і з накладанням додаткової жорсткої умови симетрії областей відносно одиничного кола. Також успішно розв'язано цілу низку нетривіальних задач про екстремальне розбиття з полюсами, обмеженими різноманітними геометричними локусами: на довільній прямій, на відрізку, на довільному еліпсі чи навіть на гілках канонічної гіперболи.

На глибоке переконання офіційного опонента, найприродніша математична постановка та об'єктивно найвагоміші результати дисертаційної роботи зосереджені саме в задачах з розділу 3 (зокрема, проблема 3.1.1) — де вимагається знайти максимум добутку конформних (внутрішніх) радіусів n неперетинних областей з довільними фіксованими точками розширеної комплексної площини. Математична естетика та аналітична складність цього результату полягає в тому, що тут принципово відсутні будь-які штучні степені, вагові коефіцієнти чи додаткові обтяжувальні геометричні умови на розташування фіксованих точок (на кшталт їх обов'язкової належності певному колу чи променевій системі). Досліджується чиста, класична геометрична суть задачі для довільної конфігурації точок. Вважаю за необхідне особливо підкреслити: рівень складності, універсальності та фундаментальності лише перших двох теорем з цього третього розділу є настільки

високим, що вже тільки за їхнє формулювання та повне детальне доведення здобувач повною мірою заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук.

Обґрунтованість і правильність результатів дисертації. Доведення всіх основних результатів дисертації, які виносяться на захист, автор провів особисто. Правильність результатів обґрунтовується строгим і коректним застосуванням методів геометричної теорії функцій комплексної змінної, зокрема методу розділювального перетворення, теорії конформних відображень та теорії квадратичних диференціалів. Усі висновки вичерпно аргументовані, що не викликає сумнівів у їхній правильності.

Зауваження. Дисертаційна робота Заболотного Я. В. виконана на високому науковому рівні, проте містить окремі неточності та недоліки оформлення. Зокрема:

1. с.3¹ і далі скрізь у дисертації (18 разів) використовується термін розділює перетворення. Сам термін не відповідає сучасній українській мові. Найкращим варіантом, либонь, буде розділювальне або роздільне перетворення. Втім, зважаючи на те, що англійський відповідник звучить як *separating transformation* вірогідно більше підходить відокремлювальне перетворення. Це моє зауваження було ще до дисертації І.В. Денегі і лишається тут.
2. с.3 і далі ще 6 раз у дисертації надibuємо інший неправильний термін "зростаючий"
3. с. 5¹ "можна застосували"
4. с. 5¹¹ прикметник "додатніх" замість додатних
5. с. 5 "більш того" на до того ж, крім того,
6. с.5 і далі в 13 місцях зустрічається фраза оцінки еволюційного типу або еволюційні нерівності. Так-от, авторів вартувало пояснити, звідки взявся цей термін еволюційні нерівності. Я можу помилятися, але ці нерівності це одна з унікальних особливостей цієї роботи
7. с.7, другий абзац в анотації написано "отримані результати в декількох класичних відкритих проблемах геометричної теорії функцій комплексної змінної, які суттєвими узагальненнями та посиленнями результатів, ..., а саме результатів М. О. Лаврентєва, Г. М. Голузіна, П. П. Куфарєва, В. М. Дубініна, Г. В. Кузьміної, Л. В. Ковальова, О. К. Бахтіна, І. В. Денегі". Тут у мене зауваження виникають до слів узагальнення та посилення, бо не пояснено ніде в одному місці з прив'язкою до перерахованих прізвищ. До того ж, в анотації згадується 8 прізвищ, а у висновках 6 прізвищ, в тому числі одне нове - М. А. Лебедєв. Зведений опис основних результатів наведено, втім без чіткого пояснення, що узагальнено та посилено порівняно зі згаданими

математиками. Також по тексту дисертації в різних розділах містяться окремі згадки стосовно узагальнення та посилення з прізвищами. Однак вважаю, що це додатково мало б бути десь в одному місці - анотації або висновках.

8. англійська версія анотації свідчить про посилене використання систем автоматизованого машинного перекладу, тому її доволі складно читати. І перераховувати усі англійські неточності також не варто, бо це все ж таки дисертації з математики. Згадаю тільки, що автор використовує в анотації вперемішку *decomposition* та *partition* як відповідники до слова розбиття. Хоча *decomposition* більше відповідає українському "розклад". Порядок слів в англійській анотації через це також типово український — "In addition, were obtained sharp estimates in the above-mentioned problem..." замість правильного "In addition, sharp estimates were obtained in the above-mentioned problem..." І напевні в англійській анотації серед математиків є неперекладене прізвище З. Нехарі.
9. Також в анотації автор обережно висловлює припущення про можливе застосування отриманих результатів при вивченні питань гіперкомплексного аналізу. Це вочевидь данина поваги до вагомих результатів наукового консультанта проф. Плакси С. А. та його учня Шпаківського В. С. Втім у мене наявні сумніви стосовно такої застосовності, адже навіть у випадку кватерніонів чи бікомплексних чисел відповідні структури з того зору дійсного аналізу є чотиривимірними. Водночас у дисертації розглядаються екстремальні задачі на комплексній площині, тобто двовимірна структура з погляду дійсного аналізу. Не кажучи вже про те, що немає певності щодо означень квадратичного диференціала, конформного радіуса у таких випадках. Я собі дозволю лагідний натяк, що щось змістовне можна отримати либонь при розгляді регулярних на зрізках (або шарах) функцій кватерніонної змінної.
10. У здобувача англійські публікації та тези конференції містять аж чотири різні варіанти транскрипції його прізвища *Zabolotnii*, *Zabolotnyi*, *Zabolotniy*, *Zabolotnij*.
11. У переліку тез доповідей на конференціях до позицій 1, 4, 13, 14 варто було додати посилання на самі тези з сайту конференції.
12. Апробація результатів на семінарах доволі ґрунтовна. Втім у позиціях 4, 5, 6, 7 та 8 відсутні дати доповідей на цих семінарах. Також за можливості вартувало додати посилання на оголошення про доповідь з сайту семінару, наприклад, для позиції 6 — львівський міський семінар з теорії аналітичних функцій <https://new.mmf.lnu.edu.ua/news/seminar-z-teorii-analitychnykh-funktsiy-101>.
13. У дисертації одночасно використовуються два позначення m , n -променева система точок (с. 21, 30, 85) та (m, n) -променева система точок на решітці сторінках для одного й того ж об'єкту.

14. Сторінки у змісті дисертації не повністю відповідають реальним сторінкам. Не правильні сторінки мають розділи та підрозділи 1.5, 1.6 зсув на +1 сторінку, від 2.2 аж до 6.4 зсув на -2 сторінки.
15. с. 28 "співробіників" замість спіробітників.
16. с. 70, 72, 266 написано "співпадає" замість "збігається з".
17. с. 26, 30, 88 „керуючий функціонал“ на „керівний функціонал“.
18. с. 27 маємо Куфарев, а на с. 2, 7, 58 Куфарев.
19. У дисертації з геометричної теорії функцій варто дієслово "відображати" використовувати суто при описі здійснення відображень. Втім у двох місцях на с. 28 маємо "відображає наступний геометричний факт" (краще, зводиться до наступного геометричного факту), с. 67 та 76 наступна властивість відображає монотонність (краще показує або вказує на).
20. с. 33, пункт 4, де описується наукова новизна, написано "для багатьох частинних випадків розв'язано відкриту проблему про знаходження максимуму добутку внутрішніх областей" прикметник багатьох доволі невиразний.
21. На с. 42 наслідок 2.3.1 взагалі не потрібно формулювати, бо він відрізняється від теореми 2.3.1 тільки відсутністю умови $r(B_0, a_0) < 1$, що автоматично виконується для $B_0 \subset U$, де U — одиничний круг. Його можна замінити одним реченням, що умова $r(B_0, a_0) < 1$ в теоремі 2.3.1 виконується, зокрема, для $B_0 \subset U$. Аналогічне зауваження стосується наслідку 3.2.1 з теореми 3.2.1, який можна замінити зауваженням.
22. Спосіб введення позначень трохи заплутаний. Наприклад, у формулюванні теореми 2.4.2 використовується загадкова функція $p(n)$, яка визначається у доведенні теореми 2.3.2.

Зрозуміло, що перераховані зауваження мають переважно редакційний характер. Вони жодним чином не знижують загальної високої наукової цінності роботи та не впливають на правильність основних математичних здобутків дисертанта.

Публікації та апробація результатів роботи. Основні результати дисертації повною мірою опубліковано у 24 наукових працях. З них 15 статей надруковано у міжнародних виданнях, що входять до наукометричних баз Scopus та Web of Science, 2 статті у фахових виданнях України (категорія «Б»), та 7 інших публікацій. Відповідно до вимог МОН України, 17 основних праць зараховуються як 37 наукових публікацій з врахуванням кuartилів журналів, де вони опубліковані. Результати широко апробовані на чотирнадцяти міжнародних та всеукраїнських наукових конференціях, зокрема на 14-му та 15-му ISAAC Congress, конференціях "Підстригачівські читання", "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", а також на

вісьмох профільних семінарах.

Практичне значення результатів роботи. Дисертація носить яскраво виражений теоретичний характер. Одержані результати та розвинені в ній методи можуть бути успішно використані при вивченні різноманітних задач комплексного аналізу, теорії функцій, теорії відображень, голоморфної динаміки, теорії многочленів та теорії струн. Крім того, знайдені оцінки можна ефективно застосовувати для доведення теорем спотворення, оцінок коефіцієнтів однолистих функцій та отримання нерівностей для поліномів і їхніх похідних.

Висновки. Висловлені зауваження не зменшують наукової цінності і вагомості отриманих здобутків. Зважаючи на вищевикладене, можна стверджувати, що дисертаційна робота Заболотного Ярослава Володимировича «Конформні відображення та симетризаційні методи в екстремальних задачах геометричної теорії функцій комплексної змінної» є глибоким, завершеним і самостійним науковим дослідженням, яке вирішує низку актуальних проблем геометричної теорії функцій комплексної змінної. Відповідно, дисертація Я. В. Заболотного „Конформні відображення та симетризаційні методи в екстремальних задачах геометричної теорії функцій комплексної змінної“, подана на здобуття наукового ступеня доктора фізикоматематичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз, цілком відповідає вимогам щодо докторських дисертацій — п.п. 7 та 9 “Порядку присудження та позбавлення ступеня доктора наук”, затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України №1197 від 17.11.2021р. зі змінами за постановою № 928 від 30.07.2025, а її автор, Заболотний Ярослав Володимирович, заслуговує на присудження наукового ступеня доктора фізикоматематичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз.

Офіційний опонент,
професор, доктор фізикоматематичних наук,
завідувач кафедри фізикоматематичних наук
Івано-Франківського національного
технічного університету нафти і газу

А. І. Бандура



Надійшло до спеціалізованого
15.08.2026р.
Генеральний секретар
Інституту математики
НАН України

В. Умчін
І. С. Коженко

226.206.04

Гор ОКОЛЕНКО