

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ЗАБОЛОТНИЙ Ярослав Володимирович



УДК 517.54

**Конформні відображення та
симетризаційні методи
в екстремальних задачах геометричної
теорії функцій комплексної змінної**

01.01.01 — математичний аналіз
111 — математика

Реферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 2026

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано в Інституті математики НАН України.

Науковий консультант:

доктор фізико-математичних наук, професор

ПЛАКСА Сергій Анатолійович

Інститут математики НАН України,

завідувач відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор

БАНДУРА Андрій Іванович,

Івано-Франківський національний

технічний університет нафти і газу,

завідувач кафедри фізико-математичних наук;

доктор фізико-математичних наук, професор

ФАВОРОВ Сергій Юрійович,

Харківський національний університет імені

В.Н. Каразіна, професор кафедри

фундаментальної математики;

академік НАН України,

доктор фізико-математичних наук, професор

ШЕВЧУК Ігор Олександрович,

Київський національний університет

імені Тараса Шевченка,

професор кафедри математичного аналізу.

Захист відбудеться «6» жовтня 2026 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України та на офіційному сайті інституту за адресою: <https://www.imath.kiev.ua/zahyst/>.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради



А. Л. Шидліч

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню деяких відкритих проблем про екстремальне розбиття комплексної площини за допомогою розробки нових підходів і вдосконалення відомих методів геометричної теорії функцій комплексної змінної. Використання властивостей конформних відображень та симетричних об'єктів уможливило виявлення геометричних характеристик шуканих екстремальних конфігурацій, що дозволило отримати низку нових результатів у класичних задачах, а також застосувати їх до розв'язання інших проблем теорії функцій.

Обґрунтування вибору теми дослідження. Геометрична теорія функцій комплексної змінної вивчає геометричні властивості відображень, які здійснюють аналітичні функції, а також геометричні властивості різноманітних підкласів класу аналітичних функцій. Дослідження екстремальних задач у межах класів голоморфних функцій належить до ключових розділів геометричної теорії функцій комплексної змінної. Формування цього наукового напрямку припадає на рубіж XIX–XX століть, коли прогрес у комплексному аналізі сформував гостру потребу в розробці інструментарію для розв'язання таких задач. Ця тематика є важливою частиною математичного аналізу, її вивчали в своїх роботах багато відомих вчених: А. Пуанкаре, П. Кюбе, Л. Бібербах, К. Каратеодорі, Т. Гронуолл, М.О. Лаврент'єв, Г. Пойя, Г. Грьотш, Д. Гільберт, О. Тейхмюллер, Л. Альфорс, Г.М. Голузін, Г. Льовнер, А. Шеффер, Д. Спенсер, Л.І. Колбіна, П.П. Куфарев, А.Е. Фалес, З. Нехарі, М.О. Лебедев, В.К. Хейман, І.М. Мілін, П.М. Тамразов, К. Померенке, Ю.Є. Аленіцин, І.Є. Базілевич, І.А. Александров, І.П. Мітюк, К. Фітцджеральд, Дж.А. Дженкінс, В.Я. Гутлянський, М. Шиффер, П.Л. Дюрен, О.К. Бахтін, Г.П. Бахтіна, Г.В. Кузьміна, В.М. Дубінін, Є.Г. Ємельянов, В.І. Рязанов та інші.

Першими задачами в геометричній теорії функцій були задачі на дослідження екстремальних властивостей однолистих функцій, тобто таких функцій, значення яких в різних точках області визначення є різними. Особливий інтерес саме до однолистих відображень зумовлений тим, що такі відображення мають ряд важливих екстремальних властивостей у більш загальних класах конформних відображень. Але відсутність на множині однолистих функцій структури, яка б перетворювала дану множину на лінійний простір, зумовила

пошук нових методів для розв'язання екстремальних задач. Зокрема, теорема Б. Рімана, яка дає відповідь на питання про існування конформного відображення довільної однозв'язної області комплексної площини з межею, яка містить більше ніж одну точку, на одиничний круг, призвела до введення поняття конформного радіуса області, різноманітні властивості якого часто використовувалися при розв'язанні вказаних задач.

Одними з перших робіт, у яких системно досліджувалися властивості однолистих функцій, були роботи П. Кьобе, де, зокрема, розглядалася проблема відповідності меж при конформному відображенні. Спираючись на згадані вище роботи, Л. Бібербах у 1916 р. висловив гіпотезу, що на класі S однолистих і регулярних у відкритому одиничному крузі функцій правильна нерівність $|c_n| \leq n$, де c_n — коефіцієнти розкладу згаданої функції в ряд Тейлора. Дана гіпотеза була доведена лише у 1984 р. Л. де Бранжем. Роботи П. Кьобе дали поштовх для розвитку методу площ. Вказаний метод базується на аналітико-геометричному факті, що площа доповнення до образу області при її відображенні за допомогою регулярної в ній функції є строго невід'ємною, причому цю площу можна аналітично виразити через коефіцієнти Тейлора або Лорана цієї функції. За допомогою методу площ багато важливих результатів було отримано М.О. Лебедєвим та ін.

Дослідження властивостей однолистих функцій дало поштовх до вивчення задач про екстремальне розбиття комплексної площини. Суть даних задач полягає в тому, що потрібно розбити комплексну площину (або її область) на кілька взаємно неперетинних областей так, щоб певна геометрична або аналітична характеристика цих областей була максимальною (або мінімальною). Як правило, потрібно знайти максимум деякого функціонала, складеного з внутрішніх радіусів областей. Вперше проблема такого типу розглядалася в роботі М.О. Лаврентьева 1934 року, де була поставлена і розв'язана задача про максимум добутку конформних радіусів двох взаємно неперетинних однозв'язних областей відносно двох наперед заданих фіксованих точок. Надалі постановка даної задачі узагальнювалася в багатьох напрямках. Зокрема, для довільного натурального $n \geq 3$ розглядалася проблема максимум добутку внутрішніх радіусів n взаємно неперетинних областей відносно n наперед заданих фіксованих точок, розглядалася також аналогічна проблема, коли внутрішні радіуси відповідних областей підносилися до деяких додатніх степенів

γ_k , також досліджувалася задача про екстремальне розбиття відкритого одиничного круга на n областей. Вивчення даних проблем вимагало розробку нових та вдосконалення вже відомих методів геометричної теорії функцій.

Вивчення екстремальних задач суттєво пов'язане з розвитком методів теорії квадратичних диференціалів. Ця теорія тісно пов'язана з виникненням у 1928 р. методу смуг Х. Грьотша, який базується на оцінках довжин і площ через конформні інваріанти (модулі) сімей кривих та чотирикутників. Важливість квадратичних диференціалів у вказаних дослідженнях відзначив у 1939 році О. Тейхмюллер, який висловив принцип, згідно з яким розв'язку кожної екстремальної задачі відповідає деякий квадратичний диференціал. Пізніше Дж. Дженкінсом було доведено основну теорему про коефіцієнти, наслідками з якої є багато важливих результатів теорії однолистих функцій. Саме на основі методу смуг Х. Грьотша був розвинений метод екстремальної метрики. Суттєвий вклад в розвиток цього методу вніс П.М. Тамразов. Зокрема, ним у 1966 році було доведено теорему про лінійні інтеграли для екстремальної довжини. Дана теорема є надійним інструментом аналізу екстремальних образів у задачах, що стосуються конформних відображень багатозв'язних та нескінченнозв'язних областей.

В другій половині 20 ст. в геометричній теорії функцій комплексної змінної при розв'язуванні екстремальних задач широко використовувалися симетризаційні методи, які розроблялися, наприклад, в роботах У. Хеймана, Дж. Дженкінса, І.П. Мітюка. В основі цих методів лежить ідея, що екстремальні конфігурації потрібно шукати серед об'єктів, які мають певну симетрію. Серед симетризаційних методів найбільше поширення отримав метод розділяючого перетворення, ідеєю якого є розбиття деякої множини на частини, з яких потім за допомогою певних перетворень утворюються симетричні об'єкти або шляхом склеювання, або за допомогою відомих способів симетризації. За допомогою цього методу багато суттєвих результатів в екстремальних задачах було отримано О.К. Бахтінім.

Однак, незважаючи на те, що кожен з перелічених методів забезпечив суттєвий прорив при розв'язанні задач геометричної теорії функцій комплексної змінної, багато екстремальних задач у цьому розділі математики залишаються на даний момент відкритими, причому значна частина з них відома вже досить давно. Оскільки до екстремальних задач часто зводяться інші проблеми геометричної теорії

функцій, зокрема теореми спотворення для однолистих і багатолістих функцій, оцінки коефіцієнтів, а також ряд проблем в суміжних розділах математики, то актуальною є задача розробки нових підходів та вдосконалення вже відомих методів для отримання точних розв'язків екстремальних задач, а також отримання ефективних оцінок відповідних функціоналів.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана у відділі комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України в рамках наукових тем “Аналітичні та геометричні проблеми комплексного і гіперкомплексного аналізу” (номер державної реєстрації 0121U100414), “Метричні та геометричні задачі теорії аналітичних і субгармонічних функцій та множин” (номер державної реєстрації 0116U003060) та “Розробка аналітичних та чисельно-аналітичних методів дослідження задач сучасного природознавства” (номер державної реєстрації 0117U004077).

Мета і завдання дослідження. Основною метою дисертаційної роботи є вдосконалення та модифікація відомих методів та створення нових підходів для розв'язання задач про екстремальне розбиття комплексної площини, а також застосування отриманих результатів в інших задачах теорії функцій та суміжних галузях математики.

Оскільки розв'язання задачі про екстремальне розбиття зводиться до знаходження максимуму деякого функціонала, то *об'єктом дослідження* є функціонали, задані на класах неперетинних областей розширеної комплексної площини чи на класах однолистих функцій без спільних значень.

Предметом дослідження є знаходження максимумів вказаних функціоналів і опис екстремальних конфігурацій там, де це можливо.

Завдання дослідження:

- Отримати оцінку зверху для добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей розширеної комплексної площини з фіксованими полюсами, причому розглянути як випадок, коли всі полюси скінченні, так і випадок, коли один з них — нескінченно віддалена точка.
- Отримати оцінку зверху добутку степенів внутрішніх радіусів n неперетинних областей розширеної комплексної площини з фіксованими полюсами, а також знайти достатню умову на показники степенів, за якої вказаний добуток обмежений для довільної конфігурації

полюсів.

- Отримати оцінки добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей в задачі про екстремальне розбиття відкритого одиничного круга.
- Дослідити відкриту проблему про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів n областей відносно точок одиничного кола на степінь γ внутрішнього радіусу області відносно точки нуль за умови, що всі області попарно не перетинаються, а також аналогічну проблему, за умовами якої області, які містять точки одиничного кола, симетричні відносно даного кола та отримати, за можливості точні оцінки.
- Отримати оцінки добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей за умови, що на полюси відповідних квадратичних диференціалів накладено певні обмеження, наприклад, якщо вони лежать на деякій прямій, відрізьку, еліпсі чи гіперболі.
- Знайти можливі застосування отриманих результатів як в інших задачах геометричної теорії функцій, так і в інших галузях математики, зокрема, отримати за їх допомогою нові теореми спотворення для однолистих функцій.

Методи дослідження. При розв'язанні завдань дисертаційної роботи використовуються методи геометричної теорії функцій комплексної змінної, насамперед, метод розділяючого перетворення, методи теорії конформних відображень та теорії квадратичних диференціалів.

Наукова новизна отриманих результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, є новими і полягають у такому:

- Отримано оцінки зверху добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей розширеної комплексної площини з фіксованими полюсами; за допомогою цих оцінок було доведено низку нерівностей в інших екстремальних задачах геометричної теорії функцій, а також доведено нові багатоточкові теореми спотворення як для функцій, регулярних і однолистих в одиничному крузі, так і для функцій, які регулярно і однолисто відображають вказаний круг на області, зіркоподібні відносно точки нуль.
- Отримано оцінки зверху добутку степенів внутрішніх радіусів n неперетинних областей розширеної комплексної площини з фіксованими полюсами, причому встановлено достатню умову для показників степенів, за якої вказаний добуток обмежений, а також отримані

оцінки використано для доведення багатоточкових теорем спотворення.

- Отримано оцінки добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей, які лежать у відкритому одиничному крузі, а також за допомогою отриманих оцінок одержано оцінку добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей з полюсами на еліпсі, одній чи двох гілках канонічної гіперболи.

- Для багатьох частинних випадків розв'язано відкриту проблему про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів n областей відносно точок одиничного кола на степінь γ внутрішнього радіусу області відносно точки нуль за умови, що всі області попарно не перетинаються, а також для багатьох частинних випадків розв'язано аналогічну проблему, за умовами якої області, які містять точки одиничного кола, симетричні відносно даного кола.

- Розв'язано декілька варіантів задачі про екстремальне розбиття комплексної площини з полюсами на довільній прямій, зокрема розглянуто випадок, коли n точок лежать на дійсній прямій, а одна точка поза прямою; випадок, коли всі полюси лежать на прямій, але внутрішній радіус однієї з областей береться в деякому дійсному додатному степені γ ; також отримано оцінку добутків внутрішніх радіусів неперетинних областей з вільними полюсами на відрізьку $[-1; 1]$.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Одержані результати і розвинені в ній методи можуть бути використані, насамперед, при вивченні питань комплексного та гіперкомплексного аналізу, теорії мно-go-членів, теорії функцій, теорії апроксимації, теорії струн. На основі доведених оцінок можна одержати нові оцінки для функцій, що реалізують конформне відображення кола на області з деякими спеціальними властивостями. Результати також можуть бути застосовані до теорем спотворення, оцінок коефіцієнтів однолистих функцій та в голоморфній динаміці.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку та загального плану досліджень, постановка задач, а також допомога у підборі методів досліджень належать професору О.К. Бахтіну та науковому консультанту С.А. Плаксі. У спільних роботах з О.К. Бахтіним особистий внесок здобувача полягає у перевірці робочих гіпотез і детальному доведенні тверджень. У статтях з І.В. Денегою особистий внесок здобувача полягає у виборі методів розв'язання задач та доведенні результатів. Всі спільні статті здобувача з співавтора-

ми, результати яких було включено в дисертацію, були опубліковані вже після здобуття останніми наукового ступеня доктора фізико-математичних наук. Доведення всіх результатів дисертації, які виносяться на захист, автор провів особисто.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи були представлені, доповідалися і обговорювалися на таких конференціях: Ukraine Scientific Conference “Modern Problems Theory of Probability and Mathematical Analysis” (February 22–25, 2017, Vorokhta, Ivano-Frankivsk Region, Ukraine); Ukraine Scientific Conference “Modern Problems Theory of Probability and Mathematical Analysis” (February 25–March 1, 2020, Vorokhta, Ivano-Frankivsk Region, Ukraine); International conference Complex Analysis and Related Topics dedicated to the 90-th anniversary of A.A. Goldberg (1930–2008) (June 28–July 1, 2021, Lviv, Ukraine); The International Conference in Complex and Functional Analysis dedicated to the memory of Bohdan Vynnytskyi (13–16 September, 2021, Drohobych, Ukraine); Конференції молодих вчених “Підстригачівські читання” (25–27 травня 2022р., Львів, Україна); Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми механіки та математики–2023” (23–25 травня 2023р., Львів, Україна); International Conference of Young Mathematicians (1–3 June 2023, 2023, Kyiv, Ukraine); 14 ISAAC Congress 2023 (17–21 July, 2023, Ribeirão Preto–São Paulo, Brazil); Конференції молодих вчених “Підстригачівські читання” (27–29 травня 2024р., Львів, Україна); Конференції молодих вчених “Підстригачівські читання” (27–29 травня 2025р., Львів, Україна); International Conference of Young Mathematicians (June 4–6, 2025, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine); 15 ISAAC Congress 2025 (Astana, Kazakhstan, 21–25 July 2025); International conference “Complex and hypercomplex analysis and their applications” (Ukraine, Zhytomyr, August 6–10, 2025); на вченій раді Інституту математики НАН України та на семінарах: Hypercomplex Seminar 2021: (Hyper)Complex Analysis 2021 in memoriam of prof. Julian Lawrynowicz. Bedlewo, Poland, November 11–14, 2021; Hypercomplex Seminar 2024: (Hyper)Complex Analysis in fundamental modelling in memoriam of prof. Julian Lawrynowicz. Bedlewo, Poland, September 14–18, 2024; International Workshop within the framework of the HORIZON–2020 project SOMPATY, May 12–16, 2025, Kyiv, Ukraine (SOMPATY–2025); семінарах відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор С.А. Плакса); се-

мінарі кафедри математичного аналізу, бізнес-аналізу та статистики Житомирського державного університету імені Івана Франка (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор Є.О. Севостьянов); Львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор О.Б. Скасків); семінарі відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор А.С. Романюк); Семінарі “Сучасний аналіз” в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка (керівники: академік НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор І.О. Шевчук, доктори фіз.-мат. наук, професори О.О. Курченко, В.М. Радченко, А.В. Чайковський).

Публікації. Результати дисертації висвітлено у 38 наукових публікаціях, з них 17 – статті у наукових виданнях, внесених до переліку наукових фахових видань України та закордонних виданнях, 14 публікацій у тезах доповідей і матеріалах міжнародних та вітчизняних конференцій, 4 статті у збірниках праць, 1 стаття в журналі Доповіді НАН України, 1 оглядова стаття та 1 препринт. Статті [1 – 9, 11 – 15, 17] проіндексовані у міжнародних наукометричних базах Scopus та/або Web of Science. Стаття [8] опублікована у виданні квартиля Q1 відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, статті [1, 7, 13, 14] у виданнях з квартиля Q2, статті [2 – 6, 9, 11, 15, 17] у виданнях з квартиля Q3. Статті [10, 16] опубліковані у виданні категорії “Б” відповідно до Порядку формування Переліку наукових фахових видань України. Публікації [3, 10, 13] одноосібні. Відповідно до п. 2 Наказу № 1220 МОН України від 23.09.2019 вказані 17 статей зараховуються як 37 наукових публікацій.

Структура й обсяг дисертації. Дисертація складається із анотації, списку публікацій здобувача, змісту, переліку умовних позначень, вступу, 6 розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 215 найменувань, і додатка, який містить список публікацій здобувача за темою дисертації й відомості про апробацію результатів дисертації. Повний обсяг дисертації становить 340 сторінок друкованого тексту, з них список використаних джерел міститься на 25 сторінках, а додаток — на 7 сторінках.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертаційного дослідження, визначено предмет та об’єкт дослідження, а також сформульовано мету і завдання, визначено методи дослідження, окреслено

його наукову новизну, теоретичне і практичне значення, подано інформацію щодо апробації, описано структуру дисертаційної роботи та її основний зміст. Крім того, у вступі проаналізовано сучасний стан розглянутих у дисертації проблем, сформульовано задачі дослідження й коротко описані основні результати, які визначають наукову новизну й виносяться на захист. Основну частину роботи складають шість розділів.

У **першому** розділі дисертаційної роботи викладено основні поняття та описано методи, які використовуються при отриманні основних результатів роботи. Зокрема, в даному розділі введено поняття конформного радіуса однозв'язної області та поняття внутрішнього радіуса області, введено поняття трансфінітного діаметра замкненої множини та наведено основні факти, пов'язані з трансфінітним діаметром, які будуть використовуватися в роботі, наведено деякі основні поняття з теорії квадратичних диференціалів та описано частинні випадки методу розділяючого перетворення, необхідні для доведень результатів дисертаційної роботи. Також наведено огляд літератури за темою дослідження та вказано, яке місце займають отримані здобувачем результати в окреслених напрямках.

У **другому розділі** дисертаційної роботи досліджується задача про екстремальне розбиття комплексної площини з n вільними полюсами на одиничному колі та з фіксованим полюсом в точці нуль з умовою, що внутрішній радіус області, яка містить точку нуль, підноситься до деякого додатного степеня γ .

Нехай $\mathbb{N}$ і $\mathbb{R}$ — множини натуральних і дійсних чисел відповідно, $\mathbb{C}$ — комплексна площина, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ — розширена комплексна площина, $U = \{z : |z| < 1\}$ — відкритий одиничний круг, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ — додатна дійсна піввісь.

Нехай дано однозв'язну область $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ і скінченну точку $a \in B$. Тоді, згідно з теоремою Рімана про відображення, існує функція $f(z)$, мероморфна в крузі $|z| < 1$, яка однолисто відображає круг $|z| < 1$ на область $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ так, що $f(0) = a$.

Величина $R(B, a) = |f'(0)|$ називається **конформним радіусом** області B в точці a .

Конформний радіус області B в точці a вводиться також для випадку, коли точка a — нескінченно віддалена.

Нехай функція $f(z)$, регулярна в області $|z| > 1$, за винятком нескінченно віддаленої точки, однолисто відображає дану область на деяку область B так, що $f(\infty) = \infty$. Величину $R(B, \infty) = |f'(\infty)|^{-1}$

називають конформним радіусом області B в нескінченно віддаленій точці.

Для багатозв'язних областей аналогом поняття конформного радіуса є поняття внутрішнього радіуса, який визначається за допомогою функції Гріна.

Нехай G — область в $\overline{\mathbb{C}}$, $G \neq \overline{\mathbb{C}}$. **Функцією Гріна** області G з полюсом в точці $z_0 \in G$ називається дійсна функція $g_G(z, z_0)$, визначена для всіх $z \in G$, $z \neq z_0$, яка задовольняє такі умови:

- 1) функція $g_G(z, z_0)$ гармонічна як функція від z в області $G \setminus \{z_0\}$;
- 2) якщо $z \rightarrow z_0$, то $g_G(z, z_0) \rightarrow +\infty$, при цьому різниця $g_G(z, z_0) - \ln \left(\frac{1}{|z - z_0|} \right)$ є обмеженою;
- 3) при наближенні до межі δG функція $g_G(z, z_0)$ прямує до нуля.

Якщо ж $z_0 = \infty$, то в другій умові вимагається, щоб для $z \rightarrow \infty$ була обмеженою різниця $g_G(z, z_0) - \ln |z|$.

Нехай G — область в $\overline{\mathbb{C}}$, для якої існує функція Гріна, і нехай z_0 — скінченна точка цієї області. Оскільки різниця $\varphi_G(z, z_0) := g_G(z, z_0) - \ln \left(\frac{1}{|z - z_0|} \right)$ є гармонічною і обмеженою в області $G \setminus z_0$, то її можна доозначити в точці z_0 так, що дана функція буде гармонічною в області G . Тоді для функції Гріна області G з полюсом в точці z_0 правильна асимптотична формула:

$$g_G(z, z_0) = \ln \left(\frac{1}{|z - z_0|} \right) + \gamma + o(1), z \rightarrow z_0$$

де γ — деяке дійсне число.

Величину e^γ називають **внутрішнім радіусом** області G в точці z_0 і позначають $r(G, z_0)$.

Для нескінченно віддаленої точки правильна асимптотична рівність

$$g_G(z, \infty) = \ln |z| + \gamma + o(1), z \rightarrow \infty.$$

Величину e^γ називають внутрішнім радіусом області G в точці ∞ і позначають $r(G, \infty)$.

Проблема 2.1.1. Довести, що максимум функціонала

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k),$$

де $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$, ($n \geq 2$) — попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $r(B_j, a_j)$ — внутрішній радіус області

B_j в точці a_j ($a_j \in B_j$), $j = \overline{0, n}$ і $\gamma \leq n$, досягається для деякої конфігурації областей, які мають n -кратну симетрію.

Твердження, що система областей B_k і точок a_k , $k = \overline{0, n}$, має n -кратну симетрію означає, що дана система інваріантна відносно повороту навколо початку координат на кут $\frac{2s\pi}{n}$ для довільного натурального $s = \overline{1, n-1}$.

Проблема 2.1.1 була поставлена в 1994 році в роботі ¹ в списку нерозв'язаних проблем, а потім повторена в 2014 році в монографії ², однак перший результат в даній проблемі було отримано раніше, в роботі ³, де за допомогою методу розділяючого перетворення була дана відповідь на питання проблеми 2.1.1 при умові, що $\gamma = 1$. В роботі ⁴ за допомогою методу екстремальної метрики аналогічний результат був отриманий для однозв'язних областей та $0 < \gamma < 1$.

В роботі ⁵ в 1996 році було отримано розв'язок проблеми 2.1.1 при певних обмеженнях на розташування систем точок на одиничному колі, а саме для систем точок, для яких виконується нерівність

$$0 < \alpha_k \leq \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma}}; k = \overline{1, n}, n \geq 5,$$

де α_k — центральний кут між сусідніми точками на колі. Крім того, пізніше (див. ⁶) були отримані аналогічні оцінки для $n = 2, 3, 4$.

В 2008 році в роботі ⁷ було проблему 2.1.1 було розв'язано для довільного γ , але починаючи з певного, заздалегідь невідомого номера n .

Надалі дослідження проблеми 2.1.1 розвивалися в різних напрямках. Одним з напрямків було отримання результатів для конкретних

¹Dubinin V.N. Symmetrization in the geometric theory of functions of a complex variable. *Russian Math. Surveys*. 1994. Vol. 49, No. 1. P. 1–79.

²Dubinin, V.N. Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory. Birkhäuser/Springer, Basel. 2014. 344 p.

³Dubinin V.N. A separating transformation of domains, and problems on extremal decomposition. *J. Sov. Math.* 1991. Vol. 53, No. 3. P. 252–263.

⁴Kuz'mina G.V. The method of extremal metric in extremal decomposition problems with free parameters. *J. Math. Sci.* 2003. Vol. 129, No. 3. P. 3843–3851.

⁵Kovalev L.V. On the problem of extremal partition with free poles on a circle. *Far East. Math. Coll.* 1996. Vol. 2. P. 96–98. In Russian.

⁶Denega I.V. Quadratic differentials and separating transformation in extremal problems on non-overlapping domains. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr.* 2012. No. 4. P. 15–19. In Russian.

⁷Bakhtin A.K., Bakhtina G.P., Zelinskii Yu.B. Topological-algebraic structures and geometric methods in complex analysis. *Proc. Inst. Math. NAS Ukraine*. 2008. Vol. 73. 308 p. In Russian.

натуральних n . Зокрема, для $n = 2$ і $0 < \gamma \leq 1.4$ твердження проблеми було доведено в 2013 році в роботі ⁸, для $n = 3$ і $0 < \gamma \leq 1.5$, а також для $n = 4$ і $0 < \gamma \leq 1.7$ в 2012 році в роботі ⁹. Відзначимо, що для $n = 2$ і $0 < \gamma \leq 2$ повний розв'язок проблеми 2.1.1 був отриманий в роботі ¹⁰.

В дисертаційній роботі наведено такі результати.

Теорема 2.2.1. [24] *Нехай γ — деяке дійсне число, таке, що $0 < \gamma \leq 1.7$. Тоді для довільного набору різних точок $\{a_k\}$, $k = \overline{0, 3}$, таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, 3}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей $\{B_k\}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{0, 3}$, виконується нерівність:*

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^3 r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3 \frac{\left(\frac{4\gamma}{3}\right)^{\frac{\gamma}{3}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{9}\right)^{3+\frac{\gamma}{3}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{3}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак рівності в попередній нерівності досягається, зокрема, для випадку, коли точки $\{a_k\}$ і області $\{B_k\}$ ($k = \overline{0, 3}$) є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(9 - \gamma)w^3 + \gamma}{w^2(w^3 - 1)^2}dw^2.$$

Зауважимо, що пізніше, в роботі ¹¹, було отримано дещо покращений результат для $n = 3$ і $0 < \gamma \leq 2.1$ для випадку однозв'язних областей.

Наступний результат правильний для $n = 5, 6, 7, 8$.

Теорема 2.2.3. [23], [21] *Нехай $n = 5, 6, 7, 8$, $\gamma_5 = 2.32$, $\gamma_6 = 2.49$, $\gamma_7 = 2.67$, $\gamma_8 = 2.84$. Тоді для довільного дійсного γ такого, що $1 < \gamma \leq \gamma_n$, виконується нерівність*

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq r^\gamma(D_0, d_0) \prod_{k=1}^n r(D_k, d_k),$$

⁸Бахтін О.К., Заболотний Я.В. Оцінки добутку внутрішніх радіусів трьох неперетинних областей. *Доп. Нац. Акад. наук України*. 2013. № 10. С. 7–10.

⁹Заболотний Я.В. Про одну екстремальну задачу В.М. Дубініна. *Укр. мат. журн.* 2012. **64**, № 1. С. 24–31.

¹⁰Bakhtin A.K., Denega I.V. Extremal decomposition of the complex plane with free poles. *J. Math. Sci.* 2020. Vol. 246, No. 1. P. 1–17.

¹¹Bakhtin A.K. Separating transformation and extremal problems on nonoverlapping simply connected domains. *J. Math. Sci.* 2018. Vol. 232. P. 1–13.

де $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$, ($n \geq 2$) — попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, де d_k, D_k , — відповідно полюси і кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}dw^2.$$

Іншим напрямком був пошук зростаючої мажоранти для числа γ для $n \rightarrow \infty$, тобто для довільного натурального $n \geq n_0$ для деякого фіксованого n_0 . Так, для $n \geq 8$ і $1 < \gamma \leq \sqrt[3]{n}$ проблему 2.1.1 було розв'язано в роботі ¹², для $n \geq 5$ і $1 < \gamma \leq \sqrt[3]{n}$ — в роботі ¹³. Розглядалися також випадки, коли на області B_k чи точки a_k накладалися певні обмеження.

В наступній теоремі отримано розв'язання проблеми 2.1.1 для випадку $n \geq 76$ і $1 < \gamma \leq n$, але з умовою, що внутрішній радіус області, що містить точку нуль, не перевищує одиниці.

Теорема 2.3.1. [17] *Нехай задано натуральне число n , $n \geq 76$, і дійсне число γ таке, що $1 < \gamma \leq n$. Тоді для довільного набору попарно неперетинних областей $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$ та довільного набору точок комплексної площини $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{0, n}$, причому $r(B_0, a_0) \leq 1$, правильна нерівність*

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq r^\gamma(D_0, 0) \prod_{k=1}^n r(D_k, d_k),$$

де d_k, D_k , — відповідно полюси і кругові області квадратичного диференціала

$$G(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}dw^2.$$

Зауважимо, що за допомогою деякого вдосконалення методу дослідження, в роботі ¹⁴ було доведено, що при виконанні всіх інших умов теореми 2.3.1 можна брати $n \geq 4$.

¹²Заболотний Я.В. Застосування розділяючого перетворення в одній задачі про неперетинні області. *Доп. Нац. Акад. наук України*. 2011. № 9. С. 11–14.

¹³Denega I.V. Quadratic differentials and separating transformation in extremal problems on non-overlapping domains. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr.* 2012. No. 4. P. 15–19. In Russian.

¹⁴Bakhtin A.K., Denega I.V. Extremal decomposition of the complex plane with free poles. *J. Math. Sci.* 2020. Vol. 246, No. 1. P. 1–17.

Оскільки з умови $B_0 \subset U$ випливає, що $r(B_0, a_0) \leq 1$, правильне наступне твердження.

Наслідок 2.3.1. [17] *Нехай $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$, — попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{0, n}$, причому $B_0 \subset U$, де U — відкритий одиничний круг. Тоді для довільного натурального n , $n \geq 76$ і довільного дійсного γ такого, що $1 < \gamma \leq n$ правильна нерівність теореми 2.3.1.*

В наступній теоремі параметр γ обмежений зверху величиною $\sqrt{n}$.

Теорема 2.3.4. [22] *Для довільного натурального $n \geq 541$ і дійсного γ , такого, що $0 < \gamma \leq \sqrt{n}$, виконується нерівність*

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq r^\gamma(D_0, a_0^0) \prod_{k=1}^n r(D_k, a_k^0),$$

де $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$, ($n \geq 2$) — попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, причому знак рівності досягається, зокрема, за умов $a_k = a_k^0$, $B_k = D_k$, $k = \overline{0, n}$, де a_k^0 , D_k , — відповідно полюси і кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}dw^2.$$

Зауважимо, що пізніше, в роботі ¹⁵, проблему 2.1.1 для випадку $0 < \gamma \leq \sqrt{n}$ було розв'язано для $n \geq 3$.

Розглядалася також проблема, аналогічна до проблеми 2.1.1, але для випадку, коли області B_k , $k = \overline{1, n}$, симетричні відносно одиничного кола, а саме така проблема:

Проблема 2.1.2. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ і $\gamma \in \mathbb{R}^+$, причому $\gamma \leq n$. Для довільної системи точок a_k і областей B_k , $k = \overline{0, n}$, таких, що $a_0 = 0$, $|a_1| = \dots = |a_n| = 1$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, де $B_i \cap B_j = \emptyset$ для $0 \leq i, j \leq n$ і $i \neq j$, причому області $B_1, \dots, B_n$ симетричні відносно одиничного кола, знайти точну верхню оцінку для функціонала*

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k).$$

¹⁵Bakhtin A.K., Denega I.V. Extremal decomposition of the complex plane with free poles. *J. Math. Sci.* 2020. Vol. 246, No. 1. P. 1–17.

Зауважимо, що проблема 2.1.2 не тотожна з проблемою 2.1.1, оскільки для тих випадків, де відомі екстремальні конфігурації в проблемі 2.1.1, області B_k , $k = \overline{1, n}$, не є симетричними відносно одиничного кола.

Вперше в 1984 р. аналогічну задачу з вільними полюсами для симетричних однозв'язних областей розглянула Г. Бахтіна в роботі ¹⁶. В 1994 році дану задачу було поставлено в роботі ¹⁷ як нерозв'язану проблему. В 2000 р. для $\gamma = 1$ і для всіх $n \geq 2$ цю проблему було розв'язано в роботах ^{18 19}. В роботі ²⁰ проблема була розв'язана для довільного $n \geq 2$ і $0 < \gamma < 1$. В ²¹ було знайдено розв'язок даної задачі для довільного $n \geq 2$ і довільного $\gamma \in (0, \gamma_n)$, де $\gamma_2 = 1.49$, $\gamma_3 = 3.01$, і $\gamma_n = 0.25n^2$ для $n \geq 4$, але з деякими обмеженнями на центральний кут між сусідніми точками a_k . Повного розв'язку проблеми 2.1.2, як і проблеми 2.1.1, на даний момент невідомо.

Для випадку трьох вільних полюсів, які належать одиничному колу, правильний такий результат.

Теорема 2.4.1. ^[16] *Для довільного набору точок a_k , таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $a_1 = 1$, $k = \overline{1, 3}$, довільного набору взаємно неперетинних областей B_k , $a_0 = 0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, таких, що $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, 3}$, причому області B_k , $k = \overline{1, 3}$, симетричні відносно одиничного кола $|w| = 1$, і довільного дійсного γ , такого, що $0 < \gamma \leq 1.233$ правильна нерівність*

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^3 r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3 \frac{(2\gamma)^{\frac{\gamma}{3}}}{27(9-2\gamma)^{\frac{3}{2}+\frac{\gamma}{3}}} \left(\frac{3-\sqrt{2\gamma}}{3+\sqrt{2\gamma}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}.$$

Знак рівності в цій нерівності досягається, зокрема, у випадку, якщо точки a_k і області B_k , $k = \overline{0, 3}$, є, відповідно, полюсами і

¹⁶Bakhtina G.P. On conformal radii of symmetric non-overlapping domains. *Modern Problems of Real and Complex Analysis*. Kyiv: Institute of Mathematics of AS UkrSSR, 1984. P. 21–27.

¹⁷Dubin V.N. Symmetrization in the geometric theory of functions of a complex variable. *Russian Math. Surveys*. 1994. Vol. 49, No. 1. P. 1–79.

¹⁸Kovalev L.V. On three nonoverlapping domains. *Far East. Math. J.* 2000. Vol. 1, No. 1. P. 3–7. In Russian.

¹⁹Kovalev L.V. On the inner radii of symmetric nonoverlapping domains. *Russian Math. (Iz. VUZ)*. 2000. Vol. 44, No. 6. P. 77–78.

²⁰Zabolotnyi Ya.V., Vygovskaya L.V. On the product of inner radii of symmetric multiply connected domains. *J. Math. Sci.* 2018. Vol. 231, No. 3. P. 101–109.

²¹Bakhtin A.K., Vygovskaya L.V., Denega I.V. Inequalities for the inner radii of symmetric disjoint domains. *Ukr. Math. J.* 2019. Vol. 70, No. 9. P. 1477–1483.

круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^6 + 2(9 - \gamma)w^3 + \gamma}{w^2(w^3 - 1)^2} dw^2.$$

Наступна теорема дає розв'язання проблеми 2.1.2 для випадку $n \geq 20$ і $1 < \gamma \leq n^{\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \frac{\ln(2\sqrt{2} \ln(n))}{\ln(n)}}$.

Теорема 2.4.2. [13] *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ для деякого $n_0 \in \mathbb{N}$ і $\gamma \in \mathbb{R}$, $1 < \gamma \leq n^{\frac{2}{3} - q(n)}$, де $q(n) = \frac{2}{3} \frac{\ln(\frac{1}{p(n_0)} \ln(n))}{\ln(n)}$, де можна взяти $n_0 = 20$ і $p(20) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Тоді для довільного набору точок a_k , таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k , таких, що $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{0, n}$, причому області B_k , $k = \overline{1, n}$, симетричні відносно одиничного кола $|w| = 1$, правильна нерівність*

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2} + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}.$$

Знак рівності в цій нерівності досягається, зокрема, у випадку, коли a_k і B_k , $k = \overline{0, n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2.$$

Наступна теорема є деяким аналогом теореми 2.3.1 для випадку симетричних областей.

Теорема 2.4.3. [10] *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 258$ і $\gamma \in \mathbb{R}$, $1 < \gamma \leq n$. Тоді для довільного набору точок a_k , таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k , таких, що $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{0, n}$, причому області B_k , $k = \overline{1, n}$, симетричні відносно одиничного кола $|w| = 1$, а також за умови, що $r(B_0, 0) \leq 1$, правильна нерівність*

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2} + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}.$$

Знак рівності в цій нерівності досягається, зокрема, у випадку, коли a_k і B_k , $k = \overline{0, n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями

квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2.$$

Крім цього, в підрозділі 2.4 дисертаційної роботи, завдяки введенню деяких обмежень на степінь γ , вдалося суттєво зменшити номер, починаючи з якого виконується нерівність теореми 2.4.3, а також наводиться деяке уточнення до результату теореми 2.4.2, отримане за допомогою дещо іншого методу дослідження. Зокрема, тут більший номер n , починаючи з якого правильне твердження теореми, однак оцінка отримана для ширшого діапазона для параметра γ .

Третій розділ дисертаційної роботи присвячений вивченню наступної проблеми:

Проблема 3.1.1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякі фіксовані точки розширеної комплексної площини. Знайти максимум виразу $\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)$, де B_k , $k = \overline{1, n}$ — довільна конфігурація областей, таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, причому $B_i \cap B_j = \emptyset$ для $1 \leq i, j \leq n$ та $i \neq j$.*

Тобто, іншими словами, потрібно знайти максимум добутку внутрішніх радіусів для довільної конфігурації n неперетинних областей, які містять відповідно n заданих фіксованих точок комплексної площини.

Вперше дана проблема розглядалася в роботі М.О. Лаврентьєва²², де була поставлена і розв'язана задача про максимум добутку конформних радіусів двох взаємно неперетинних однозв'язних областей відносно двох наперед заданих фіксованих точок. Згідно з результатом вище згаданої роботи М.О. Лаврентьєва, для двох довільних фіксованих скінченних точок a_1 і a_2 та для будь-якої пари неперетинних однозв'язних областей D_1 і D_2 таких, що $a_k \in D_k \subset \mathbb{C}$, $k = 1, 2$, правильна нерівність

$$R(D_1, a_1)R(D_2, a_2) \leq |a_1 - a_2|^2,$$

де рівність досягається для півплощин D_k і точок a_k , симетричних відносно їх спільної межі.

²²Lavrent'ev M.A. On the theory of conformal mappings. *Tr. Fiz.-Mat. Inst. Steklova*. 1934. Vol. 5. P. 159–245. In Russian.

Цей результат викликав значний інтерес спеціалістів з геометричної теорії функцій і узагальнювався в багатьох напрямках. Зокрема, пізніше було отримано аналогічну нерівність для випадку, коли одна з областей D_k може включати нескінченно віддалену точку, а також для багатозв'язних областей і внутрішніх радіусів.

Для випадку довільного натурального n , $n \geq 3$ взаємно неперетинних однозв'язних областей B_k , і точок $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$ ($\{a_k\}_{k=1}^n$ — довільні фіксовані скінченні та різні точки комплексної площини) проблему 3.1.1 розглядав Г.М. Голузін, а при $n = 3$ в 1951 році отримав точну оцінку для добутку конформних радіусів трьох неперетинних областей (див. ²³)

$$\prod_{k=1}^3 R(B_k, a_k) \leq \frac{64}{81\sqrt{3}} |a_2 - a_1| |a_3 - a_1| |a_3 - a_2|,$$

де рівність досягається, з точністю до конформних автоморфізмів розширеної комплексної площини, тільки для областей, утворених трьома променями, які виходять з однієї точки під кутом $\frac{2\pi}{3}$ один до одного, і точок, які лежать на бісектрисах утворених кутів на однакових відстанях від їх спільної вершини.

Випадок $n > 3$ істотно відрізняється від ситуації $n \leq 3$, оскільки будь-які три наперед задані точки можна деяким конформним автоморфізмом перевести в інші довільні три точки комплексної площини, наприклад, у вершини правильного трикутника, що значно спрощує дослідження, однак для чотирьох і більше точок аналогічне відображення вдається знайти не завжди. В той же час для випадку $n = 4$ в проблемі 3.1.1 в 1980 році в роботі ²⁴ було отримано точну нерівність

$$\prod_{k=1}^4 R(B_k, a_k) \leq \frac{9}{4^{8/3}} \left(\prod_{1 \leq k < l \leq 4} |a_l - a_k| \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Рівність досягається тільки в тому випадку, коли, з точністю до конформного автоморфізму, $a_1 = -a_2 = 1$, $a_3 = -a_4 = i(2 - \sqrt{3})$, а межа

²³Goluzin G.M. Geometric theory of functions of a complex variable. Providence: AMS, 1969. 676 p.

²⁴Kuz'mina G.V. On the problem of the maximum of the conform radien's product of non-overlapping domains. *J. Sov. Math.* 1982. Vol. 19. P. 1715–1726.

множини $\bigcup_{k=1}^4 D_k$ складається із відрізків $[\sqrt{3} - 2, 2 - \sqrt{3}]$, променів $\{z|z = it, t \in [1, +\infty)\}$ і $\{z|z = it, t \in [-\infty, -1)\}$, частини кругової дуги ρ , яка проходить через точки $-1, i, 2 - \sqrt{3}$, яка лежить в першому квадранті, а також кругових дуг, які ми отримуємо з ρ перетвореннями $w \rightarrow -w, w \rightarrow \bar{w}, w \rightarrow -\bar{w}$.

Для $n \geq 5$ повного розв'язку даної проблеми на даний час не отримано.

Наведені вище теореми пізніше було узагальнено також для випадку багатозв'язних областей і внутрішніх радіусів.

Сформульовані вище задачі зводяться до оцінки наступного виразу:

$$T_n := \frac{\prod_{k=1}^n r(D_k, a_k)}{\left\{ \prod'_{1 \leq k < l \leq n} |a_k - a_l| \right\}^{\frac{2}{n-1}}},$$

(тут штрих у добутку означає, що для нескінченно віддаленої точки під відповідним множником розуміємо одиницю), який є інваріантним відносно дробово-лінійних відображень розширеної комплексної площини. Таким чином, виходячи з результатів робіт М.О. Лаврентьєва, Г.М. Голузіна та Г.В. Кузьміної, отримаємо наступні оцінки:

$$T_2 \leq 1; \quad T_3 \leq \frac{64}{81\sqrt{3}} \approx 0.45618; \quad T_4 \leq \frac{9}{48\sqrt{3}} \approx 0.22323.$$

Також, згідно з припущенням, висловленим в роботі ²⁵,

$$T_5 \leq 4^{\frac{11}{3}} \cdot 3^{-\frac{3}{4}} \cdot 5^{-\frac{25}{6}} = 8.656 \cdot 10^{-2}.$$

В наступній теоремі отримано оцінку виразу, який досліджується в проблемі 3.1.1, для довільного натурального $n \geq 2$.

Теорема 3.2.1. [14] *Нехай $n \in \mathbb{N}$ — деяке натуральне число, $n \geq 2$, $a_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок комплексної площини. Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, правильна нерівність:*

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}}.$$

²⁵Kuz'mina G.V. Problems of extremal decomposition of the Riemann sphere. *J. Math. Sci.* 2003. Vol. 118, No. 1. P. 4880–4894.

З наведеної вище теореми випливає також відповідна оцінка для виразу T_n .

У випадку, коли одна з точок a_k є нескінченно віддаленою, в нерівності попередньої теореми всі множники, які містять дану точку, перетворюються на одиницю. Зокрема, правильна наступна теорема.

Теорема 3.2.2. [14] *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 2$, a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок розширеної комплексної площини, причому $a_n = \infty$. Тоді для довільного набору областей B_k таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$ правильна нерівність:*

$$r(B_n, \infty) \prod_{k=1}^{n-1} r(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n-1} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}}.$$

Отримана в теоремі 3.2.1 оцінка може бути застосована і для оцінки функціонала

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k),$$

про який йде мова в проблемі 2.1.1. Відповідні нерівності були доведені в теоремах 3.3.1 та 3.3.2. в підрозділі 3.3.

Також в роботі досліджується така проблема:

Проблема 3.3.1. *Довести, що максимум функціонала*

$$J_n(\gamma) = [r(B_0, 0) r(B_{n+1}, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k),$$

де $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n, B_{n+1}$, ($n \geq 2$) — попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \infty$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $r(B_j, a_j)$ — внутрішній радіус області B_j в точці a_j ($a_j \in B_j$), $j = \overline{0, n+1}$, досягається для деякої конфігурації областей, які мають n -кратну симетрію.

У даній роботі розглянемо також дещо загальніший випадок, коли на точки a_k , $k = \overline{1, n}$, не накладається умова $|a_k| = 1$.

Справедлива така теорема.

Теорема 3.3.3. [5] *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Тоді для будь-якої фіксованої системи різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ і для довільного набору попарно неперетинних областей $B_0, B_{n+1}, \{B_k\}_{k=1}^n$ таких,*

що $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{n+1} = \infty \in B_{n+1} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, причому існує $\varepsilon > 0$ таке, що $r(B_k, a_k) \geq \varepsilon$ для $\forall k = \overline{1, n}$, справедлива нерівність

$$J_n(\gamma) \leq \varepsilon^{-\frac{2n\gamma}{n+2}} (n+1)^{-\frac{\gamma(n+1)}{n+2}} \left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{2\gamma}{n+2}} \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k).$$

Також в дисертаційній роботі при дослідженні проблеми 3.3.1 було отримано нерівності для випадків, коли точки a_k , $k = \overline{1, n}$, лежать на одиничному колі (теорема 3.3.4) чи деякій прямій (теорема 3.3.5).

Серед можливих застосувань отриманих результатів в інших задачах теорії функцій наведемо так звані теореми спотворення. Суть даних теорем полягає в дослідженні того, які обмеження накладає однолистість відображення на деякі елементи, пов'язані з даним відображенням, зокрема, на величину модуля і аргументу похідної даної функції, тобто на величину спотворення, яке робить дана функція у вибраних точках області. Одним з перших результатів з даної тематики була отримана Гроноуллом ²⁶ т.зв. “теорема площ”. Даний результат полягає в наступному: якщо $F(\zeta) = \zeta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\zeta^k}$ — функція, регулярна, за винятком точки $\zeta = \infty$, і однолиста в області $|\zeta| > 1$, то правильна нерівність $\sum_{k=1}^{\infty} n|a_n|^2 \leq 1$. Наведена теорема є аналітичним вираженням геометричного факту, що при відображенні за допомогою функції $F(\zeta)$ області $|\zeta| > \rho$, де $\rho > 1$, доповнення до образу даної області має додатну площу.

Для функції, регулярної і однолистої в крузі $|z| < 1$, правильний наступний результат (див. ²⁷): якщо функція $f(z)$, регулярна і однолиста в крузі $|z| < 1$, не набуває в даному крузі деякого значення c , то правильна нерівність $|f'(0)| < 4|c|$. Надалі розглядалися багато різних варіантів теорем спотворення. Серед недавніх досліджень з

²⁶Gronwall T.H. Some Remarks on Conformal Representation. *Annals of Mathematics, Second Series*. 1914 – 1915. Vol. 16, No. 1/4. P. 72–76.

²⁷Bieberbach L. Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln. *S.B.Preuss. Acad. Wiss.* 1916. Vol. 138. P. 940–955.

даної тематики відзначимо, наприклад, роботи ²⁸, ²⁹, ³⁰.

Також розглядалися задачі, де спотворення, яке здійснює функція, розглядалося в декількох заданих точках, або з деякими послабленнями на умову однолистості. Серед робіт, присвячених даній тематиці, відзначимо, наприклад, ³¹, ³².

В наведеній нижче теоремі наведено оцінку спотворення, яке чинить функція, регулярна і однолиста у відкритому одиничному крузі, в n різних точках даного круга за умови, що дані точки лежать попарно на різних радіусах.

Теорема 3.4.1. [2] *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $z_k = \rho_k \exp i\theta_k$, $k = \overline{1, n}$ – деякий набір точок відкритого одиничного круга U , $\rho_k \in (0, 1)$, $\rho_0 := \rho_n$, $\rho_{n+1} := \rho_1$, причому $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < 2\pi$, $\theta_0 := \theta_n$, $\theta_{n+1} := \theta_1$. Тоді для кожної функції $f(z)$, регулярної і однолистої в U , справедлива нерівність*

$$\prod_{k=1}^n |f'(z_k)| \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \prod_{k=1}^n \left(\frac{4\rho_k}{\alpha_k} \left| \frac{1 - (\rho_k \exp i\omega_k)^{\alpha_k}}{1 + (\rho_k \exp i\omega_k)^{\alpha_k}} \right| \right)^{-1} \cdot \prod_{k=1}^n \sec \left(\arg \left(\frac{(\rho_k \exp i\omega_k)_0^{\frac{\alpha_k}{2}}}{(1 - (\rho_k \exp i\omega_k)^{\alpha_k})} \right) \right) \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |f(z_p) - f(z_k)| \right)^{\frac{2}{n-1}},$$

де $\alpha_k = \frac{\pi}{\theta_{k+1} - \theta_{k-1}}$ і $\omega_k = \frac{1}{4}(2\theta_k - \theta_{k+1} - \theta_{k-1})$.

Також в даній роботі досліджується спотворення, яке чинить функція класу S^* в n точках, які належать відкритому одиничному кругу, з умовою, що жодні дві точки не належать одному радіусу.

Однолиста область називається зіркоподібною відносно деякої точки, якщо відрізок, що з'єднує будь-яку її точку з вказаною точкою, повністю належить цій області. Позначимо через S^* клас всіх однолистих і регулярних функцій $f(z)$ в крузі U , таких, що

²⁸Roth O.A. Distortion theorem for bounded univalent functions. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 2002. Vol. 27. P. 257–272.

²⁹Dubinin, V.N., Kim, V.Y. Distortion theorems for functions regular and bounded in the disk. *J Math Sci.* 2008. Vol. 150. P. 2018–2026.

³⁰Ogol P., Aminer T., Okelo B. On Analysis of Growth and Distortion Criteria for Certain Univalent Functions on the Unit Disk. *Int. J. Open Problems Compt. Math.* 2025. Vol. 18, No. 3. P. 113–132.

³¹Jenkins J.A. On two-point distortion theorems for bounded univalent regular functions. *Kodai. Math. J.* 2001. Vol. 24, No. 3. P. 329–338.

³²Kim Seong-A., Minda D. Two-point distortion theorems for univalent functions. *Pacific J. Math.* 1994. Vol. 163, No 1. P. 137–157.

$f(0) = 1 - f'(0) = 0$, і які відображають U на області, зіркоподібні відносно початку координат. Якщо функція $f(z) \in S^*$, то при русі z по $|z| = r$, $0 < r < 1$, у визначеному напрямку $\arg f(z)$ змінюється в тому ж напрямку, тобто виконується нерівність

$$\operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0.$$

Позначимо також

$$M(\{z_k\}_{k=1}^n) = \prod_{k=1}^n \chi(|z_k|^{\frac{n}{2}}) \cdot |z_k|,$$

де $\chi(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ — функція Жуковського.

Правильне наступне твердження.

Теорема 3.4.3. [2] *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $R \in \mathbb{R}^+$, $z_k = \rho_k \exp i\theta_k$, $k = \overline{1, n}$, — деякий набір точок відкритого одиничного круга U , $\rho_k \in (0, 1)$, $\rho_0 := \rho_n$, $\rho_{n+1} := \rho_1$, причому $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < 2\pi$, $\theta_0 := \theta_n$, $\theta_{n+1} := \theta_1$. Тоді для кожної функції $f \in S^*$ правильна нерівність*

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n |f'(z_k)| &\leq R^n \prod_{k=1}^n \left(\frac{4\rho_k}{\alpha_k} \left| \frac{1 - (\rho_k \exp i\omega_k)^{\alpha_k}}{1 + (\rho_k \exp i\omega_k)^{\alpha_k}} \right| \right)^{-1} \cdot \\ &\cdot \prod_{k=1}^n \sec \left(\arg \left(\frac{(\rho_k \exp i\omega_k)_0^{\frac{\alpha_k}{2}}}{(1 - (\rho_k \exp i\omega_k)^{\alpha_k})} \right) \right) M \left(\left\{ \frac{f(z_k)}{R} \right\}_{k=1}^n \right), \end{aligned}$$

де $\alpha_k = \frac{\pi}{\theta_{k+1} - \theta_{k-1}}$, $i\omega_k = \frac{1}{4}(2\theta_k - \theta_{k+1} - \theta_{k-1})$. Рівність в попередній нерівності досягається для випадку, коли всі $\rho_k = \rho$ для деякого $\rho \in (0, 1)$, $z_k = \rho \exp i\frac{2\pi}{n}(k-1)$, $k = \overline{1, n+1}$, $f(z) = \frac{z}{(1-z^n)^{\frac{2}{n}}}$ і $R = \frac{\rho}{(1-\rho^n)^{\frac{2}{n}}}$.

За допомогою розвинених методів отримано деякі оцінки еволюційного типу для функціоналів, які вивчалися, зокрема, в проблемах 2.1.1, 3.3.1, та для деяких інших. Відповідні результати наведено в теоремах 3.5.1–3.5.3.

Четвертий розділ дисертаційної роботи присвячений вивченню такої відкритої проблеми:

Проблема 4.1.1. *Нехай n — деяке натуральне число, причому $n \geq 3$, α_k , $k = \overline{1, n}$, — деякі додатні дійсні числа; a_k , $k = \overline{1, n}$, —*

деякий набір точок розширеної комплексної площини. Знайти максимум добутку

$$\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\alpha_k},$$

де $B_k, k = \overline{1, n}$, — довільний набір областей, таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j$.

Відзначимо, що проблема 3.1.1 є частинним випадком проблеми 4.1.1, якщо всі степені α_k взяти рівними одиниці. Однак якщо проблема 3.1.1 має розв'язок для довільної конфігурації точок a_k , то в проблемі 4.1.1 для деяких конфігурацій точок a_k і степенів α_k добуток внутрішніх радіусів областей B_k може бути і необмеженим.

В 1952 році Л.І. Колбіною³³ було розглянуто задачу про максимум J_0 виразу $J = \left| \left(f_1'(0) \right)^\alpha \left(f_2'(0) \right)^\beta \right|$, де $\alpha > 0$ і $\beta > 0$, a_1, a_2 — деякі різні точки комплексної площини, функції $f_1(z)$ і $f_2(z)$ регулярно і однолисто відображають одиничний круг $|z| < 1$ відповідно на неперетинні області B_1 і B_2 , причому $f_1(0) = a_1$, $f_2(0) = a_2$, (тобто, іншими словами, потрібно знайти максимум виразу $J = R^\alpha(B_1, a_1) R^\beta(B_2, a_2)$, де B_1, B_2 — неперетинні однозв'язні області в $\mathbb{C}$, причому $a_1 \in B_1, a_2 \in B_2$), і встановлено, що

$$J_0 = \frac{4^{\alpha+\beta} \alpha^\alpha \beta^\beta}{|\alpha - \beta|^{\alpha+\beta}} \left| \frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} \right|^{2\sqrt{\alpha\beta}} |a_1 - a_2|^{\alpha+\beta}.$$

Зауважимо, що, згідно з сказаним вище, умова регулярності на функції $f_1(z)$ і $f_2(z)$ є суттєвою, тому що у випадку, коли дану умову замінити на умову мероморфності, вираз $\left| \left(f_1'(0) \right)^\alpha \left(f_2'(0) \right)^\beta \right|$ є необмеженим для $\alpha \neq \beta$.

Також в³⁴ було знайдено максимум I_0 виразу

$$I = R^\alpha(B_1, a_1) R^\beta(B_2, a_2) R^\gamma(B_3, a_3)$$

в аналогічній задачі, і встановлено, що

$$I_0 = A_{\alpha, \beta, \gamma} |a_1 - a_2|^{\alpha+\beta-\gamma} |a_1 - a_3|^{\alpha-\beta+\gamma} |a_2 - a_3|^{-\alpha+\beta+\gamma},$$

³³ Kolbina L.I. Some extremal problems in conformal mapping. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1952. Vol. 84, No. 5. P. 865–868. In Russian.

³⁴ Kolbina L.I. Conformal mapping of the unit disk onto non-overlapping domains. *Vestnik Leningrad. Univ.* 1955. Vol. 5. P. 37–43. In Russian.

де $A_{\alpha, \beta, \gamma}$ — деяка стала, залежна від α , β і γ .

Деякі нерівності щодо конформних радіусів було отримано також в роботі ³⁵. Зокрема, там було встановлено такий результат: нехай $B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, — попарно неперетинні області, a_k — деякі фіксовані точки, такі, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$. Тоді для довільного набору дійсних чисел δ_k , таких, що $\sum_{k=1}^n \delta_k = 0$, виконується нерівність:

$$\prod_{k=1}^n \left| f'_k(0) \right|^{(\delta_k)^2} \leq \prod_{k=1}^n \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n |a_k - a_l|^{-\delta_k \delta_l}.$$

Проблему 4.1.1 для випадку конформних радіусів та однозв'язних областей було сформульовано М.О. Лебедєвим в роботі ³⁶. Зокрема, там розглядалася така екстремальна задача: нехай дано n різних фіксованих точок a_k , $k = \overline{1, n}$, $n > 3$ та n деяких додатних дійсних чисел γ_k . Знайти максимум добутку (якщо він існує)

$$\prod_{k=1}^n R^{\gamma_k}(B_k, a_k) \longrightarrow \max, \quad \gamma_k > 0, \quad n > 3,$$

де B_k , $k = \overline{1, n}$, — довільні взаємно неперетинні однозв'язні області, такі, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$. На даний момент у загальному випадку вказана задача не розв'язана, вдалося отримати її розв'язок тільки в деяких частинних випадках.

Також згаданий вище монографії М.О. Лебедєва було отримано наступний результат: нехай $\{f_l(z)\}_{l=0}^n$ — деякий набір функцій, які конформно і однолисто відображають відкритий одиничний круг відповідно на неперетинні області $\{B_l\}_{l=0}^n$ так, що $f_l(0) = a_l$, де a_l — деякий набір фіксованих скінченних точок, і γ_l , $l = \overline{0, n}$, — фіксовані комплексні числа, такі, що $\sum_{l=0}^n \gamma_l = 0$ і $\sum_{l=0}^n |\gamma_l| \neq 0$. Тоді правильна нерівність

$$\prod_{l=0}^n \left| f'_l(0) \right|^{|\gamma_l|^2} \leq \prod_{0 \leq k < l \leq n} |a_k - a_l|^{-2 \operatorname{Re}(\overline{\gamma_l} \gamma_k)}.$$

³⁵Nehari Z. Some inequalities in the theory of functions. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1953. Vol. 75, No. 2. P. 256–286.

³⁶Lebedev N.A. *The Area Principle in the Theory of Univalent Functions*. Moscow: Nauka, 1975. 336 p. In Russian.

В даній роботі при розгляді проблеми 4.1.1 було отримане таке твердження.

Теорема 4.2.2. [12] *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, $a_k, k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок комплексної площини, і нехай $\gamma_k, k = \overline{1, n}$, — деякі додатні дійсні числа, причому $\gamma_k \geq \frac{\sum_{s=1}^n \gamma_s}{2n-2}$ для кожного $k = \overline{1, n}$. Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k, k = \overline{1, n}, B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j$, правильна нерівність:*

$$\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\gamma_k} \leq (n-1)^{-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \gamma_k} \prod_{i,j=1, i < j}^n |a_j - a_i|^{\frac{2}{n-2} \left(\gamma_i + \gamma_j - \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \gamma_k \right)}.$$

Для випадку, коли одна з точок a_k нескінченно віддалена, правильна така теорема.

Теорема 4.2.3. [12] *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, $a_k, k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок комплексної площини, причому $a_n = \infty$, і нехай $\gamma_k, k = \overline{1, n}$, — деякі додатні дійсні числа, причому $\gamma_k \geq \frac{\sum_{s=1}^n \gamma_s}{2n-2}$ для $\forall k = \overline{1, n}$. Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \mathbb{C}, k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k, k = \overline{1, n}, B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j$, правильна нерівність:*

$$(r(B_n, a_n))^{\gamma_n} \prod_{k=1}^{n-1} (r(B_k, a_k))^{\gamma_k} \leq (n-1)^{-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \gamma_k} \prod_{i,j=1, i < j}^{n-1} |a_j - a_i|^{\frac{2}{n-2} \left(\gamma_i + \gamma_j - \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \gamma_k \right)}.$$

Теорема 4.2.2 дозволяє отримати в проблемі 4.1.1 деякі оцінки еволюційного типу.

Теорема 4.3.1. [3] *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, $a_k, k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок комплексної площини, $\alpha_k, \theta_k, k = \overline{1, n}$ — деякі додатні дійсні числа, які задовольняють наступні умови:*

- а) всі $\alpha_k \geq \frac{\lambda}{2n-2}$, де $\lambda := \sum_{k=1}^n \alpha_k$;
 б) $\alpha_k \geq \theta_k$ для $\forall k = \overline{1, n}$;
 в) для $\forall k = \overline{1, n}$ виконується нерівність

$$\theta_k \leq \alpha_k - \frac{1}{2n-2} \sum_{s=1}^n (\alpha_s - \theta_s).$$

Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$ правильна нерівність:

$$\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\alpha_k} \leq (n-1)^{-\frac{\sum_{k=1}^n (\alpha_k - \theta_k)}{4}} \cdot \prod_{i,j=1, i < j}^n |a_j - a_i|^{\frac{2}{n-2} \left(\alpha_i + \alpha_j - \theta_i - \theta_j - \frac{\sum_{k=1}^n (\alpha_k - \theta_k)}{n-1} \right)} \prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\theta_k}.$$

Отримані оцінки можуть бути застосовані і для оцінки функціонала

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k),$$

де $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0; n]$ $a_0 = 0$, $|a_1| = \dots = |a_n| = 1$, $a_k \in B_k \in \overline{\mathbb{C}}$, де $B_i \cap B_j = \emptyset$ для $0 \leq i, j \leq n$ та $i \neq j$. Зокрема, в роботі був отриманий такий результат.

Теорема 4.4.2. [3] Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 2$, i γ — деяке дійсне число, $1 < \gamma < \frac{n}{2}$. Тоді для довільного набору точок a_k , $k = \overline{0, n}$, таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, причому $\alpha_0 \geq \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma}}$, де α_0 — максимальний центральний кут між сусідніми точками a_k , i довільного набору попарно неперетинних областей B_k , таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{0, n}$, правильна нерівність

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq n^{\frac{3n-2\gamma+1}{8}} \left(\prod_{k=1}^{n-1} k^{n-k} \right)^{\frac{n-2\gamma+1}{n(n-1)}} \cdot \left(\frac{2\pi}{n-1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right) \right)^{\frac{n-2\gamma+1}{2}} \left(\frac{4}{n^2-1} \right)^{\frac{n}{2} + \frac{1}{2n}} \left(\frac{n-1}{n+1} \right).$$

В п'ятому розділі дисертації вивчається задача про екстремальне розбиття обмеженої області та деякі пов'язані з нею проблеми.

Центральною в даному розділі є така проблема.

Проблема 5.1.1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $i \in U = \{z : |z| < 1\}$ — одиничний круг. Знайти максимум виразу*

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k),$$

де $a_k \in U$, $k = \overline{1, n}$, області $B_k \subset U$, $k = \overline{1, n}$, такі, що $a_k \in B_k \subset \overline{U}$, причому $B_i \cap B_j = \emptyset$ для $1 \leq i, j \leq n$ та $i \neq j$.

В наведеній вище проблемі 5.1.1 потрібно знайти таке розбиття відкритого одиничного круга на n неперетинних областей, щоб добуток внутрішніх радіусів цих областей відносно деяких точок, які належать відповідно цим областям, був максимальним.

Для випадку двох неперетинних областей, які лежать у відкритому одиничному крузі, проблема 5.1.1 була розв'язана П.П. Куфарєвим в 1950 році в роботі ³⁷. У вказаній роботі було доведено, що для довільних попарно неперетинних однозв'язних областей $D_k \subset \{z : |z| < 1\}$ і точок $z_k \in D_k$, $k = 1, 2$, правильна нерівність

$$\prod_{k=1}^2 r(D_k, z_k) \leq \frac{4\rho_0^2(1 - \rho_0^2)^2}{(1 + \rho_0^2)^2},$$

де $\rho_0^2 = \sqrt{5} - 2$. Рівність досягається для випадку $z_1 + z_2 = 0$, $|z_k| = \rho_0$, D_k — відповідні півкруги, для яких точки z_k лежать на їхніх бісектрисах.

Для випадку $n = 3$ проблема 5.1.1 була розв'язана тільки наприкінці XX століття (див. ^{38, 39}). Було доведено, що для довільних попарно неперетинних однозв'язних областей $D_k \subset \{z : |z| < 1\}$ і точок $z_k \in D_k$, $k = 1, 2, 3$, правильна оцінка:

$$\prod_{k=1}^3 r(D_k, z_k) \leq \frac{64}{729}(223 - 70\sqrt{10}).$$

³⁷ Kufarev P.P. On the question of conformal mappings of complementary domains. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1950. Vol. 73, No. 5. P. 881–884. In Russian.

³⁸ Kostyuchenko E.V. Solution of a problem of extremal partition. *Far East. Math. J.* 2001. Vol. 2, No. 1. P. 3–15. In Russian.

³⁹ Kuz'mina G.V. Problems of extremal decomposition of the Riemann sphere. *J. Math. Sci.* 2003. Vol. 118, No. 1. P. 4880–4894.

Рівність досягається тільки для трьох доповняльних секторів з величиною центрального кута $2\pi/3$, і точок z_k^* , які лежать на їх бісектрисах і на колі радіуса $\sqrt[3]{\sqrt{10}-3}$.

Для $n \geq 4$ практично жодних результатів в проблемі 5.1.1 на даний момент немає. Тому актуальною є задача хоча б отримати деякі оцінки для добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей, які лежать у відкритому одиничному крузі для довільного натурального $n \geq 4$.

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Позначимо M_n максимум виразу $\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)$ для всеможливих конфігурацій областей B_k і точок a_k , таких, що $a_k \in U$, $k = \overline{1, n}$, де $U = \{z : |z| < 1\}$, області $B_k \subset U$, $k = \overline{1, n}$, такі, що $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, причому $B_i \cap B_j = \emptyset$ для $1 \leq i, j \leq n$ та $i \neq j$.

Правильна наступна теорема:

Теорема 5.2.1. [8] *Для довільного $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ правильна нерівність:*

$$(\sqrt{n^2+1} - n) \left(\frac{n+1 - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1} - n + 1} \right)^n \leq M_n \leq \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

В наведеній вище теоремі 5.2.1 дано оцінку добутку внутрішніх радіусів областей, який вивчається в проблемі 5.1.1, причому дано як верхню, так і нижню оцінку даного добутку.

Використовуючи отримані результати для обмежених областей, можна отримати деякі оцінки і в проблемі 3.1.1, але з додатковою умовою, що області B_k такі, що $B_k \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1; 1]$

Теорема 5.2.2. [8] *Для довільного набору точок a_k , таких, що $a_k \in \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1; 1]$, $k = \overline{1, n}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k , таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1; 1]$, $k = \overline{1, n}$ правильна нерівність*

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{n}{2}} \prod_{k=1}^n \left| \frac{\sqrt{a_k^2 - 1}}{a_k - \sqrt{a_k^2 - 1}} \right|.$$

Проблема 5.1.1 пов'язана з проблемою про оцінку добутку неперетинних областей з полюсами в довільному еліпсі.

Нехай $N = \left\{ z = x + iy : \frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{t^2} = 1 \right\}$, причому $d^2 - t^2 = 1$ і нехай $d^* = d - \sqrt{d^2 - 1}$. Тоді правильна наступна теорема:

Теорема 5.3.4. [15] Для довільного натурального n , $n \geq 3$, довільного набору точок a_k , таких, що $a_k \in N$, $k = \overline{1, n}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k , таких, що $a_k \in B_k \subset \mathbb{C} \setminus [-1; 1]$, $k = \overline{1, n}$ правильна нерівність

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4(d - \sqrt{d^2 - 1})}{n} \right)^n \cdot \left(\frac{1 - (d - \sqrt{d^2 - 1})^n}{1 + (d - \sqrt{d^2 - 1})^n} \right)^n \prod_{k=1}^n \left| \frac{\sqrt{a_k^2 - 1}}{a_k - \sqrt{a_k^2 - 1}} \right|,$$

причому рівність досягається, зокрема, для точок і областей, які є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(z)dz^2 = - \frac{\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{2z}\right)^{n-2} \left(\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{2z}\right)^n + 1\right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{z^4}\right)}{\left(\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{2z}\right)^n - (d^*)^n\right) \left(1 - \left(\frac{z}{2} + \frac{1}{2z}\right)^n (d^*)^n\right)} dz^2.$$

Зауважимо, що довільний еліпс $\frac{x-x_0}{d_0^2} + \frac{y-y_0}{t_0^2} = 1$ на комплексній площині деяким лінійним перетворенням $w = pz + z_0$ можна перевести в еліпс виду $\frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{t^2} = 1$, для якого $d^2 - t^2 = 1$, причому внутрішні радіуси відповідних областей при даному перетворенні будуть відноситися як $|p| : 1$. Тому для того, щоб отримати оцінку добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей, які містять точки довільного еліпса, потрібно належним лінійним перетворенням перевести його в еліпс виду M і застосувати теорему 5.3.4.

Використовуючи деякі властивості відображень, розглянутих в попередніх підрозділах, отримано оцінку добутку добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей, які містять точки деякої гіперболи.

Нехай $M = \left\{ z = x + iy : \frac{x^2}{d^2} - \frac{y^2}{p^2} = 1, x > 0 \right\}$, — права гілка деякої гіперболи, причому $d^2 + p^2 = 1$. З останньої умови випливає, що можемо позначити $d = \cos \alpha$ і $p = \sin \alpha$ для деякого $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, а рівняння гіперболи записати у вигляді $M = \left\{ z = x + iy : \frac{x^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} = 1, x > 0 \right\}$.

Правильна наступна теорема.

Теорема 5.4.1. [4] Нехай n , $n \geq 3$, — деяке натуральне число; $M = \left\{ z = x + iy : \frac{x^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} = 1, x > 0 \right\}$ — права гілка деякої гі-

перболи; a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок комплексної площини, таких, що $a_k \in M$ для $k = \overline{1, n}$, причому $a_k = x_k + iy_k$, де $x_k = \cos \alpha \cosh(t_k)$, а $y_k = \sin \alpha \sinh(t_k)$ для деяких дійсних t_k , причому

$$-\infty < t_1 < t_2 < \dots < t_n < +\infty.$$

Тоді для довільного набору взаємно неперетинних областей B_k , $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k \subset \Omega$, $k = \overline{1, n}$, де

$$\Omega = \overline{\mathbb{C}} \setminus ([-\infty; -1] \cup [1; +\infty]),$$

правильна нерівність

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq 2^{\frac{n}{2n-1}} (2n-1)^{-\frac{n}{4}} \prod_{k=1}^n \left| \frac{\sqrt{a_k^2 - 1}}{a_k - \sqrt{a_k^2 - 1}} \right| \cdot \prod_{1 \leq p < q \leq n} (e^{2t_q} - e^{2t_p})^{\frac{2}{2n-1}} \prod_{k=1}^n e^{\frac{t_k}{2n-1}}.$$

Також в дисертаційній роботі в теоремі 5.4.2 було отримано оцінку, аналогічну до наведеної в попередній теоремі, але для випадку, коли точки $a_{k,p}$, $k = \overline{1, 2}$, $p = \overline{1, n}$, лежать на двох гілках гіперболи.

В **шостому розділі** дисертації вивчається задача про екстремальне розбиття комплексної площини з полюсами на прямій та деякі пов'язані з нею проблеми.

Так, в роботі ⁴⁰ було наведено оцінку добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей з фіксованими полюсами на дійсній прямій, а саме було отримано такий результат: для довільного натурального n , $n \geq 3$, деякого набору фіксованих точок a_k , $k = \overline{1, n}$, дійсної осі $\text{Im } z = 0$ та для довільного набору областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, правильна нерівність:

$$\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k)) \leq \left(\frac{2}{n}\right)^n \prod_{k=1}^n (a_k^2 + 1).$$

Зрозуміло, що випадок, коли точки a_k лежать на деякій іншій прямій, зводиться до наведеної вище теореми деяким поворотом.

⁴⁰Dubinin V.N. Capacities of condensers, generalizations of Grötzsch Lemmas, and symmetrization. *J. Math. Sci.* 2007. Vol. 143, No. 3. P. 3053–3068.

В той же час відкритою залишається аналогічна проблема для випадку, коли точки a_k не фіксовані, а розташовані на відрізку $[-1; 1]$ дійсної прямої довільним чином, а саме наступна проблема:

Проблема 6.1.1. *Знайти максимум добутку $\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))$ для всіх можливих конфігурацій неперетинних областей $B_k \subset \mathbb{C}$ і точок $a_k \in B_k \cap [-1; 1]$, $k = \overline{1, n}$, де $n > 4$.*

Дану проблему було наведено в списку відкритих проблем в роботі ⁴¹ під номером 17. Деякі частинні результати в проблемі 5.1.1 було отримано в роботі ⁴².

Крім наведеної вище проблеми 6.1.1, в **шостому** розділі також розглядаються задачі про екстремальне розбиття комплексної площини з полюсами на прямій, але для випадку, коли одна з точок a_k є нескінченно віддаленою, а також випадок, коли одна з точок a_k лежить поза прямою. Цікавою також є задача, коли внутрішній радіус області, яка містить одну з точок прямої, береться в деякому дійсному степені γ . Деякі оцінки для даного випадку були отримані в роботі ⁴³.

В наступній теоремі отримано оцінку добутку внутрішніх радіусів областей, які містять точки довільної прямої.

Теорема 6.2.2. [9] *Нехай $n \in \mathbb{N}$. Тоді для будь-яких фіксованих точок a_k , $k = \overline{0, n}$, які належать деякій прямій $l = \{z : z = te^{i\varphi_0}\}$, де $t, \varphi_0 \in \mathbb{R}$, причому $\varphi_0 \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ і будь-якого набору взаємно неперетинних областей $\{B_k\}$, $k = \overline{0, n}$, таких, що $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, справедлива нерівність*

$$\prod_{k=0}^n r(B_k, a_k) \leq \frac{(n-1)^{-\frac{n-1}{4}}}{\sqrt{n}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n}} \left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{2}{n}}.$$

В наступній теоремі розглядається випадок, коли n точок a_k належать дійсній прямій, а точка a_0 лежить поза прямою, причому внутрішній радіус області, що містить точку a_0 , береться в деякому додатному степені γ .

⁴¹Dubinin, V.N. Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory. Birkhäuser/Springer, Basel. 2014. 344 p.

⁴²Kirillova D.A. Univalent functions without common values. *Russian Math. (Iz. VUZ)*. 2010. Vol. 54, No. 9. P. 74–76.

⁴³Bakhtin A.K., Denega I.V. Extremal decomposition of the complex plane with free poles. *J. Math. Sci.* 2020. Vol. 246, No. 1. P. 1–17.

Теорема 6.3.1. [1] *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 5$, γ — деяке додатне дійсне число, причому $\gamma \leq \sqrt[3]{n}$, a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок дійсної осі $\text{Im } z = 0$ і нехай $a_0 = i$. Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{0, n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{0, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, правильна нерівність*

$$r^\gamma(B_0, i) \prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k)) \leq \frac{2^{n+\gamma}}{n^n} \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} \prod_{k=1}^n (a_k^2 + 1).$$

Знак рівності в наведений вище нерівності досягається, зокрема, для точок a_k і областей B_k , які при відображенні $w^* = \frac{i+iw}{1-w}$ є образами відповідно точок d_k^* і областей D_k^* ($k = \overline{1, n}$), які є, в свою чергу, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}dw^2.$$

Нехай R_n — максимум виразу $\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))$ для всеможливих таких конфігурацій точок a_k і областей B_k , які задовольняють всі умови проблеми 6.1.1. Правильна наступна теорема.

Теорема 6.3.3. [1] *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 5$, a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір точок відрізка $[-1; 1]$, причому $a_1 = -1$ і $a_n = 1$. Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, правильна нерівність:*

$$\left(\frac{2}{n}\right)^n \prod_{k=1}^n \left(\text{tg}^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) \text{ctg}^2 \frac{(2k-1)\pi}{2n} + 1\right) \leq R_n \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2k}{n-1}\right)^{\frac{2(n-k)}{n-1}}.$$

В підрозділі 6.4 розглядається задача, де внутрішній радіус області, що містить одну з точок, береться в деякому додатньому степені γ , причому розглядаються випадки, коли всі точки або належать одиничному колу, або дійсній прямій. Правильні наступні теореми.

Теорема 6.4.1. [1] *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, γ — деяке додатне дійсне число, причому $\gamma \neq 1$, a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір точок одиничного кола $|z| = 1$, причому $a_1 = 1$. Тоді для довільного набору однозв'язних областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, причому $\infty \notin B_n \cup B_1 \cup B_2$, правильна нерівність:*

$$r^\gamma(B_1, 1) \prod_{k=2}^n (r(B_k, a_k)) \leq \frac{2^{2n+3\gamma-1} \gamma^\gamma (\gamma+1)^{\gamma+1}}{|\gamma-1|^{1+\gamma} (\gamma+n-1)^{\gamma+n-1}} \left| \frac{\sqrt{\gamma}-1}{\sqrt{\gamma}+1} \right|^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Теорема 6.4.2. [1] *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, γ — деяке додатне дійсне число, причому $\gamma \neq 1$, $a_1 = \infty$, a_k , $k = \overline{2, n}$, — деякий набір фіксованих точок дійсної осі $\text{Im } z = 0$. Тоді для довільного набору однозв'язних областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, причому $-i \notin B_n \cup B_1 \cup B_2$, правильна нерівність:*

$$r^\gamma(B_1, \infty) \prod_{k=2}^n (r(B_k, a_k)) \leq \frac{2^{n+2\gamma} \gamma^\gamma (\gamma+1)^{\gamma+1}}{|\gamma-1|^{1+\gamma} (\gamma+n-1)^{\gamma+n-1}} \left| \frac{\sqrt{\gamma}-1}{\sqrt{\gamma}+1} \right|^{2\sqrt{\gamma}} \prod_{k=2}^n (a_k^2 + 1).$$

Наприкінці основної частини дисертації зроблено загальні висновки.

Список наукових праць, де опубліковано результати дисертації, й інформацію щодо їхньої апробації наведено у додатку.

ВИСНОВКИ

Основні результати дисертації можна сформулювати таким чином:

1. Завдяки підходу, що базується на зв'язку внутрішнього радіуса області та трансфінитного діаметра замкненої множини, а також теоремах Пойя та мінімізації площі, одержано оцінки зверху для добутку внутрішніх радіусів системи неперетинних областей з полюсами в заданих n фіксованих точках як у випадку, коли всі точки скінченні, так і тоді, коли одна з точок нескінченно віддалена. Наведено приклади, як дані оцінки можуть бути застосовані в інших задачах геометричної теорії функцій, зокрема в проблемі про максимум

добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей, які містять точки одиничного кола, і степеня γ внутрішнього радіуса області, яка містить точку нуля, а також у проблемі про максимум добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей, які містять точки одиничного кола і степеня γ добутку внутрішніх радіусів областей, які містять, відповідно, точки нуля та нескінченності. Крім того, за допомогою отриманих оцінок, було доведено декілька багатоточкових теорем спотворення як для функцій, регулярних та однолистих у відкритому одиничному крузі, так і для функцій з дещо вужчого класу S^* .

2. Отримано оцінки зверху добутку степенів внутрішніх радіусів n неперетинних областей розширеної комплексної площини з фіксованими полюсами, причому встановлено достатню умову для показників степенів, за якої вказаний добуток обмежений, а також отримані оцінки використано для доведення багатоточкових теорем спотворення.

3. Завдяки підходу, що базується на використанні теореми про мінімізацію площі, отримано оцінку максимуму добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей, що лежать в одиничному крузі, для довільного натурального $n \geq 4$, причому знайдено як верхню, так і нижню оцінку даного максимуму. За допомогою отриманого результату було знайдено оцінки добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей, які належать комплексній площині з розрізом по відрітку $[-1; 1]$ дійсної осі.

4. У проблемі про максимум добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей, які містять точки одиничного кола і степеня γ внутрішнього радіуса області, яка містить точку нуля, отримано такі результати:

а) для випадків $n = \overline{3, 8}$ наведено дійсне число γ_n таке, що для даних n і $0 < \gamma \leq \gamma_n$ знайдено максимум відповідного функціонала та вказано екстремальну конфігурацію областей, де цей максимум досягається;

б) для випадку, коли n — довільне натуральне число, більше деякого фіксованого n_0 , і, залежно від початкових умов на n та області, знайдено декілька способів задання зростаючої мажоранти для γ ;

в) для випадку, коли область, яка містить точку нуля, лежить в одиничному крузі, знайдено екстремальну конфігурацію для $n \geq 76$ і $1 < \gamma \leq n$;

г) коли області, які містять точки одиничного кола, симетричні

відносно даного кола, знайдено екстремальне розбиття площини в умовах сформульованої проблеми як для випадку, коли n — деяке фіксоване число, так і для випадку, коли n більше деякого фіксованого n_0 , і для всіх згаданих випадків вказано відповідні обмеження на γ , для яких вказана конфігурація є екстремальною.

5. Завдяки використанню деяких властивостей конформних відображень та квадратичного диференціала, знайдено оцінку добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей, які містять точки довільного еліпса, у таких випадках:

а) для трьох точок, які лежать на деякому, явно вказаному еліпсі та трьох неперетинних областей, а також вказано конфігурації, для яких дані оцінки досягаються;

б) для випадку n точок, які належать довільному еліпсу з деякою умовою на півосі;

в) для випадку, коли одна точка нескінченно віддалена, а інші лежать на еліпсі.

6. Знайдено оцінки добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей для випадку, коли точки, відносно яких шукаються вказані радіуси, лежать на деякій гіперболі, причому як для конфігурацій, коли всі точки лежать на одній гілці гіперболи, так і тоді, коли на кожній гілці гіперболи лежить однакова кількість точок.

7. У проблемі про максимум добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей для випадку, коли всі точки, відносно яких беруться внутрішні радіуси областей, лежать на відрізку $[-1; 1]$ дійсної осі, знайдено як верхню, так і нижню оцінку даного максимуму.

8. Отримано оцінку добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей, які містять точки довільної прямої; $n + 1$ неперетинних областей, які містять точки деякої прямої, яка проходить через точку 0; $n + 1$ неперетинних областей, які містять точки деякої прямої, де один з полюсів — нескінченно віддалена точка.

9. Завдяки підходу, який базується на використанні методу розділяючого перетворення та належного конформного відображення, отримано оцінку добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей, які містять точки одиничного кола, причому внутрішній радіус області, яка містить точку $a_1 = 1$, підноситься до деякого степеня. За допомогою цього результату було отримано аналогічні оцінки для неперетинних областей з полюсами на дійсній прямій, де внутрішній радіус області, яка містить нескінченно віддалену точку, підноситься до степеня γ .

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Zabolotnyi, Y., Denega, I. On products of inner radii of non-overlapping domains containing certain segment points. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2025. Vol. 70, No. 9, P. 1584–1597. <https://doi.org/10.1080/17476933.2024.2416413> (**SJR – Q2**).
2. Denega, I., Zabolotnyi, Y. Using conformal radii of the open unit disk sectors in distortion theorems for univalent functions. *Complex Analysis and its Synergies*, 2025. Vol. 11, 8. <https://doi.org/10.1007/s40627-025-00157-1> (**SJR – Q3**).
3. Zabolotnyi Y. Evolutionary-Type Estimates for the Products of Some Powers of the Inner Radii of Multiply Connected Domains. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2025, Vol. 77, No. 5, P. 721–730. <https://doi.org/10.1007/s11253-025-02485-1> (translation of *Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal*, 2025, T. 77, № 5, С. 314–323.) (**SJR – Q3**)
4. Denega I., Zabolotnyi Y., Estimates of the functional with fixed points on a hyperbola branches. *Proceedings of the International Geometry Center*, 2025, Vol. 18, No. 2, P. 207–219. <https://doi.org/10.15673/pigc.v18i2.3082> (**SJR – Q3**).
5. Zabolotnyi, Y., Denega, I. A note on conformal mappings onto mutually non-overlapping domains. *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, Seria Matematica*, 2025. Vol. 33, No. 3, P. 215–228. <https://doi.org/10.2478/auom-2025-0035> (**SJR – Q3**).
6. Iryna Denega, Yaroslav Zabolotnyi. On the products of inner radii of domains satisfying the partial-intersection condition. *Journal of Mathematical Sciences*, 2025, Vol. 294, No. 5, P. 651–668. <https://doi.org/10.1007/s10958-025-08124-1> (translation of *Ukrainian Mathematical Bulletin*, 2025. T. 22, № 3. С. 301–322.) (**SJR – Q3**).
7. Denega I., Zabolotnyi Y. Estimates for sums of logarithmic potentials associated with the Green function. *Researches in Mathematics*, 2025. Vol. 33, No. 3. P. 14–22. <https://doi.org/10.15421/242524> (**SJR – Q2**)
8. Denega I.V., Zabolotnyi Ya.V. Some extremal problems on the Riemannian sphere. *Carpathian Mathematical Publications*, 2024, Vol. 16, No. 2, P. 593–605. <https://doi.org/10.15330/cmp.16.2.593->

605 (SJR – Q1).

9. Denega I.V., Zabolotnyi Ya.V. On products of the inner radii of the domains containing points of some straight line. *Journal of Mathematical Sciences*, 2024, Vol. 284, No. 3, P. 29–314. <https://doi.org/10.1007/s10958-024-07351-2> (translation of *Ukrainian Mathematical Bulletin*, 2024, T. 21, № 2, С. 1–20.) (SJR – Q3).
10. Заболотний Я.В. Задача про максимум добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей, деякі з яких симетричні відносно одиничного кола. *Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України*, 2024. Т. 38, № 2, С. 67–78. <https://doi.org/10.37069/1683-4720-2024-38-7> (Категорія “Б”)
11. Denega I.V., Zabolotnyi Ya.V., Application of upper estimates for products of inner radii to distortion theorems for univalent functions. *Matematychni Studii*, 2023, Vol. 60, No. 2, P. 138–144. <https://doi.org/10.30970/ms.60.2.138-144> (SJR – Q3).
12. Bakhtin A.K., Zabolotnii Y. Estimation of the Products of Some Powers of Inner Radii for Multiconnected Domains. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2022, Vol. 73, P. 1341–1358. <https://doi.org/10.1007/s11253-022-01998-3> (translation of *Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal*, 2021, T. 73, № 9, С. 1155–1169.) (SJR – Q3)
13. Zabolotnii Y.V. The Problem of V. N. Dubinin for Symmetric Multiconnected Domains. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2021, Vol. 72, P. 1733–1741. <https://doi.org/10.1007/s11253-021-01884-4> (translation of *Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal*, 2020, T. 72, № 11, С. 1502–1509)(SJR – Q2)
14. Bakhtin A.K., Zabolotnii Y. Estimates of the Products on Inner Radii for Multiconnected Domains. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2021, Vol. 73, P. 6–21. <https://doi.org/10.1007/s11253-021-01904-3> (translation of *Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal*, 2021, T. 73, № 1, С. 9–22.) (SJR – Q2)
15. Zabolotnii Ya.V., Denega I.V. An extremal problem on nonoverlapping domains containing ellipse points. *Eurasian Mathematical Journal*, 2021, Vol. 12, No. 4, P. 82–91. <https://doi.org/10.32523/2077-9879-2021-12-4-82-91> (SJR – Q3).
16. Бахтін О.К., Заболотний Я.В. Задача про добутки внутрішніх

- радіусів чотирьох неперетинних областей, деякі з яких симетричні відносно одиничного кола. *Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України*, 2019, Т. 33, С. 27–32. <http://doi.org/10.37069/1683-4720-2019-33-2> (Категорія “Б”)
17. Bakhtin A.K., Zabolotnyi Ya.V. Estimates for the product of inner radii of nonoverlapping domains. *Journal of Mathematical Sciences*, 2017. Vol. 221, No. 5. P. 623–629. <https://doi.org/10.1007/s10958-017-3255-1> (translation of *Ukrainian Mathematical Bulletin*, 2016, T. 13, № 2, С. 148–156.) (SJR – Q3)
 18. Денег І.В., Заболотний Я.В. Екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами на одиничному колі. *Актуальні проблеми сучасної математики: методи, моделі та застосування. Збірник праць Інституту математики НАН України*, К.: Ін-т мат. НАН України. 2024. **21**, № 1. С. 71–81.
 19. Denega I., Zabolotnyi Ja. O.K. Bakhtin. Scientific legacy. *Proceedings of the International Geometry Center*, 2023. Vol. 16, No. 1. P. 1–16.
 20. Заболотний Я.В. Оцінки добутків деяких функціоналів на класах функцій без спільних значень. *Комплексний аналіз і та його застосування: Збірник праць Інституту математики НАН України*. К.: Ін-т мат. НАН України, 2022. **19**, № 1. С. 135–152.
 21. Заболотний Я.В. Оцінки добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей в $\mathbb{C}$. *Збірник праць Інституту математики НАН України*. К.: Ін-т мат. НАН України, 2017. **14**, № 1. С. 156–162.
 22. Заболотний Я.В. Знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей. *Доповіді Національної Академії наук України*, 2016. № 3. С. 7–13.
 23. Bakhtin A.K., Zabolotnyi Ya.V. On a special case of a well-known problem of V.N. Dubinin. *Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine*, 2015. Vol. 29. P. 17–22. In Russian.
 24. Бахтін О.К., Заболотний Я.В. Оцінки добутку внутрішніх радіусів чотирьох неперетинних областей. <http://arxiv.org/pdf/1509.02496.pdf>, 2015.
 25. Iryna Denega, Yaroslav Zabolotnyi. On products of the inner radii of the domains containing points of some straight line. Internati-

- onal conference “Complex and hypercomplex analysis and their applications”, Zhytomyr, Ukraine, August 6–10, 2025. Book of abstracts. P. 8–9.
26. Zabolotnyi Ya.V. Application of upper estimates for products of inner radii to distortion theorems. 15 ISAAC Congress 2025, Astana, Nazarbayev University (Kazakhstan), 21–25 July 2025. Book of abstracts. P. 62–63.
 27. Деніга І.В., Заболотний Я.В. Про добутки конформних радіусів областей відносно точок деякої прямої. “International Conference of Young Mathematicians”, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine (online), June 4–6, 2025. <https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2025/abstracts/Denega-Zabolotnyi.pdf>
 28. Заболотний Я.В. Застосування оцінок добутку конформних радіусів неперетинних областей до теорем спотворення. Конференція молодих вчених “Підстригачівські читання Львів, 27–29 травня 2025р. <http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2025/abstracts/Zabolotnyi.pdf>
 29. Denega I., Zabolotnyi Ya. Extremal Problem on Three Non-Overlapping Domains Containing Ellipse Points. 1st Ukrainian scientific and practical conference with international participation “Modern Problems of Mathematics: Applied aspects”, Zhytomyr, Ukraine, May 30, 2024. Науковий пошук молодих дослідників. Збірник наукових праць. – Житомир: ЖДУ ім. Івана Франка, 2024, С. 31–33.
 30. Iryna Denega and Yaroslav Zabolotnyi. Extremal problem on domains containing ellipse points. Конференція молодих вчених “Підстригачівські читання”, Львів, 27–29 травня 2024р. <http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2024/abstracts/Denega.pdf>
 31. Zabolotnyi Ya.V. Some estimates of the products of some powers of the inner radii of multiconnected domains. 14 ISAAC Congress 2023. Ribeirão Preto–São Paulo (Brazil), 17–21 July 2023. Book of abstracts. – <https://dcm.ffclrp.usp.br/isaac/abstracts.pdf>. P. 53.
 32. Заболотний Я.В. Оцінки деяких функціоналів на класах функцій без спільних значень. “International Conference of Young Mathematicians”, Kyiv (Ukraine), 1–3 June 2023.:

https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2023/Abstracts_2023/TFFA/Zabolotnyi.pdf

33. Заболотний Я.В. Оцінки деяких функціоналів на класах функцій без спільних значень. Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми механіки та математики – 2023”, Львів, 23–25 травня 2023 р. Тези доповідей. – Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2023, С. 311–312.
34. Заболотний Я.В. Оцінки добутків деяких степенів внутрішніх радіусів неперетинних багатозв’язних областей. Конференція молодих вчених “Підстригачівські читання”, Львів, 25–27 травня 2022р. <http://iapmm.lviv.ua/chyt2022/abstracts/Zabolotnyi.pdf>
35. A.K. Bakhtin, Ya.V. Zabolotnii. Estimates of the products of the inner radii of multiconnected domains. “The International Conference in Complex and Functional Analysis dedicated to the memory of Bohdan Vynnytskyi”, Drohobych, 13–16 September, 2021. Збірник тез. – Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University, 2021. P. 6.
36. A.K. Bakhtin, Ya.V. Zabolotnii. Estimates of the products of the inner radii of multiconnected domains. International conference “Complex Analysis and Related Topics dedicated to the 90-th anniversary of A.A. Goldberg (1930–2008)”, Lviv, June 28–July 1, 2021. Abstracts. – Ivan Franko National University of Lviv, 2021, P. 6.
37. Заболотний Я.В. Задача про добуток внутрішніх радіусів неперетинних областей, деякі з яких симетричні відносно одиничного кола. “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”: всеукраїнська наукова конференція, Ворохта, 25 лютого–1 березня 2020 р. Тези доповідей. – Івано-Франківськ: ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”, 2020, С. 45–46.
38. Denega I., Zabolotnij Ja. On the problem of extremal decomposition of the complex plane. “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”: всеукраїнська наукова конференція, Ворохта, 22–25 лютого 2017 р. Тези доповідей. – Івано-Франківськ: ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”, 2017, С. 73–75.

АНОТАЦІЇ

Заболотний Я. В. Конформні відображення та симетризацийні методи в екстремальних задачах геометричної теорії функцій комплексної змінної. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 “математичний аналіз” (111 — математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2026.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню деяких відкритих проблем про екстремальне розбиття комплексної площини за допомогою розробки нових і вдосконалення наявних методів геометричної теорії функцій комплексної змінної. Основну увагу зосереджено на властивостях конформних відображень та симетричних об'єктів, які дозволяють виявити певні геометричні характеристики шуканих екстремальних конфігурацій. В даній тематиці важливі результати були отримані, зокрема, М.О. Лаврентьевим, Г.М. Голузіним, П.П. Куфаревим, Л.І. Колбіною, З. Нехарі, М.О. Лебедевим, П.М. Тамразовим, О.К. Бахтіним, Г.П. Бахтіною, П.Л. Дюреном, В.Я. Гутлянським, Г.В. Кузьміною та багатьма іншими відомими вченими.

Зокрема, в дисертаційній роботі розглядається екстремальна проблема про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей, які містять відповідно n заданих фіксованих точок, тобто, іншими словами, проблема про екстремальне розбиття комплексної площини з n фіксованими полюсами і для довільного натурального $n \geq 5$ отримано оцінку добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей як для випадку, коли всі задані точки скінченні, так і тоді, коли одна з заданих точок — нескінченно віддалена точка розширеної комплексної площини. Наведено також приклади застосувань встановлених оцінок як в інших задачах геометричної теорії функцій комплексної змінної, так і для доведення теорем спотворення. Крім того, встановлено оцінки для максимуму добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей, які містять відповідно n заданих фіксованих точок a_k , але за умови, що внутрішні радіуси областей беруться в деяких фіксованих додатніх степенях γ_k . В дисертаційній роботі розв'язання даної проблеми зведено до оцінки функціонала, який інваріантний щодо конформних автоморфізмів

комплексної площини і отримано його оцінку для довільної конфігурації n неперетинних областей, які містять відповідно n заданих фіксованих скінченних точок, але при виконанні певної умови на степені γ_k . Крім цього, було отримано оцінки в задачі про екстремальне розбиття обмеженої області, а також в екстремальних проблемах, де на полюси відповідних квадратичних диференціалів накладалися певні умови, наприклад, що ці полюси належать дійсній прямій, деякому еліпсу чи гіперболі, або що один з полюсів співпадає з початком координат, а інші належать одиничному колу. Відзначимо, що в деяких з наведених вище проблем було отримано точні оцінки, а в деяких одночасно верхні і нижні оцінки максимумів функціоналів, що досліджуються.

Ключові слова: неперетинні області, аналітичні функції, конформні відображення, конформний і внутрішній радіус області, одиничне коло, функціонал, екстремальне розбиття, функція Гріна, розділяюче перетворення, квадратичний диференціал, теореми спотворення, логарифмічна ємність, трансфінітний діаметр, теорема про мінімізацію площі.

Zabolotnyi Ya. V. Conformal mappings and symmetrization methods in extremal problems of geometric functions theory of complex variable. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.01 “Mathematical Analysis” (111 – Mathematics). — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2026.

The thesis is devoted to the study of several open problems on the extremal partition of the complex plane by developing new methods and improving existing ones in the geometric function theory of a complex variable. The main focus is on the properties of conformal mappings and symmetric objects, which allow the identification of certain geometric characteristics of the desired extremal configurations. In this research area, important results were obtained, in particular, by M.O. Lavrentiev, G.M. Goluzin, P.P. Kufarev, L.I. Kolbina, Z. Nehari, M.O. Lebedev, P.M. Tamrazov, O.K. Bakhtin, G.P. Bakhtina, P.L. Duren, V.Ya. Gutlyanskii, G.V. Kuzmina, and many other prominent scientists.

In particular, in the thesis was considered the extremal problem of finding the maximum of the product of the inner radii of n disjoint

domains containing n given fixed points respectively; in other words, the problem of the extremal partition of the complex plane with n fixed poles. For an arbitrary natural number $n \geq 5$, an estimate is obtained for the product of the inner radii of n disjoint domains, both for the case where all given points are finite and when one of the given points is the point at infinity of the extended complex plane. Examples of applications of the established estimates are also provided, both in other problems of the geometric function theory of a complex variable and for proving distortion theorems. Furthermore, estimates are established for the maximum of the product of the inner radii of n disjoint domains containing n given fixed points a_k respectively, provided that the inner radii of the domains are taken to certain fixed positive powers γ_k . In the dissertation, the solution to this problem is reduced to estimating a functional that is invariant under conformal automorphisms of the complex plane, and its estimate is obtained for an arbitrary configuration of n disjoint domains containing n given fixed finite points respectively, under a certain condition on the powers γ_k . Additionally, estimates were obtained for the problem of the extremal partition of a bounded domain, as well as for extremal problems where certain conditions were imposed on the poles of the corresponding quadratic differentials — for instance, that these poles belong to the real line, a certain ellipse or hyperbola, or that one of the poles coincides with the origin while the others belong to the unit circle. It is worth noting that for some of the aforementioned problems, sharp estimates were obtained, while for others, both upper and lower bounds for the maxima of the investigated functionals were derived simultaneously.

Key words: non-overlapping domains, analytic functions, conformal mappings, conformal radius of the domain, an inner radius of the domain, the unit circle, functional, extremal decomposition, the Green function, separating transformation, quadratic differential, distortion theorems, logarithmic capacity, transfinite diameter, theorem on minimizing of the area.