

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Заболотний Ярослав Володимирович

УДК 517.5

ДИСЕРТАЦІЯ
КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ТА СИМЕТРИЗАЦІЙНІ МЕТОДИ
В ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗАДАЧАХ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ТЕОРІЇ
ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

01.01.01 – математичний аналіз

111 – математика

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне

джерело  Я.В. Заболотний.

Науковий консультант

Плакса Сергій Анатолійович

доктор фізико-математичних
наук, професор

Київ 2026

АНОТАЦІЯ

Заболотний Я.В. Конформні відображення та симетризаційні методи в екстремальних задачах геометричної теорії функцій комплексної змінної. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — “Математичний аналіз” (111 — Математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2026.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню деяких відкритих проблем про екстремальне розбиття комплексної площини за допомогою розробки нових і вдосконалення наявних методів геометричної теорії функцій комплексної змінної. Основну увагу зосереджено на властивостях конформних відображень та симетричних об’єктів, які дозволяють виявити певні геометричні характеристики шуканих екстремальних конфігурацій.

В роботі досліджуються задачі як з вільними, так і з фіксованими полюсами відповідних квадратичних диференціалів. В даній тематичі важливі результати були отримані, зокрема, М.О. Лаврентьєвим, Г.М. Голузіним, П.П. Куфарєвим, Л.І. Колбіною, З. Нехарі, М.О. Лебедєвим, П.М. Тамразовим, О.К. Бахтіним, Г.П. Бахтіною, П.Л. Дюреном, В.Я. Гутлянським, Г.В. Кузьміною та багатьма іншими відомими вченими.

Дисертаційна робота складається з анотацій українською та англійською мовами, переліку умовних позначень, вступу, шести розділів, висновків до кожного розділу, загальних висновків, списку використаних джерел і додатка, що містить список публікацій автора та відомості про апробацію результатів дисертації.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, описано мету і завдання дослідження, показано наукову новизну отриманих результа-

тів, а також викладено зміст основної частини роботи.

Перший розділ дисертаційної роботи присвячений огляду літератури за темою дисертації, зокрема, введено необхідні означення та коротко описано методи досліджень, які використовуються для формулювання та доведення основних результатів роботи. У даному розділі наведено деякі основні факти з теорії конформних відображень, описано властивості трансфінітного діаметра замкненої множини та сформульовано основні твердження з теорії квадратичних диференціалів, зроблено опис тих частинних випадків методу розділяючого перетворення, які використовуються в дисертації, а також введено поняття (m, n) -променевої системи точок та для даних систем наведено основні результати, які будуть використовуватися надалі. У підрозділі 1.6 зроблено короткий історичний огляд напрямку дослідження та наведено результати попередників, які потрібні для доведення основних теорем роботи.

У другому розділі дисертаційної роботи досліджується проблема про екстремальне розбиття комплексної площини з n вільними полюсами на одиничному колі та з фіксованим полюсом в точці нуль для випадку, коли внутрішній радіус області, яка містить початок координат, береться в деякому додатному степені γ . Основні дослідження в даному розділі проведено в трьох напрямках. Першим напрямком є дослідження вказаної проблеми для випадку, коли n — фіксоване натуральне число, і для випадків $n = 3, 8$ наведено дійсне число γ_n таке, що для даних n і $0 < \gamma \leq \gamma_n$ знайдено максимум відповідного функціонала та вказано екстремальну конфігурацію областей, де цей максимум досягається. Другим напрямком дослідження є розгляд випадку, коли n — довільне натуральне число, більше деякого фіксованого n_0 , причому для γ , залежно від початкових умов на n та області, знайдено декілька способів задання зростаючої мажоранти. Третім напрямком є дослідження випадку, коли області, які містять точки одиничного кола, симетричні відносно даного кола, і знайдено екстремальне розбиття площини в умо-

вах сформульованої проблеми як для випадку, коли n — деяке фіксоване число, так і для випадку, коли n більше деякого фіксованого n_0 , і для всіх згаданих випадків наведено відповідні обмеження на γ , для яких вказана конфігурація є екстремальною. Крім того, отримано точні оцінки у згаданій вище проблемі для випадку, коли на область, яка містить точку нуль, накладено деякі обмеження, причому як з умовою симетрії на області, що містять точки одиничного кола, так і без неї.

У третьому розділі дисертаційної роботи розглядається екстремальна проблема про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей, які містять відповідно n заданих фіксованих точок, тобто, іншими словами, проблема про екстремальне розбиття комплексної площини з n фіксованими полюсами. Дана задача повністю розв’язана тільки для випадків $n = 2, 3, 4$. В роботі розглядається випадок довільного натурального $n \geq 5$, причому щодо конфігурації точок, відносно яких здійснюється екстремальне розбиття, не накладається жодних додаткових умов. Отримано оцінку добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей як для випадку, коли всі задані точки скінченні, так і тоді, коли одна з заданих точок — нескінченно віддалена точка розширеної комплексної площини. Наведено також приклади застосувань встановлених оцінок в інших задачах геометричної теорії функцій комплексної змінної. Зокрема, отримано оцінку добутку внутрішніх радіусів областей у проблемі, яка досліджувалася в другому розділі дисертаційної роботи для випадків, коли екстремальні конфігурації невідомі, а також знайдено умову на внутрішні радіуси областей, які містять точки одиничного кола, при якій функціонал, який досліджується в проблемі, обмежений для довільного додатного γ , і наведено відповідні оцінки. Крім того, були отримані деякі оцінки у проблемі, де розглядається функціонал, для якого один полюс відповідного квадратичного диференціала — точка нуль, інший — нескінченно віддалена точка, а решта n полюсів належать одиничному колу. Також в даному розділі показано, яким чином

отримані результати можна застосували для оцінок похідних функцій, однолистих в одиничному крузі, тобто для доведення теорем спотворення. У роботі наведено декілька багатоточкових теорем спотворення, в яких оцінюється добуток похідних функції класу S в n наперед заданих фіксованих точках відкритого одиничного круга за умови, що дані точки попарно не належать одному радіусу вказаного круга.

У четвертому розділі дисертаційної роботи розглядається екстремальна проблема про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей, які містять відповідно n заданих фіксованих точок a_k , але за умови, що внутрішні радіуси областей беруться в деяких фіксованих додатніх степенях γ_k . Повні розв'язки даної проблеми відомі тільки для початкових значень n і деяких заданих степенів γ_k , однак у загальному випадку ця проблема не розв'язана, більш того, навіть не наведено необхідних умов на степені γ_k , для яких відповідний функціонал обмежений при довільній конфігурації точок a_k . В дисертаційній роботі розв'язання даної проблеми зведено до оцінки функціонала, який інваріантний щодо конформних автоморфізмів комплексної площини і отримано його оцінку для довільної конфігурації n неперетинних областей, які містять відповідно n заданих фіксованих скінченних точок, але при виконанні певної умови на степені γ_k . Отримано також аналогічні оцінки за умови, що одна з точок є нескінченно віддаленою. Крім того, в четвертому розділі отримано деякі оцінки еволюційного типу, коли функціонал, який містить добутки внутрішніх радіусів областей у деяких фіксованих степенях α_k , оцінюється за допомогою іншого функціонала, де відповідні степені дорівнюють θ_k , за умови, що $\alpha_k \geq \theta_k$ для всіх $k = \overline{1, n}$. Також наведено теорему, в якій оцінюється добуток деяких степенів похідних функції класу S в n наперед заданих фіксованих точках відкритого одиничного круга за умови, що дані точки попарно не належать одному радіусу вказаного круга.

У п'ятому розділі дисертаційної роботи розглядається задача про екс-

тремально розбиття відкритого одиничного круга з n вільними полюсами. Повне розв'язання даної проблеми відоме тільки для випадків $n = 2$ і $n = 3$. В дисертаційній роботі отримано оцінку для довільного натурального $n \geq 4$, причому знайдено як оцінку зверху, так і знизу, крім того, для оцінки знизу знайдено конфігурацію областей, для якої дана оцінка досягається. Отримані результати були застосовані в задачі про екстремальне розбиття комплексної площини з полюсами на довільному еліпсі, причому в різних її модифікаціях, а саме:

- 1) для n неперетинних областей з фіксованими полюсами на довільному еліпсі за умови $n \geq 3$, причому для випадку трьох неперетинних областей і з фіксованими полюсами на заданому еліпсі M екстремальні конфігурації виписано в явному вигляді;
- 2) для випадку, коли n полюсів належать еліпсу, а один нескінченно віддалений.

Крім того, було отримано оцінки в аналогічній задачі за умови, що відповідні точки лежать на одній або двох гілках канонічної гіперболи. Також отримано оцінку максимуму добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей, які належать комплексній площині з розрізом по відрітку $[-1; 1]$ дійсної осі.

Шостий розділ дисертаційної роботи присвячений оцінці добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей, які містять точки довільної прямої. Для випадку дійсної прямої та n довільних скінченних точок на ній точна оцінка була отримана в 2006 році. В дисертаційній роботі розглядаються випадки, коли:

- 1) одна з точок конфігурації, що розглядається, є нескінченно віддаленою;
- 2) n фіксованих точок належать прямій, а одна лежить поза нею;
- 3) внутрішній радіус однієї з областей береться в деякому дійсному додатному степені γ .

Для даних випадків встановлено як точні, так і (з використанням ме-

тодів і результатів третього розділу) менш точні, однак дещо простіші оцінки. Також отримано оцінку добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей з полюсами на одиничному колі за умови, що внутрішній радіус області, що містить точку 1, береться в степені γ . Застосовані при доведенні даних теорем методи дали змогу отримати оцінку в задачі про екстремальне розбиття комплексної площини з полюсами на відрізьку $[-1; 1]$ дійсної осі.

Загалом, в дисертаційній роботі отримані результати в декількох класичних відкритих проблемах геометричної теорії функцій комплексної змінної, які є суттєвими узагальненнями та посиленнями результатів, раніше отриманих в даній галузі, а саме результатів М.О. Лаврентьєва, Г.М. Голузіна, П.П. Куфарєва, В.М. Дубініна, Г.В. Кузьміної, Л.В. Ковальова, О.К. Бахтіна, І.В. Денеги.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати можуть бути використані при вивченні питань комплексного та гіперкомплексного аналізу, теорії функцій, теорії відображень, голоморфної динаміки, теорії поліномів та теорії струн. Результати також можуть бути застосовані для доведення теорем спотворення, для оцінок коефіцієнтів однолистих функцій та для доведення нерівностей для поліномів та їхніх похідних.

Ключові слова: неперетинні області, конформний і внутрішній радіус області, одиничне коло, функціонал, екстремальне розбиття, функція Гріна, розділяюче перетворення, квадратичний диференціал, теореми спотворення, логарифмічна ємність, трансфінітний діаметр, теорема про мінімізацію площі.

ABSTRACT

Zabolotnyi Ya.V. Conformal mappings and symmetrization methods in extremal problems of geometric functions theory of complex variable. — Manuscript.

Doctor of Sciences Thesis on Physics and Mathematics, speciality 01.01.01 “Mathematical analysis” (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2026.

The thesis is devoted to the study of some open problems on the extremal decomposition of the complex plane by developing new and improving existing methods of geometric function theory of a complex variable. The main attention when using these methods is paid to the properties of conformal mappings and symmetric objects, which allow us to identify certain geometric characteristics of the sought extreme configurations. The paper investigates problems with fixed and free poles of the corresponding quadratic differentials. In this area important results were obtained, in particular, by M.O. Lavrentiev, G.M. Goluzin, P.P. Kufarev, N.I. Kolbina, 3. Hexapi, M.O. Lebedev, P.M. Tamrazov, O.K. Bakhtin, G.P. Bakhtina, P.L. Duren, V.Ya. Gutlyanskii, G.V. Kuz'mina and many other well-known scientists.

The dissertation consists of abstracts in Ukrainian and English, a list of symbols, an introduction, six chapters, conclusions for each chapter, general conclusions, a list of references, and an appendix containing a list of the author's publications and information on the approbation of the dissertation results.

The introduction substantiates the relevance of the dissertation topic, describes the purpose and objectives of the research, shows the scientific novelty of the results obtained, and also outlines the content of the main part of the work.

The first chapter of the thesis is devoted to a review of the literature on the topic of the dissertation, in particular, the necessary definitions are introduced and the research methods used to formulate and prove the main

results of the work are briefly described. In this chapter some basic facts from the theory of conformal mappings are presented, the properties of the transfinite diameter of a closed set are described, basic statements from the theory of quadratic differentials are formulated, are described those special cases of the separating transformation method used in the thesis, and also is introduced the concept of a (m, n) -radial system of points, the main results for these systems are given, which will be used further. In the section 1.6 a brief historical overview of the research direction is provided and the results of predecessors that are needed to prove the main theorems of the paper are presented.

In the second chapter of the thesis the problem of the extremal decomposition of the complex plane with n free poles on the unit circle and with the fixed pole at zero for the case when the inner radius of the domain containing the origin is taken to some positive power γ is investigated. The main research in this section was conducted in three directions. The first direction is to study this problem for the case when n is a fixed natural number, and for the cases $n = \overline{3, 8}$ a real number γ_n is given such that for the given n and $0 < \gamma \leq \gamma_n$ the maximum of the corresponding functional is found and the extreme configuration of the domains where this maximum is achieved is indicated. The second direction of research is to consider the case when n is an arbitrary natural number greater than some fixed n_0 , and for γ , depending on the initial conditions on n and the domain, several ways of specifying an increasing majorant have been found. The third direction is to study the case when the domains containing the points of the unit circle are symmetric with respect to the given circle, and an extreme decomposition of the plane is found under the conditions of the formulated problem both for the case when n is some fixed number, and for the case when n is greater than some fixed n_0 , and for all the mentioned cases, the corresponding restrictions on γ are indicated, for which the specified configuration is extremal. In addition, were obtained sharp estimates in the above-mentioned problem for the case

when some restrictions are imposed on the domain containing the point zero, both with and without the symmetry condition on the domains containing the points of the unit circle.

In the third chapter of the thesis the extremal problem of finding the maximum of product of inner radii of n mutually non-overlapping domains containing n given fixed points is considered, respectively, that is, in other words, the problem of the extremal decomposition of the complex plane with n fixed poles. Currently, this problem has been completely solved only for the cases $n = 2, 3, 4$. In the thesis the case of an arbitrary natural number $n \geq 5$ is considered, and no additional conditions are imposed on the configuration of points for which the extreme decomposition is performed. An estimate of the product of the inner radii of n non-overlapping domains is obtained both for the case when all given points are finite and when one of the given points is an infinitely distant point of the complex plane. Examples of applications of the found estimates in other problems of the geometric theory of functions of a complex variable are also given. In particular, was found an estimate for the product of the inner radii of the domains in the problem studied in the second chapter of the thesis for cases where the extremal configurations are unknown, and was also found conditions for the inner radii of domains containing points of the unit circle under which the functional studied in the problem is bounded for any positive γ , and the corresponding estimates were given. In addition, were obtained some estimates in the problem where is considered a functional for which one pole of the corresponding quadratic differential is the point zero, the other is an infinity, and the remaining n poles belong to the unit circle. In this chapter also is shown how the obtained results can be applied to estimates of derivatives of functions that are univalent in the open unit disc, that is, to prove distortion theorems. In the thesis is presented several so-called multipoint distortion theorems, in which the product of derivatives of a function of class S at n predetermined fixed points of an open unit disc is estimated, provided that the given points do not belong

to the same radius of the specified disc in pairs.

In the fourth chapter of the thesis is considered an extreme problem similar to the one considered in the third section, namely the problem of finding the maximum of product of inner radii of n non-overlapping domains containing respectively n given fixed points a_k , but provided that the inner radii of the domains are taken in some fixed positive powers of γ_k . Complete solutions to this problem are known only for initial values n and some given powers γ_k , but in the general case this problem is unsolved, moreover, even necessary conditions on powers γ_k for which the corresponding functional is bounded for an arbitrary configuration of points a_k are not given. In the thesis, the solution of this problem is reduced to the estimation of a functional that is invariant with respect to conformal automorphisms of the complex plane and its estimate is obtained for an arbitrary configuration of n non-overlapping domains that contain respectively n given fixed finite points, but under the fulfillment of a certain condition on powers γ_k . Similar estimates are also obtained provided that one of the points is infinitely distant. In addition, in the fourth chapter, some evolutionary-type estimates are obtained, when a functional containing the products of the inner radii of the domains in some fixed powers α_k is estimated using another functional where the corresponding powers are equal to θ_k , provided that $\alpha_k \geq \theta_k$ for all $k = \overline{1, n}$. A theorem in which the product of some powers of the derivatives of a function of class S at n predetermined fixed points of an open unit disc is estimated is also given, provided that the given points do not belong in pairs to the same radius of the specified circle.

In the fifth chapter of the thesis the problem of the extremal decomposition of an open unit circle with n free poles is considered. The complete solution to this problem is known only for the cases $n = 2$ and $n = 3$. In the thesis an estimate for an arbitrary natural number $n \geq 4$ is obtained, and both an upper and lower estimate are found, and for the lower estimate, a configuration of domains is found for which this estimate is achieved. The

obtained results were applied to the problem of the extreme decomposition of the complex plane with poles on an arbitrary ellipse in its various modifications, namely: for n non-overlapping domains with fixed poles on an arbitrary ellipse under the condition $n \geq 3$, and for the case of three non-overlapping domains and with fixed poles on a given ellipse M the extreme configurations are written out in explicit form; for the case when n poles belong to the ellipse and one is infinitely distant. In addition, were obtained some estimates in a similar problem provided that the corresponding points lie on one or two branches of the canonical hyperbola. An estimate of the maximum of the product of the inner radii of n non-overlapping domains belonging to the complex plane with a cut along the segment $[-1; 1]$ of the real axis is also obtained.

The sixth chapter of the thesis is devoted to estimating the product of the inner radii of non-overlapping domains containing points on an arbitrary line. For the case of a real line and n arbitrary finite points on it, an exact estimate was obtained in 2006. In the thesis are considered cases when one of the points of the configuration under consideration is infinitely distant; when n fixed points belong to a line, and one lies outside it; when the inner radius of one of the domains is taken to some real power γ . For these cases, both accurate and, using the methods and results of the third chapter, less accurate, but somewhat simpler estimates were found. An estimate of the product of the inner radii of n non-overlapping domains with poles on the unit circle was also found, provided that the inner radius of the domain containing point 1 is taken to the power γ . The methods used in proving these theorems made it possible to obtain an estimate in the problem of the extreme partition of the complex plane with poles on the segment $[-1; 1]$ of the real axis.

In general, in the thesis are obtained results in several classical open problems of the geometric theory of functions of a complex variable, which are significant generalizations and strengthenings of results previously

obtained in this field, namely the results of M.O. Lavrentiev, G.M. Goluzin, P.P. Kufarev, V.M. Dubinin, G.V. Kuz'mina, L.V. Kovalev, O.K. Bakhtin, I.V. Denega.

The practical significance of the results. Thesis is a theoretical investigation. The obtained results can be used in the study of complex and hypercomplex analysis, function theory, mapping theory, holomorphic dynamics, polynomial theory and string theory. The results can be applied to distortion theorems, estimates of coefficients of univalent functions and to obtain inequalities for polynomials and their derivatives.

Key words: non-overlapping domains, conformal radius of the domain, an inner radius of the domain, the unit circle, functional, extremal decomposition, the Green function, separating transformation, quadratic differential, distortion theorems, logarithmic capacity, transfinite diameter, theorem on minimizing of the area.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

1. Zabolotnyi, Y., Denega, I. On products of inner radii of non-overlapping domains containing certain segment points // Complex Variables and Elliptic Equations. 2025. Vol. 70, No. 9, P. 1584–1597. <https://doi.org/10.1080/17476933.2024.2416413> (**SJR — Q2**).

2. Denega, I., Zabolotnyi, Y. Using conformal radii of the open unit disk sectors in distortion theorems for univalent functions // Complex Anal Synerg. 2025. Vol. 11, 8. <https://doi.org/10.1007/s40627-025-00157-1> (**SJR — Q3**).

3. Заболотний Я.В. Оцінки еволюційного типу для добутків деяких степенів внутрішніх радіусів багатозв'язних областей // Український математичний журнал, 2025, Т. 77, № 5, С. 314–323. <https://doi.org/10.3842/umzh.v77i5.8919> (переклад: Zabolotnyi Y. Evolutionary-Type Estimates for the Products of Some Powers of the Inner Radii of Multiply Connected Domains // Ukr. Math. J., 2025, Vol. 77, No. 5, P. 721–730. <https://doi.org/10.1007/s11253-025-02485-1>)(**SJR — Q3**).

4. Denega I., Zabolotnyi Y., Estimates of the functional with fixed points on a hyperbola branches // Proceedings of the International Geometry Center, 2025, Vol. 18, No. 2, P. 207–219. <https://doi.org/10.15673/pigc.v18i2.3082> (**SJR — Q3**).

5. Zabolotnyi, Y., Denega, I. A note on conformal mappings onto mutually non-overlapping domains // An. St. Univ. Ovidius Constanta. 2025. Vol. 33, No. 3, P. 215–228. <https://doi.org/10.2478/auom-2025-0035> (**SJR — Q3**).

6. Денег І.В., Заболотний Я.В. Про добутки внутрішніх радіусів областей, що задовольняють умову часткового перетину // Український математичний вісник. 2025. Т. 22, № 3. С. 301–322. (переклад: Iryna Denega, Yaroslav Zabolotnyi. On the products of inner radii of domains satisfying the partial-intersection condition // Journal of Mathematical Sciences, 2025, Vol. 294, No. 5, P. 651–668. <https://doi.org/10.1007/s10958-025-08124->

1) (**SJR — Q3**).

7. Denega I., Zabolotnyi Y. Estimates for sums of logarithmic potentials associated with the Green function // *Researches in Mathematics*. 2025. Vol. 33, No. 3. P. 14–22. <https://doi.org/10.15421/242524> (**SJR — Q2**)

8. Denega I.V., Zabolotnyi Ya.V. Some extremal problems on the Riemannian sphere // *Carpathian Mathematical Publications*, 2024, Vol. 16, No. 2, P. 593–605. <https://doi.org/10.15330/cmp.16.2.593-605> (**SJR — Q1**).

9. Денег І.В., Заболотний Я.В. Про добутки внутрішніх радіусів областей, що містять точки деякої прямої // *Український математичний вісник*, 2024, Т. 21, № 2, С. 1–20. (переклад: Denega I.V., Zabolotnyi Ya.V. On products of the inner radii of the domains containing points of some straight line // *Journal of Mathematical Sciences*, 2024, Vol. 284, No. 3, P. 299–314. <https://doi.org/10.1007/s10958-024-07351-2>) (**SJR — Q3**).

10. Заболотний Я.В. Задача про максимум добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей, деякі з яких симетричні відносно одиничного кола // *Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України*. 2024. Т. 38, № 2, С. 67–78. <https://doi.org/10.37069/1683-4720-2024-38-7> (Категорія "Б")

11. Denega I.V., Zabolotnyi Ya.V., Application of upper estimates for products of inner radii to distortion theorems for univalent functions // *Matematychni Studii*, 2023, Vol. 60, No. 2, P. 138–144. <https://doi.org/10.30970/ms.60.2.138-144> (**SJR — Q3**).

12. Бахтін О.К., Заболотний Я.В. Оцінки добутків деяких степенів внутрішніх радіусів багатозв'язних областей // *Український математичний журнал*, 2021, Т. 73, № 9, С. 1155–1169. <https://doi.org/10.37863/umzh.v73i9.6682> (переклад: Bakhtin A.K., Zabolotnii Y. Estimation of the Products of Some Powers of Inner Radii for Multiconnected Domains // *Ukr. Math. J.*, 2022, Vol. 73, P. 1341–1358. <https://doi.org/10.1007/s11253-022-01998-3>) (**SJR — Q3**).

13. Заболотний Я.В. Проблема В.М. Дубініна для симетричних ба-

гатов'язних областей // Український математичний журнал, 2020, Т. 72, № 11, С. 1502–1509. <https://doi.org/10.37863/umzh.v72i11.6064> (переклад: Zabolotnii Y.V. The Problem of V. N. Dubinin for Symmetric Multiconnected Domains // Ukr. Math. J., 2021, Vol. 72, P. 1733–1741. <https://doi.org/10.1007/s11253-021-01884-4>) (**SJR — Q2**).

14. Бахтін О.К., Заболотний Я.В. Оцінки добутків внутрішніх радіусів багатозв'язних областей // Український математичний журнал, 2021, Т. 73, № 1, С. 9–22. <http://doi.org/10.37863/umzh.v73i1.6200> (переклад: Bakhtin A.K., Zabolotnii Y. Estimates of the Products on Inner Radii for Multiconnected Domains // Ukr. Math. J., 2021, Vol. 73, P. 6–21. <https://doi.org/10.1007/s11253-021-01904-3>) (**SJR — Q2**).

15. Zabolotnii Ya.V., Denega I.V. An extremal problem on nonoverlapping domains containing ellipse points // Eurasian Math. J., 2021, Vol. 12, No. 4, P. 82–91. <https://doi.org/10.32523/2077-9879-2021-12-4-82-91> (**SJR — Q3**).

16. Бахтін О.К., Заболотний Я.В. Задача про добуток внутрішніх радіусів чотирьох неперетинних областей, деякі з яких симетричні відносно одиничного кола // Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України, 2019, Т. 33, С. 27–32. <http://doi.org/10.37069/1683-4720-2019-33-2> (Категорія "Б")

17. Бахтин А.К., Заболотный Я.В. Оценки произведения внутренних радиусов неналегающих областей // Український математичний вісник, 2016, Т. 13, № 2, С. 148–156. (переклад: Bahtin A.K., Zabolotnii Ya.V. Estimates of a product of the inner radii of nonoverlapping domains // Journal of Mathematical Sciences, 2017, Vol. 221, No. 5, P. 623–629. <https://doi.org/10.1007/s10958-017-3255-1>) (**SJR — Q3**).

ДОДАТКОВІ ПУБЛІКАЦІЇ

18. Денега І.В., Заболотний Я.В. Екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами на одиничному колі // Актуальні проблеми сучасної математики: методи, моделі та застосування / Зб. праць Ін-ту мат. НАН України, К.: Ін-т мат. НАН України, 2024, Т. 21, № 1, С. 71–81. <https://doi.org/10.3842/trim.v21n1.541>

19. Denega I.V., Zabolotnyi Ya.V., O.K. Bakhtin. Scientific legacy // Proceedings of the International Geometry Center, 2023, Vol. 16, No. 1, P. 1–16. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v16i1.2387>.

20. Заболотний Я.В. Оцінки добутків деяких функціоналів на класах функцій без спільних значень // Комплексний аналіз і та його застосування / Зб. праць Ін-ту мат. НАН України, К.: Ін-т мат. НАН України, 2022, Т. 19, № 1, С. 135–152.

21. Заболотний Я.В. Оцінки добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей в $\mathbb{C}$ // Зб. праць Ін-ту мат. НАН України. – К.: Ін-т мат. НАН України, 2017, Т. 14, № 1, С. 156–162.

22. Заболотний Я.В. Знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей // Доп. Нац. Акад. наук України, 2016, № 3, С. 7–13. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2016.03.007>

23. Бахтин А.К., Заболотный Я.В. Об одном частном случае известной проблемы В.Н. Дубинина // Праці інституту прикладної математики і механіки НАН України. 2015, Т. 29, С. 17–22.

24. Бахтін О.К., Заболотний Я.В. Оцінки добутку внутрішніх радіусів чотирьох неперетинних областей. <http://arxiv.org/pdf/1509.02496.pdf>, 2015.

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ НА КОНФЕРЕНЦІЯХ

1. Iryna Denega, Yaroslav Zabolotnyi. On products of the inner radii of the domains containing points of some straight line. // International

conference "Complex and hypercomplex analysis and their applications". Ukraine, Zhytomyr, August 6 — 10, 2025.: Book of abstracts. — p. 8-9.

2. Zabolotnyi Ya.V. Application of upper estimates for products of inner radii to distortion theorems // 15 ISAAC Congress 2025. Astana, Nazarbayev University (Kazakhstan) 21 – 25 July 2025.: Book of abstracts. — p. 62-63.

3. Деніга І.В., Заболотний Я.В. Про добутки конформних радіусів областей відносно точок деякої прямої. International Conference of Young Mathematicians June 4–6, 2025, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine (online), Kyiv, Ukraine. <https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2025/abstracts/Denega-Zabolotnyi.pdf>

4. Заболотний Я.В. Застосування оцінок добутку конформних радіусів неперетинних областей до теорем спотворення. Конференція молодих вчених "Підстригачівські читання". Львів, 27-29 травня 2025р.

5. Denega I., Zabolotnyi Ya. Extremal Problem on Three Non-Overlapping Domains Containing Ellipse Points. 1st Ukrainian scientific and practical conference with international participation «Modern Problems of Mathematics: Applied aspects», May 30, 2024, Zhytomyr, Ukraine.

6. Iryna Denega and Yaroslav Zabolotnyi. Extremal problem on domains containing ellipse points. Конференція молодих вчених "Підстригачівські читання". Львів, 27-29 травня 2024р. <http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2024/abstracts/Denega.pdf>

7. Zabolotnyi Ya.V. Some estimates of the products of some powers of the inner radii of multiconnected domains // 14 ISAAC Congress 2023. *Ribeirão Preto – São Paulo* (Brazil) 17 – 21 July 2023.: Book of abstracts. — <https://dcm.ffclrp.usp.br/isaac/abstracts.pdf>. — p. 53.

8. Заболотний Я.В. Оцінки деяких функціоналів на класах функцій без спільних значень // International Conference of Young Mathematicians. Kyiv (Ukraine) 1 – 3 June 2023.: https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2023/Abstracts_2023/

TFFA/Zabolotnyi.pdf

9. Заболотний Я.В. Оцінки деяких функціоналів на класах функцій без спільних значень // Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики - 2023". 23–25 травня 2023 р., Львів: Тези доповідей. — Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2023. — С. 311 — 312.

10. Заболотний Я.В. Оцінки добутків деяких степенів внутрішніх радіусів неперетинних багатозв'язних областей. Конференція молодих вчених "Підстригачівські читання". Львів, 25-27 травня 2022р. <http://iapmm.lviv.ua/chyt2022/abstracts/Zabolotnyi.pdf>

11. A.K. Bakhtin, Ya.V. Zabolotnii. Estimates of the products of the inner radii of multiconnected domains. The International Conference in Complex and Functional Analysis dedicated to the memory of Bohdan Vynnytskyi. Збірник тез. Drohobych 13 — 16 September, 2021, Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University, 2021, - p. 6.

12. A.K. Bakhtin, Ya.V. Zabolotnii. Estimates of the products of the inner radii of multiconnected domains. International conference Complex Analysis and Related Topics dedicated to the 90-th anniversary of A.A. Goldberg (1930-2008) Abstracts. Lviv, June 28 — July 1, 2021, Ivan Franko National University of Lviv, 2021, - p. 6.

13. Заболотний Я.В. Задача про добуток внутрішніх радіусів неперетинних областей, деякі з яких симетричні відносно одиничного кола. // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: Всеукраїнська наукова конференція, тези доповідей. Ворохта, 25 лютого — 1 березня 2020 р. — Івано-Франківськ: ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника», 2020. — с. 45-46.

14. Denega I., Zabolotnij Ja. On the problem of extremal decomposition of the complex plane // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: Всеукраїнська наукова конференція, тези доповідей. Ворохта, 22-25 лютого 2017 р. — Івано-Франківськ: ДВНЗ «Прикарпатський

національний університет імені Василя Стефаника», 2017. – с. 73-75.

АПРОБАЦІЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НА СЕМІНАРАХ

1. Iryna Denega, Yaroslav Zabolotnyi. On products of inner radii of domains relative to fixed points of the complex plane. International Workshop within the framework of the HORIZON-2020 project SOMPATY, May 12-16, 2025, Kyiv, Ukraine (SOMPATY-2025).

2. Yaroslav Zabolotnyi. Application of upper estimates for products of inner radii to distortion theorems. (Hyper)Complex Seminar 2024 in memoriam of prof. Julian Lawrynowicz, September 14-18, 2024 - Poland - p. 80.

3. Yaroslav Zabolotnyi. Estimates of products of some powers of inner radii for multiconnected domains. (Hyper)Complex Seminar 2021 in memoriam of prof. Julian Lawrynowicz November 11-14, 2021 -Bedlewo, Poland - p. 71.

4. Семінарах відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор С.А. Плакса).

5. Науковому семінарі "Теорія відображень і алгебр Лі"(керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор Є.О. Севостьянов).

6. Львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор О.Б. Скасків).

7. Семінарі відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор А.С. Романюк).

8. Семінарі "Сучасний аналіз"в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка (керівники: академік НАН України І.О. Шевчук, доктори фіз.-мат. наук О.О. Курченко, В.М. Радченко, А.В. Чайковський).

Зміст

Список умовних позначень	25
Вступ	27
1 Огляд літератури за темою дисертації	68
1.1 Конформний та внутрішній радіуси області. Функція Гріна	68
1.2 Трансфінітний діаметр замкненої множини	75
1.3 Квадратичні диференціали	77
1.4 Метод розділяючого перетворення	82
1.5 m, n -променеві системи точок та основні результати, з ними пов'язані	85
1.6 Короткий історичний огляд та результати попередників, які використовуються в роботі	89
Висновки до розділу 1	102
2 Задача про екстремальне розбиття комплексної площини з n вільними полюсами на одиничному колі та з фіксованим полюсом в точці нуль	103
2.1 Формулювання проблем та деякі допоміжні твердження, які використовуються при доведенні основних результатів	103
2.2 Розв'язання проблеми 2.1.1 для деяких фіксованих значень n та при певних обмеженнях на степінь внутрішнього радіуса області, що містить точку нуль	114

2.3. Екстремальне розбиття комплексної площини, задане умовами проблеми 2.1.1, для випадку довільного натурального n , починаючи з деякого номера	127
2.4. Екстремальне розбиття комплексної площини для випадку, коли області, які містять точки одиничного кола, симетричні відносно даного кола	157
Висновки до розділу 2	179
3 Задача про екстремальне розбиття комплексної площини з n довільними фіксованими полюсами	180
3.1 Деякі допоміжні твердження, які використовуються при доведенні основних результатів розділу	180
3.2. Оцінки добутків внутрішніх радіусів неперетинних областей відносно n наперед заданих точок	183
3.3. Застосування теореми 3.2.1 для отримання оцінок в інших екстремальних задачах геометричної теорії функцій	193
3.4. Теореми спотворення	205
3.5. Еволюційні нерівності для добутків внутрішніх радіусів . .	214
Висновки до розділу 3	222
4 Задача про добуток деяких степенів внутрішніх радіусів неперетинних областей відносно n наперед заданих фіксованих точок	223
4.1 Деякі допоміжні твердження, які використовуються при доведенні основних результатів	223
4.2. Оцінки добутків деяких степенів внутрішніх радіусів неперетинних областей відносно n наперед заданих фіксованих точок	228
4.3. Оцінки добутку деяких степенів внутрішніх радіусів еволюційного типу	239

4.4. Застосування отриманих оцінок в інших екстремальних за- дачах геометричної теорії функцій	245
4.5. Застосування отриманих оцінок в теоремах спотворення . .	250
Висновки до розділу 4	255
5 Екстремальне розбиття обмеженої області та деякі пов'язані задачі	256
5.1. Формулювання проблеми та деякі допоміжні твердження .	256
5.2. Оцінки добутку внутрішніх радіусів n неперетинних обла- стей, які лежать у відкритому одиничному крузі	259
5.3. Оцінки добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей, які містять точки довільного еліпса	263
5.4. Оцінки добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей, які містять точки деякої гіперболи	275
Висновки до розділу 5	282
6 Оцінки добутку внутрішніх радіусів неперетинних обла- стей, які містять точки довільної прямої	283
6.1. Формулювання проблеми та деякі допоміжні твердження .	283
6.2. Оцінки добутку внутрішніх радіусів областей, що містять точки деякої прямої	285
6.3. Задача про екстремальне розбиття комплексної площини з полюсами на дійсній прямій та деякі її модифікації	293
6.4. Оцінки добутку внутрішніх радіусів неперетинних обла- стей, які містять точки прямої для випадку, коли внутрі- шній радіус одної з областей береться в деякому додатному степені	299
Висновки до розділу 6	306
Висновки	307
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	309

Список умовних позначень

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;

$\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел;

$\mathbb{R}^+$ — множина додатних дійсних чисел;

$\mathbb{C}$ — множина комплексних чисел;

$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ — розширена комплексна площина;

$\operatorname{Re} z$ — дійсна частина комплексного числа z ;

$\operatorname{Im} z$ — уявна частина комплексного числа z ;

$\mathbb{R}^n$ — n -вимірний дійсний простір;

$\mathbb{C}^n$ — n -вимірний комплексний простір;

$U = \{z : |z| < 1\}$ — відкритий одиничний круг;

$x \in E$ — елемент x належить множині E ;

$X \subset E$ — множина X є підмножиною множини E ;

$R(B, a)$ — конформний радіус області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ (стор. 69, ozn. 1.1.2; стор. 71, ozn. 1.1.3, 1.1.4);

$r(B, a)$ — внутрішній радіус області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ (стор. 73, ozn. 1.1.6, 1.1.7);

$g_D(z, z_0)$ — функція Гріна області D з полюсом в точці z_0 (стор. 72, ozn. 1.1.5);

$Q(z)dz^2$ — квадратичний диференціал (стор. 77, ozn. 1.3.1);

$d(E)$ — трансфінітний діаметр компактої множини $E \subset \mathbb{C}$ (стор. 75, ozn. 1.2.1);

$d_n(\{a_p\}_{p=1}^n)$ — n -й діаметр системи точок a_p , $p = \overline{1, n}$ (стор. 189, під-розділ 3.2.1);

α_k, α_0 — кутові параметри (стор. 85-86, озн. 1.5.1);
 $A_{m,n}$ — (m, n) -променева система точок (стор. 85, озн. 1.5.2).
 $M_R(A_{m,n}), M(A_{m,n})$ — "керуючі" функціонали (стор. 86, озн. 1.5.3, ф-ли 1.5.3 і 1.5.4).
 A_n — n -променева система точок (стор. 88, озн. 1.5.4).
 $\mathcal{L}(A_n)$ — "керуючий" функціонал (стор. 88, ф-ла 1.5.11).

Вступ

Актуальність теми. Геометрична теорія функцій комплексної змінної вивчає геометричні властивості відображень, які здійснюють аналітичні функції, а також геометричні властивості різноманітних підкласів класу аналітичних функцій. Ця тематика є важливою частиною математичного аналізу, її вивчали в своїх роботах багато відомих вчених: А. Пуанкаре, П. Кьобе, Л. Бібербах, К. Каратеодорі, Т. Гронуолл, М.О. Лаврентьєв, Г. Пойя, Г. Грьотш, Д. Гільберт, О. Тейхмюллер, Л. Альфорс, Г.М. Голузін, Г. Льовнер, А. Шеффер, Д. Спенсер, Л.І. Колбіна, П.П. Куфарев, А.Е. Фалес, З. Нехарі, М.О. Лебедев, В.К. Хейман, І.М. Мілін, П.М. Тамразов, К. Померенке, Ю.Є. Алєніцин, І.Є. Базілевич, І.А. Александров, І.П. Мітюк, К. Фітцджеральд, Дж.А. Дженкінс, В.Я. Гутлянский, М. Шиффер, П.Л. Дюрєн, О.К. Бахтін, Г.П. Бахтіна, Г.В. Кузьміна, В.М. Дубінін, Є.Г. Ємельянов, В.І. Рязанов та інші.

Першими задачами в геометричній теорії функцій були задачі на дослідження екстремальних властивостей однолистих функцій, тобто таких функцій, значення яких в різних точках області визначення є різними. Особливий інтерес саме до однолистих відображень зумовлений тим, що такі відображення мають ряд важливих екстремальних властивостей у більш загальних класах конформних відображень. Але відсутність на множині однолистих функцій структури, яка б перетворювала дану множину на лінійний простір, зумовила пошук нових методів для розв'язання екстремальних задач. Зокрема, теорема Б. Рімана, яка дає відповідь на питання про існування конформного відображення до-

вільної одновзв'язної області комплексної площини з межею, яка містить більше ніж одну точку, на одиничний круг, призвела до введення поняття конформного радіуса області, різноманітні властивості якого часто використовувалися при розв'язанні вказаних задач.

Одними з перших робіт, де більш системно досліджувалися властивості однолистих функцій, були роботи П. Кьобе (див., наприклад, [109]–[110]), де, зокрема, розглядалася проблема відповідності меж при конформному відображенні. Роботи П. Кьобе дали поштовх для розвитку методу площ. Одним з перших результатів у цьому напрямку була так звана "теорема площ" Гроноулла [88], яка відображає наступний геометричний факт: при відображенні області $|\zeta| > \rho$, $\rho > 1$ за допомогою функції $F(\zeta) = \zeta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\zeta^k}$ непокритою залишається частина площини, яка має додатну площу. Теорема Гроноулла була також першою теоремою "спотворення". Спираючись на згадані вище роботи, Л. Бібербах [43] у 1916 р. висловив гіпотезу, що на класі S однолистих і регулярних у відкритому одиничному крузі функцій правильна нерівність $|c_n| \leq n$, де c_n — коефіцієнти розкладу згаданої функції в ряд Тейлора. Дана гіпотеза була доведена лише у 1984 р. Л. де Бранжем (див. [44], інше доведення цього результату див. [5]). За допомогою методу площ багато важливих результатів було отримано М.О. Лебєдєвим та ін. (див., наприклад, [132].)

Дослідження гіпотези Л. Бібербаха дало поштовх для розвитку ряду інших методів геометричної теорії функцій комплексної змінної. Зокрема, Г. Льовнер вивів рівняння для сім'ї відображень, які збігаються до даної функції з класу S , що стало основою для параметричного методу.

Наступним методом вивчення екстремальних проблем став метод внутрішніх варіацій, розроблений в роботах М. Шиффера (див. [160]) та Г.М. Голузіна (див. [83]). Цей метод полягає у відшукуванні диференціального рівняння, яке задовільняє відповідна екстремальна функція, що дозволило розв'язати багато екстремальних проблем, де вдалося отримати розв'язки відповідних рівнянь.

У 1928 р. виник метод смуг Х. Грьотша (див. [89]). Саме ідеї, висловлені в роботах Х. Грьотша, сприяли розвитку теорії квадратичних диференціалів. Так, О. Тейхмюллер висловив принцип, згідно з яким розв'язку кожної екстремальної задачі відповідає деякий квадратичний диференціал. Пізніше Дж. Дженкінсом було доведено основну теорему про коефіцієнти (див. [102]), наслідками з якої є багато важливих результатів теорії однолистих функцій. Саме на основі методу смуг Х. Грьотша був розвинений метод екстремальної метрики. Суттєвий вклад в розвиток цього методу вніс П.М. Тамразов. Зокрема, ним було доведено теорему про лінійні інтеграли для екстремальної довжини (див. [215]). Дана теорема виступає надійним інструментом аналізу екстремальних образів у задачах, що стосуються конформних відображень багатозв'язних та нескінченнозв'язних областей.

В другій половині 20 ст. в геометричній теорії функцій комплексної змінної при розв'язуванні екстремальних задач широко використовувалися симетризаційні методи. В основі цих методів лежить ідея, що екстремальні конфігурації потрібно шукати серед об'єктів, які мають певну симетрію. Серед робіт, на основі яких були розроблені вказані методи, відзначимо праці У. Хеймана [97], Дж. Дженкінса [102], І.П. Мітюка [135, 136]. Серед симетризаційних методів найбільше поширення отримав метод розділяючого перетворення, розроблений і описаний в роботах [65], [70]. За допомогою цього методу багато суттєвих результатів в екстремальних задачах було отримано О.К. Бахтінім (див. [24]).

Загалом, різним методам геометричної теорії функцій, а також результатам, які за допомогою цих методів вдалося отримати, присвячено чимало монографій та статей. Серед них відзначимо, наприклад, роботи І.О. Александрова [4], Г.М. Голузіна [83], Дж. Дженкінса [102, 104], В.М. Дубініна [65, 70], Г.В. Кузьміної [123, 125, 126], С. Стоїлова [166], М.А. Лебедева [132], У. Хеймана [97], П.Л. Дюрена [73], Л. Шиффера [163], А.В. Гудмана [85], К. Поммеренке [146].

Вказана тематика теорії функцій також суттєво розвивала київською науковою школою. Так, в роботах П.М. Тамразова було зроблено суттєвий вклад в розв'язання відомої проблеми М.Г. Чеботарьова, а саме було запропоновано метод, який полягає у відшукуванні континууму найменшої ємності, який містить дані фіксовані точки (див. [175]), а також було висунуто ідею розглядати екстремальні задачі не тільки з фіксованими, але і з вільними полюсами відповідних квадратичних диференціалів (див., наприклад, [168, 171]). О.К. Бахтінім (див. [24]) був розроблений метод "керуючих" функціоналів, який дозволив суттєво розширити і доповнити відомі результати в екстремальних задачах геометричної теорії функцій, зокрема, отримати точні оцінки добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей з полюсами відповідних квадратичних диференціалів на т.зв. m, n -променевих системах точок. Серед інших робіт співробітників відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України з даної тематики відзначимо публікації О.К. Бахтіна [9, 10, 20, 23, 36], А.Л. Таргонського [176, 178, 179], В.Є. В'юн [197], І.В. Денєги [48, 51, 52], Л.В. Вигівської [32, 183], І.Я. Дворак [47]. Крім того, співробітниками відділу, зокрема С.І. Плаксою та його учнями, було зроблено суттєвий вклад в дослідження моногенних функцій в комутативних та некомутативних алгебрах [142–144].

Результати, отримані при розв'язуванні екстремальних задач, а також розроблені методи знайшли численні застосування в механіці, теорії наближення, геометрії і топології, алгебрі многочленів, теорії струн. Серед значної кількості опублікованих праць відзначимо роботи М.О. Лаврентьєва [129, 130], С.Н. Мергеляна [134], П.М. Тамразова [169], Р. Куранта [46], І.О. Шевчука [162], В.М. Дубініна [69], Г. Міловановіча [137], К. Рахмана і Г. Шмейсера [147], Г. Міна [138], С.Л. Валі [184], А.Г. Фірата [81].

Однак, незважаючи на те, що кожен з перелічених методів забезпечив суттєвий прорив при розв'язанні задач геометричної теорії функцій

комплексної змінної, багато екстремальних задач у цьому розділі математики залишаються на даний момент відкритими, причому значна частина з них відомі вже досить давно. Оскільки до екстремальних задач часто зводяться інші проблеми геометричної теорії функцій, зокрема теореми спотворення для однолистих і багатолістих функцій, оцінки коефіцієнтів, а також ряд проблем в суміжних розділах математики, то актуальною є задача розробки нових та вдосконалення вже відомих методів для отримання точних розв'язків екстремальних задач, а також отримання ефективних оцінок відповідних функціоналів.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана у відділі комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України в рамках наукових тем “Аналітичні та геометричні проблеми комплексного і гіперкомплексного аналізу” (номер державної реєстрації 0121U100414), “Метричні та геометричні задачі теорії аналітичних і субгармонічних функцій та множин” (номер державної реєстрації 0116U003060) та “Розробка аналітичних та чисельно-аналітичних методів дослідження задач сучасного природознавства” (номер державної реєстрації 0117U004077).

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є вдосконалення та модифікація відомих, а також створення нових методів і підходів для розв'язання задач про екстремальне розбиття комплексної площини, а також застосування отриманих результатів в інших задачах теорії функцій та суміжних галузях математики.

Об'єктом дослідження є функціонали, задані на класах неперетинних областей розширеної комплексної площини чи на класах однолистих функцій без спільних значень.

Предметом дослідження є знаходження максимумів вказаних функціоналів і опис екстремальних конфігурацій там, де це можливо.

Завдання дослідження — отримати оцінки для функціоналів, заданих на класах неперетинних областей, зокрема:

1) отримати оцінку зверху для добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей розширеної комплексної площини з фіксованими полюсами, причому розглянути як випадок, коли всі полюси скінченні, так і випадок, коли один з них — нескінченно віддалена точка;

2) отримати оцінку зверху добутку степенів внутрішніх радіусів n неперетинних областей розширеної комплексної площини з фіксованими полюсами, а також знайти достатню умову на показники степенів, за якої вказаний добуток обмежений для довільної конфігурації полюсів;

3) отримати оцінки добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей в задачі про екстремальне розбиття відкритого одиничного круга;

4) дослідити відкриту проблему про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів n областей відносно точок одиничного кола на степені γ внутрішнього радіусу області відносно точки нуль за умови, що всі області попарно не перетинаються, а також аналогічну проблему, за умовами якої області, які містять точки одиничного кола, симетричні відносно даного кола та отримати, за можливості точні оцінки;

5) отримати оцінки добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей за умови, що на полюси відповідних квадратичних диференціалів накладено певні обмеження, наприклад, якщо вони лежать на деякій прямій, відрізку, еліпсі чи гіперболі;

6) знайти можливі застосування отриманих результатів як в інших задачах геометричної теорії функцій, так і в інших галузях математики, зокрема, отримати за їх допомогою нові теореми спотворення для однолистих функцій.

Методи дослідження. При розв'язанні завдань дисертаційної роботи використовуються методи геометричної теорії функцій комплексної змінної, насамперед, метод розділяючого перетворення, методи теорії конформних відображень та теорії квадратичних диференціалів.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі отримані в роботі результати є новими. В дисертації розроблено нові підходи й методи

для вивчення задач про екстремальне розбиття комплексної площини, завдяки яким:

1) отримано оцінки зверху добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей розширеної комплексної площини з фіксованими полюсами; за допомогою цих оцінок було доведено низку нерівностей в інших екстремальних задачах геометричної теорії функцій, а також доведено нові багатоточкові теореми спотворення як для функцій, регулярних і однолистих в одиничному крузі, так і для функцій, які регулярно і однолисто відображають вказаний круг на області, зіркоподібні відносно точки нуль;

2) отримано оцінки зверху добутку степенів внутрішніх радіусів n неперетинних областей розширеної комплексної площини з фіксованими полюсами, причому встановлено достатню умову для показників степенів, за якої вказаний добуток обмежений, а також отримані оцінки використано для доведення багатоточкових теорем спотворення;

3) отримано оцінки добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей, які лежать у відкритому одиничному крузі, а також за допомогою отриманих оцінок одержано оцінку добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей з полюсами на еліпсі, одній чи двох гілках канонічної гіперболи;

4) для багатьох частинних випадків розв'язано відкриту проблему про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів n областей відносно точок одиничного кола на степінь γ внутрішнього радіусу області відносно точки нуль за умови, що всі області попарно не перетинаються, а також для багатьох частинних випадків розв'язано аналогічну проблему, за умовами якої області, які містять точки одиничного кола, симетричні відносно даного кола;

5) розв'язано декілька варіантів задачі про екстремальне розбиття комплексної площини з полюсами на довільній прямій, зокрема розглянуто випадок, коли n точок лежать на дійсній прямій, а одна точка поза

прямою; випадок, коли всі полюси лежать на прямій, але внутрішній радіус однієї з областей береться в деякому дійсному додатному степені γ ; також отримано оцінку добутків внутрішніх радіусів неперетинних областей з вільними полюсами на відрізок $[-1; 1]$.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Одержані результати і розвинені в ній методи можуть бути використані, насамперед, при вивченні питань комплексного та гіперкомплексного аналізів, теорії многочленів, теорії функцій, теорії апроксимації, теорії струн. На основі доведених оцінок можна одержати нові оцінки для функцій, що реалізують конформне відображення кола на області з деякими спеціальними властивостями. Результати також можуть бути застосовані до теорем спотворення, оцінок коефіцієнтів однолистих функцій та в голоморфній динаміці.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку та загального плану досліджень, постановка задач, а також допомога у підборі методів досліджень належать професору О.К. Бахтіну та науковому консультанту С.А. Плаксі. У спільних роботах з О.К. Бахтіним особистий внесок здобувача полягає у перевірці робочих гіпотез і детальному доведенні тверджень. У статтях з І.В. Денегою особистий внесок здобувача полягає у виборі методів розв’язання задач та доведенні результатів. Всі спільні статті здобувача з співавторами, результати яких було включено в дисертацію, були опубліковані вже після здобуття останніми наукового ступеня доктора фізико-математичних наук. Доведення всіх результатів дисертації, які виносяться на захист, автор провів особисто.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідались на таких конференціях:

- Ukraine Scientific Conference “Modern Problems Theory of Probability and Mathematical Analysis” (February 22 — 25, 2017, Vorokhta, Ivano-Frankivsk Region, Ukraine);
- Ukraine Scientific Conference “Modern Problems Theory of Probability

and Mathematical Analysis” (February 25 — March 1, 2020, Vorokhta, Ivano-Frankivsk Region, Ukraine);

— International conference Complex Analysis and Related Topics dedicated to the 90-th anniversary of A. A. Goldberg (1930-2008) (June 28 — July 1, 2021, Lviv, Ivan Franko National University of Lviv, Ukraine);

— The International Conference in Complex and Functional Analysis dedicated to the memory of Bohdan Vynnytskyi (13–16 September, 2021, Drohobych, Ukraine);

— Конференція молодих вчених “Підстригачівські читання” (25–27 травня 2022р., Львів, Україна);

— Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми механіки та математики - 2023” (23–25 травня 2023р., Львів, Україна);

— International Conference of Young Mathematicians (1–3 June 2023, 2023, Kyiv, Ukraine);

— 14 ISAAC Congress 2023 (17–21 July, 2023, *Ribeirão Preto — São Paulo*, Brazil);

— Конференція молодих вчених “Підстригачівські читання” (27–29 травня 2024р., Львів, Україна);

— Конференція молодих вчених “Підстригачівські читання” (27–29 травня 2025р., Львів, Україна);

— International Conference of Young Mathematicians (June 4–6, 2025, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine);

— 15 ISAAC Congress 2025 (Astana, Nazarbayev University, Kazakhstan, 21–25 July 2025);

— International conference “Complex and hypercomplex analysis and their applications” (Ukraine, Zhytomyr, August 6–10, 2025);

на вченій раді Інституту математики НАН України та на семінарах:

— Hypercomplex Seminar 2021: (Hyper)Complex Analysis 2021 in memoriam of prof. Julian Lawryniewicz. Bedlewo, Poland, November 11–14, 2021;

— Hypercomplex Seminar 2024: (Hyper)Complex Analysis in fundamental modelling in memoriam of prof. Julian Lawrynowicz. Bedlewo, Poland, September 14–18, 2024;

— International Workshop within the framework of the HORIZON-2020 project SOMPATY, May 12–16, 2025, Kyiv, Ukraine (SOMPATY-2025);

— семінарах відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор С.А. Плакса);

— семінарі кафедри математичного аналізу, бізнес-аналізу та статистики Житомирського державного університету імені Івана Франка (керівник: доктор фіз.-мат. наук Є.О. Севостьянов);

— Львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор О.Б. Скасків);

— семінарі відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор А.С. Романюк);

— Семінарі “Сучасний аналіз” в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка (керівники: академік НАН України І.О. Шевчук, доктори фіз.-мат. наук О.О. Курченко, В.М. Радченко, А.В. Чайковський).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 24 наукових роботах (див. список публікацій здобувача на с. 14 – 17), з них 15 із них [1 - 9, 11 - 15, 17] надруковано у виданнях, внесених до міжнародних науково-метричних баз Scopus та Web of Science, 2 статті [10, 16] опубліковано у наукових фахових виданнях України, категорія «Б» (відповідно до п. 2 Наказу № 1220 МОН України від 23.09.2019 “Про опублікування результатів дисертації на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук” (зі змінами) вказані 17 статей зараховуються як 37 наукових публікацій), та в 7 інших публікаціях. Частково вони також висвітлені у матеріалах міжнародних конференцій [1 - 14].

Структура дисертації. Дисертація складається із анотації, списку

публікацій здобувача, змісту, переліку умовних позначень, вступу, 6 розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 215 найменувань, і додатка, який містить список публікацій здобувача за темою дисертації й відомості про апробацію результатів дисертації. Повний обсяг дисертації становить 340 сторінок друкованого тексту.

Подяки. Висловлюю щирю подяку науковому консультанту, професору, доктору фізико-математичних наук Плаксі Сергію Анатолійовичу за корисні поради й рекомендації. Глибоко сумую з приводу передчасної смерті професора, доктора фізико-математичних наук Бахтіна Олександра Костянтиновича, який був науковим керівником моєї кандидатської дисертації, якому я вдячний за постановку задач, а також за цінні поради та зауваження. Також висловлюю подяку доктору фізико-математичних наук Денезі Ірині Вікторівні за важливі рекомендації та допомогу в оформленні деяких результатів роботи.

Зміст дисертації.

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційного дослідження, визначено предмет та об'єкт дослідження, а також сформульовано мету і завдання, визначено методи дослідження, окреслено його наукову новизну, теоретичне і практичне значення, подано інформацію щодо апробації, описано структуру дисертаційної роботи та її основний зміст.

У **першому розділі** дисертаційної роботи викладено основні поняття та описано методи, які використовуються при отриманні основних результатів роботи, наведено огляд літератури за темою дослідження та вказано, яке місце займають отримані здобувачем результати в окреслених напрямках.

Виклад основних результатів дисертаційного дослідження починається з **розділу 2**.

Нехай $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ – множини натуральних і дійсних чисел відповідно, $\mathbb{C}$ – комплексна площина, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ – розширена комплексна площина, $U = \{z : |z| < 1\}$ – відкритий одиничний круг, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ – додатна

дійсна піввісь.

Нехай дано однозв'язну область $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ і скінченну точку $a \in B$. Тоді, згідно з теоремою Рімана про відображення, існує функція $f(z)$, мероморфна в крузі $|z| < 1$, яка однолисто відображає круг $|z| < 1$ на область $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ так, що $f(0) = a$.

Величина $R(B, a) = |f'(0)|$ називається **конформним радіусом** області B в точці a .

Конформний радіус області B в точці a вводиться також для випадку, коли точка a — нескінченно віддалена.

Нехай функція $f(z)$, регулярна в області $|z| > 1$, за винятком нескінченно віддаленої точки, однолисто відображає дану область на деяку область B так, що $f(\infty) = \infty$. Величину $R(B, \infty) = |f'(\infty)|^{-1}$ називають конформним радіусом області B в нескінченно віддаленій точці.

Для багатозв'язних областей аналогом поняття конформного радіуса є поняття внутрішнього радіуса, який визначається за допомогою функції Гріна.

Нехай G — область в $\overline{\mathbb{C}}$, $G \neq \overline{\mathbb{C}}$. **Функцією Гріна** області G з полюсом в точці $z_0 \in G$ називається така дійсна функція $g_G(z, z_0)$, визначена для всіх $z \in G$, $z \neq z_0$, причому виконуються такі умови:

1. функція $g_G(z, z_0)$ гармонічна як функція від z в області $G \setminus \{z_0\}$;
2. якщо $z \rightarrow z_0$, то $g_G(z, z_0) \rightarrow +\infty$, при цьому різниця $g_G(z, z_0) - \ln \left(\frac{1}{|z - z_0|} \right)$ є обмеженою;
3. при наближенні до межі δG функція $g_G(z, z_0)$ прямує до нуля.

Якщо ж $z_0 = \infty$, то в другій умові вимагається, щоб для $z \rightarrow \infty$ була обмеженою різниця $g_G(z, z_0) - \ln |z|$.

Нехай G — область в $\overline{\mathbb{C}}$, для якої існує функція Гріна, і нехай z_0 — скінченна точка цієї області. Оскільки різниця $\varphi_G(z, z_0) := g_G(z, z_0) - \ln \left(\frac{1}{|z - z_0|} \right)$ є гармонічною і обмеженою в області $G \setminus z_0$, то її можна дозначити в точці z_0 так, що дана функція буде гармонічною в області G . Тоді для функції Гріна області G з полюсом в точці z_0 правильна

асимптотична формула:

$$g_G(z, z_0) = \ln \left(\frac{1}{|z - z_0|} \right) + \gamma + o(1), z \rightarrow z_0$$

де γ — деяке дійсне число.

Величину e^γ називають **внутрішнім радіусом** області G в точці z_0 і позначають $r(G, z_0)$.

Для нескінченно віддаленої точки правильна асимптотична рівність

$$g_G(z, \infty) = \ln |z| + \gamma + o(1), z \rightarrow \infty.$$

Величину e^γ називають внутрішнім радіусом області G в точці ∞ і позначають $r(G, \infty)$.

У **другому розділі** дисертаційної роботи досліджується задача про екстремальне розбиття комплексної площини з n вільними полюсами на одиничному колі та з фіксованим полюсом в точці нуль з умовою, що внутрішній радіус області, яка містить точку нуль, підноситься до деякого додатного степеня γ .

Проблема 2.1.1. *Довести, що максимум функціонала*

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k),$$

де $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$, ($n \geq 2$) — попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $r(B_j, a_j)$ — внутрішній радіус області B_j в точці a_j ($a_j \in B_j$), $j = \overline{0, n}$ і $\gamma \leq n$, досягається для деякої конфігурації областей, які мають n -кратну симетрію.

Твердження, що система областей B_k і точок a_k , $k = \overline{0, n}$, має n -кратну симетрію означає, що дана система інваріантна відносно повороту навколо початку координат на кут $\frac{2s\pi}{n}$ для довільного натурального $s = \overline{1, n-1}$.

Проблема 2.1.1 була поставлена в 1994 році в роботі [65, с. 68] в списку нерозв'язаних проблем під номером 9.2, а потім повторена в 2014 році в

монографії [70], однак перший результат в даній проблемі було отримано раніше, в 1988 році, в роботі [64], де за допомогою методу розділяючого перетворення була дана відповідь на питання проблеми 2.1.1 при умові, що $\gamma = 1$. В роботі [65] також було зауважено, що метод, який використовувався в роботі [64] для $\gamma = 1$, "проходить" і при $0 < \gamma < 1$. В 2003 році Г.В. Кузьміна в роботі [127], використовуючи метод екстремальної метрики, підтвердила цей результат для однозв'язних областей.

В роботі [114] в 1996 році було отримано розв'язок проблеми 2.1.1 при певних обмеженнях на розташування систем точок на одиничному колі, а саме для систем точок, для яких виконується наступна нерівність

$$0 < \alpha_k \leq \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma}}; k = \overline{1, n}, n \geq 5,$$

де α_k — центральний кут між сусідніми точками на колі. Крім того, за допомогою методу роботи [114] пізніше (див. [48]) були отримані оцінки для $n = 2, 3, 4$, які не розглянуті в [114].

В 2008 році в роботі [24, с. 255] було отримано відповідь на питання проблеми 2.1.1 для довільного γ , але починаючи з певного, заздалегідь невідомого номера n .

Надалі дослідження в проблемі 2.1.1 розвивалися в різних напрямках. Одним з напрямків було отримання результатів для конкретних натуральних n . Зокрема, для $n = 2$ і $0 < \gamma \leq 1.4$ твердження проблеми 2.1.1 було доведено в 2013 році в роботі [192], для $n = 3$ і $0 < \gamma \leq 1.5$, а також для $n = 4$ і $0 < \gamma \leq 1.7$ в 2012 році в роботі [203], випадки $n = 5, 6, 7$ розглядалися в роботі [202]. Відзначимо, що для $n = 2$ і $0 < \gamma \leq 2$ повний розв'язок проблеми 2.1.1 був отриманий в роботі [35].

В даній роботі наведено такі результати.

Теорема 2.2.1. [193] *Нехай γ — деяке дійсне число, таке, що $0 < \gamma \leq 1.7$. Тоді для довільного набору різних точок $\{a_k\}$, $k = \overline{0, 3}$, таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, 3}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей $\{B_k\}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{0, 3}$, виконується*

нерівність:

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^3 r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3 \frac{\left(\frac{4\gamma}{3}\right)^{\frac{\gamma}{3}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{9}\right)^{3+\frac{\gamma}{3}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{3}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак рівності в попередній нерівності досягається, зокрема, для випадку, коли точки $\{a_k\}$ і області $\{B_k\}$ ($k = \overline{0, 3}$) є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(9 - \gamma)w^3 + \gamma}{w^2(w^3 - 1)^2}dw^2.$$

Зауважимо, що пізніше, в роботі [31], було отримано дещо покращений результат для $n = 3$ і $0 < \gamma \leq 2.1$ для випадку однозв'язних областей.

Наступний результат правильний для $n = 5, 6, 7, 8$.

Теорема 2.2.3. [26, 206] *Нехай $n = 5, 6, 7, 8$, $\gamma_5 = 2.32$, $\gamma_6 = 2.49$, $\gamma_7 = 2.67$, $\gamma_8 = 2.84$. Тоді для довільного дійсного γ такого, що $1 < \gamma \leq \gamma_n$, виконується нерівність*

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq r^\gamma(D_0, d_0) \prod_{k=1}^n r(D_k, d_k),$$

де $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$, ($n \geq 2$) — попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, де d_k, D_k , — відповідно полюси і кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}dw^2.$$

Іншим напрямком був пошук зростаючої мажоранти для числа γ для $n \rightarrow \infty$, тобто для довільного натурального $n \geq n_0$ для деякого фіксованого n_0 . Так, для $n \geq 8$ і $1 < \gamma \leq \sqrt[4]{n}$ проблему 2.1.1 було розв'язано в роботі [201], для $n \geq 5$ і $1 < \gamma \leq \sqrt[3]{n}$ — в роботі [48]. Розглядалися також випадки, коли на області B_k чи точки a_k накладалися певні обмеження.

Наступна теорема дає відповідь на запитання проблеми 2.1.1 для випадку $n \geq 76$, але з умовою, що внутрішній радіус області, що містить точку нуль, не перевищує одиниці.

Теорема 2.3.1. [28] *Нехай задано натуральне число n , $n \geq 76$, і дійсне число γ таке, що $1 < \gamma \leq n$. Тоді для довільного набору попарно неперетинних областей $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$ та довільного набору точок комплексної площини $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, причому $r(B_0, a_0) \leq 1$, правильна нерівність*

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq r^\gamma(D_0, 0) \prod_{k=1}^n r(D_k, d_k),$$

де d_k, D_k , — відповідно полюси і кругові області квадратичного диференціала

$$G(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}dw^2.$$

Оскільки з умови $B_0 \subset U$ випливає, що $r(B_0, a_0) \leq 1$, правильне наступне твердження.

Наслідок 2.3.1. [28] *Нехай $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$, — попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{0, n}$, причому $B_0 \subset U$, де U — відкритий одиничний круг. Тоді для довільного натурального n , $n \geq 76$ і довільного дійсного γ такого, що $1 < \gamma \leq n$ правильна нерівність теореми 2.3.1.*

В наступній теоремі в ролі зростаючої мажоранти виступає $\gamma = \sqrt{n}$.

Теорема 2.3.4. [205] *Для довільного натурального $n \geq 541$ і дійсного γ , такого, що $0 < \gamma \leq \sqrt{n}$, виконується нерівність*

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq r^\gamma(D_0, a_0^0) \prod_{k=1}^n r(D_k, a_k^0),$$

де $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$, ($n \geq 2$) — попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, причому знак рівності досягається, зокрема, за умов $a_k = a_k^0$, $B_k = D_k$, $k = \overline{0, n}$, де a_k^0, D_k , — відповідно полюси і кругові

області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}dw^2.$$

Зауважимо, що пізніше, в роботі [35], проблему 2.1.1 для випадку $0 < \gamma \leq \sqrt{n}$ було розв'язано для $n \geq 3$.

Для однозв'язних областей проблема 2.1.1 для випадку $n \geq 40$ і $1 < \gamma \leq n^{\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \frac{\ln(\frac{5}{6} \ln(n))}{\ln(n)}}$ була розв'язана в теоремі 2.3.6.

Розглядалася також проблема, аналогічна до проблеми 2.1.1, але для випадку, коли області B_k , $k = \overline{1, n}$, симетричні відносно одиничного кола, а саме така проблема:

Проблема 2.1.2. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ і $\gamma \in \mathbb{R}^+$, причому $\gamma \leq n$. Для довільної системи точок a_k і областей B_k , $k = \overline{0, n}$, таких, що $a_0 = 0$, $|a_1| = \dots = |a_n| = 1$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, де $B_i \cap B_j = \emptyset$ для $0 \leq i, j \leq n$ і $i \neq j$, причому області $B_1, \dots, B_n$ симетричні відносно одиничного кола, знайти точну верхню оцінку для функціонала

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k).$$

Зауважимо, що проблема 2.1.2 не тотожна з проблемою 2.1.1, оскільки для тих випадків, де відомі екстремальні конфігурації в проблемі 2.1.1, області B_k , $k = \overline{1, n}$, не є симетричними відносно одиничного кола.

Вперше в 1984 р. аналогічну задачу з вільними полюсами для симетричних однозв'язних областей розглянула Г. Бахтіна в роботі [42]. В 1994 році дану задачу було поставлено в роботі [65] як нерозв'язану проблему. В 2000 р. для $\gamma = 1$ і для всіх $n \geq 2$ цю проблему було розв'язано в роботах [115, 116]. В роботі [185] проблема була розв'язана для довільного $n \geq 2$ і $0 < \gamma < 1$. В [34] було знайдено розв'язок даної задачі для довільного $n \geq 2$ і довільного $\gamma \in (0, \gamma_n)$, де $\gamma_2 = 1.49$, $\gamma_3 = 3.01$, і $\gamma_n = 0.25n^2$ для $n \geq 4$, але з деякими обмеженнями на центральний кут між сусідніми точками a_k . Повного розв'язку проблеми 2.1.2, як і проблеми 2.1.1, на даний момент невідомо.

Для випадку трьох вільних полюсів, які належать одиничному колу, правильний такий результат.

Теорема 2.4.1. [194] *Для довільного набору точок a_k , таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $a_1 = 1$, $k = \overline{1, 3}$, довільного набору взаємно неперетинних областей B_k , $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, 3}$, причому області B_k , $k = \overline{1, 3}$, симетричні відносно одиничного кола $|w| = 1$, і довільного дійсного γ , такого, що $0 < \gamma \leq 1.233$ правильна нерівність*

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^3 r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3 \frac{(2\gamma)^{\frac{\gamma}{3}}}{27(9-2\gamma)^{\frac{3}{2}+\frac{\gamma}{3}}} \left(\frac{3-\sqrt{2\gamma}}{3+\sqrt{2\gamma}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}.$$

Знак рівності в цій нерівності досягається, зокрема, у випадку, якщо точки a_k і області B_k , $k = \overline{0, 3}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^6 + 2(9-\gamma)w^3 + \gamma}{w^2(w^3-1)^2} dw^2.$$

Наступна теорема дає розв'язання проблеми 2.1.2 для випадку $n \geq 20$ і $1 < \gamma \leq n^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\frac{\ln(2\sqrt{2}\ln(n))}{\ln(n)}}$.

Теорема 2.4.2. [207] *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ для деякого $n_0 \in \mathbb{N}$ і $\gamma \in \mathbb{R}$, $1 < \gamma \leq n^{\frac{2}{3}-q(n)}$, де $q(n) = \frac{2}{3}\frac{\ln(\frac{1}{p(n_0)}\ln(n))}{\ln(n)}$, де можна взяти $n_0 = 20$ і $p(20) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Тоді для довільного набору точок a_k , таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k , таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, причому області B_k , $k = \overline{1, n}$, симетричні відносно одиничного кола $|w| = 1$, правильна нерівність*

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}.$$

Знак рівності в цій нерівності досягається, зокрема, у випадку, коли a_k и B_k , $k = \overline{0, n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квад-

ратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2.$$

Наступна теорема є деяким аналогом теореми 2.3.1 для випадку симетричних областей.

Теорема 2.4.3. [213] *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 258$ і $\gamma \in \mathbb{R}$, $1 < \gamma \leq n$. Тоді для довільного набору точок a_k , таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k , таких, що $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{0, n}$, причому області B_k , $k = \overline{1, n}$, симетричні відносно одиничного кола $|w| = 1$, а також за умови, що $r(B_0, 0) \leq 1$, правильна нерівність*

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2} + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}.$$

Знак рівності в цій нерівності досягається, зокрема, у випадку, коли a_k і B_k , $k = \overline{0, n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2.$$

Також в даному підрозділі, в теоремі 2.4.4, завдяки введенню деяких обмежень на степінь γ , вдалося суттєво зменшити номер, починаючи з якого виконується нерівність теореми 2.4.3, а в теоремі 2.4.5 наводиться деяке уточнення до теореми результату 2.4.2, отримане за допомогою дещо іншого методу дослідження. Зокрема, тут більший номер n , починаючи з якого правильне твердження теореми, однак оцінка отримана для ширшого діапазона для параметра γ .

Третій розділ дисертаційної роботи присвячений вивченню наступної проблеми:

Проблема 3.1.1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякі фіксовані точки розширеної комплексної площини. Знайти максимум виразу*

$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)$, де B_k , $k = \overline{1, n}$ — довільна конфігурація областей, таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, причому $B_i \cap B_j = \emptyset$ для $1 \leq i, j \leq n$ та $i \neq j$.

Тобто, іншими словами, потрібно знайти максимум добутку внутрішніх радіусів для довільної конфігурації n неперетинних областей, які містять відповідно n заданих фіксованих точок комплексної площини.

Вперше дана проблема розглядалася в роботі М.О. Лаврентьєва [129], де була поставлена і розв’язана задача про максимум добутку конформних радіусів двох взаємно неперетинних однозв’язних областей відносно двох наперед заданих фіксованих точок. Згідно з результатом роботи [129], для двох довільних фіксованих скінченних точок a_1 і a_2 та для будь-якої пари неперетинних однозв’язних областей D_1 і D_2 таких, що $a_k \in D_k \subset \mathbb{C}$, $k = 1, 2$, правильна нерівність

$$R(D_1, a_1)R(D_2, a_2) \leq |a_1 - a_2|^2,$$

де рівність досягається для півплощин D_k і точок a_k , симетричних відносно їх спільної межі.

Цей результат викликав значний інтерес спеціалістів з геометричної теорії функцій і узагальнювався в багатьох напрямках. Зокрема, пізніше було отримано аналогічну нерівність для випадку, коли одна з областей D_k може включати нескінченно віддалену точку, а також для багатозв’язних областей і внутрішніх радіусів.

Для випадку довільного натурального n , $n \geq 3$ взаємно неперетинних однозв’язних областей B_k , і точок $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$ ($\{a_k\}_{k=1}^n$ — довільні фіксовані скінченні та різні точки комплексної площини) проблему 3.1.1 розглядав Г.М. Голузін, а при $n = 3$ в 1951 році отримав точну оцінку для добутку конформних радіусів трьох неперетинних областей (див. [83, с. 165])

$$\prod_{k=1}^3 R(B_k, a_k) \leq \frac{64}{81\sqrt{3}} |a_2 - a_1| |a_3 - a_1| |a_3 - a_2|,$$

де рівність досягається, з точністю до конформних автоморфізмів роз-

ширеної комплексної площини, тільки для областей, утворених трьома променями, які виходять з однієї точки під кутом $\frac{2\pi}{3}$ один до одного, і точок, які лежать на бісектрисах утворених кутів на однакових відстанях від їх спільної вершини.

Випадок $n > 3$ істотно відрізняється від ситуації $n \leq 3$, оскільки будь-які три наперед задані точки можна деяким конформним автоморфізмом перевести в інші довільні три точки комплексної площини, наприклад, у вершини правильного трикутника, що значно спрощує дослідження, однак для чотирьох і більше точок аналогічне відображення вдається знайти не завжди. В той же час для випадку $n = 4$ в проблемі 3.1.1 в 1980 році в роботі [121] було отримано точну нерівність

$$\prod_{k=1}^4 R(B_k, a_k) \leq \frac{9}{4^{8/3}} \left(\prod_{1 \leq k < l \leq 4} |a_l - a_k| \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Рівність досягається тільки в тому випадку, коли, з точністю до конформного автоморфізму, $a_1 = -a_2 = 1$, $a_3 = -a_4 = i(2 - \sqrt{3})$, а межа множини $\bigcup_{k=1}^4 D_k$ складається із відрізків $[\sqrt{3} - 2, 2 - \sqrt{3}]$, променів $\{z | z = it, t \in [1, +\infty)\}$ і $\{z | z = it, t \in [-\infty, -1)\}$, частини кругової дуги ρ , яка проходить через точки $-1, i, 2 - \sqrt{3}$, яка лежить в першому квадранті, а також кругових дуг, які ми отримуємо з ρ перетвореннями $w \rightarrow -w, w \rightarrow \bar{w}, w \rightarrow -\bar{w}$.

Для $n \geq 5$ повного розв'язку даної проблеми на даний час не отримано.

Наведені вище теореми пізніше було узагальнено також для випадку багатозв'язних областей і внутрішніх радіусів.

Сформульовані вище задачі зводяться до оцінки наступного виразу:

$$T_n := \frac{\prod_{k=1}^n r(D_k, a_k)}{\left\{ \prod'_{1 \leq k < l \leq n} |a_k - a_l| \right\}^{\frac{2}{n-1}}},$$

(тут штрих у добутку означає, що для нескінченно віддаленої точки під відповідним множником розуміємо одиницю), який є інваріантним відносно дробово-лінійних відображень розширеної комплексної площини. Таким чином, виходячи з результатів робіт [129], [83], [121], отримаємо наступні оцінки:

$$T_2 \leq 1; \quad T_3 \leq \frac{64}{81\sqrt{3}} \approx 0.45618; \quad T_4 \leq \frac{9}{4^{8/3}} \approx 0.22323.$$

Також, згідно з припущенням, висловленим в роботі [125],

$$T_5 \leq 4^{\frac{11}{3}} \cdot 3^{-\frac{3}{4}} \cdot 5^{-\frac{25}{6}} = 8.656 \cdot 10^{-2}.$$

В наступній теоремі отримано оцінку виразу, який досліджується в проблемі 3.1.1, для довільного натурального $n \geq 2$.

Теорема 3.2.1. [195] *Нехай $n \in \mathbb{N}$ — деяке натуральне число, $n \geq 2$, $a_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок комплексної площини. Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, правильна нерівність:*

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}}.$$

З наведеної вище теореми випливає також оцінка для виразу T_n .

Наслідок 3.2.1. *Нехай для довільного натурального $n \geq 2$ області B_k і точки a_k , $k = \overline{1, n}$, задовольняють всім умовам теореми 3.2.1. Тоді правильна нерівність:*

$$T_n \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}}.$$

У випадку, коли одна з точок a_k є нескінченно віддаленою, в нерівності попередньої теореми всі множники, які містять дану точку, перетворюються на одиницю. Зокрема, правильна наступна теорема.

Теорема 3.2.2. [195] *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 2$, a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок розширеної комплексної площини, причому $a_n = \infty$. Тоді для довільного набору областей B_k таких,*

що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$ правильна нерівність:

$$r(B_n, \infty) \prod_{k=1}^{n-1} r(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n-1} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}}.$$

Отримана в теоремі 3.2.1 оцінка може бути застосована і для оцінки функціонала

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k),$$

про який йде мова в проблемі 2.1.1. Відповідні нерівності були доведені в теоремах 3.3.1 та 3.3.2.

Також в роботі досліджується така проблема:

Проблема 3.3.1. Довести, що максимум функціонала

$$J_n(\gamma) = [r(B_0, 0) r(B_{n+1}, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k),$$

де $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n, B_{n+1}$, ($n \geq 2$) — попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \infty$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $r(B_j, a_j)$ — внутрішній радіус області B_j в точці a_j ($a_j \in B_j$), $j = \overline{0, n+1}$, досягається для деякої конфігурації областей, які мають n -кратну симетрію.

У даній роботі розглянемо також дещо загальніший випадок, коли на точки a_k , $k = \overline{1, n}$, не накладається умова $|a_k| = 1$.

Справедлива така теорема.

Теорема 3.3.3. [188] Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Тоді для будь-якої фіксованої системи різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ і для довільного набору попарно неперетинних областей $B_0, B_{n+1}, \{B_k\}_{k=1}^n$ таких, що $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{n+1} = \infty \in B_{n+1} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, причому існує $\varepsilon > 0$ таке, що $r(B_k, a_k) \geq \varepsilon$ для $\forall k = \overline{1, n}$, справедлива нерівність

$$J_n(\gamma) \leq \varepsilon^{-\frac{2n\gamma}{n+2}} (n+1)^{-\frac{\gamma(n+1)}{n+2}} \left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{2\gamma}{n+2}} \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k).$$

Також в дисертаційній роботі при дослідженні проблеми 3.3.1 було отримано нерівності для випадків, коли точки a_k , $k = \overline{1, n}$, лежать на одиничному колі (теорема 3.3.4) чи деякій прямій (теорема 3.3.5).

Серед можливих застосувань отриманих результатів в інших задачах теорії функцій наведемо так звані теореми спотворення. Суть даних теорем полягає в дослідженні того, які обмеження накладає однолистість відображення на деякі елементи, пов'язані з даним відображенням, зокрема, на величину модуля і аргументу похідної даної функції, тобто на величину спотворення, яке робить дана функція у вибраних точках області. Одним з перших результатів з даної тематики була отримана Гроноуллом [88] т.зв. "теорема площ". Даний результат полягає в наступному: якщо $F(\zeta) = \zeta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\zeta^k}$ — функція, регулярна, за винятком точки $\zeta = \infty$, і однолиста в області $|\zeta| > 1$, то правильна нерівність $\sum_{k=1}^{\infty} n|a_n|^2 \leq 1$. Наведена теорема є аналітичним вираженням геометричного факту, що при відображенні за допомогою функції $F(\zeta)$ області $|\zeta| > \rho$, де $\rho > 1$, доповнення до образу даної області має додатну площу.

Для функції, регулярної і однолистої в крузі $|z| < 1$, правильний наступний результат (див. [43]): якщо функція $f(z)$, регулярна і однолиста в крузі $|z| < 1$, не набуває в даному крузі деякого значення c , то правильна нерівність $|f'(0)| < 4|c|$. Надалі розглядалися багато різних варіантів теорем спотворення. Серед недавніх досліджень з даної тематики відзначимо, наприклад, роботи [149], [67], [140].

Також розглядалися задачі, де спотворення, яке здійснює функція, розглядалося в декількох заданих точках, або з деякими послабленнями на умову однолистості. Серед робіт, присвячених даній тематиці, відзначимо, наприклад, [105], [106].

В наведеній нижче теоремі наведено оцінку спотворення, яке чинить функція, регулярна і однолиста у відкритому одиничному крузі, в n різних точках даного круга за умови, що дані точки лежать попарно на різних радіусах.

Теорема 3.4.1. [59] *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $z_k = \rho_k \exp i\theta_k$, $k = \overline{1, n}$ — деякий набір точок відкритого одиничного круга U , $\rho_k \in (0, 1)$, $\rho_0 := \rho_n$, $\rho_{n+1} := \rho_1$, причому $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < 2\pi$, $\theta_0 := \theta_n$, $\theta_{n+1} := \theta_1$. Тоді для кожної функції $f(z)$, регулярної і однолистої в U , справедлива нерівність*

$$\prod_{k=1}^n |f'(z_k)| \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \prod_{k=1}^n \left(\frac{4\rho_k}{\alpha_k} \left| \frac{1 - (\rho_k \exp i\omega_k)^{\alpha_k}}{1 + (\rho_k \exp i\omega_k)^{\alpha_k}} \right| \right)^{-1} \cdot \prod_{k=1}^n \sec \left(\arg \left(\frac{(\rho_k \exp i\omega_k)_0^{\frac{\alpha_k}{2}}}{(1 - (\rho_k \exp i\omega_k)^{\alpha_k})} \right) \right) \cdot \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |(f(z_p) - f(z_k))| \right)^{\frac{2}{n-1}},$$

де $\alpha_k = \frac{\pi}{\theta_{k+1} - \theta_{k-1}}$ і $\omega_k = \frac{1}{4} (2\theta_k - \theta_{k+1} - \theta_{k-1})$.

Також в даній роботі ми досліджуємо спотворення, яке чинить функція класу S^* в n точках, які належать відкритому одиничному кругу, з умовою, що жодні дві точки не належать одному радіусу.

Однолиста область називається зіркоподібною відносно деякої точки, якщо відрізок, що з'єднує будь-яку її точку з вказаною точкою, повністю належить цій області. Позначимо через S^* клас всіх однолистих і регулярних функцій $f(z)$ в крузі U , таких, що $f(0) = 1 - f'(0) = 0$, і які відображають U на області, зіркоподібні відносно початку координат. Якщо функція $f(z) \in S^*$, то при русі z по $|z| = r$, $0 < r < 1$, у визначеному напрямку $\arg f(z)$ змінюється в тому ж напрямку, тобто виконується нерівність

$$\operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0.$$

Позначимо також

$$M(\{z_k\}_{k=1}^n) = \prod_{k=1}^n \chi(|z_k|^{\frac{n}{2}}) \cdot |z_k|,$$

де $\chi(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ — функція Жуковського.

Правильне наступне твердження.

Теорема 3.4.3. [59] *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $R \in \mathbb{R}^+$, $z_k = \rho_k \exp i\theta_k$, $k = \overline{1, n}$, — деякий набір точок відкритого одиничного круга U , $\rho_k \in (0, 1)$, $\rho_0 := \rho_n$, $\rho_{n+1} := \rho_1$, причому $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < 2\pi$, $\theta_0 := \theta_n$, $\theta_{n+1} := \theta_1$. Тоді для кожної функції $f \in S^*$ правильна нерівність*

$$\prod_{k=1}^n |f'(z_k)| \leq R^n \prod_{k=1}^n \left(\frac{4\rho_k}{\alpha_k} \left| \frac{1 - (\rho_k \exp i\omega_k)^{\alpha_k}}{1 + (\rho_k \exp i\omega_k)^{\alpha_k}} \right| \right)^{-1} \cdot \prod_{k=1}^n \sec \left(\arg \left(\frac{(\rho_k \exp i\omega_k)_0^{\frac{\alpha_k}{2}}}{(1 - (\rho_k \exp i\omega_k)^{\alpha_k})} \right) \right) M \left(\left\{ \frac{f(z_k)}{R} \right\}_{k=1}^n \right),$$

де $\alpha_k = \frac{\pi}{\theta_{k+1} - \theta_{k-1}}$ і $\omega_k = \frac{1}{4}(2\theta_k - \theta_{k+1} - \theta_{k-1})$. Рівність в попередній нерівності досягається для випадку, коли всі $\rho_k = \rho$ для деякого $\rho \in (0, 1)$, $z_k = \rho \exp i\frac{2\pi}{n}(k-1)$, $k = \overline{1, n+1}$, $f(z) = \frac{z}{(1-z^n)^{\frac{2}{n}}}$ і $R = \frac{\rho}{(1-\rho^n)^{\frac{2}{n}}}$.

За допомогою розвинених методів отримано деякі оцінки еволюційного типу для функціоналів, які вивчалися, зокрема, в проблемах 2.1.1, 3.3.1, та для деяких інших. Відповідні результати наведено в теоремах 3.5.1-3.5.3.

В четвертому розділі дисертаційної роботи вивчається така відкрита проблема:

Проблема 4.1.1. *Нехай n — деяке натуральне число, причому $n \geq 3$, α_k , $k = \overline{1, n}$, — деякі додатні дійсні числа; a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір точок розширеної комплексної площини. Знайти максимум добутку*

$$\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\alpha_k},$$

де B_k , $k = \overline{1, n}$, — довільний набір областей, таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Відзначимо, що проблема 3.1.1 є частинним випадком проблеми 4.1.1, якщо всі степені α_k взяти рівними одиниці. Однак якщо проблема 3.1.1 має розв'язок для довільної конфігурації точок a_k , то в проблемі 4.1.1 для деяких конфігурацій точок a_k і степенів α_k добуток внутрішніх радіусів областей B_k може бути і необмеженим.

В 1952 році Л.І. Колбіною [111] було розглянуто задачу про максимум J_0 виразу $J = \left| (f'_1(0))^\alpha (f'_2(0))^\beta \right|$, де $\alpha > 0$ і $\beta > 0$, a_1, a_2 — деякі різні точки комплексної площини, функції $f_1(z)$ і $f_2(z)$ регулярно і однолисто відображають одиничний круг $|z| < 1$ відповідно на неперетинні області B_1 і B_2 , причому $f_1(0) = a_1$, $f_2(0) = a_2$, (тобто, іншими словами, потрібно знайти максимум виразу $J = R^\alpha(B_1, a_1) R^\beta(B_2, a_2)$, де B_1, B_2 — неперетинні однозв'язні області в $\mathbb{C}$, причому $a_1 \in B_1$, $a_2 \in B_2$), і встановлено, що

$$J_0 = \frac{4^{\alpha+\beta} \alpha^\alpha \beta^\beta}{|\alpha - \beta|^{\alpha+\beta}} \left| \frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} \right|^{2\sqrt{\alpha\beta}} |a_1 - a_2|^{\alpha+\beta}.$$

Зауважимо, що, згідно з сказаним вище, умова регулярності на функції $f_1(z)$ і $f_2(z)$ є суттєвою, тому що у випадку, коли дану умову замінити на умову мероморфності, вираз $\left| (f'_1(0))^\alpha (f'_2(0))^\beta \right|$ є необмеженим для $\alpha \neq \beta$.

Також в [112] було знайдено максимум I_0 виразу

$$I = R^\alpha(B_1, a_1) R^\beta(B_2, a_2) R^\gamma(B_3, a_3)$$

в аналогічній задачі, і встановлено, що

$$I_0 = A_{\alpha, \beta, \gamma} |a_1 - a_2|^{\alpha+\beta-\gamma} |a_1 - a_3|^{\alpha-\beta+\gamma} |a_2 - a_3|^{-\alpha+\beta+\gamma},$$

де

$$A_{\alpha, \beta, \gamma} = \frac{4^{\alpha+\beta+\gamma} \alpha^\alpha \beta^\beta \gamma^\gamma \left| 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma) - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 \right|^{\sqrt{\alpha\beta} + \sqrt{\beta\gamma} + \sqrt{\alpha\gamma} - \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)}}{|\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}|^2 - \gamma|^{2\sqrt{\alpha\beta}} |(\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma})^2 - \alpha|^{2\sqrt{\beta\gamma}} |(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\gamma})^2 - \beta|^{2\sqrt{\alpha\gamma}}}.$$

Деякі нерівності щодо конформних радіусів було отримано також в роботі [139]. Зокрема, там було встановлено такий результат: нехай $B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, — попарно неперетинні області, a_k — деякі фіксовані точки, такі, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$. Тоді для довільного набору дійсних чисел δ_k , таких, що $\sum_{k=1}^n \delta_k = 0$, виконується нерівність:

$$\prod_{k=1}^n \left| f'_k(0) \right|^{(\delta_k)^2} \leq \prod_{k=1}^n \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n |a_k - a_l|^{-\delta_k \delta_l}.$$

Проблему 4.1.1 для випадку конформних радіусів та однозв'язних областей було сформульовано М.О. Лебедєвим в роботі [132, с. 32–33]. Зокрема, там розглядалася така екстремальна задача: нехай дано n різних фіксованих точок a_k , $k = \overline{1, n}$, $n > 3$ та n деяких додатних дійсних чисел γ_k . Знайти максимум добутку (якщо він існує)

$$\prod_{k=1}^n R^{\gamma_k}(B_k, a_k) \longrightarrow \max, \quad \gamma_k > 0, \quad n > 3,$$

де B_k , $k = \overline{1, n}$, — довільні взаємно неперетинні однозв'язні області, такі, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$. На даний момент у загальному випадку вказана задача не розв'язана, вдалося отримати її розв'язок тільки в деяких частинних випадках.

Також в роботі [132, с. 220] було отримано наступний результат: нехай $\{f_l(z)\}_{l=0}^n$ — деякий набір функцій, які конформно і однолисто відображають відкритий одиничний круг відповідно на неперетинні області $\{B_l\}_{l=0}^n$ так, що $f_l(0) = a_l$, де a_l — деякий набір фіксованих скінченних точок, і γ_l , $l = \overline{0, n}$, — фіксовані комплексні числа, такі, що $\sum_{l=0}^n \gamma_l = 0$ і $\sum_{l=0}^n |\gamma_l| \neq 0$. Тоді правильна нерівність

$$\prod_{l=0}^n \left| f'_l(0) \right|^{\left| \gamma_l \right|^2} \leq \prod_{0 \leq k < l \leq n} |a_k - a_l|^{-2\operatorname{Re}(\overline{\gamma_l} \gamma_k)}.$$

Деякі узагальнення попередньої нерівності для випадку дійсних γ_l було запропоновано в роботі [87].

Проблему 4.1.1, аналогічно до проблеми 3.1.1, можна розглядати і в дещо модифікованому вигляді. Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок комплексної площини, і нехай γ_k , $k = \overline{1, n}$, — деякі додатні дійсні числа, $B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, — деякий набір областей, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Введемо таке позначення:

$$P(n; \{B_k\}_{k=1}^n; \{a_k\}_{k=1}^n; \{\gamma_k\}_{k=1}^n) := \frac{\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\gamma_k}}{\prod_{i,j=1, i < j}^n |a_j - a_i|^{\frac{2}{n-2}(\gamma_i + \gamma_j - \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \gamma_k)}}.$$

Зауважимо, що аналогічний вираз розглядався також в роботі [79]. Введений функціонал має наступну важливу властивість.

Теорема 4.1.1. [196] *Функціонал $P(n; \{B_k\}_{k=1}^n; \{a_k\}_{k=1}^n; \{\gamma_k\}_{k=1}^n)$ інваріантний щодо конформних автоморфізмів комплексної площини.*

В даній роботі при розгляді проблеми 4.1.1 було отримане таке твердження.

Теорема 4.2.2. [196] *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок комплексної площини, і нехай γ_k , $k = \overline{1, n}$, — деякі додатні дійсні числа, причому $\gamma_k \geq \frac{\sum_{s=1}^n \gamma_s}{2n-2}$ для кожного $k = \overline{1, n}$. Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, правильна нерівність:*

$$\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\gamma_k} \leq (n-1)^{-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \gamma_k} \prod_{i,j=1, i < j}^n |a_j - a_i|^{\frac{2}{n-2} \left(\gamma_i + \gamma_j - \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \gamma_k \right)}.$$

Для випадку, коли одна з точок a_k нескінченно віддалена, правильна така теорема.

Теорема 4.2.3. [196] *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок комплексної площини, причому $a_n = \infty$, і нехай γ_k , $k = \overline{1, n}$, — деякі додатні дійсні числа, причому $\gamma_k \geq \frac{\sum_{s=1}^n \gamma_s}{2n-2}$ для $\forall k = \overline{1, n}$. Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$,*

правильна нерівність:

$$(r(B_n, a_n))^{\gamma_n} \prod_{k=1}^{n-1} (r(B_k, a_k))^{\gamma_k} \leq (n-1)^{-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \gamma_k} \prod_{i,j=1, i < j}^{n-1} |a_j - a_i|^{\frac{2}{n-2} \left(\gamma_i + \gamma_j - \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \gamma_k \right)}.$$

Теорема 4.2.2 дозволяє отримати в проблемі 4.1.1 деякі оцінки еволюційного типу.

Теорема 4.3.1. [214] *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок комплексної площини, α_k , θ_k , $k = \overline{1, n}$ — деякі додатні дійсні числа, які задовольняють наступні умови:*

- а) всі $\alpha_k \geq \frac{\lambda}{2n-2}$, де $\lambda := \sum_{k=1}^n \alpha_k$;
- б) $\alpha_k \geq \theta_k$ для $\forall k = \overline{1, n}$;
- в) для $\forall k = \overline{1, n}$ виконується нерівність

$$\theta_k \leq \alpha_k - \frac{1}{2n-2} \sum_{s=1}^n (\alpha_s - \theta_s).$$

Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$ правильна нерівність:

$$\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\alpha_k} \leq (n-1)^{-\frac{\sum_{k=1}^n (\alpha_k - \theta_k)}{4}} \cdot \prod_{i,j=1, i < j}^n |a_j - a_i|^{\frac{2}{n-2} \left(\alpha_i + \alpha_j - \theta_i - \theta_j - \frac{\sum_{k=1}^n (\alpha_k - \theta_k)}{n-1} \right)} \prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\theta_k}.$$

Отримані оцінки можуть бути застосовані і для оцінки функціонала

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k),$$

де $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0; n]$ $a_0 = 0$, $|a_1| = \dots = |a_n| = 1$, $a_k \in B_k \in \overline{\mathbb{C}}$, де $B_i \cap B_j = \emptyset$ для $0 \leq i, j \leq n$ та $i \neq j$. Зокрема, в роботі був отриманий такий результат.

Теорема 4.4.1. [196] *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ і $0 < \gamma \leq n$. Тоді для довільного набору точок a_k , таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k , таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, у випадку $n = 2m$ для деякого $m \in \mathbb{N}$ правильна нерівність*

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq n^{-\frac{\gamma+n}{4}} 2^{n-\gamma} \left(\prod_{k=1}^{m-1} \sin \frac{k\pi}{n} \right)^{\frac{2(n-\gamma)}{n-1}};$$

якщо ж якщо $n = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}$, то нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq n^{-\frac{\gamma+n}{4}} 2^{n-\gamma} \left(\prod_{k=1}^m \sin \frac{k\pi}{n} \right)^{\frac{2(n-\gamma)}{n-1}}.$$

Використовуючи теорему 4.3.1, для наведеного вище функціонала $I_n(\gamma)$ можна отримати також дещо іншу оцінку.

Теорема 4.4.2. [214] *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 2$, і γ — деяке дійсне число, $1 < \gamma < \frac{n}{2}$. Тоді для довільного набору точок a_k , $k = \overline{0, n}$, таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, причому $\alpha_0 \geq \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma}}$, де α_0 — максимальний центральний кут між сусідніми точками a_k , і довільного набору попарно неперетинних областей B_k , таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{0, n}$, правильна нерівність*

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq n^{\frac{3n-2\gamma+1}{8}} \left(\prod_{k=1}^{n-1} k^{n-k} \right)^{\frac{n-2\gamma+1}{n(n-1)}} \cdot \left(\frac{2\pi}{n-1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right) \right)^{\frac{n-2\gamma+1}{2}} \left(\frac{4}{n^2-1} \right)^{\frac{n}{2} + \frac{1}{2n}} \left(\frac{n-1}{n+1} \right).$$

Теорема 4.2.2 дозволяє отримати теорему спотворення, аналогічну до теореми 3.4.2.

Теорема 4.5.2. [54] *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\rho_k \in (0, 1)$, $\rho_0 := \rho_n$, $\rho_{n+1} := \rho_1$, $z_k = \rho_k \exp i\theta_k$, $k = \overline{1, n}$, і нехай γ_k , $k = \overline{1, n}$, — деякі додатні дійсні числа,*

причому $\gamma_k > \frac{\sum_{s=1}^n \gamma_s}{2n-2}$ для довільного $k = \overline{1, n}$, і нехай m_k — такі ж, як і теоремі 3.4.2. Тоді, для кожної функції $f(z)$, регулярної і однолистої у відкритому одиничному крузі U , справедлива нерівність

$$\prod_{k=1}^n |f'(z_k)|^{\gamma_k} \leq (n-1)^{-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \gamma_k} \prod_{k=1}^n \left(\frac{4\rho_k}{m_k} \cdot \frac{1 - (\rho_k)^{m_k}}{1 + (\rho_k)^{m_k}} \right)^{-\gamma_k} \cdot \prod_{i,j=1, i < j}^n |f(z_j) - f(z_i)|^{\frac{2}{n-2}(\gamma_i + \gamma_j - \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \gamma_k)}.$$

В п'ятому розділі дисертації вивчається задача про екстремальне розбиття обмеженої області та деякі пов'язані з нею проблеми.

Центральною в даному розділі є така проблема.

Проблема 5.1.1. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, і $U = \{z : |z| < 1\}$ — одиничний круг. Знайти максимум виразу

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k),$$

де $a_k \in U$, $k = \overline{1, n}$, області $B_k \subset U$, $k = \overline{1, n}$, такі, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, причому $B_i \cap B_j = \emptyset$ для $1 \leq i, j \leq n$ та $i \neq j$.

В наведеній вище проблемі 5.1.1 потрібно знайти таке розбиття відкритого одиничного круга на n неперетинних областей, щоб добуток внутрішніх радіусів цих областей відносно деяких точок, які належать відповідно цим областям, був максимальним.

Для випадку двох неперетинних областей, які лежать у відкритому одиничному крузі, проблема 5.1.1 була розв'язана П.П. Куфарєвим в 1950 році в роботі [119]. У вказаній роботі було доведено, що для довільних попарно неперетинних однозв'язних областей $D_k \subset \{z : |z| < 1\}$ і точок $z_k \in D_k$, $k = 1, 2$, правильна нерівність

$$\prod_{k=1}^2 r(D_k, z_k) \leq \frac{4\rho_0^2(1 - \rho_0^2)^2}{(1 + \rho_0^2)^2},$$

де $\rho_0^2 = \sqrt{5} - 2$. Рівність досягається для випадку $z_1 + z_2 = 0$, $|z_k| = \rho_0$, D_k — відповідні півкруги, для яких точки z_k лежать на їхніх бісектрисах.

Для випадку $n = 3$ проблема 5.1.1 була розв'язана тільки наприкінці ХХ століття (див. [113], [125]). Було доведено, що для довільних попарно неперетинних однозв'язних областей $D_k \subset \{z : |z| < 1\}$ і точок $z_k \in D_k$, $k = 1, 2, 3$, правильна оцінка:

$$\prod_{k=1}^3 r(D_k, z_k) \leq \frac{64}{729} (223 - 70\sqrt{10}).$$

Рівність досягається тільки для трьох доповняльних секторів з величиною центрального кута $2\pi/3$, і точок z_k^* , які лежать на їх бісектрисах і на колі радіуса $\sqrt[3]{\sqrt{10} - 3}$.

Для $n \geq 4$ практично жодних результатів в проблемі 5.1.1 на даний момент немає. Тому актуальною є задача хоча б отримати деякі оцінки для добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей, які лежать у відкритому одиничному крузі для довільного натурального $n \geq 4$.

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Позначимо M_n максимум виразу $\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)$ для всеможливих конфігурацій областей B_k і точок a_k , таких, що $a_k \in U$, $k = \overline{1, n}$, де $U = \{z : |z| < 1\}$, області $B_k \subset U$, $k = \overline{1, n}$, такі, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, причому $B_i \cap B_j = \emptyset$ для $1 \leq i, j \leq n$ та $i \neq j$.

Правильна наступна теорема:

Теорема 5.2.1. [56] *Для довільного $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ правильна нерівність:*

$$(\sqrt{n^2 + 1} - n) \left(\frac{n + 1 - \sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt{n^2 + 1} - n + 1} \right)^n \leq M_n \leq \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

В наведеній вище теоремі 5.2.1 дано оцінку добутку внутрішніх радіусів областей, який вивчається в проблемі 5.1.1, причому дано як верхню, так і нижню оцінку даного добутку.

Використовуючи отримані результати для обмежених областей, можна отримати деякі оцінки і в проблемі 3.1.1, але з додатковою умовою,

що області B_k такі, що $B_k \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1; 1]$

Теорема 5.2.2. [56] *Для довільного набору точок a_k , таких, що $a_k \in \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1; 1]$, $k = \overline{1, n}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k , таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1; 1]$, $k = \overline{1, n}$ правильна нерівність*

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \prod_{k=1}^n \left| \frac{\sqrt{a_k^2 - 1}}{a_k - \sqrt{a_k^2 - 1}} \right|.$$

Проблема 5.1.1 пов'язана з проблемою про оцінку добутку неперетинних областей з полюсами на довільному еліпсі. Зокрема, для випадку трьох полюсів і трьох неперетинних областей правильна наступна теорема.

Нехай $L = \left\{ z = x + iy : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1 \right\}$ — еліпс, де $b = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{\sqrt{10} + 3} + \sqrt[3]{\sqrt{10} - 3} \right)$ і $c = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{\sqrt{10} + 3} - \sqrt[3]{\sqrt{10} - 3} \right)$.

Теорема 5.3.1. [186] *Для довільного набору точок a_k , таких, що $a_k \in L$, $k = \overline{1, 3}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k , таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1; 1]$, $k = \overline{1, 3}$ правильна нерівність*

$$\prod_{k=1}^3 r(B_k, a_k) \leq \frac{64}{729} (223 - 70\sqrt{10}) \prod_{k=1}^3 \left| \frac{\sqrt{a_k^2 - 1}}{a_k - \sqrt{a_k^2 - 1}} \right|,$$

причому рівність досягається, зокрема, для точок $a_k^0 = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{\sqrt{10} - 3} \cdot e^{i(\varphi + \frac{2\pi}{3}(k-1))} + \sqrt[3]{\sqrt{10} + 3} \cdot e^{-i(\varphi + \frac{2\pi}{3}(k-1))} \right)$, де $k = \overline{1, 3}$ і $\varphi \in [0; \frac{2\pi}{3})$, і областей B_k^0 , які обмежені чвертинами гіпербол $\frac{x^2}{\cos^2(\varphi + \frac{2\pi}{3}(k-1) + \frac{\pi}{3})} - \frac{y^2}{\sin^2(\varphi + \frac{2\pi}{3}(k-1) + \frac{\pi}{3})} = 1$ і $\frac{x^2}{\cos^2(\varphi + \frac{2\pi}{3}(k-1) - \frac{\pi}{3})} - \frac{y^2}{\sin^2(\varphi + \frac{2\pi}{3}(k-1) - \frac{\pi}{3})} = 1$ (які можуть вироджуватися в дійсну чи уявну півосі), і які містять відповідно точки a_k^0 .

Правильна також аналогічна теорема і для випадку $n > 3$, але при умові, що всі області B_k лежать в деякому крузі (див. теорему 5.3.3).

Також в дисертаційній роботі було отримано оцінку добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей, де $n \geq 3$, з полюсами на еліпсі з певною умовою на його півосі.

Нехай $M = \left\{ z = x + iy : \frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{t^2} = 1 \right\}$, причому $d^2 - t^2 = 1$ і нехай $d^* = d - \sqrt{d^2 - 1}$. Тоді правильна наступна теорема:

Теорема 5.3.4. [186] *Для довільного натурального n , $n \geq 3$, довільного набору точок a_k , таких, що $a_k \in M$, $k = \overline{1, n}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k , таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1; 1]$, $k = \overline{1, n}$ правильна нерівність*

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4(d - \sqrt{d^2 - 1})}{n} \right)^n \cdot \left(\frac{1 - (d - \sqrt{d^2 - 1})^n}{1 + (d - \sqrt{d^2 - 1})^n} \right)^n \prod_{k=1}^n \left| \frac{\sqrt{a_k^2 - 1}}{a_k - \sqrt{a_k^2 - 1}} \right|,$$

причому рівність досягається, зокрема, для точок і областей, які є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(z)dz^2 = - \frac{\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{2z}\right)^{n-2} \left(\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{2z}\right)^n + 1\right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{z^4}\right)}{\left(\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{2z}\right)^n - (d^*)^n\right) \left(1 - \left(\frac{z}{2} + \frac{1}{2z}\right)^n (d^*)^n\right)} dz^2.$$

Зауважимо, що довільний еліпс $\frac{x-x_0}{d_0^2} + \frac{y-y_0}{t_0^2} = 1$ на комплексній площині деяким лінійним перетворенням $w = pz + z_0$ можна перевести в еліпс виду $\frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{t^2} = 1$, для якого $d^2 - t^2 = 1$, причому внутрішні радіуси відповідних областей при даному перетворенні будуть відноситися як $|p| : 1$. Тому для того, щоб отримати оцінку добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей, які містять точки довільного еліпса, потрібно належним лінійним перетворенням перевести його в еліпс виду M і застосувати теорему 5.3.4.

Використовуючи деякі властивості відображень, розглянутих в попередніх підрозділах, отримано оцінку добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей, які містять точки деякої гіперболи.

Нехай $M = \left\{ z = x + iy : \frac{x^2}{d^2} - \frac{y^2}{p^2} = 1, x > 0 \right\}$, — права гілка деякої гіперболи, причому $d^2 + p^2 = 1$. З останньої умови випливає, що можемо

позначити $d = \cos \alpha$ і $p = \sin \alpha$ для деякого $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, а рівняння гіперболи записати у вигляді $M = \left\{ z = x + iy : \frac{x^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} = 1, x > 0 \right\}$.

Правильна наступна теорема.

Теорема 5.4.1. [60] *Нехай $n, n \geq 3$, — деяке натуральне число; $M = \left\{ z = x + iy : \frac{x^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} = 1, x > 0 \right\}$ — права гілка деякої гіперболи; $a_k, k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок комплексної площини, таких, що $a_k \in M$ для $k = \overline{1, n}$, причому $a_k = x_k + iy_k$, де $x_k = \cos \alpha \cosh(t_k)$, а $y_k = \sin \alpha \sinh(t_k)$ для деяких дійсних t_k , причому*

$$-\infty < t_1 < t_2 < \dots < t_n < +\infty.$$

Тоді для довільного набору взаємно неперетинних областей $B_k, k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k \subset \Omega, k = \overline{1, n}$, де

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus ([-\infty; -1] \cup [1; +\infty]),$$

правильна нерівність

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq 2^{\frac{n}{2n-1}} (2n-1)^{-\frac{n}{4}} \prod_{k=1}^n \left| \frac{\sqrt{a_k^2 - 1}}{a_k - \sqrt{a_k^2 - 1}} \right| \cdot \prod_{1 \leq p < q \leq n} (e^{2t_q} - e^{2t_p})^{\frac{2}{2n-1}} \prod_{k=1}^n e^{\frac{t_k}{2n-1}}.$$

Також в дисертаційній роботі в теоремі 5.4.2 було отримано оцінку, аналогічну до наведеної в попередній теоремі, але для випадку, коли точки $a_{k,p}, k = \overline{1, 2}, p = \overline{1, n}$, лежать на двох гілках гіперболи.

В шостому розділі дисертації вивчається задача про екстремальне розбиття комплексної площини з полюсами на прямій та деякі пов'язані з нею проблеми.

Так, в роботі [66] було наведено оцінку добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей з фіксованими полюсами на дійсній прямій, а саме було отримано такий результат:

Теорема [66]. *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок дійсної осі $\text{Im } z = 0$. Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, правильна нерівність:*

$$\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k)) \leq \left(\frac{2}{n}\right)^n \prod_{k=1}^n (a_k^2 + 1).$$

Причому знак рівності досягається, зокрема, для точок d_k і областей D_k , які є образами відповідно точок $d_k^* = \exp(i(\theta + \frac{2\pi k}{n}))$ ($d_k^* \neq 1$) і областей $D_k^* = \{z : |\arg z - \theta - \frac{2\pi k}{n}| < \frac{\pi}{n}\}$ ($k = \overline{1, n}$) при відображенні $w^* = \frac{i+iw}{1-w}$.

Зрозуміло, що випадок, коли точки a_k лежать на деякій іншій прямій, зводиться до наведеної вище теореми деяким поворотом.

Також в роботі [66] було відзначено, що попередню нерівність можна застосовувати для оцінки добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей тоді, коли фіксовані точки a_k належать певному відрізку. В той же час відкритою залишається аналогічна проблема для випадку, коли точки a_k не фіксовані, а розташовані на відрізку $[-1; 1]$ дійсної прямої довільним чином, а саме наступна проблема:

Проблема 6.1.1. *Знайти максимум добутку $\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))$ для всеможливих конфігурацій неперетинних областей $B_k \subset \mathbb{C}$ і точок $a_k \in B_k \cap [-1; 1]$, $k = \overline{1, n}$, де $n > 4$.*

Дану проблему було наведено в списку відкритих проблем в роботі [70] під номером 17. Деякі частинні результати в проблемі 6.1.1 було отримано в роботах [68] і [108].

Крім наведеної вище проблеми 6.1.1, в **шостому** розділі також розглядаються задачі про екстремальне розбиття комплексної площини з полюсами на прямій, але для випадку, коли одна з точок a_k є нескінченно віддаленою, а також випадок, коли одна з точок a_k лежить поза прямою. Цікавою також є задача, коли внутрішній радіус області, яка

містить одну з точок прямої, береться в деякому дійсному степені γ . Деякі оцінки для даного випадку були отримані в роботі [35].

В наступній теоремі отримано оцінку добутку внутрішніх радіусів областей, які містять точки довільної прямої.

Теорема 6.2.1. [198] *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; $l = \{z : z = z_0 + te^{i\varphi_0}\}$ — деяка пряма, де $z_0 \in \mathbb{C}$, $\varphi_0 \in \mathbb{R}$, — деякі фіксовані числа, причому $\varphi_0 \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, а t — параметр, який пробігає множину всіх дійсних чисел. Тоді для будь-яких фіксованих точок a_k , $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k = z_0 + \rho_k e^{i\varphi_0}$, де ρ_k — дійсні числа, причому $0 = \rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_n$, і будь-якого набору взаємно неперетинних областей B_k , $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, справедлива нерівність*

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |\rho_p - \rho_k| \right)^{\frac{2}{n-1}}.$$

Якщо ж пряма l , якій належать точки a_k , проходить через початок координат, то для даного випадку отримано дещо іншу оцінку.

Теорема 6.2.2. [198] *Нехай $n \in \mathbb{N}$. Тоді для будь-яких фіксованих точок a_k , $k = \overline{0, n}$, які належать деякій прямій $l = \{z : z = te^{i\varphi_0}\}$, де $t, \varphi_0 \in \mathbb{R}$, причому $\varphi_0 \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ і будь-якого набору взаємно неперетинних областей $\{B_k\}$, $k = \overline{0, n}$, таких, що $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, справедлива нерівність*

$$\prod_{k=0}^n r(B_k, a_k) \leq \frac{(n-1)^{-\frac{n-1}{4}}}{\sqrt{n}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n}} \left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{2}{n}}.$$

Відзначимо, що отримані в теоремах 6.2.1 і 6.2.2 оцінки дещо відрізняються від оцінок, отриманих в роботі [66], причому для певних випадків оцінками, отриманими в даній дисертаційній роботі, користуватися зручніше, наприклад, якщо точки a_k задані в полярних координатах.

В наступній теоремі розглядається випадок, коли n точок a_k належать дійсній прямій, а точка a_0 лежить поза прямою, причому внутрішній ра-

діус області, що містить точку a_0 , береться в деякому додатному степені γ .

Теорема 6.3.1. [187] *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 5$, γ — деяке додатне дійсне число, причому $\gamma \leq \sqrt[3]{n}$, a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок дійсної осі $\text{Im } z = 0$ і нехай $a_0 = i$. Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{0, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, правильна нерівність*

$$r^\gamma(B_0, i) \prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k)) \leq \frac{2^{n+\gamma}}{n^n} \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} \prod_{k=1}^n (a_k^2 + 1).$$

Знак рівності в наведеній вище нерівності досягається, зокрема, для точок a_k і областей B_k , які при відображенні $w^* = \frac{i+iw}{1-w}$ є образами відповідно точок d_k^* і областей D_k^* ($k = \overline{1, n}$), які є, в свою чергу, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}dw^2.$$

Наступна теорема дає оцінку добутку внутрішніх радіусів областей, які містять точки дійсної прямої, для випадку, коли одна з даних точок нескінченно віддалена.

Теорема 6.3.2. [187] *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, a_k , $k = \overline{1, n-1}$, — деякий набір фіксованих точок дійсної осі $\text{Im } z = 0$ і $a_n = \infty$. Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, правильна нерівність:*

$$r(B_n, \infty) \prod_{k=1}^{n-1} (r(B_k, a_k)) \leq \left(\frac{2}{n}\right)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (a_k^2 + 1).$$

Знак рівності в даній нерівності досягається, зокрема, для точок a_k і областей B_k , які є образами відповідно точок $d_k^* = \exp\left(\frac{2\pi ki}{n}\right)$ і областей $D_k^* = \{z : |\arg z - \frac{2\pi k}{n}| < \frac{\pi}{n}\}$ ($k = \overline{1, n}$) при відображенні $w^* = \frac{i+iw}{1-w}$.

Нехай R_n — максимум виразу $\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))$ для всеможливих таких конфігурацій точок a_k і областей B_k , які задовольняють всі умови проблеми 6.1.1. Правильна наступна теорема.

Теорема 6.3.3. [187] *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 5$, a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір точок відрізка $[-1; 1]$, причому $a_1 = -1$ і $a_n = 1$. Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, правильна нерівність:*

$$\left(\frac{2}{n}\right)^n \prod_{k=1}^n \left(\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{2n} \right) \operatorname{ctg}^2 \frac{(2k-1)\pi}{2n} + 1 \right) \leq R_n \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2k}{n-1} \right)^{\frac{2(n-k)}{n-1}}.$$

В підрозділі 6.4 розглядається задача, де внутрішній радіус області, що містить одну з точок, береться в деякому додатньому степені γ , причому розглядаються випадки, коли всі точки або належать одиничному колу, або дійсній прямій. Правильні наступні теореми.

Теорема 6.4.1. [187] *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, γ — деяке додатне дійсне число, причому $\gamma \neq 1$, a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір точок одиничного кола $|z| = 1$, причому $a_1 = 1$. Тоді для довільного набору однозв'язних областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, причому $\infty \notin B_n \cup B_1 \cup B_2$, правильна нерівність:*

$$r^\gamma(B_1, 1) \prod_{k=2}^n (r(B_k, a_k)) \leq \frac{2^{2n+3\gamma-1} \gamma^\gamma (\gamma+1)^{\gamma+1}}{|\gamma-1|^{1+\gamma} (\gamma+n-1)^{\gamma+n-1}} \left| \frac{\sqrt{\gamma}-1}{\sqrt{\gamma}+1} \right|^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Теорема 6.4.2. [187] *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, γ — деяке додатне дійсне число, причому $\gamma \neq 1$, $a_1 = \infty$, a_k , $k = \overline{2, n}$, — деякий набір фіксованих точок дійсної осі $\operatorname{Im} z = 0$. Тоді для довільного набору однозв'язних областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, причому $-i \notin B_n \cup B_1 \cup B_2$, правильна*

нерівність:

$$r^\gamma(B_1, \infty) \prod_{k=2}^n (r(B_k, a_k)) \leq \frac{2^{n+2\gamma} \gamma^\gamma (\gamma+1)^{\gamma+1}}{|\gamma-1|^{1+\gamma} (\gamma+n-1)^{\gamma+n-1}} \left| \frac{\sqrt{\gamma}-1}{\sqrt{\gamma}+1} \right|^{2\sqrt{\gamma}} \prod_{k=2}^n (a_k^2 + 1) .$$

Розділ 1

Огляд літератури за темою дисертації

1.1 Конформний та внутрішній радіус області. Функція Гріна

Одним з основних питань, які вивчає теорія функцій комплексної змінної, є дослідження аналітичних функцій за допомогою властивостей відображень, які дані функції здійснюють.

Нехай $\mathbb{N}$ і $\mathbb{R}$ – множини натуральних і дійсних чисел відповідно, $\mathbb{C}$ – комплексна площина, $U = \{z : |z| < 1\}$ – відкритий одиничний круг, і нехай $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ – розширена комплексна площина, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

Голоморфна (або мероморфна, тобто така, всі особливі точки якої – полюси) в області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ функція $f(z)$ називається однолистою в B , якщо вона здійснює взаємно однозначне відображення області B на область $f(B)$.

Означення 1.1.1. Відображення $f(z)$ називається конформним в деякій точці z_0 , якщо в цій точці дане відображення зберігає кути та коефіцієнт розтягнення буде однаковим у всіх напрямках. Відображення $f(z)$ називається конформним в деякій області B , якщо воно конформне в кожній точці даної області.

Відзначимо, що однолиста функція здійснює конформне відображення області B на область $f(B)$.

Ключовим результатом при дослідженні однолистих конформних відображень є теорема Рімана.

Теорема 1.1.1. (Ріман, 1851, див. [83]) Для довільної однозв'язної області $B \subset \mathbb{C}$, межа якої складається з більш ніж однієї точки, і точки $z_0 \in B$, існує єдина функція $f(z)$, яка конформно відображає дану область на відкритий одиничний круг U так, що $f(z_0) = 0$; $\arg(f'(z_0)) = \alpha$ для деякого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Наведена теорема Рімана дозволяє ввести поняття конформного радіуса.

Нехай функція $f(z)$, мероморфна в крузі $|z| < 1$, однолисто відображає круг $|z| < 1$ на область $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ так, що $f(0) = a$, де $a \in B$.

Означення 1.1.2. Величина $R(B, a) = |f'(0)|$ називається конформним радіусом області B в точці a .

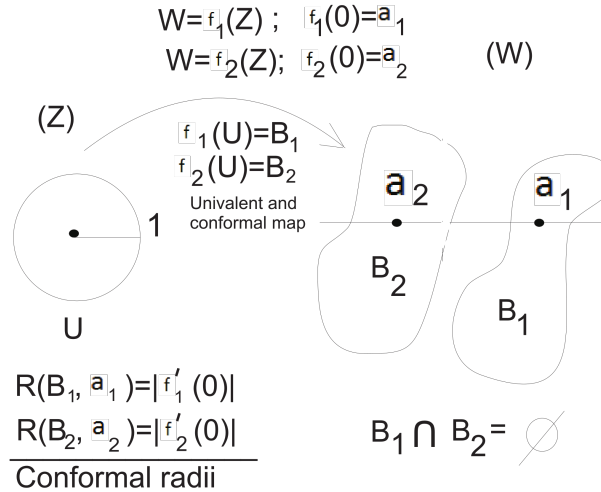


Рис. 1.1: Ілюстрація до означення конформного радіуса

Зрозуміло, що поняття конформного радіуса має зміст лише для однозв'язної області B . Згідно з наведеною теоремою Рімана, для довільної однозв'язної області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, такої, що має більш ніж одну межу точку, і деякої точки $a \in B$, існує єдина функція $f(z)$, мероморфна в крузі $|z| < 1$, однолисто відображає круг $|z| < 1$ на область $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ так, що $f(0) = a$, а напрям дійсної додатної осі переходить в деякий заданий напрям, який виходить з точки a . Якщо ж умову про відповідний

перехід напрямків прибрати, то відображення перестане бути єдиним, але похідні всіх цих функцій в точці 0 будуть відрізнятися на множник $e^{i\theta}$ для деякого дійсного θ , тому означення конформного радіуса задано коректно.

Поняття конформного радіуса має такий геометричний зміст. Нехай задано однозв'язну область B , що має більш ніж одну межу точку, і точку $a \in B$. Тоді існує єдина функція $f(z)$, яка однолисто відображає область B на круг з центром в точці нуль так, що $f(a) = 0$ і $f'(a) = 1$. Радіус утвореного круга і буде конформним радіусом області B і точці a .

Наведемо деякі **властивості конформного радіуса**.

Властивість 1.1.1. *Нехай маємо скінченну точку a і однозв'язні області B_1 і B_2 , причому $a \in B_1 \subset B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$. Тоді правильна нерівність*

$$R(B_1, a) \leq R(B_2, a).$$

Властивість 1.1.2. *Нехай маємо скінченні точки a_1 і a_2 і однозв'язні області B_1 і B_2 , і функцію $f(z)$, яка конформно і однолисто відображає область B_1 на область B_2 так, що $f(a_1) = a_2$. Тоді правильна рівність*

$$R(B_2, a_2) = R(B_1, a_1)|f'(a_1)|.$$

Конформний радіус довільного відкритого круга відносно його центра дорівнює його радіусу. Справді, нехай $B = \{z : |z| < p\}$, де $p \in \mathbb{R}^+$. Відображення $f(z) = pz$ конформно і однолисто відображає круг U на область B так, що $f(0) = 0$. $|f'(0)| = p$. Тому

$$R(B, 0) = p.$$

Випадок, коли центр круга не співпадає з точкою нуль, розглядається аналогічно.

Наступна лема показує, чому дорівнює конформний радіус відкритого одиничного круга відносно точки, яка не є центром даного круга.

Лема 1.1.1. *Нехай $z_0 \in U$. Тоді*

$$R(U, z_0) = 1 - |z_0|^2.$$

Справді, відображення, яке відображає одиничний круг на себе так, що $w(z_0) = 0$, має вигляд: $w = \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z} e^{i\theta}$. Звідси $|w'(z_0)| = \frac{1}{1-|z_0|^2}$, а отже

$$R(U, z_0) = 1 - |z_0|^2.$$

Відображення, яке відображає одиничний круг на себе так, що $w(0) = z_0$, має вигляд: $w = \frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}$.

Наслідок з леми 1.1.1. Для довільної області $D \subset U$ і $z_0 \in D$ правильна нерівність: $R(D, z_0) \leq 1 - |z_0|^2$.

Конформний радіус області B в точці a вводиться також для випадку, коли точка a — нескінченно віддалена.

Означення 1.1.3. *Нехай маємо область B і $\infty \in B$. Тоді існує єдина функція $f(z)$, регулярна в області B , за винятком точки a , яка в околі даної точки розкладається в ряд Лорана наступного вигляду:*

$$f(z) = z + c_0 + c_1 z^{-1} + \dots,$$

і яка однолисто відображає дану область на область $w > R$. Величина $R(B, \infty) = \frac{1}{R}$ і називається конформним радіусом області B в нескінченно віддаленій точці.

Означення конформного радіуса області в нескінченно віддаленій точці можна сформулювати і в наступній, еквівалентній формі.

Означення 1.1.4. *Нехай функція $f(z)$, регулярна в області $|z| > 1$, за винятком нескінченно віддаленої точки, однолисто відображає дану область на деяку область B так, що $f(\infty) = \infty$. Величину $R(B, \infty) = |f'(\infty)|^{-1}$ називають конформним радіусом області B в нескінченно віддаленій точці.*

Зауважимо, що введене так означення конформного радіуса в нескінченно віддаленій точці співпадає з введеним в [65, с. 13], на відміну від, наприклад, [83].

Приклад 1.1.1. Нехай $B = \{z : |z| > p\}$. Тоді

$$R(B, \infty) = \frac{1}{p}.$$

Для багатозв'язних областей аналогом поняття конформного радіуса є поняття внутрішнього радіуса. Для його введення нам буде потрібне поняття функції Гріна області з полюсом в деякій точці.

Означення 1.1.5. Нехай G – область в $\overline{C}$, $G \neq \overline{C}$. Функцією Гріна області G називається така дійсна функція $g_G(z, z_0)$, визначена для всіх $z, z_0 \in G$, $z \neq z_0$, що для кожного фіксованого $z_0 \in G$ виконуються наступні умови:

1. функція $g_G(z, z_0)$ гармонічна як функція від z в області $G \setminus \{z_0\}$;
2. якщо $z \rightarrow z_0$, то $g_G(z, z_0) \rightarrow +\infty$, при цьому різниця $g_G(z, z_0) - \ln \left(\frac{1}{|z - z_0|} \right)$ є обмеженою для скінченного z_0 , і різниця $g_G(z, z_0) - \ln |z|$ обмежена для $z_0 = \infty$;
3. при наближенні до межі δG функція $g_G(z, z_0)$ прямує до нуля.

Нехай G – область в $\overline{C}$, для якої існує функція Гріна, і нехай z_0 – скінченна точка цієї області. Оскільки різниця $\varphi_G(z, z_0) := g_G(z, z_0) - \ln \left(\frac{1}{|z - z_0|} \right)$ є гармонічною і обмеженою в області $G \setminus z_0$, то її можна дозначити в точці z_0 так, що дана функція буде гармонічною в області G (див. [166, с. 57]). Тоді для функції Гріна області G з полюсом в точці z_0 правильна асимптотична формула:

$$g_G(z, z_0) = \ln \left(\frac{1}{|z - z_0|} \right) + \gamma + o(1), z \rightarrow z_0$$

де γ – деяке дійсне число.

Означення 1.1.6. Величину e^γ називають внутрішнім радіусом області G в точці z_0 і позначають $r(G, z_0)$.

Для нескінченно віддаленої точки правильна асимптотична рівність

$$g_G(z, \infty) = \ln |z| + \gamma + o(1), z \rightarrow \infty.$$

Означення 1.1.7. Величину e^γ називають внутрішнім радіусом області G в точці ∞ і позначають $r(G, \infty)$.

Відзначимо, що для однозв'язної області конформний радіус даної області в деякій точці дорівнює її внутрішньому радіусу в цій точці.

Наведені нижче властивості функції Гріна описані, наприклад, в [83, с. 262].

Властивість 1.1.3. Якщо межа області G складається із скінченної кількості замкнених жорданових кривих, то дана область має функцію Гріна.

Властивість 1.1.4. Якщо область G має функцію Гріна, то

$$g_G(z, w) = g_G(w, z) > 0$$

для довільних $z, w \in G, z \neq w$.

Властивість 1.1.5. Функція Гріна $g_G(z, z_0)$ властивостями 1-3 визначається однозначно.

Властивість 1.1.6. Функція Гріна є інваріантом при конформному та однолистомому відображенні f , тобто правильна рівність:

$$g_{f(B)}(f(z), f(z_0)) = g_B(z, z_0), z \in B \setminus \{z_0\}.$$

Властивість 1.1.7. Нехай B — однозв'язна область і $a \in B$, $f_a(z)$ — функція, яка конформно і однолисто відображає область B на одиничний круг U так, що $f_a(a) = 0$, $f'_a(a) > 0$. Тоді функція Гріна області B в точці a має такий вигляд:

$$g_B(z, a) = \ln \frac{1}{|f_a(z)|}.$$

Для довільної області G компактифікованої комплексної площини завжди можна знайти послідовність областей G_k , $k \in \mathbb{N}$, для яких існує функція Гріна, таких, що $\forall k \ G_k \subset G$, $G_k \subset G_{k+1}$ і $\forall z \in G \ \exists k_0 \in \mathbb{N}$, таке, що $z \in G_{k_0}$.

Тоді послідовність гармонічних функцій

$$h_{G_k, w}(z) = g_{G_k}(z, w) - \log \frac{1}{|z - w|}, z \in G \setminus \{w\}$$

можна доозначити по неперервності в точці w . Дана послідовність рівномірно збігається на компактних підмножинах області G або до $+\infty$, або до деякої гармонічної функції $h_{G, w}(z)$, яка не залежить від вибору областей G_k . В цьому випадку функція

$$g_G(z, w) = h_{G, w}(z) + \log \frac{1}{|z - w|}$$

називається узагальненою функцією Гріна області G .

Відзначимо, що узагальнена функція Гріна, на відміну від класичної, при наближенні до межі прямує до нуля всюди, за винятком, можливо, множини логарифмічної ємності нуль.

Означення 1.1.8. *Величина*

$$r(G, w) := \exp(h_{G, w}(w))$$

називається внутрішнім радіусом області G в точці w .

Приклади.

Приклад 1.1.2. $g_U(z, 0) = -\log |z|$.

Приклад 1.1.3. $g_U(z, z_0) = \log \left| \frac{1 - \bar{z}_0 z}{z - z_0} \right|$

Приклад 1.1.4. Нехай $B(R) = \{z : 1 < |z| < R\}$ для дійсного R , такого, що $R > 1$ і довільного дійсного z_0 , такого, що $z_0 \in B(R)$. Тоді

$$\begin{aligned} g_{B(R)}(re^{i\theta}, z_0) &= \\ &= -\frac{\log r}{\log R} \log z_0 + \log \left| \frac{1 - z_0 re^{i\theta}}{re^{i\theta} - z_0} \right| - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R^{-k}}{k} \frac{z_0^k - z_0^{-k}}{R^k - R^{-k}} (r^k - r^{-k}) \cos k\theta. \end{aligned}$$

Відзначимо, що у всіх твердженнях даної роботи, якщо не вказано протилежного, розглядаються виключно області, для яких існує функція Гріна з полюсом в наперед заданій точці, а отже і можна знайти внутрішній радіус цієї області.

1.2 Трансфінітний діаметр замкненої множини

Даний підрозділ присвячений одному із способів вимірювання замкнених множин, а саме трансфінітному діаметру. Вказаний спосіб був запропонований в роботі [80]. При формулюванні основних властивостей трансфінітного діаметра будемо суттєво використовувати результати, наведені в роботі [83].

Нехай E — обмежена нескінченна замкнена множина на $\mathbb{C}$. Покладемо

$$V(z_1, z_2, \dots, z_n) = \prod_{\substack{k, l=1 \\ k < l}}^n (z_k - z_l),$$

де $n \geq 2$ і $z_1, z_2, \dots, z_n \in E$. Нехай $V_n = V_n(E)$ — це максимум модуля $|V(z_1, z_2, \dots, z_n)|$, коли $z_1, z_2, \dots, z_n$ пробігають різноманітні системи n точок, які належать множині E . Позначимо також

$$d_n = V_n^{\frac{2}{n(n-1)}}.$$

Властивість 1.2.1. [83, с. 285] Величина d_n не зростає з зростанням n .

Означення 1.2.1. Величина $d(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n$ називається трансфінітним діаметром множини E .

Наступні приклади, розглянуті в [83] показують, чому дорівнює трансфінітний діаметр деяких найпростіших замкнених множин.

Приклад 1.2.1. Трансфінітний діаметр довільного круга дорівнює його радіусу.

Приклад 1.2.2. Трансфінітний діаметр відрізка дорівнює четвертині його довжини.

Наступна властивість відображає монотонність трансфінітного діаметра множини.

Властивість 1.2.2. Якщо $E_1 \subset E_2$, то $d(E_1) \leq d(E_2)$.

Властивість 1.2.3. Нехай функція $w = f(z)$ відображає множину E_1 на множину E_2 , причому $f(z)$ — відображення стиску, тобто $|f(z_1) - f(z_2)| \leq |z_1 - z_2|$. Тоді виконується нерівність $d(E_2) \leq d(E_1)$

Наступні властивості відображають зв'язок трансфінітного діаметра множини з плоскою мірою Жордана.

Властивість 1.2.4. Зовнішня плоска міра Жордана обмеженої замкненої множини E не перевищує величини $\pi d^2(E)$.

Властивість 1.2.5. Зовнішня лінійна міра Жордана ортогональної проекції довільної замкненої множини E на довільну пряму не перевищує величини $4d(E)$.

Наступна властивість відображає зв'язок трансфінітного діаметра з конформним радіусом області в нескінченно віддаленій точці.

Властивість 1.2.6. [83] Трансфінітний діаметр обмеженого континуума E дорівнює величині, оберненій до конформного радіуса доповнення до даної множини в нескінченно віддаленій точці, тобто правильна рівність $d(E) = R^{-1}(CE; \infty)$.

1.3 Квадратичні диференціали

Дуже зручним засобом зображення розв'язків різноманітних екстремальних задач в геометричній теорії функцій комплексної змінної є квадратичні диференціали. Вперше їхню вагому роль відзначив Тейхмюлер, який в 1939 році сформулював загальний принцип, згідно з яким розв'язок кожної екстремальної задачі пов'язаний з деяким квадратичним диференціалом. Вагомий вклад в розвиток теорії квадратичних диференціалів було зроблено в роботах [73, 74, 82, 102, 167].

Наведемо деякі основні поняття з теорії квадратичних диференціалів, які будуть використовуватися надалі. Основні означення та теореми сформулюємо у вигляді, наведеному в роботі [102].

Означення 1.3.1. [102] *Нехай E — орієнтовна ріманова поверхня. Ми будемо казати, що на E визначено квадратичний диференціал, якщо кожному локальному параметру z поверхні E поставлено у відповідність деяку функцію $Q(z)$, мероморфну у відповідному околі, яка задовольняє наступній умові: якщо z^* — інший локальний параметр для E і $Q^*(z^*)$ — така ж функція для z^* , причому околи, відповідні z і z^* перетинаються, то в спільних точках цих околів*

$$Q^*(z^*) = Q(z) \left(\frac{dz}{dz^*} \right)^2.$$

З наведеного означення випливає, що квадратичний диференціал інваріантний стосовно заміни змінної, тобто, іншими словами, якщо однолиста функція $w = f(z)$ відображає область $G \subset E$ на область $G^* \subset E$, то формальна рівність $Q(z) dz^2 = Q^*(w) dw^2$ за означенням означає

$$Q(z) = Q^*(f(z)) (f'(z))^2; Q^*(w) = Q(f^{-1}(w)) ((f^{-1})'(w))^2.$$

Квадратичні диференціали будемо позначати символом

$$Q(z) dz^2. \tag{1.3.1}$$

Квадратичний диференціал повністю визначається мероморфною функцією $Q(z)$.

Точка P поверхні E називається нулем або полюсом порядку k диференціала $Q(z)dz^2$, якщо для кожного локального параметра z вона зображується точкою, яка має відповідну властивість відносно $Q(z)$. Точка $z_0 = \infty$ називається нулем або полюсом порядку n квадратичного диференціала (1.3.1), якщо відповідну властивість має точка $w_0 = 0$ відносно функції $Q^*(w) = \frac{Q(1/w)}{w^4}$. Сукупність нулів та простих полюсів будемо надалі позначати C , а сукупність полюсів другого порядку — H . Нулі і полюси квадратичного диференціала називаються його критичними точками.

В даній роботі ми будемо розглядати квадратичні диференціали, які мають особливі точки, що є або нулями, або простими полюсами, або полюсами другого порядку.

Наступна теорема характеризує поведінку квадратичного диференціала в околі його звичайних і критичних точок.

Теорема 1.3.1. [146, т8.1] *Нехай $Q(z)dz^2$ — квадратичний диференціал, заданий на відкритій множині $G \subset \mathbb{C}$ і $z_0 \in G$. Тоді існує таке конформне відображення $w = \phi(z)$ деякого околу точки z_0 , що:*

- а) $Q(z)dz^2 = dw^2$, якщо z_0 — звичайна точка;
 - б) $Q(z)dz^2 = w^n dw^2$, якщо z_0 — нуль порядку n ;
 - в) $Q(z)dz^2 = w^{-n} dw^2$, якщо z_0 — полюс порядку n , де n — непарне число;
 - г) $Q(z)dz^2 = c^2 w^{-2} dw^2$, якщо z_0 — полюс другого порядку;
 - д) $Q(z)dz^2 = (w^{-\frac{n}{2}} + cw^{-1})^2 dw^2$, якщо z_0 — полюс парного порядку n , $n > 2$,
- де c — лишок функції $\phi(z)$ в точці z_0 .

Важливими елементами, які характеризують квадратичний диференціал, є його траєкторії та ортогональні траєкторії.

Означення 1.3.2. [102]. Нехай E — орієнтовна ріманова поверхня, $Q(z) dz^2$ — квадратичний диференціал, заданий на E . Максимальна регулярна крива, на якій $Q(z) dz^2 > 0$, називається траєкторією диференціала $Q(z) dz^2$. Максимальна регулярна крива, на якій $Q(z) dz^2 < 0$, називається ортогональною траєкторією диференціала $Q(z) dz^2$.

Зауважимо, що траєкторії та ортогональні траєкторії не залежать від вибору локальних параметрів, зокрема, при конформному і однолистому відображенні траєкторії переходять в траєкторії.

Траєкторію квадратичного диференціала можна розглядати як інтегральну криву диференціального рівняння

$$Q(z) \left(\frac{dz}{d\tau} \right)^2 = 1, \quad (1.3.2)$$

де τ можна інтерпретувати як дійсну частину функції $\zeta = \int (Q(z))^{1/2} dz$.

Приклад 1.3.1. Розглянемо замкнену область $G = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}; y \in [-\pi; \pi]\}$ (це нескінченна смуга шириною 2π). Склеїмо дану область по прямих $y = -\pi$ і $y = \pi$ (зокрема, на рисунку, наведеному нижче, точка N склеїться з точкою P). Відображення

$$w = \exp(x + iy)$$

переводить поверхню, яку ми отримали, на комплексну площину (див. рисунок нижче). Знайдемо квадратичний диференціал, який заданий на даній поверхні за допомогою вказаного перетворення.

$$dw = \exp(x + iy)(dx + idy) = w dz.$$

$$\frac{dw^2}{w^2} = dz^2.$$

Це і буде квадратичний диференціал, який характеризує дану поверхню при вказаному відображенні. Там, де $\frac{dw^2}{w^2} > 0$, (що відповідає траєкторії квадратичного диференціала), ми отримаємо $dz^2 > 0$, тобто $dz \in \mathbb{R}$,

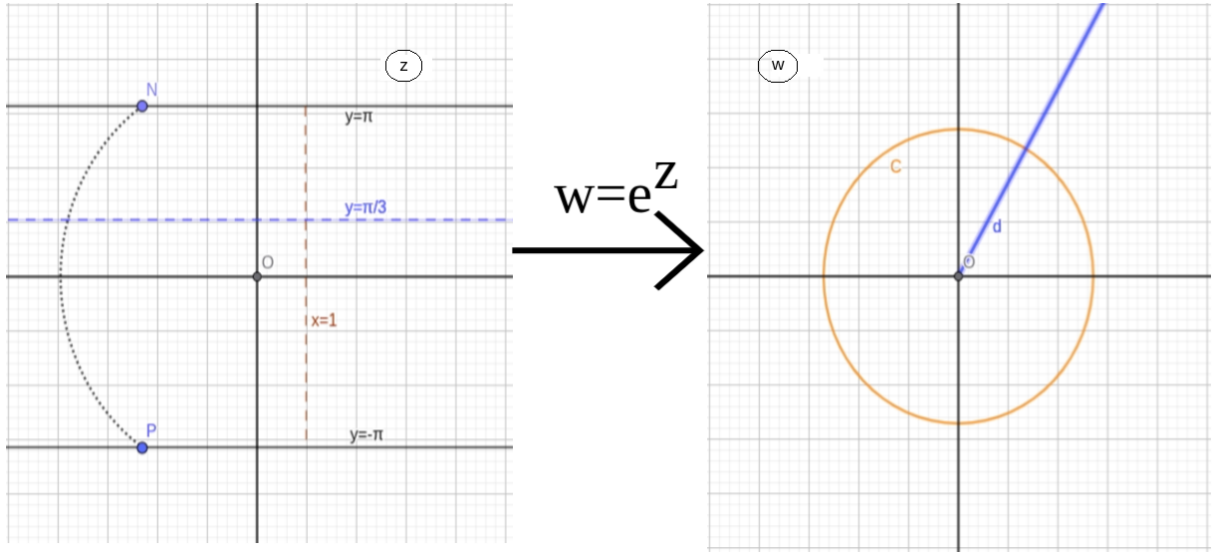


Рис. 1.2: Зображення для прикладу

а отже ми маємо горизонтальну лінію на G (зокрема, образом прямої $y = \frac{\pi}{3}$ буде промінь d площини w , тобто вказаний промінь є траєкторією квадратичного диференціала). Відповідно, коли $\frac{dw^2}{w^2} < 0$, (що відповідає ортогональній траєкторії квадратичного диференціала), ми отримаємо $dz^2 < 0$, тобто dz — чисто уявне число, а отже ми маємо вертикальну лінію на G (зокрема, коло c площини w є ортогональною траєкторією).

Означення 1.3.3. Множина K на E називається F -множиною відносно квадратичного диференціала $Q(z) dz^2$, якщо всяка траєкторія даного диференціала, яка перетинається з K , повністю належить K .

Означення 1.3.4. [102] Круговою областю D (відносно $Q(z) dz^2$) називається максимальна зв'язна відкрита F -множина на E , яка задовольняє наступним властивостям:

- 1) D містить єдиний подвійний полюс A диференціала $Q(z) dz^2$;
- 2) $D \setminus A$ заповнена траєкторіями диференціала $Q(z) dz^2$, кожна з яких представляє собою жорданову криву, яка відокремлює A від межі D .

3) при належному виборі чисто уявної сталої c функція

$$w = \exp \left\{ c \int \sqrt{(Q(z))} dz \right\},$$

доповнена значенням нуль в точці A , відображає D конформно на круг $|w| < R$, причому A переходить в точку $w = 0$.

Тобто, іншими словами, при конформному однолистному відображенні $w = f(z)$ області D на одиничний круг, такого, що $w(A) = 0$, виконується тотожність

$$Q(z) dz^2 \equiv -k \frac{dw^2}{w^2} \quad (1.3.3)$$

для деякого додатного дійсного k .

Наведена нижче теорема характеризує поведінку траєкторій квадратичного диференціалу $Q(z) dz^2$ в околі полюса другого порядку.

Теорема 1.3.2. [102] Нехай $P \in H$ — полюс другого порядку, і z — локальний параметр, причому точці P відповідає $z = 0$. Нехай $[Q(z)]^{-\frac{1}{2}}$ має (при деякому виборі гілки кореня) такий розклад в околі точки $z = 0$:

$$[Q(z)]^{-\frac{1}{2}} = (a + ib) z \{1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots\},$$

де a, b — дійсні, а $b_1, b_2, \dots$ — комплексні сталі. Будова образів траєкторій диференціалу $Q(z) dz^2$ в площині z визначається тим, який з трьох наступних випадків має місце.

Випадок I: $a \neq 0, b \neq 0$. Для достатньо малого $\alpha > 0$ образ всякої траєкторії, яка перетинає круг $|z| < \alpha$, в одному напрямі прямує до $z = 0$, а в іншому — виходить з круга $|z| < \alpha$. І модуль, і аргумент z змінюється монотонно на образі траєкторії в крузі $|z| < \alpha$. Всякий образ траєкторії закручується біля точки $z = 0$ і веде себе асимптотично, як логарифмічна спіраль.

Випадок II: $a \neq 0, b = 0$. Для достатньо малого $\alpha > 0$ образ всякої траєкторії, яка перетинає круг $|z| < \alpha$, в одному напрямі прямує до

$z = 0$, а в іншому — виходить з круга $|z| < \alpha$. Модуль z змінюється монотонно на образі траєкторії в крузі $|z| < \alpha$. Різні образи траєкторій мають різні граничні напрямки в точці $z = 0$.

Випадок III: $a = 0, b = 0$. Для всякого $\epsilon > 0$ можна знайти таке число $\alpha(\epsilon) > 0$, що при $0 < \alpha \leq \alpha(\epsilon)$ образ траєкторії, яка перетинає коло $|z| = \alpha$, представляє собою жорданову криву, яка належить круговому кільцю

$$\alpha(1 + \epsilon)^{-1} < |z| < \alpha(1 + \epsilon).$$

1.4 Метод розділяючого перетворення

При дослідженні екстремальних задач геометричної теорії функцій комплексної змінної суттєву роль відіграють різноманітні симетризаційні методи. Суть даних методів полягає в ідеї, що розв'язки екстремальних задач потрібно шукати серед об'єктів, які мають певну симетрію. Зокрема, при дослідженні в геометричній теорії функцій використовувалися, наприклад, кругова симетризація Пойа і Сеге, симетризація відносно прямої, запропонована Штейнером, симетризація Маркуса і т.д.

Суттєвий прорив при розв'язанні екстремальних задач геометричної теорії функцій забезпечив метод розділяючого перетворення (див., наприклад, [64, 65, 70]). Ідеєю даного методу є розбиття деякої множини на частини, з яких потім за допомогою певних перетворень утворюються симетричні об'єкти або шляхом склеювання, або за допомогою відомих способів симетризації. Наведені нижче перетворення базуються саме на ідеях, наведених в роботах [64, 65].

Опишемо, як проводиться розділяюче перетворення для областей. Нехай дано систему $n + 2$ різних точок розширеної комплексної площини $0, b_1, b_2, \dots, b_n, \infty$, причому точки $b_k, k = \overline{1, n}$, лежать попарно на різних променях, що виходять з початку координат (відзначимо, що у випадку, якщо у систему вказаних точок не входять 0 чи ∞ , чи жодна з них, всі

наведені нижче перетворення проводяться аналогічно). Припустимо для конкретності, що

$$0 = \arg b_1 < \arg b_2 < \dots < \arg b_n < 2\pi.$$

Позначимо

$$b_{n+1} := b_1, \quad b_0 := b_n, \quad \alpha_k := \frac{1}{\pi} (\arg b_{k+1} - \arg b_k), \quad k = \overline{1, n-1},$$

$$\alpha_n := \alpha_0 := \frac{1}{\pi} (2\pi - \arg b_n), \quad \alpha_{n+1} := \alpha_1.$$

Очевидно, що $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 2$.

Зауваження 1.4.1. Відзначимо також, що надалі ми інколи будемо означувати $\alpha_k := (\arg b_{k+1} - \arg b_k)$. Для цього випадку у наведених нижче формулах буде внесено відповідні зміни.

Через M_k позначимо область, яка утворюється при перетині променів, які виходять з початку координат і містять, відповідно, точки b_k і b_{k+1} , тобто

$$M_k := \{z : \arg b_k < \arg z < \arg b_{k+1}\}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$M_0 := M_n, \quad M_{n+1} := M_1.$$

Розглянемо сім'ю функцій

$$\zeta_k(z) = -i \left(e^{-i \arg b_k} w \right)^{\frac{1}{\sigma_k}}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad \zeta_0 := \zeta_n, \quad \zeta_{n+1} := \zeta_1,$$

де для кожного $k = \overline{1, n}$ беремо ту гілку багатозначної функції ζ_k , яка конформно і однолисто відображає області M_k , $k = 1, 2, \dots, n$ на праву півплощину $\operatorname{Re} \zeta > 0$. Тоді виконуються наступні асимптотичні рівності:

$$|\zeta_k(z) - \zeta_k(b_m)| \sim \frac{1}{\alpha_k} |b_m|^{\frac{1}{\alpha_k} - 1} |z - b_m|, \quad z \in \overline{M_k}, \quad z \rightarrow b_m,$$

$$k = 1, 2, \dots, n, \quad m = k, k+1;$$

$$|\zeta_k(z)| = |z|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad z \in \overline{M_k} \quad z \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty.$$

Розглянемо систему областей $\{B_k\}_{k=0}^{n+1}$ таких, що $0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_{n+1} \subset \overline{\mathbb{C}}$, а також $b_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, причому $B_k \cap B_m = \emptyset$, $k \neq m$, $k, m = 0, 1, \dots, n, n+1$.

Для кожного $k = \overline{1, n}$ розглянемо зв'язну компоненту множини $\zeta_k(B_k \cap M_k)$, яка містить точку $\zeta_k(b_k)$, і позначимо через $D_k^{(1)}$, об'єднання даної компоненти з її відображенням відносно уявної осі, а через $D_{k-1}^{(2)}$, $k = \overline{1, n}$, $D_0^{(2)} := D_n^{(2)}$ об'єднання зв'язної компоненти множини $\zeta_{k-1}(B_k \cap M_{k-1})$, яка містить точку $\zeta_{k-1}(b_k)$, $k = \overline{1, n}$ з її відображенням відносно уявної осі. Результатом розділяючого перетворення області B_k відносно сім'ї двох функцій $\{\zeta_k, \zeta_{k-1}\}$, $k = \overline{1, n}$ назовемо пару симетричних відносно уявної осі областей $\{D_k^{(1)}, D_{k-1}^{(2)}\}$.

Результатом розділяючого перетворення області B_0 відносно сім'ї функцій $\{\zeta_k\}_{k=1}^n$ назовемо сім'ю симетричних відносно уявної осі областей $D_k^{(0)}$, $k = \overline{1, n}$, які отримані об'єднанням зв'язної компоненти множини $\zeta_k(B_0 \cap M_k)$, яка містить точку 0 , $k = \overline{1, n}$ з її відображенням відносно уявної осі, а результатом розділяючого перетворення області B_{n+1} відносно сім'ї функцій $\{\zeta_k\}_{k=1}^n$ назовемо відповідно набір симетричних відносно уявної осі областей $D_k^{(\infty)}$, $k = \overline{1, n}$, які отримані об'єднанням зв'язної компоненти множини $\zeta_k(B_{n+1} \cap M_k)$, яка містить точку ∞ , $k = \overline{1, n}$ з її відображенням відносно уявної осі.

Зрозуміло, що для кожного $k = \overline{1, n}$ утворена система областей $\{D_k^{(0)}, D_k^{(1)}, D_k^{(2)}, D_k^{(\infty)}\}$ є системою попарно неперетинних областей.

Правильна наступна теорема.

Теорема 1.4.1. (див. [24, с. 90].) *Мають місце наступні нерівності*

$$r(B_k, b_k) \leq \left[\frac{r(D_k^{(1)}, \zeta_k(b_k))}{\frac{1}{\alpha_k} \cdot |b_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}} \cdot \frac{r(D_{k-1}^{(2)}, \zeta_{k-1}(b_k))}{\frac{1}{\alpha_{k-1}} \cdot |b_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \forall k = 1, 2, \dots, n, \quad (1.4.1)$$

$$r(B_0, 0) \leq \prod_{k=1}^n \left[r(D_k^{(0)}, 0) \right]^{\frac{\alpha_k^2}{2}}, \quad (1.4.2)$$

$$r(B_{n+1}, \infty) \leq \prod_{k=1}^n \left[r(D_k^{(\infty)}, \infty) \right]^{\frac{\alpha_k^2}{2}}. \quad (1.4.3)$$

Причому, якщо для областей B_k , $k = \overline{0, n+1}$ існують класичні функції Гріна, то в нерівностях (1.4.1) досягається знак рівності тоді і тільки тоді, коли області B_k , $k = \overline{1, n}$ відповідно симетричні відносно прямих $z = \rho \cdot \exp \left\{ i \cdot \frac{2\pi}{n} (k-1) \right\}$, $\rho > 0$, $k = \overline{1, n}$; а в нерівностях (1.4.2) і (1.4.3) відповідно тоді і тільки тоді, коли області B_0 і B_{n+1} симетричні відносно сім'ї прямих $z = \rho \cdot \exp \left\{ i \cdot \frac{2\pi}{n} (k-1) \right\}$, $\rho > 0$, $k = \overline{1, n}$.

1.5 m, n -променеві системи точок та основні результати, з ними пов'язані

В даному підрозділі будемо використовувати, з деякими змінами, позначення, запропоновані в роботі [24, р. 2.2].

Означення 1.5.1. Нехай $m, n \in \mathbb{N}$. Систему точок

$$A_{m,n} := \{a_{k,p} \in \mathbb{C} : k = \overline{1, m}, p = \overline{1, n}\}$$

будемо називати (m, n) -променевою, якщо для всіх $k = \overline{1, m}$ і $p = \overline{1, n}$ виконуються співвідношення:

$$\begin{aligned} 0 &< |a_{k,1}| < \dots < |a_{k,n}| < \infty; \\ \arg a_{k,1} &= \arg a_{k,2} = \dots = \arg a_{k,n} =: \theta_k =: \theta_k(A_{m,n}); \\ 0 &\leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_m < 2\pi \leq \theta_{m+1} := 2\pi + \theta_1. \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

Означення 1.5.2. На множині (m, n) -променевих систем точок розглянемо наступні величини:

$$\begin{aligned} \alpha_k &:= \alpha_k(A_{m,n}) := \frac{1}{\pi} [\theta_{k+1}(A_{m,n}) - \theta_k(A_{m,n})], \\ k &= \overline{1, m}, \quad \alpha_{m+1} := \alpha_1, \quad \alpha_0 := \alpha_m. \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

Величини $\alpha_k(A_{m,n})$, $k = \overline{1, m}$, будемо називати кутовими параметрами системи $A_{m,n}$.

Очевидно, що

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k(A_{m,n}) = \sum_{k=1}^m \alpha_k = 2.$$

Відзначимо, що введені в попередньому підрозділі при описі методу розділяючого перетворення кутові параметри для системи з n точок є частинним випадком відповідних кутових параметрів для (m, n) -променевої системи точок, отриманих за допомогою виразів (1.5.2).

Для кожної (m, n) -променевої системи точок $A_{m,n}$ розглянемо систему областей $P(A_{m,n}) = \{P_k\}_{k=1}^m$, де

$$P_k := P_k(A_{m,n}) := \{w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \theta_k(A_{m,n}) < \arg w < \theta_{k+1}(A_{m,n})\}, \quad k = \overline{1, m}.$$

Означення 1.5.3. Для довільної (m, n) -променевої системи $A_{m,n} = \{a_{k,p} : k = \overline{1, m}, p = \overline{1, n}\}$ та деякого $R \in \mathbb{R}^+$ введемо такі функціонали:

$$M_R(A_{m,n}) := \prod_{k=1}^m \prod_{p=1}^n \left[\chi \left(\left| \frac{a_{k,p}}{R} \right|^{\frac{1}{\alpha_k}} \right) \cdot \chi \left(\left| \frac{a_{k,p}}{R} \right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot |a_{k,p}|. \quad (1.5.3)$$

та

$$M(A_{m,n}) := \prod_{k=1}^m \prod_{p=1}^n \left[\chi \left(|a_{k,p}|^{\frac{1}{\alpha_k}} \right) \cdot \chi \left(|a_{k,p}|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot |a_{k,p}|, \quad (1.5.4)$$

де $\chi(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ — функція Жуковського.

Зрозуміло, що $M_1(A_{m,n}) = M(A_{m,n})$.

Нехай T_m — довільний набір m різних точок одиничного кола і $\partial U \setminus T_m$ складається з об'єднання m неперетинних дуг з довжинами $\gamma_1 = \sigma_1\pi, \dots, \gamma_m = \sigma_m\pi$, то

$$\mu(T_m) := \prod_{k=1}^m \sigma_k. \quad (1.5.5)$$

Для кожного $k = \overline{1, m}$ позначимо через $z_k(w)$ ту гілку багатозначної аналітичної функції $z = -i(e^{-\theta_k i} w)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, яка однолисто і конформно відображає області P_k на праву півплощину $\operatorname{Re} z > 0$, при цьому промінь $\arg w = \frac{1}{2}(\theta_k + \theta_{k+1})$ відображається на додатну дійсну піввісь (θ_k і α_k визначені відповідно в (1.5.1) і (1.5.2)). Тоді функція

$$\zeta_k^{(R)}(w) := \frac{R^{\frac{1}{\alpha_k}} - z_k(w)}{R^{\frac{1}{\alpha_k}} + z_k(w)} \quad (1.5.6)$$

однолисто і конформно відображає область P_k на одиничний круг $U = U_1$, $k = \overline{1, m}$. Позначимо $\omega_{k,p}^{(1)}(R) := \zeta_k^{(R)}(a_{k,p})$, $\omega_{k,p}^{(2)}(R) := \zeta_k^{(R)}(a_{k+1,p})$, $a_{n+1,p} := a_{1,p}$, $\omega_{0,p}^{(2)}(R) := \omega_{n,p}^{(2)}(R)$, ($k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$). Для всіх $k = \overline{1, m}$ множина $\{\omega_{k,p}^{(1)}(R)\}_{p=1}^m \cup \{\omega_{k,p}^{(2)}(R)\}_{p=1}^m$ складається з $2n$ різних точок на ∂U_R . Позначимо

$$\mu_k(R) := \mu_k^{(R)}(A_{m,n}) := \mu\left(\{\omega_{k,p}^{(1)}(R)\}_{p=1}^n \cup \{\omega_{k,p}^{(2)}(R)\}_{p=1}^n\right), \quad k = \overline{1, m}. \quad (1.5.7)$$

Величини $\mu_k(R)$ будемо називати коефіцієнтами зміщення.

Правильна теорема.

Теорема 1.5.1. [24, с. 95] Нехай зафіксовано $R \in \mathbb{R}^+$, $m, n \in \mathbb{N}$ і $m \geq 3$. Тоді для довільної (m, n) -променевої системи точок $A_{m,n} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, n}$, і довільної системи взаємно неперетинних областей $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, n}$, правильна нерівність

$$\prod_{k=1}^m \prod_{p=1}^n r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leq 2^{mn} \cdot \left(\prod_{k=1}^m \alpha_k\right)^n \cdot \left(\prod_{k=1}^m \mu_k(R)\right)^{\frac{1}{2}} \cdot M_R(A_{n,m}). \quad (1.5.8)$$

Знак рівності в (1.5.8) досягається тоді і тільки тоді, коли точки $a_{k,p}$ і області $\tilde{B}_{k,p}$, $k = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{m-2}(R^m + w^m)^{2n-2}}{\left[(R^{\frac{m}{2}} - iw^{\frac{m}{2}})^{2n} + (R^{\frac{m}{2}} + iw^{\frac{m}{2}})^{2n}\right]^2} dw^2, \quad (1.5.9)$$

$i \operatorname{cap}(\tilde{B}_{k,p} \setminus B_{k,p}) = 0$ для всіх $k = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, n}$. Куткові параметри і коефіцієнти зміщення в (1.5.8) визначені співвідношеннями (1.5.2), (1.5.7).

Одним з наслідків наведеної вище теореми 1.5.1 є такий результат.

Теорема 1.5.2. [24, с. 115] Нехай $m, n \in \mathbb{N}$ і $m \geq 3$. Тоді для довільної (m, n) -променевої системи точок $A_{m,n} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, n}$, і довільної системи взаємно неперетинних областей $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, n}$, правильна нерівність

$$\prod_{k=1}^m \prod_{p=1}^n r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leq \left(\frac{2}{n}\right)^{nm} \cdot \left(\prod_{k=1}^m \alpha_k\right)^n \cdot M(A_{m,n}). \quad (1.5.10)$$

Знак рівності в даній нерівності досягається, зокрема, тоді, коли точки $a_{k,p}$ і області $B_{k,p}$, $k = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{m-2}(1+w^m)^{2n-2}}{[(1-iw^{\frac{m}{2}})^{2n} + (1+iw^{\frac{m}{2}})^{2n}]^2} dw^2.$$

Для випадку системи, де на кожному промені міститься по одній точці, введемо таке означення.

Означення 1.5.4. Нехай $n \in \mathbb{N}$. Набір точок $A_n := \{a_k \in \mathbb{C} : k = \overline{1, n}\}$ будемо називати n -променевою системою точок, якщо $|a_k| \in \mathbb{R}^+$, $k = \overline{1, n}$, і

$$0 \leq \arg a_1 < \arg a_2 < \dots < \arg a_n < 2\pi.$$

Позначимо також $a_{n+1} := a_1$, $\alpha_k := \frac{1}{\pi} \arg \frac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1, n}$.

Для множини всіх n -променевих систем точок введемо такий "керуючий" функціонал:

$$\mathcal{L}(A_n) := \prod_{k=1}^n \chi \left(\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} \right) |a_k|. \quad (1.5.11)$$

1.6 Короткий історичний огляд та результати попередників, які використовуються в роботі

Початком розвитку теорії екстремальних задач на класах неперетинних областей була робота М.О. Лаврентьєва [129]. Зокрема, в цій роботі була вперше поставлена і розв’язана задача про добуток конформних радіусів двох взаємно неперетинних однозв’язних областей відносно двох наперед заданих фіксованих точок. Пізніше даний результат було узагальнено на випадок багатозв’язних областей і внутрішніх радіусів, зокрема, правильна така теорема (див., наприклад, [24, с. 79]).

Теорема 1.6.1. *Нехай a_1 і a_2 — деякі фіксовані точки комплексної площини $\mathbb{C}$, D_k , $k = 1, 2$, — довільні взаємно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, причому $a_1 \in D_1$ і $a_2 \in D_2$. Тоді правильна нерівність*

$$r(D_1, a_1) \cdot r(D_2, a_2) \leq |a_1 - a_2|^2. \quad (1.6.1)$$

Причому, якщо області D_k , $k = 1, 2$, мають класичну функцію Гріна, знак рівності в нерівності (1.6.1) досягається тоді і тільки тоді, коли області D_1 , D_2 обмежені колом $\left| \frac{z-a_1}{z-a_2} \right| = C$, де C — довільна додатна константа.

Пізніше Г.М. Голузін узагальнив задачу М.О. Лаврентьєва на випадок довільного скінченного числа n , $n \geq 3$, фіксованих скінченних точок $\{a_k\}_{k=1}^n$, і поставив питання про максимум добутку конформних радіусів n взаємно неперетинних однозв’язних областей B_k , таких, що $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, а для $n = 3$ отримав точну оцінку для добутку конформних радіусів трьох неперетинних областей (див. [83, с. 165]).

Надалі даний результат теж був узагальнений на випадок багатозв’язних областей і внутрішніх радіусів. Теорему Голузіна сформулюємо в такому вигляді.

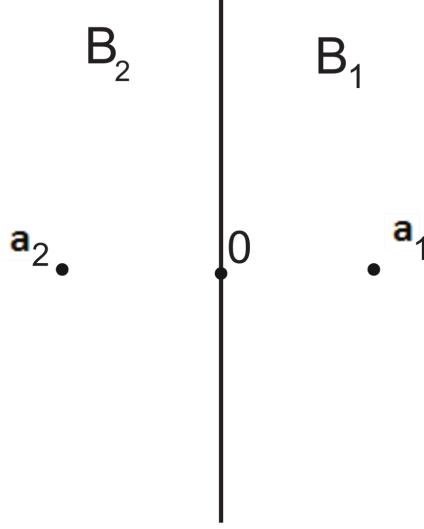


Рис. 1.3: Одна з екстремальних конфігурацій в теоремі 1.6.1

Теорема 1.6.2. *Нехай a_1, a_2 і a_3 — деякі фіксовані точки комплексної площини $\mathbb{C}$, B_k , $k = 1, 2, 3$, — довільні взаємно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, причому $a_k \in B_k$, $k = 1, 2, 3$. Тоді правильна нерівність*

$$\prod_{k=1}^3 r(B_k, a_k) \leq \frac{64}{81\sqrt{3}} |a_2 - a_1| |a_3 - a_1| |a_3 - a_2|, \quad (1.6.2)$$

де рівність досягається, з точністю до конформних автоморфізмів розширеної комплексної площини, тільки для областей, які є рівними кутами і точок, які лежать на бісектрисах цих кутів на однакових відстанях від їх спільної вершини.

Відзначимо, що знак рівності в нерівності 1.6.2 досягається, зокрема, для областей B_k^0 та точок a_k^0 , які є, відповідно, полюсами та круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w}{(w^3 - 1)^2} dw^2.$$

Для випадку $n = 4$ точна нерівність для добутку внутрішніх радіусів була отримана Г.В. Кузьміною в 1980 році в роботі [121]. Зокрема, правильна теорема.

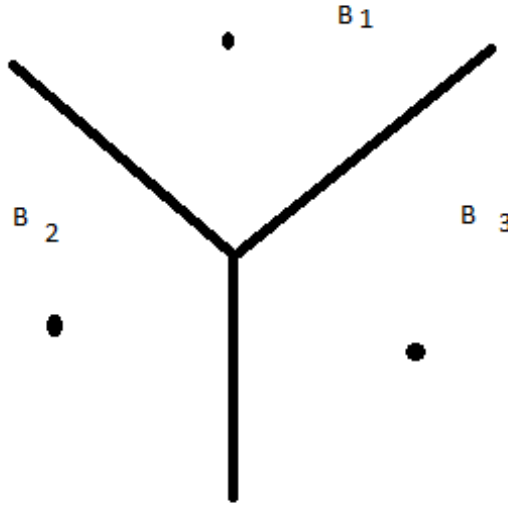


Рис. 1.4: Екстремальна конфігурація в теоремі 1.6.2

Теорема 1.6.3. *Нехай a_k , $k = \overline{1, 4}$, — деякі фіксовані точки комплексної площини $\mathbb{C}$, B_k , $k = \overline{1, 4}$, — довільні взаємно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, причому $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, 4}$. Тоді правильна нерівність*

$$\prod_{k=1}^4 r(B_k, a_k) \leq \frac{9}{4^{8/3}} \left(\prod_{1 \leq k < l \leq 4} |a_l - a_k| \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (1.6.3)$$

Рівність досягається тільки в тому випадку, коли, з точністю до конформного автоморфізму, $a_1 = -a_2 = 1$, $a_3 = -a_4 = i(2 - \sqrt{3})$, а межа множини $\bigcup_{k=1}^4 D_k$ складається із відрізків $[\sqrt{3} - 2, 2 - \sqrt{3}]$, променів $\{z | z = it, t \in [1, +\infty)\}$ і $\{z | z = it, t \in [-\infty, -1)\}$, частини кругової дуги ρ , яка проходить через точки $-1, i, 2 - \sqrt{3}$, яка лежить в першому квадранті, а також кругових дуг, які ми отримуємо з ρ перетвореннями $w \rightarrow -w$, $w \rightarrow \bar{w}$, $w \rightarrow -\bar{w}$.

Відзначимо, що теореми Лаврентьєва, Голузіна і Кузьміної, які ми вже згадували раніше, ми наводимо тут, оскільки вони суттєво використовуються при доведенні деяких результатів даної роботи.

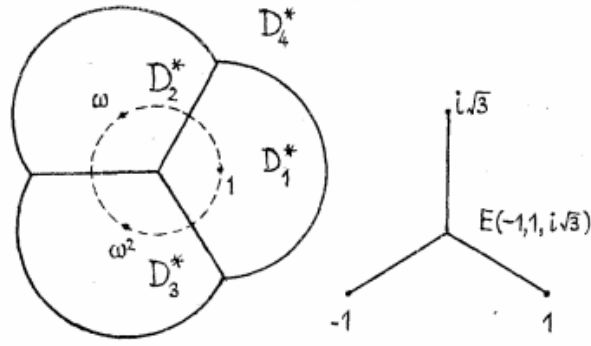


Рис. 1.5: Екстремальна конфігурація в теоремі 1.6.3

Для $n \geq 5$ повного розв'язку проблеми про максимум добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей відносно n фіксованих точок на даний час не отримано, однак було висловлено припущення (див. [125]), що для даного випадку правильна нерівність

$$\prod_{k=1}^5 R(B_k, a_k) \leq 4^{\frac{11}{3}} \cdot 3^{-\frac{3}{4}} \cdot 5^{-\frac{25}{6}} \left(\prod_{1 \leq k < l \leq 5} |a_l - a_k| \right)^{\frac{1}{2}} \approx$$

$$\approx 8.656 \cdot 10^{-2} \left(\prod_{1 \leq k < l \leq 5} |a_l - a_k| \right)^{\frac{1}{2}},$$

причому рівність виконується, зокрема, коли $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = \{1, e^{-\frac{2\pi i}{3}}, 0, e^{\frac{2\pi i}{3}}, \infty\}$, а області B_k , $k = \overline{1, 5}$ є відповідно круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(z)dz^2 = -\frac{z^6 + 7z^2 + 1}{z^2(z^3 - 1)^2}dz^2.$$

Наведені вище теореми пізніше було узагальнено також для випадку багатозв'язних областей і внутрішніх радіусів.

Розглядалися також екстремальні задачі змішаного типу, тобто задачі, в якій частина полюсів фіксована, а частина має певний ступінь "вільності". Одну з таких задач було сформульовано в роботі [65] у списку нерозв'язаних проблем.

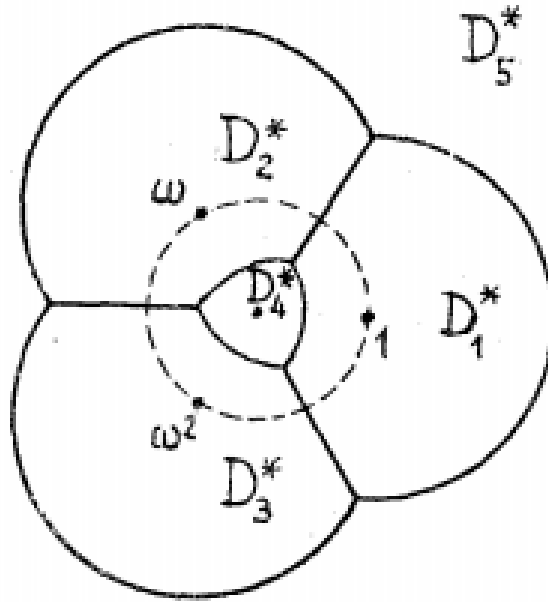


Рис. 1.6: Конфігурація для $n=5$, наведена в роботі [125]

Проблема 2.1.1. Довести, що максимум функціонала

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k),$$

де $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$, ($n \geq 2$) — попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $r(B_j, a_j)$ — внутрішній радіус області B_j в точці a_j ($a_j \in B_j$), $j = \overline{0, n}$ і $\gamma \leq n$, досягається для деякої конфігурації областей, які мають n -кратну симетрію.

Зауважимо, що для $\gamma > n$ вказаний функціонал при виконанні всіх умов проблеми 2.1.1 є необмеженим. В той же час для довільного натурального $n \geq 2$ і $\gamma \leq n$ даний функціонал обмежений, а тому є зміст ставити питання про його максимум.

В 1988 році в роботі [64] було доведено наступну теорему:

Теорема 1.6.4. Для довільних різних точок a_k , $k = 1, \dots, n$, $n \geq 2$, які лежать на колі $|z| = 1$, точки $a_0 = 0$ і довільних попарно неперетинних областей D_k , $k = 0, \dots, n$, таких, що $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = 0, \dots, n$,

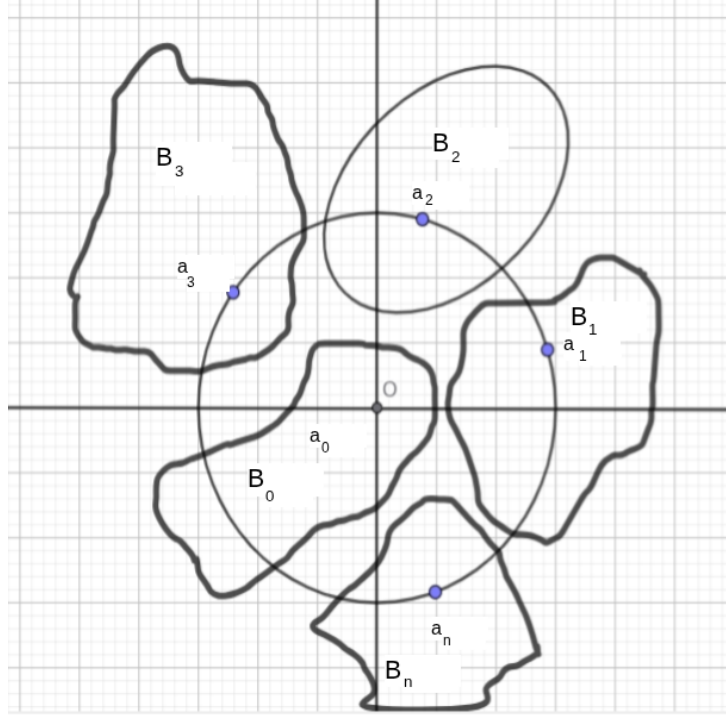


Рис. 1.7: Схематична ілюстрація для проблеми 2.1.1.

виконується нерівність:

$$\prod_{k=0}^n r(D_k, a_k) \leq \frac{4^{n+\frac{1}{n}} n^n}{(n^2 - 1)^{\frac{1}{n}+n}} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2.$$

Якщо ж області D_k мають класичну функцію Гріна, то рівність досягається в тому і тільки тому випадку, коли області D_k і точки a_k є відповідно круговими областями і полюсами квадратичного диференціала

$$Q(w)dz^2 = -\frac{(\alpha z)^n(n^2 - 1) + 1}{z^2((\alpha z)^n - 1)^2} dw^2,$$

де α - довільна стала, $|\alpha| = 1$

Дана теорема дає відповідь на питання проблеми 2.1.1 при умові, що $\gamma = 1$.

Зауважимо, що метод доведення теореми 2.1.1, запропонований в роботі [64], можна використовувати і для випадку $0 < \gamma < 1$.

Наступний важливий результат у проблемі 2.1.1 був отриманий в 1996 році в роботі [114], а саме тут було доведено таку теорему.

Теорема 1.6.5. *Нехай $a_k = \exp(i\theta_k)$, $k = \overline{1, n}$, $n \geq 5$ — точки одиничного кола, причому $0 = \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < 2\pi$, $\theta_{k+1} - \theta_k \leq 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{0, n}$, $\theta_0 = \theta_n - 2\pi$, $\theta_{n+1} = 2\pi$, де γ — фіксоване дійсне число, $0 < \gamma \leq n$. Тоді для довільної системи попарно неперетинних областей D_k , $k = 0, \dots, n$, таких, що $(a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}})$, $k = 0, \dots, n$, виконується нерівність:*

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \frac{4^{n+\frac{\gamma}{n}} \gamma^{\frac{\gamma}{n}} n^n}{(n^2 - \gamma)^{\frac{\gamma}{n}+n}} \left(\frac{n - \sqrt{\gamma}}{n + \sqrt{\gamma}} \right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Відзначимо, що результат роботи [114] цікавий також методом дослідження. Крім того, з теореми 1.6.5 випливає розв'язання проблеми 2.1.1 для $n \geq 5$ і $\gamma \in (0, 1]$. В 2003 році в роботі [127] цей результат для $n \geq 2$ і $\gamma \in (0, 1]$ для однозв'язних областей був підтверджений іншим методом.

В монографії [24] було встановлено наступний результат.

Теорема 1.6.6. *Для довільного $\gamma \in \mathbb{R}^+$ існує таке $n_0(\gamma) \in \mathbb{N}$, що для $n \geq n_0(\gamma)$ виконується нерівність*

$$I_\gamma = r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq r^\gamma(B_0^{(0)}, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k^{(0)}, a_k^{(0)})$$

для довільної системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $a_1 = 1$, і довільної системи попарно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, $0 \in B_0$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$. Знак рівності досягається тоді і тільки тоді, коли $a_k = a_k^{(0)}$, $\tilde{B}_k = B_k^{(0)}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, де $a_k^{(0)}$ і $B_k^{(0)}$ є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2,$$

і $\text{cap}(\tilde{B}_k \setminus B_k) = 0$, $k = \overline{0, n}$.

Таким чином, дана теорема дає відповідь на питання задачі при довільному γ , але починаючи з певного, заздалегідь невідомого номера.

Надалі дослідження в проблемі 2.1.1 розвивалися в різних напрямках. Одним з напрямків було отримання результатів для конкретних натуральних n . Зокрема, для випадку $n = 2$ проблему 2.1.1 було повністю розв'язано в роботі [35]. Для випадків $n = 3$, $1 < \gamma \leq 1.5$ і $n = 4$, $1 < \gamma \leq 1.7$ проблему 2.1.1 було розв'язано в роботі [203]. Деякі результати для конкретних значень n було отримано також в роботі [202].

Іншим напрямком був пошук зростаючої мажоранти для числа γ для $n \rightarrow \infty$. Так, в роботі [201] було отримано частковий розв'язок проблеми 2.1.1 для випадку $n \geq 8$, $1 < \gamma \leq \sqrt[4]{n}$. Для випадку $n \geq 5$, $1 < \gamma \leq \sqrt[3]{n}$ аналогічний результат було отримано в роботі [48]. В роботі [204] був отриманий наступний результат:

Теорема 1.6.7. *Для довільного $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{2}{3}$ існує натуральне n_0 , таке, що для $n \geq n_0$ і $0 < \gamma \leq n^\alpha$ виконується нерівність:*

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq r^\gamma(D_0, a_0^0) \prod_{k=1}^n r(D_k, a_k^0)$$

де $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$, — попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $a_1 = 1$, $k = \overline{1, n}$, $r(B_j, a_j)$ — внутрішній радіус області B_j в точці a_j ($a_j \in B_j$), $j = \overline{0, n}$, причому знак рівності досягається, наприклад, для $a_k = a_k^0$, $B_k = D_k$, $k = \overline{0, n}$, де a_k^0 , D_k , — відповідно полюси і кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}dw^2$$

Причому в якості n_0 можна взяти $\left\lceil e^{\frac{1}{(\frac{2}{3}-\alpha)^2}} \right\rceil + 1$

Даний результат вказує, що для довільного показника степеня $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{2}{3}$ завжди можна вказати номер n_0 , починаючи з якого для довільного γ , такого, що $0 < \gamma \leq n^\alpha$ можна вказати максимум функціонала (2.1.1) в проблемі 2.1.1, однак при наближенні показника до $\frac{2}{3}$ даний

номер починає стрімко зростати. Тому актуальним є завдання якщо не збільшити показник степеня, то хоча б вказати менший номер, починаючи з якого аналогічний результат починає виконуватися.

Розглядалася також проблема, аналогічна до проблеми 2.1.1, але для випадку, коли області B_k , $k = \overline{1, n}$, симетричні відносно одиничного кола, а саме така проблема:

Проблема 2.1.2. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ і $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Для довільної системи точок a_k і областей B_k , $k = \overline{0, n}$, таких, що $a_0 = 0$, $|a_1| = \dots = |a_n| = 1$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, де $B_i \cap B_j = \emptyset$ для $0 \leq i, j \leq n$ і $i \neq j$, і області $B_1, \dots, B_n$ симетричні відносно одиничного кола, знайти точну верхню оцінку для функціонала

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k).$$

Зауважимо, що проблема 2.1.2 не тотожна з проблемою 2.1.1, оскільки для тих випадків, де відомі екстремальні конфігурації в проблемі 2.1.1, області B_k , $k = \overline{1, n}$, не є симетричними відносно одиничного кола. Повного розв'язку проблеми 2.1.2, як і проблеми 2.1.1, на даний момент невідомо.

Наведемо наступний результат, який дає відповідь на питання проблеми 2.1.2 для випадку $\gamma \in (0, 1)$ для довільного $n \geq 2$.

Теорема 1.6.8. [185] Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0, 1)$. Тоді для довільного набору точок a_k , таких, що $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, і довільного набору попарно неперетинних областей B_k , $a_0 = 0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, причому області B_k , $k = \overline{1, n}$, симетричні відносно одиничного кола $|w| = 1$, правильна нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n+\gamma}{2}}} \left(\frac{1 - \frac{2\sqrt{\frac{\gamma}{2}}}{n}}{1 + \frac{2\sqrt{\frac{\gamma}{2}}}{n}}\right)^{2\sqrt{\frac{\gamma}{2}}}.$$

Знак рівності в цій нерівності досягається, зокрема, коли a_k і B_k , $k = \overline{0, n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного

диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2.$$

Досліджувалася також наступна проблема.

Проблема 3.3.1. Довести, що максимум функціонала

$$J_n(\gamma) = [r(B_0, 0) r(B_{n+1}, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k),$$

де $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n, B_\infty$, ($n \geq 2$) — попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \infty$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $r(B_j, a_j)$ — внутрішній радіус області B_j в точці a_j ($a_j \in B_j$), $j = \overline{0, n+1}$, досягається для деякої конфігурації областей, які мають n - кратну симетрію.

Для випадку $\gamma = \frac{1}{2}$ і $n \geq 2$ точну оцінку функціонала $J_n(\gamma)$ було отримано в роботі [64]. Пізніше, в роботі [125] аналогічну оцінку було отримано для $n \geq 2$ і $\gamma \in (0; \frac{n^2}{8}]$, але для випадку однозв'язних областей. Однак питання про оцінку функціонала $J_n(\gamma)$ для $\gamma > \frac{n^2}{8}$ у більшості випадків залишається відкритим.

Пізніше, в роботах [36, 52] був отриманий наступний результат

Теорема 1.6.9. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Тоді для будь-якої фіксованої системи різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ і набору будь-яких областей, що взаємно не перетинаються, $B_0, B_\infty, \{B_k\}_{k=1}^n$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, справедлива нерівність

$$J_n(\gamma) \leq \begin{cases} (n+1)^{-\gamma \frac{n+1}{n+2}} (J_n(0))^{1-\frac{2\gamma}{n+2}} \prod_{k=1}^n |a_k|^{\frac{2\gamma}{n+2}}, & \gamma \in (0, \frac{n+2}{2}]; \\ (n+1)^{-\frac{n+1}{2}} \prod_{k=1}^n |a_k|, & \gamma > \frac{n+2}{2}. \end{cases}$$

Частковий випадок теореми 1.6.9 для (n, m) -променевих систем точок при $n \geq 2$ було розглянуто в роботі [36].

Досліджувалися також проблеми про добуток внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей, але з додатковою умовою обмеженості на області $r(B_k, a_k)$. Найприроднішим в даному випадку є розглядати задачу про екстремальне розбиття відкритого одиничного круга.

Проблема 5.1.1. *Знайти максимум виразу $\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)$, де $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a_k \in U$, $k = \overline{1, n}$, де $U : |z| < 1$, області $B_k \subset U$, $k = \overline{1, n}$, такі, що $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, причому $B_i \cap B_j = \emptyset$ для $1 \leq i, j \leq n$ та $i \neq j$.*

Для випадку двох неперетинних областей, які належать одиничному колу, правильна наступна теорема.

Теорема 1.6.10. [119] *Для довільних попарно неперетинних однозв'язних областей $D_k \subset \{z : |z| < 1\}$ і точок $z_k \in D_k$, $k = 1, 2$, правильна нерівність:*

$$\prod_{k=1}^2 r(D_k, z_k) \leq \frac{4\rho_0^2(1 - \rho_0^2)^2}{(1 + \rho_0^2)^2}. \quad (1.6.4)$$

де $\rho_0^2 = \sqrt{5} - 2$. Рівність досягається для випадку $z_1 + z_2 = 0$, $|z_k| = \rho_0$, D_k - відповідні півкруги.

Для $n = 3$ у проблемі 5.1.1 правильний наступний результат.

Теорема 1.6.11. [113], [125] *Для довільних попарно неперетинних однозв'язних областей $D_k \subset \{z : |z| < 1\}$ і точок $z_k \in D_k$, $k = 1, 2, 3$, правильна оцінка:*

$$\prod_{k=1}^3 r(D_k, z_k) \leq \frac{64}{729}(223 - 70\sqrt{10}). \quad (1.6.5)$$

Рівність досягається тільки для секторів величиною $2\pi/3$, і точок z_k^* , які лежать на їх бісектрисах і на колі радіуса $\sqrt[3]{\sqrt{10} - 3}$.

Для $n \geq 4$ практично жодних результатів в проблемі 5.1.1 на даний момент немає.

Наступний результат буде потрібний нам при доведенні одного з результатів, наведених в даній роботі.

Теорема 1.6.12. [62] Нехай $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda, R \in \mathbb{R}^+$, $\lambda < R$. Тоді для довільних n різних точок a_k , $|a_k| = \lambda$, $k = \overline{1, n}$, і довільної системи попарно неперетинних областей $\{D_k\}_{k=1}^n$, $a_k \in D_k \subset U_R$, $k = \overline{1, n}$, правильна нерівність

$$\prod_{k=1}^n r(D_k, a_k) \leq \left(\frac{4\lambda}{n}\right)^n \cdot \left[\frac{R^n - \lambda^n}{R^n + \lambda^n}\right]^n. \quad (1.6.6)$$

Якщо області D_k , $k = 1, \dots, n$, мають класичні функції Гріна, то рівність в (5.1.2) досягається тоді і тільки тоді, коли a_k і D_k є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(w^n + R^n)}{(w^n - \lambda^n)^2(R^{2n} - \lambda^n w^n)^2} dw^2.$$

Значний інтерес представляють задачі, де точки a_k , хоч і не фіксовані, але знаходяться на деякій наперед заданій прямій чи, наприклад, на одиничному колі. Одна з таких задач за допомогою методу розділяючого перетворення була розв’язана в роботі [64], де було доведено, що для довільного набору різних точок a_k , $k = \overline{1, n}$, $n \geq 2$, які належать одиничному колу $|z| = 1$, і довільних попарно неперетинних областей B_k , таких, що $a_k \in B_k \in \overline{\mathbb{C}}$, правильна нерівність

$$\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k)) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n. \quad (1.6.7)$$

Результати, отримані в задачах з “вільними” полюсами, можна застосовувати і при розв’язанні задач, де відповідні точки фіксовані. Так, в роботі [66] було відзначено, що нерівність (1.6.7) застосовувати для оцінки добутку внутрішніх радіусів областей, які містять фіксовані точки на дійсній прямій, а саме було отримано наступний результат, який ми сформулюємо у вигляді, який будемо використовувати надалі.

Теорема 1.6.13. [66] Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, a_k , $k = \overline{1, n}$ — деякий набір фіксованих точок дійсної осі $\text{Im } z = 0$. Тоді

для довільного набору областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, правильна нерівність:

$$\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k)) \leq \left(\frac{2}{n}\right)^n \prod_{k=1}^n (a_k^2 + 1). \quad (1.6.8)$$

Причому знак рівності досягається, зокрема, для точок d_k і областей D_k , які є образами відповідно точок $d_k^* = \exp\left(i\left(\theta + \frac{2\pi k}{n}\right)\right)$ ($d_k^* \neq 1$) і областей $D_k^* = \{z : |\arg z - \theta - \frac{2\pi k}{n}| < \frac{\pi}{n}\}$ ($k = \overline{1, n}$) при відображенні $w^* = \frac{i+iw}{1-w}$.

Також в роботі [66] було відзначено, що нерівність (1.6.8) можна застосовувати для оцінки добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей для випадку, коли фіксовані точки a_k належать певному відрізку.

Висновки до розділу 1

У першому розділі дисертаційної роботи:

- введено поняття конформного радіуса однозв'язної області та поняття внутрішнього радіуса області;

- введено поняття трансфінітного діаметра замкненої множини та наведено основні факти, пов'язані з трансфінітним діаметром, які будуть використовуватися в роботі;

- наведено деякі основні поняття з теорії квадратичних диференціалів;

- описано частинні випадки методу розділяючого перетворення, необхідні для доведень результатів дисертаційної роботи;

- зроблено короткий історичний огляд теорії екстремальних задач про неперетинні області;

- сформульовано результати попередників, які зіграли суттєву роль при доведенні тверджень даної роботи, зокрема, деякі відомі теореми в задачі про максимум добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей, які містять точки одиничного кола і степеня γ внутрішнього радіуса області, яка містить точку нуль, результати в задачі про екстремальне розбиття одиничного круга, теорема про екстремальне розбиття комплексної площини з полюсами на дійсній прямій.

Розділ 2

Задача про екстремальне розбиття комплексної площини з n вільними полюсами на одиничному колі та з фіксованим полюсом в точці нуль

2.1 Формулювання проблем та деякі до- поміжні твердження, які використовув- ються при доведенні основних результа- тів

Даний розділ присвячений одній екстремальній задачі змішаного типу, тобто задачі, в якій частина полюсів (тобто точок, відносно яких шукаються внутрішні радіуси областей) фіксована, а частина має певний ступінь “вільності”. Ця проблема була сформульована в роботі [65] у списку нерозв’язаних проблем під номером 9.2, а потім повторена в роботі [70] під номером 16.

Проблема 2.1.1. *Довести, що максимум функціонала*

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k), \quad (2.1.1)$$

де $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$, причому $\gamma \leq n$, $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$, ($n \geq 2$) — попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $r(B_j, a_j)$ — внутріш-

ній радіус області B_j в точці a_j ($a_j \in B_j$), $j = \overline{0, n}$, досягається для деякої конфігурації областей, які мають n -кратну симетрію.

Відзначимо, що для $\gamma > n$ при виконанні всіх інших умов проблеми 2.1.1 функціонал (2.1.1) є необмеженим. Крім того, твердження, що система областей B_k і точок a_k , $k = \overline{0, n}$, має n -кратну симетрію тут означає, що дана система інваріантна відносно повороту навколо початку координат на кут $\frac{2s\pi}{n}$ для довільного натурального $s = \overline{1, n-1}$. Для отримання розв'язку проблеми 2.1.1 при певних фіксованих значеннях n і γ достатньо знайти конфігурацію областей B_k і точок a_k , $k = \overline{0, n}$, які задовольняють умовам даної проблеми, таку, щоб значення виразу (2.1.1) для будь-якої іншої конфігурації не перевищувала значення даного виразу для вказаної конфігурації. Зручним засобом для пошуку конфігурацій, які можуть бути екстремальними, є метод розділяючого перетворення.

Введемо деякі позначення, які будуть нам потрібні надалі. Згідно з умовою проблеми, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$. Припустимо, для конкретності, що

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \dots < \arg a_n < 2\pi.$$

Далі, означимо числа α_k таким чином:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &:= \frac{1}{\pi}(\arg a_2 - \arg a_1); \alpha_2 := \frac{1}{\pi}(\arg a_3 - \arg a_2); \dots \\ \alpha_n &:= \frac{1}{\pi}(2\pi - \arg a_n). \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Зрозуміло, що $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 2$.

Позначимо також

$$\alpha_0 = \max_k \alpha_k, \quad k = \overline{1, n}. \tag{2.1.3}$$

За допомогою методу розділяючого перетворення був отриманий наступний результат.

Лема 2.1.1. [114], [24]. Для системи областей D_k , $k = \overline{0, n}$ і точок a_k , $k = \overline{0, n}$, де D_k , a_k — відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}dw^2$$

правильна рівність

$$\begin{aligned} I_n^0(\gamma) &= r^\gamma(D_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(D_k, a_k) = \\ &= \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \end{aligned}$$

Вперше значення $I_n^0(\gamma)$ отримано в роботі [64] при $\gamma = 1$, для довільного γ — в роботі [114]. Форма $I_n^0(\gamma)$, яка використовується в даній роботі, була запропонована в роботі [24].

Надалі нам часто буде потрібно використовувати поведінку введеного функціонала $I_n^0(\gamma)$ як функції від γ .

Лема 2.1.2. *Правильна рівність*

$$(I_n^0(\gamma))'_\gamma = I_n^0(\gamma) \left(\frac{1}{n} \ln \left(\frac{4\gamma}{n^2 - \gamma} \right) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \ln \left(\frac{n - \sqrt{\gamma}}{n + \sqrt{\gamma}} \right) \right). \quad (2.1.4)$$

Доведення лема 2.1.2. Знайдемо похідну виразу $I_n^0(\gamma)$, вказаного в лемі 2.1.1. Відзначимо спочатку, що

$$(I_n^0(\gamma))' = I_n^0(\gamma) (\ln(I_n^0(\gamma)))'. \quad (2.1.5)$$

Далі отримаємо:

$$\begin{aligned} (\ln(I_n^0(\gamma)))' &= \left(\ln \left(\frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} \right) \right)' = \\ &= \left(\frac{\gamma}{n} \ln \frac{4\gamma}{n^2} - \left(n + \frac{\gamma}{n}\right) \ln \left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right) + 2\sqrt{\gamma} \ln \left(1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right) - 2\sqrt{\gamma} \ln \left(1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right) \right)' = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} \ln \frac{4\gamma}{n^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \ln \left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right) + \frac{n + \frac{\gamma}{n}}{1 - \frac{\gamma}{n^2}} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \ln \left(1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right) - \\
&\quad - \frac{1}{n \left(1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)} - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \ln \left(1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right) - \frac{1}{n \left(1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)} = \\
&= \frac{1}{n} \ln \left(\frac{4\gamma}{n^2 - \gamma}\right) + \frac{1}{n} \left(1 + \frac{n^2 + \gamma}{n^2 - \gamma} - \frac{n}{n - \sqrt{\gamma}} - \frac{n}{n + \sqrt{\gamma}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \ln \left(\frac{n - \sqrt{\gamma}}{n + \sqrt{\gamma}}\right) = \\
&= \frac{1}{n} \ln \left(\frac{4\gamma}{n^2 - \gamma}\right) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \ln \left(\frac{n - \sqrt{\gamma}}{n + \sqrt{\gamma}}\right).
\end{aligned}$$

Підставивши доведену вище рівність в (2.1.5), отримаємо рівність (2.1.4). **Лему 2.1.2 доведено.**

Також у даному розділі розглядається аналогічна задача, але з додатковою умовою, що області, які містять точки одиничного кола, симетричні щодо даного кола.

Проблема 2.1.2. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ і $\gamma \in \mathbb{R}^+$, причому $\gamma \leq n$. Для довільної системи точок a_k і областей B_k , $k = \overline{0, n}$, таких, що $a_0 = 0$, $|a_1| = \dots = |a_n| = 1$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, де $B_i \cap B_j = \emptyset$ для $0 \leq i, j \leq n$ і $i \neq j$, причому області $B_1, \dots, B_n$ симетричні відносно одиничного кола, знайти точну верхню оцінку для функціонала*

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k).$$

Зауважимо, що проблема 2.1.2 не тотожна до проблеми 2.1.1, оскільки в екстремальних конфігураціях в проблемі 2.1.1, у випадках, де вони відомі, області, які містять точки одиничного кола, не є симетричними відносно даного кола.

Конфігурацію областей, яка може бути екстремальною, було знайдено за допомогою методу розділяючого перетворення.

Лема 2.1.3. [64], [34] Для системи областей D_k , $k = \overline{0, n}$ і точок a_k , $k = \overline{0, n}$, де D_k , a_k — відповідно кругові області і полюси квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2.$$

виконується рівність

$$\begin{aligned} J_n^0(\gamma) &= r^\gamma(D_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(D_k, a_k) = \\ &= \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2} + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}. \end{aligned}$$

Значення $J_n^0(\gamma)$ для випадку областей, симетричних відносно одиничного кола, у формі, яка записана вище, було отримано, наприклад, в роботі [34]. Відзначимо, що інколи, де це не викликатиме непорозумінь, функціонал, отриманий в лемі 2.1.3, ми теж позначатимемо $I_n^0(\gamma)$.

Надалі нам часто буде потрібно використовувати поведінку введеного функціонала $J_n^0(\gamma)$ як функції від γ .

Лема 2.1.4. *Правильна рівність*

$$(J_n^0(\gamma))'_\gamma = J_n^0(\gamma) \left(\frac{1}{n} \ln \left(\frac{2\gamma}{n^2 - 2\gamma} \right) + \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \ln \left(\frac{n - \sqrt{2\gamma}}{n + \sqrt{2\gamma}} \right) \right). \quad (2.1.6)$$

Доведення лемі 2.1.4. Знайдемо похідну виразу $J_n^0(\gamma)$, вказаного в лемі 2.1.2. Застосуємо для виразу $J_n^0(\gamma)$ формулу (2.1.5). Будемо мати:

$$\begin{aligned} (\ln(J_n^0(\gamma)))' &= \left(\ln \left(\frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2} + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}} \right) \right)' = \\ &= \left(\frac{\gamma}{n} \ln \frac{2\gamma}{n^2} - \left(\frac{n}{2} + \frac{\gamma}{n} \right) \ln \left(1 - \frac{2\gamma}{n^2} \right) \right)' + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\sqrt{2\gamma} \ln \left(1 - \frac{\sqrt{2\gamma}}{n} \right) - \sqrt{2\gamma} \ln \left(1 + \frac{\sqrt{2\gamma}}{n} \right) \right)' = \\
& = \frac{1}{n} \ln \frac{2\gamma}{n^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \ln \left(1 - \frac{2\gamma}{n^2} \right) + \frac{\frac{n}{2} + \frac{\gamma}{n}}{1 - \frac{2\gamma}{n^2}} \cdot \frac{2}{n^2} + \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \ln \left(1 - \frac{\sqrt{2\gamma}}{n} \right) - \\
& \quad - \frac{1}{n - \sqrt{2\gamma}} - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \ln \left(1 + \frac{\sqrt{2\gamma}}{n} \right) - \frac{1}{n + \sqrt{2\gamma}} = \\
& = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{2\gamma}{n^2 - 2\gamma} \right) + \frac{1}{n} \left(1 + \frac{n^2 + 2\gamma}{n^2 - 2\gamma} - \frac{n}{n - \sqrt{2\gamma}} - \frac{n}{n + \sqrt{2\gamma}} \right) + \\
& \quad + \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \ln \left(\frac{n - \sqrt{2\gamma}}{n + \sqrt{2\gamma}} \right) = \\
& = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{2\gamma}{n^2 - 2\gamma} \right) + \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \ln \left(\frac{n - \sqrt{2\gamma}}{n + \sqrt{2\gamma}} \right).
\end{aligned}$$

Підставивши доведену вище рівність в (2.1.5), отримаємо (2.1.6).

Лему 2.1.4 доведено.

Нехай $n \in \mathbb{N}$ і $A_n := \{a_k \in \mathbb{C} : k = \overline{1, n}\}$ — деяка n -променева система точок (див. означення 1.5.4), де

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \dots < \arg a_n < 2\pi.$$

Нехай $P_k = P_k(A_n) := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}$, $a_{n+1} := a_1$, $\alpha_k := \frac{1}{\pi} \arg \frac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1, n}$. Очевидно, що $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 2$.

Нехай дано множину $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ і точку $a \in D$. Зв'язною компонентою множини D , що містить точку a , називатимемо максимальну підмножину множини D , яка містить точку a , і яка не може бути покрита об'єднанням двох неперетинних непорожніх відкритих множин.

Нехай D — відкрита множина в $\overline{\mathbb{C}}$, яка містить променеву систему точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$. Якщо $a \in D$, тоді позначимо через $D(a)$ зв'язну

компоненту D , яка містить точку a ; $D_k(a_p)$ – зв’язну компоненту множини $D(a_p) \cap \overline{P_k(A_n)}$, яка містить точку a_p , $p \in \{k, k+1\}$, $k = \overline{1, n}$; $D_k(0)$ – зв’язну компоненту множини $D(0) \cap \overline{P_k(A_n)}$, яка містить точку $w = 0$.

Внутрішнім радіусом $r(D, a_k)$ відкритої множини D відносно точки a називається внутрішній радіус зв’язної компоненти множини D , яка містить точку a .

Нехай відкрита множина D містить довільну n -променеву систему точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, тоді будемо говорити, що така множина задовольняє умову неперетинності відносно системи A_n , якщо множини $D_k(a_k)$ і $D_k(a_{k+1})$ попарно не перетинаються для кожного $k = \overline{1, n}$, $a_{n+1} = a_1$, тобто виконується рівність

$$D_k(a_k) \cap D_k(a_{k+1}) = \emptyset.$$

Нехай $\{B_k\}_{k=1}^n$ – довільний набір областей таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$. Нехай $\tilde{D} = \bigcup_{k=1}^n B_k$. Будемо говорити, що система областей $\{B_k\}_{k=1}^n$ задовольняє умову часткового перетину відносно деякої променевої системи A_n , якщо відкрита множина $\tilde{D}$ задовольняє умову неперетинності відносно цієї ж системи точок A_n .

Очевидно, що випадок взаємно неперетинних областей є частинним випадком областей, які частково перетинаються.

Для доведення деяких наступних результатів нам буде потрібна така теорема, яку ми доведемо спочатку в дещо загальнішому вигляді, ніж будемо надалі використовувати.

Теорема 2.1.1. [200] *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Тоді для будь-якої n -променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ і будь-якого набору областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, що задовольняє умову часткового перетину відносно променевої системи A_n , а також при умові, що $r(B_i, a_i)r(B_j, a_j) \leq |a_i - a_j|^2$ для $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, справедлива не-*

рівність

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq 2^n \mathcal{L}(A_n) \prod_{k=1}^n \alpha_k, \quad (2.1.7)$$

де $\mathcal{L}(A_n)$ — див. (1.5.11). Знак рівності в (2.1.7) досягається тоді, коли a_k і B_k , $k = \overline{1, n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(w^n - R^n)^2} dw^2, \quad (2.1.8)$$

де $R^n = \mathcal{L}(A_n)$.

Доведення теореми 2.1.1. Розглянемо відкриту множину

$$D = \bigcup_{k=1}^n B_k.$$

Очевидно, що

$$r(B_k, a_k) \leq r(D, a_k) = r(D(a_k), a_k). \quad (2.1.9)$$

Звідси слідує, що

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \prod_{k=1}^n r(D, a_k). \quad (2.1.10)$$

Нехай $\zeta = \pi_k(w)$ позначає однозначну гілку багатозначної аналітичної функції $-i(e^{-i \arg a_k} w)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $k = \overline{1, n}$, яка здійснює однолисте і конформне відображення

$$P_k := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}$$

на праву півплощину $\operatorname{Re} \zeta > 0$. Розглянемо систему функцій

$$\zeta = \pi_k(w) = -i(e^{-i \arg a_k} w)^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Сім'я функцій $\{\pi_k(w)\}_{k=1}^n$ є допустимою для розділяючого перетворення областей B_k , $k = \overline{1, n}$, відносно кутів $\{P_k\}_{k=1}^n$. Позначимо через $\Omega_k^{(1)}$,

$k = \overline{1, n}$, область площини $\mathbb{C}_\zeta$ отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(\overline{P_k} \cap B_k)$, яка містить точку $\omega_k^{(1)} = \pi_k(a_k)$, з її симетричним відображенням відносно уявної осі; через $\Omega_k^{(2)}$, $k = \overline{1, n}$, область площини $\mathbb{C}_\zeta$ отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(\overline{P_k} \cap B_{k+1})$, яка містить точку $\omega_k^{(2)} = \pi_k(a_{k+1})$, з її симетричним відображенням відносно уявної осі; $B_{n+1} := B_1$, $\pi_n(a_{n+1}) := \pi_n(a_1)$. В околі точки $w = a_k$ величину w можемо записати у вигляді

$$w = a_k + (w - a_k).$$

Тоді має місце такий розклад у ряд:

$$\begin{aligned} -i \left(e^{-i \arg a_k} w \right)^{\frac{1}{\alpha_k}} &= -i \left(e^{-i \arg a_k} (a_k + (w - a_k)) \right)^{\frac{1}{\alpha_k}} = \\ &= -i \left(e^{-i \arg a_k} a_k \left(1 + \frac{1}{a_k} (w - a_k) \right) \right)^{\frac{1}{\alpha_k}} = -i \left(|a_k| \left(1 + \frac{1}{a_k} (w - a_k) \right) \right)^{\frac{1}{\alpha_k}} = \\ &= -i |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} \left(1 + \frac{1}{a_k} (w - a_k) \right)^{\frac{1}{\alpha_k}} = -i |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} \left(1 + \frac{1}{\alpha_k a_k} (w - a_k) + o(1) \right) = \\ &= -i |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} - i \frac{1}{\alpha_k} \frac{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}}{a_k} (w - a_k) + o(1). \end{aligned}$$

Звідси отримуємо асимптотичну рівність

$$|\pi_k(w) - \omega_k^{(1)}| = \frac{1}{\alpha_k} |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k} - 1} \cdot (w - a_k)(1 + o(1)),$$

де

$$\frac{o(1)}{|w - a_k|} \rightarrow 0, \quad w \rightarrow a_k.$$

Таким чином, з визначення функцій π_k випливає, що

$$|\pi_k(w) - \pi_k(a_k)| = \frac{1}{\alpha_k} |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k} - 1} |w - a_k| + o(1), \quad (2.1.11)$$

$$w \rightarrow a_k, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w) - \pi_k(a_{k+1})| = \frac{1}{\alpha_k} |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k} - 1} |w - a_{k+1}| + o(1),$$

$$w \rightarrow a_{k+1}, w \in \overline{P_k}, k = \overline{1, n}.$$

Тоді, використавши відповідні результати робіт [24, 70], отримуємо нерівності

$$r(D, a_k) \leq \left[\frac{r(\Omega_{k-1}^{(2)}, \omega_{k-1}^{(2)}) r(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)})}{\frac{1}{\alpha_{k-1}} |a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}} - 1} \frac{1}{\alpha_k} |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k} - 1}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (2.1.12)$$

Таким чином, одержуємо оцінку

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n r(D, a_k) &\leq \\ &\leq \prod_{k=1}^n \alpha_k \prod_{k=1}^n \frac{|a_k|}{|a_k|^{\frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha_{k-1}} + \frac{1}{\alpha_k})}} \left[\prod_{k=1}^n r(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}) r(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}) \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Зрозуміло, що області $\Omega_k^{(1)}$ і $\Omega_k^{(2)}$ не перетинаються при всіх $k = \overline{1, n}$. Крім того,

$$\begin{aligned} \omega_k^{(1)} &= \pi_k(a_k) = -i \left(e^{-i \arg a_k} a_k \right)^{\frac{1}{\alpha_k}} = -i |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \\ \omega_k^{(2)} &= \pi_k(a_{k+1}) = -i \left(e^{-i \arg a_k} a_{k+1} \right)^{\frac{1}{\alpha_k}} = i |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \\ |\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}| &= |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad k = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

Врахувавши співвідношення (2.1.14) в нерівності (2.1.13), маємо

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n r(D, a_k) &\leq \prod_{k=1}^n \alpha_k \prod_{k=1}^n \frac{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}} |a_k| \times \\ &\times \prod_{k=1}^n \left[\frac{r(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}) r(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)})}{|\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}|^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Звідси із співвідношення (1.5.11), одержуємо

$$\prod_{k=1}^n r(D, a_k) \leq$$

$$\leq 2^n \prod_{k=1}^n \alpha_k \prod_{k=1}^n \chi \left(\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} \right) |a_k| \left[\prod_{k=1}^n \frac{r \left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)} \right) r \left(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)} \right)}{|\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}|^2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Оскільки за умовою теореми

$$\frac{r \left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)} \right) r \left(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)} \right)}{|\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}|^2} \leq 1, \quad k = \overline{1, n},$$

тому виконується (2.1.7). Рівність в (2.1.7) досягається тоді, коли в нерівностях (2.1.12) реалізується знак рівності при всіх $k = \overline{1, n}$. Крім того, із умов реалізації знака рівності в (2.1.12) [70] отримуємо симетричність B_k відносно променя $\arg w = \arg a_k$, $k = \overline{1, n}$. Звідси, слідує, що $\alpha_k = \frac{2}{n}$, $k = \overline{1, n}$. Таким чином, рівність в нерівності (2.1.7) може бути тоді, коли B_k і a_k , $k = \overline{1, n}$, є, відповідно, полюси та кругові області квадратичного диференціала (2.1.8).

Теорема 2.1.1 доведена.

Наслідок 2.1.1. [24, с. 122-123] *Нехай $\mathcal{L}(A_n) = 1$, тоді за всіх умов теореми 2.1.1 справедлива нерівність*

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq 2^n \prod_{k=1}^n \alpha_k, \quad (2.1.15)$$

причому знак рівності в цій нерівності досягається тоді, коли a_k і B_k , $k = \overline{1, n}$, є, відповідно, полюсами та круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(w^n - 1)^2} dw^2.$$

Відзначимо, що нерівність (2.1.15) виконується, зокрема, за умови, що $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, оскільки у цьому випадку $\mathcal{L}(A_n) = 1$.

2.2 Розв'язання проблеми 2.1.1 для деяких фіксованих значень n та при певних обмеженнях на степінь внутрішнього радіуса області, що містить точку нуль

В даному підрозділі наведено результати, отримані в проблемі 2.1.1 для випадку конкретних фіксованих значень n .

Зокрема, правильна наступна лема.

Лема 2.2.1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; $\gamma \in \mathbb{R}$, причому $0 < \gamma < n$; a_k , $k = \overline{0, n}$, — деякий набір точок комплексної площини, таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$; $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$, — попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, причому $a_j \in B_j$, $j = \overline{0, n}$; $r(B_j, a_j)$ — внутрішній радіус області B_j в точці a_j . Тоді при умові, що $r(B_0, a_0) \geq q^{\frac{1}{\gamma-n}}$ виконується нерівність:*

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq q.$$

Доведення лема 2.2.1. Нехай $r(B_0, a_0) = p \geq q^{\frac{1}{\gamma-n}}$. Застосувавши теорему Лаврентьєва [129] (див. формулу (1.6.1)) для областей B_0 і B_1 , отримаємо, що

$$r(B_0, 0) \cdot r(B_1, a_1) \leq |a_1| = 1.$$

Оскільки $r(B_0, 0) = p$, то $r(B_1, a_1) \leq \frac{1}{p}$. Аналогічно $r(B_k, a_k) \leq \frac{1}{p}$ для $k = \overline{2, n}$. Тоді

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq p^\gamma \cdot \frac{1}{p^n} = p^{\gamma-n} \leq (q^{\frac{1}{\gamma-n}})^{\gamma-n} = q.$$

Лему 2.2.1 доведено.

В наступній теоремі розглядається випадок, де кількість точок $\{a_k\}$, які лежать на одиничному колі, дорівнює трьом.

Теорема 2.2.1. [193] *Нехай γ — деяке дійсне число, таке, що $0 < \gamma \leq 1.7$. Тоді для довільного набору різних точок $\{a_k\}$, $k = \overline{0,3}$, таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,3}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей $\{B_k\}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{0,3}$ виконується нерівність:*

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^3 r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3 \frac{\left(\frac{4\gamma}{3}\right)^{\frac{\gamma}{3}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{9}\right)^{3+\frac{\gamma}{3}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{3}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \quad (2.2.1)$$

Знак рівності в нерівності (2.2.1) досягається, зокрема, для випадку, коли точки a_k і області B_k ($k = \overline{0,3}$) є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(9 - \gamma)w^3 + \gamma}{w^2(w^3 - 1)^2}dw^2.$$

Доведення теореми 2.2.1. Згідно з умовою теореми, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,3}$. Припустимо, не зменшуючи загальності, що

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \arg a_3 < 2\pi.$$

Означимо числа α_k , $k = \overline{1,3}$, та α_0 так, як і у формулах (2.1.2) та (2.1.3).

Зауважимо, що аналогічну теорему для випадку $0 < \gamma \leq 1.5$ було доведено в роботі [203], а для випадку $0 < \gamma \leq 2.3$ при виконанні додаткової умови $\alpha_0 \leq \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma}}$ — в роботі [48]. Тому нам залишається розглянути випадок $1.5 < \gamma \leq 1.7$ і $\alpha_0 > \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma}}$. Для зручності будемо доводити основне твердження для $\alpha_0 \geq \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma}}$.

Позначимо

$$I_3(\gamma) := r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^3 r(B_k, a_k).$$

Позначимо також $I_3^0(\gamma)$ значення функціонала $I_3(\gamma)$ для конфігурації областей B_k і точок a_k , ($k = \overline{0,3}$), які є круговими областями і полюсами квадратичного диференціала $Q(w)dw^2$. Згідно з лемою 2.1.1, правильна

рівність

$$I_3^0(\gamma) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \frac{\left(\frac{4\gamma}{3}\right)^{\frac{\gamma}{3}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{9}\right)^{3+\frac{\gamma}{3}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{3}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Нехай, для конкретності, $r(B_0, 0) = p$. Тоді, згідно з теоремою 2 роботи [121] (див. формулу (1.6.3)), враховуючи, що $|a_k - a_0| = 1$ для $k = \overline{1, 3}$, правильна нерівність

$$\prod_{k=0}^3 r(B_k, a_k) \leq \frac{9}{4^{\frac{8}{3}}} (|a_1 - a_2| \cdot |a_1 - a_3| \cdot |a_2 - a_3|)^{\frac{2}{3}},$$

а тому отримаємо:

$$\begin{aligned} I_3(\gamma) &= r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^3 r(B_k, a_k) = \\ &= p^{\gamma-1} \prod_{k=0}^3 r(B_k, a_k) \leq 9 \cdot 4^{-\frac{8}{3}} p^{\gamma-1} \left(\prod_{0 \leq i < j \leq 3} |a_i - a_j| \right)^{\frac{2}{3}} = \\ &= 9 \cdot 4^{-\frac{8}{3}} p^{\gamma-1} \left(\prod_{1 \leq i < j \leq 3} |a_i - a_j| \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (2.2.2) \end{aligned}$$

Доведемо спочатку, що твердження теореми правильне для $\gamma = 1.7$.

Позначимо $p_0(\gamma) = (I_3^0(\gamma))^{\frac{1}{\gamma-3}}$.

Безпосереднім обчисленням отримаємо, що $I_3^0(1.7) \approx 0.3763$.

Далі, для $\gamma = 1.7$ і $n = 3$ застосуємо лему 2.2.1, взявши $q = I_3^0(1.7)$. Отримаємо, що для $r(B_0, a_0) \geq (I_3^0(1.7))^{\frac{1}{1.7-3}} \approx 2.1208$ правильна нерівність $r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq I_3^0(1.7)$, а тому у цьому випадку відповідні конфігурації областей B_k і точок a_k не можуть бути екстремальними.

Нехай тепер $r(B_0, 0) \leq (I_3^0(1.7))^{\frac{1}{1.7-3}}$. Тоді, за (2.2.2), отримаємо, що

$$I_3(\gamma) \leq 9 \cdot 4^{-\frac{8}{3}} p^{\gamma-1} (|a_1 - a_2| \cdot |a_1 - a_3| \cdot |a_2 - a_3|)^{\frac{2}{3}}.$$

Нехай, для конкретності $\alpha_0 = \alpha_1$. Оскільки, за припущенням $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{\gamma}} > 1$,

отримаємо:

$$|a_1 - a_2| \leq 2 \sin \frac{\pi \left(2 - \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)}{2} = 2 \sin \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{\sqrt{\gamma}}.$$

Далі, оскільки $\alpha_2 + \alpha_3 = 2 - \alpha_1 \leq 2 - \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$, то, дослідивши вираз $|a_1 - a_3| \cdot |a_2 - a_3|$ при даній умові, отримаємо, що його максимум досягається у випадку, коли α_2 і α_3 рівні між собою, а тоді

$$|a_1 - a_3| = |a_2 - a_3| \leq 2 \sin \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right).$$

Отже, для $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$ отримаємо

$$\begin{aligned} I_3(\gamma) &\leq 9 \cdot 4^{-\frac{8}{3}} p^{\gamma-1} (|a_1 - a_2| \cdot |a_1 - a_3| \cdot |a_2 - a_3|)^{\frac{2}{3}} \leq \\ &\leq 9 \cdot 4^{-\frac{5}{3}} p_0^{\gamma-1}(\gamma) \sin^{\frac{4}{3}} \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) \sin^{\frac{2}{3}} \frac{\pi}{\sqrt{\gamma}}. \end{aligned}$$

Підставивши відповідні значення γ і $p_0(\gamma)$, отримаємо, що

$$I_3(1.7) \leq 0.3289 < 0.3763 < I_3^0(1.7),$$

а отже для випадку $\gamma = 1.7$ теорема 2.2.1 доведена.

Нехай тепер $\gamma \in (1.5; 1.7)$. Згідно з лемою 2.1.2

$$(I_3^0(\gamma))'_\gamma = I_3^0(\gamma) \left(\frac{1}{3} \ln \left(\frac{4\gamma}{9 - \gamma} \right) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \ln \left(\frac{3 - \sqrt{\gamma}}{3 + \sqrt{\gamma}} \right) \right).$$

Оскільки для даних значень параметра γ обидва доданки в дужках в правій частині наведеної вище рівності є від'ємними, то при умовах теореми $(I_3^0(\gamma))'_\gamma < 0$, а тому функціонал $I_3^0(\gamma)$ спадає як функція від γ на проміжку $(1.5; 1.7)$, а отже на даному проміжку $I_3^0(\gamma) \geq I_3^0(1.7) \approx 0.3763$.

Виконавши елементарні дослідження виразу

$$9 \cdot 4^{-\frac{5}{3}} p_0^{\gamma-1}(\gamma) \sin^{\frac{4}{3}} \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) \cdot \sin^{\frac{2}{3}} \frac{\pi}{\sqrt{\gamma}}$$

як функції від γ переконуємося, що на проміжку $(1.5; 1.7)$ дана функція зростає.

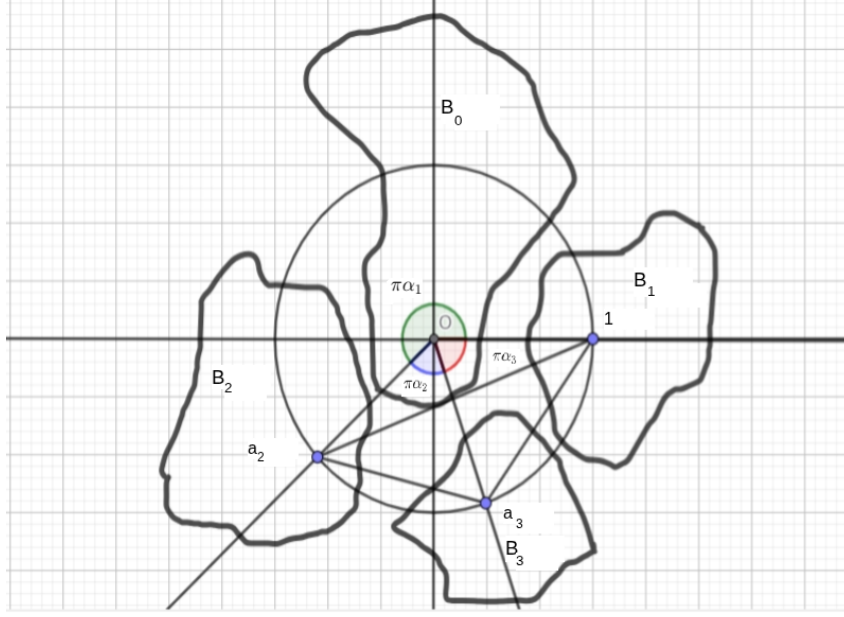


Рис. 2.1: Малюнок до теореми 2.2.1.

Звідси випливає, що для всіх $\gamma \in (1.5; 1.7]$ і при виконанні всіх умов теореми 2.2.1

$$\frac{I_3(\gamma)}{I_3^0(\gamma)} \leq \frac{I_3(1.7)}{I_3^0(1.7)} < 1,$$

звідки і випливає нерівність (2.2.1).

Теорему 2.2.1 доведено.

Зауважимо, що пізніше, в роботі [31] за допомогою деякого вдосконалення методу дослідження було доведено теорему, аналогічну до теореми 2.2.1, для випадку $1 < \gamma \leq 2.1$.

В наступній теоремі розглядається частковий випадок проблеми 2.1.1 для $n = 4$, але з деяким обмеженням на внутрішній радіус області, що містить точку нуля.

Теорема 2.2.2. *Для довільного дійсного γ , такого, що $2.09 < \gamma \leq 4$, для довільного набору точок a_k , $k = \overline{0, 4}$, таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, 4}$, і для довільного набору попарно неперетинних областей B_0 , B_1 , B_2 , B_3 , B_4 в $\overline{\mathbb{C}}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{0, 4}$, та при додатковій*

умові $r(B_0, a_0) \leq \frac{1}{2}$ виконується нерівність:

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^4 r(B_k, a_k) < \frac{\left(\frac{\gamma}{4}\right)^{\frac{\gamma}{4}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{16}\right)^{4+\frac{\gamma}{4}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{4}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{4}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \quad (2.2.3)$$

Доведення теореми 2.2.2.

Зауважимо, що нерівність (2.2.3) без додаткових обмежень на область B_0 для випадку $n = 4$ і $\gamma = 1$ була доведена в роботі [64], $0 < \gamma < 1$ — в роботі [127], $1 < \gamma \leq 2.09$ — в роботі [30].

Позначимо

$$I_4(\gamma) = r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^4 r(B_k, a_k)$$

та

$$I_4^0(\gamma) = \frac{\left(\frac{\gamma}{4}\right)^{\frac{\gamma}{4}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{16}\right)^{4+\frac{\gamma}{4}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{4}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{4}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Згідно з лемою 2.1.2

$$(I_4^0(\gamma))'_\gamma = I_4^0(\gamma) \left(\frac{1}{4} \ln \left(\frac{4\gamma}{16 - \gamma} \right) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \ln \left(\frac{4 - \sqrt{\gamma}}{4 + \sqrt{\gamma}} \right) \right).$$

Елементарними дослідженнями в рівності (2.1.4) переконуємося, що функція $I_4^0(\gamma)$ спадає на проміжку $2.09 < \gamma \leq 4$.

Згідно з умовою задачі, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, 4}$. Припустимо для конкретності, що

$$0 \leq \arg a_1 < \arg a_2 < \arg a_3 < \arg a_4 < 2\pi.$$

Означимо числа α_k , $k = \overline{1, 4}$, та α_0 так, як і у формулах (2.1.2) та (2.1.3). Зауважимо, що згідно з результатом роботи [114], нерівність (2.2.3) є правильною за умови, що $\alpha_0 \leq \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$. Тому нам залишається розглянути випадок $\alpha_0 > \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$. Для зручності розглядатимемо дещо ширший випадок $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$.

Позначимо також

$$\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right) := \mu(\gamma).$$

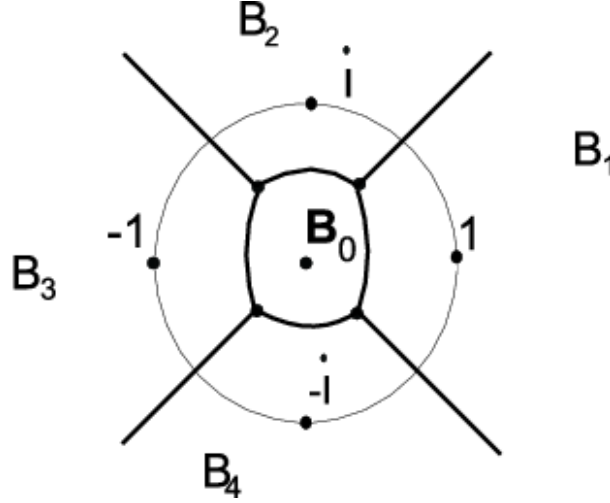


Рис. 2.2: Екстремальна конфігурація для $n=4$

За умовою

$$I_4(\gamma) = r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^4 r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^\gamma \prod_{k=1}^4 r(B_k, a_k).$$

За теоремою 2 роботи [121] правильна нерівність

$$\prod_{k=1}^4 r(B_k, a_k) \leq \frac{9}{4^{\frac{8}{3}}} (|a_1 - a_2| \cdot |a_1 - a_3| \cdot |a_2 - a_3| \cdot |a_1 - a_4| \cdot |a_2 - a_4| \cdot |a_3 - a_4|)^{\frac{2}{3}}.$$

Використовуючи дві останні нерівності, отримаємо:

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^4 r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^\gamma \frac{9}{4^{\frac{8}{3}}} (|a_1 - a_2| \cdot |a_1 - a_3| \cdot |a_2 - a_3| \cdot |a_1 - a_4| \cdot |a_2 - a_4| \cdot |a_3 - a_4|)^{\frac{2}{3}}.$$

Далі, враховуючи, що $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$, і, дослідивши останній вираз на екстремум при даній умові на α_0 , отримаємо, що його максимум досягається для випадку, коли одне з $\alpha_k = \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$, а всі інші рівні між собою, а отже матимемо наступну нерівність:

$$I_4(\gamma) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^\gamma 16 \cdot \frac{9}{4^{\frac{8}{3}}} \sin^2 \left(\frac{\mu(\gamma)}{3} \right) \sin^{\frac{4}{3}} \left(\frac{2\mu(\gamma)}{3} \right) \sin^{\frac{2}{3}} \mu(\gamma) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^\gamma \frac{9}{4^{\frac{2}{3}}} \sin^2\left(\frac{\mu(\gamma)}{3}\right) \sin^{\frac{4}{3}}\left(\frac{2\mu(\gamma)}{3}\right) \sin^{\frac{2}{3}}\mu(\gamma).$$

Нехай $\frac{9}{4^{\frac{2}{3}}} \sin^2\left(\frac{\mu(\gamma)}{3}\right) \sin^{\frac{4}{3}}\left(\frac{2\mu(\gamma)}{3}\right) \sin^{\frac{2}{3}}\mu(\gamma) = \Phi(\gamma)$. Розіб'ємо проміжок $\gamma \in (2.09; 4]$ на декілька менших проміжків.

Нехай спочатку $\gamma \in (2.09; 2.8]$. Тоді, врахувавши, що $\Phi(\gamma)$ зростає на вказаному проміжку, отримаємо

$$I_4(\gamma) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2.09} \Phi(2.8) = 0.092058.$$

В той же час

$$I_4^0(2.8) = 0.097443,$$

тобто для $\gamma \in (2.09; 2.8]$

$$I_4(\gamma) < 0.092058 < I_4^0(2.8) \leq I_4^0(\gamma),$$

а отже для $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$ і $\gamma \in (2.09; 2.8]$ конфігурації областей не можуть бути екстремальними.

Нехай тепер $\gamma \in (2.8; 3.2]$. Тоді

$$I_4(\gamma) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2.8} \Phi(3.2) = 0.074467 < 0.078027 \approx I_4^0(3.2),$$

тобто для $\gamma \in (2.8; 3.2]$

$$I_4(\gamma) < 0.074467 < I_4^0(3.2) \leq I_4^0(\gamma),$$

а отже для $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$ і $\gamma \in (2.8; 3.2]$ конфігурації областей не можуть бути екстремальними.

Аналогічно для $\gamma \in (3.2; 3.5]$

$$I_4(\gamma) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3.2} \Phi(3.5) \approx 0.065995 < 0.066642 < I_4^0(3.5) \leq I_4^0(\gamma).$$

Для $\gamma \in (3.5; 3.7]$

$$I_4(\gamma) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3.5} \Phi(3.7) \approx 0.058435 < 0.060225 < I_4^0(3.7) \leq I_4^0(\gamma).$$

Для $\gamma \in (3.7; 3.85]$

$$I_4(\gamma) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3.7} \Phi(3.85) \approx 0.053862 < 0.05593 < I_4^0(\gamma) \leq I_4^0(\gamma).$$

Для $\gamma \in (3.85; 4]$

$$I_4(\gamma) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3.85} \Phi(4) \approx 0.051116 < 0.052025 < I_4^0(4) \leq I_4^0(\gamma).$$

Відзначимо, що розбиття піввідрізка $(2.09; 4]$ на декілька проміжків нам знадобилося тому, що на даному піввідрізку функція $\left(\frac{1}{2}\right)^\gamma$ спадає, а функція $\Phi(\gamma)$ — зростає.

Звідси випливає, що для $\gamma \in (2.09; 4]$ і $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$

$$I_4(\gamma) < I_4^0(\gamma) = \frac{\left(\frac{\gamma}{4}\right)^{\frac{\gamma}{4}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{16}\right)^{4+\frac{\gamma}{4}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{4}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{4}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

А це означає, що для $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$, для конфігурацій областей, які задовольняють умови теореми 2.2.2, виконується нерівність (2.2.3). А тому, враховуючи результати роботи [114], отримаємо нерівність (2.2.3) для загального випадку.

Теорема 2.2.2 доведена.

В наступній теоремі розглядається випадок, коли кількість точок, які належать одиничному колу, дорівнює 5, 6, 7 або 8.

Теорема 2.2.3. [26, 206] *Нехай $n = 5, 6, 7, 8$, $\gamma_5 = 2.32$, $\gamma_6 = 2.49$, $\gamma_7 = 2.67$, $\gamma_8 = 2.84$. Тоді для довільного дійсного γ , такого, що $1 < \gamma \leq \gamma_n$, виконується нерівність*

$$I_n(\gamma) := r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq r^\gamma(D_0, d_0) \prod_{k=1}^n r(D_k, d_k),$$

де $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$, ($n \geq 2$), — попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, а d_k, D_k , — відповідно полюси і кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}dw^2. \quad (2.2.4)$$

Зауважимо, що, враховуючи результати роботи [25], нам достатньо довести теорему 2.2.3 для $n^{0.38} < \gamma \leq \gamma_n$, однак для повноти викладок доведення проведено для випадку $1 < \gamma \leq \gamma_n$.

Доведення теореми 2.2.3. Нехай, як і в попередніх теоремах,

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \dots < \arg a_n < 2\pi;$$

$$\alpha_1 := \frac{1}{\pi}(\arg a_2 - \arg a_1), \alpha_2 := \frac{1}{\pi}(\arg a_3 - \arg a_2) \dots \alpha_n := \frac{1}{\pi}(2\pi - \arg a_n),$$

а також $\alpha_0 = \max_k \alpha_k$.

Зауважимо, що випадок $\alpha_k \sqrt{\gamma} \leq 2$ був розглянутий в роботі [114]. Тому нам залишається довести правильність теореми для $\alpha_0 \sqrt{\gamma} > 2$. Для зручності всі наступні міркування будемо проводити для $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$.

Вираз $I_n(\gamma)$ запишемо в наступному вигляді:

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) =$$

$$\left(\prod_{k=1}^n (r(B_0, a_0) r(B_k, a_k) r(B_{k+1}, a_{k+1})) \right)^{\frac{\gamma}{n}} \left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{1 - \frac{2\gamma}{n}},$$

де $B_{n+1} := B_1$, $a_{n+1} := a_1$ і, відповідно, $r(B_{n+1}, a_{n+1}) = r(B_1, a_1)$.

Використовуючи теорему Голузіна [83, с. 165], отримаємо наступні оцінки:

$$\begin{aligned} & r(B_0, a_0) r(B_k, a_k) r(B_{k+1}, a_{k+1}) \leq \\ & \leq \frac{64}{81\sqrt{3}} \cdot |a_k - a_0| \cdot |a_{k+1} - a_0| \cdot |a_{k+1} - a_k| = \frac{64}{81\sqrt{3}} |a_{k+1} - a_k|. \end{aligned}$$

Звідси будемо мати:

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{k=1}^n (r(B_0, a_0) r(B_k, a_k) r(B_{k+1}, a_{k+1})) \right)^{\frac{\gamma}{n}} \leq \\ & \leq \left(\frac{64}{81\sqrt{3}} \right)^\gamma \left(\prod_{k=1}^n |a_{k+1} - a_k| \right)^{\frac{\gamma}{n}}. \quad (2.2.5) \end{aligned}$$

Відзначимо, що згідно з теоремою 5.1.1 роботи [24] (див. також наслідок 2.1.1 даної дисертаційної роботи), правильна нерівність:

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq 2^n \prod_{k=1}^n \alpha_k. \quad (2.2.6)$$

Використовуючи (2.2.6), отримаємо:

$$\begin{aligned} \left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{1-\frac{2\gamma}{n}} &\leq \left[2^n \prod_{k=1}^n \alpha_k \right]^{1-\frac{2\gamma}{n}} \leq \left[2^n \alpha_0 \left(\frac{2-\alpha_0}{n-1} \right)^{n-1} \right]^{1-\frac{2\gamma}{n}} < \\ &< \left[\frac{2^{n+1}}{(n-1)^{n-1} \sqrt{\gamma}} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \right)^{n-1} \right]^{1-\frac{2\gamma}{n}}. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Враховуючи (2.2.5) і (2.2.7), а також те, що $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$, отримаємо наступну нерівність:

$$\begin{aligned} I_n(\gamma) &< \left(\frac{64}{81\sqrt{3}} \right)^\gamma \left(\prod_{k=1}^n |a_{k+1} - a_k| \right)^{\frac{\gamma}{n}} \left[\frac{2^{n+1}}{(n-1)^{n-1} \sqrt{\gamma}} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \right)^{n-1} \right]^{1-\frac{2\gamma}{n}} \leq \\ &\leq \left(\frac{64}{81\sqrt{3}} \right)^\gamma \left(2 \sin \left(\frac{\pi}{n-1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right) \right) \right)^{\frac{(n-1)\gamma}{n}} \left(2 \sin \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right) \right)^{\frac{\gamma}{n}} \cdot \\ &\cdot \left[\frac{2^{n+1}}{(n-1)^{n-1} \sqrt{\gamma}} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \right)^{n-1} \right]^{1-\frac{2\gamma}{n}} =: P_n(\gamma). \end{aligned}$$

Нехай $I_n^0(\gamma)$ – значення функціонала $I_n(\gamma)$ для областей D_k і точок d_k , згаданих в умові теореми. Тоді, згідно з лемою 2.1.1 (див. також теорему 5.2.3 [24]), виконується рівність:

$$\begin{aligned} I_n^0(\gamma) &= r^\gamma(D_0, 0) \prod_{k=1}^n r(D_k, d_k) = \\ &= \left(\frac{4}{n} \right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2} \right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2} \right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}} \right)^{2\sqrt{\gamma}}, \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

де D_k — згадані вище кругові області квадратичного диференціала (2.2.4).

Тоді

$$\frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} < \frac{P_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)}.$$

Перейдемо до розгляду конкретних значень n .

Розглянемо випадок $n = 5$ і $\alpha_0\sqrt{\gamma} \geq 2$. Для $\gamma = 2.32$, враховуючи (2.2.8), отримаємо, що $\frac{P_5(2.32)}{I_5^0(2.32)} < \frac{0.0516}{0.0518} < 0.997 < 1$, а значить для даних значень n і γ для довільної конфігурації областей B_k і точок a_k , які задовільняють всі умови теореми 2.2.3, виконується нерівність $I_5(2.32) \leq I_5^0(2.32)$, тобто для $\gamma = 2.32$ теорема доведена.

Нехай тепер $1 < \gamma < 2.32$. Елементарними дослідженнями переконуємося, що функція $P_5(\gamma)$ монотонно зростає на даному проміжку, а отже $P_5(\gamma) < P_5(2.32)$. В той же час, згідно з лемою 2.1.2, отримаємо, що

$$(I_5^0(\gamma))'_\gamma = I_5^0(\gamma) \left(\frac{1}{5} \ln \left(\frac{4\gamma}{25 - \gamma} \right) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \ln \left(\frac{5 - \sqrt{\gamma}}{5 + \sqrt{\gamma}} \right) \right).$$

Для $1 < \gamma < 2.32$ обидва вирази, від яких береться логарифм, менші одиниці, тому $(I_5^0(\gamma))'_\gamma < 0$. Звідси випливає, що функція $I_5^0(\gamma)$ монотонно спадає, а отже $I_5^0(\gamma) > I_5^0(2.32)$. Підсумовуючи вище сказане, для довільного γ такого, що $1 < \gamma < 2.32$ виконуються наступні нерівності:

$$\frac{I_5(\gamma)}{I_5^0(\gamma)} < \frac{P_5(\gamma)}{I_5^0(\gamma)} < \frac{P_5(2.32)}{I_5^0(2.32)} < 1.$$

Отже, для $n = 5$ і $1 < \gamma < 2.32$ для довільної конфігурації областей B_k і точок a_k , які задовільняють всі умови теореми 2.2.3, виконується нерівність $I_5(\gamma) < I_5^0(\gamma)$, тобто для $n = 5$ теорема доведена.

Розглянемо випадок $n = 6$ і $\alpha_0\sqrt{\gamma} \geq 2$. Для $\gamma = 2.49$, враховуючи (2.2.8), отримаємо, що $\frac{P_6(2.49)}{I_6^0(2.49)} < 0.988 < 1$, а значить для даних значень n і γ для довільної конфігурації областей B_k і точок a_k , які задовільняють всі умови теореми 2.2.3, виконується нерівність $I_6(2.49) \leq I_6^0(2.49)$, тобто для $\gamma = 2.49$ теорема доведена.

Нехай тепер $1 < \gamma < 2.49$. Елементарними дослідженнями переконуємося, що функція $P_6(\gamma)$ монотонно зростає на даному проміжку, а отже $P_6(\gamma) < P_6(2.49)$. В той же час, згідно з лемою 2.1.2, отримаємо, що

$$(I_6^0(\gamma))'_\gamma = I_6^0(\gamma) \left(\frac{1}{6} \ln \left(\frac{4\gamma}{36 - \gamma} \right) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \ln \left(\frac{6 - \sqrt{\gamma}}{6 + \sqrt{\gamma}} \right) \right).$$

Для $1 < \gamma < 2.49$ обидва вирази, від яких береться логарифм, менші одиниці, тому $(I_6^0(\gamma))'_\gamma < 0$. Звідси випливає, що функція $I_6^0(\gamma)$ монотонно спадає, а отже $I_6^0(\gamma) > I_6^0(2.49)$. Підсумовуючи вище сказане, для довільного γ такого, що $1 < \gamma < 2.49$ виконуються наступні нерівності:

$$\frac{I_6(\gamma)}{I_6^0(\gamma)} < \frac{P_6(\gamma)}{I_6^0(\gamma)} < \frac{P_6(2.49)}{I_6^0(2.49)} < 1.$$

Отже, для $n = 6$ і $1 < \gamma < 2.49$ для довільної конфігурації областей B_k і точок a_k , які задовільняють всі умови теореми 2.2.3, виконується нерівність $I_6(\gamma) < I_6^0(\gamma)$, тобто для $n = 6$ теорема доведена.

Нехай тепер $n = 7$. Для $\gamma = 2.67$ отримаємо, що $\frac{P_7(2.67)}{I_7^0(2.67)} < 0.995 < 1$, а значить для даних значень n і γ для довільної конфігурації областей B_k і точок a_k , які задовільняють всі умови теореми 2.2.3, виконується нерівність $I_7(2.67) < I_7^0(2.67)$, тобто для $\gamma = 2.67$ теорема доведена.

Випадок $n = 7$ і $1 < \gamma < 2.67$ розглядається аналогічно до випадку $n = 6$.

Для $n = 8$ і $\gamma = 2.84$ отримаємо, що $\frac{P_8(2.84)}{I_8^0(2.84)} < 0.991 < 1$, і аналогічними міркуваннями до попередніх випадків показуємо, що твердження теореми правильне як для $\gamma = 2.84$, так і для $1 < \gamma < 2.84$.

Теорема 2.2.3 доведена.

Загалом, отримані на даний момент результати в проблемі 2.1.1 для конкретних значень n опишемо в таблиці.

n	3	4	5	6	7	8
A	(0, 1.5]	(0, 2.09]	(0, 1.84]	(0, 1.97]	(0, 2.09]	(0, 2.20]
B	(1.5, 1.7]	(2.09, 4]*	(1.84, 2.32]	(1.97, 2.49]	(2.09, 2.67]	(2.20, 2.84]
C	2015	2017	2015	2017	2017	2017
D	(1.7, 2.1]	(2.09, 2.5]	—	—	—	—
E	2017	2017	—	—	—	—

Рядок А — значення γ , для якого результат був раніше;

Рядок В — значення γ , отримане в роботі;

Рядок С — рік отримання результату в рядку В;

Рядок D — значення γ , отримане пізніше;

Рядок E — рік отримання результату в рядку D;

$(2.09, 4]^*$ — результат отримано з додатковою умовою $r(B_0, 0) \leq \frac{1}{2}$.

2.3. Екстремальне розбиття комплексної площини, задане умовами проблеми 2.1.1, для випадку довільного натурального n , починаючи з деякого номера

В даному підрозділі досліджується проблема 2.1.1 у більш загальних випадках, а саме для випадку $n \geq n_0$ для деякого натурального n_0 , тобто для довільної кількості областей, більшої від деякого наперед заданого натурального числа. Оскільки функціонал (2.1.1), максимум якого потрібно знайти в даній проблемі, обмежений для довільного натурального $n \geq 2$ і $0 < \gamma \leq n$, то актуальною залишається задача, якщо вже не вдається отримати повне розв'язання проблеми 2.1.1, то знайти хоча б обмеження на n та γ , для якого це розв'язання можна отримати. Одним з напрямків дослідження в даному підрозділі був пошук зростаючої мажоранти для γ при $n \geq n_0$. Іншим напрямком був пошук деяких до-

даткових обмежень на конфігурацію областей B_k і точок a_k , при яких можна знайти максимум функціонала (2.1.1) для $0 < \gamma \leq n$, тобто без жодних додаткових обмежень на γ .

Наступна теорема дає відповідь на запитання проблеми 2.1.1 для випадку $n \geq 76$, але з умовою, що внутрішній радіус області, що містить точку нуль, не перевищує одиниці.

Теорема 2.3.1. [28] *Нехай задано натуральне число n , $n \geq 76$, і дійсне число γ таке, що $1 < \gamma \leq n$. Тоді для довільного набору попарно неперетинних областей $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$ та довільного набору точок комплексної площини $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, причому $r(B_0, a_0) \leq 1$, правильна нерівність*

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq r^\gamma(D_0, 0) \prod_{k=1}^n r(D_k, d_k), \quad (2.3.1)$$

де d_k, D_k , — відповідно полюси і кругові області квадратичного диференціала

$$G(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}dw^2. \quad (2.3.2)$$

Доведення теореми 2.3.1. Припустимо, не зменшуючи загальності, що

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \dots < \arg a_n < 2\pi.$$

Означимо числа α_k , $k = \overline{1, n}$, та α_0 так, як і у формулах (2.1.2) та (2.1.3).

Відзначимо, що, враховуючи результат роботи [114], нам достатньо показати правильність теореми при умові $\alpha_0 > \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$. Для зручності подальші дослідження будемо проводити для $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$.

Введемо наступні позначення. Так, нехай

$$I_n^0(\gamma) = r^\gamma(D_0, 0) \prod_{k=1}^n r(D_k, d_k). \quad (2.3.3)$$

Позначимо також

$$Q_n(\gamma) = \frac{\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}}{\frac{1}{n^n} \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}}. \quad (2.3.4)$$

Правильна лема.

Лема 2.3.1. *Нехай n — фіксоване натуральне число таке, що $n \geq 6$, $1 < \gamma \leq n$, $p \geq 1$, де p, γ — деякі дійсні числа. Тоді для довільної конфігурації неперетинних областей B_k і точок a_k ($k = \overline{0, n}$), таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{0, n}$, для яких виконуються умови $r(B_0, a_0) \leq p$ і $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$, правильна нерівність:*

$$\frac{r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)}{I_n^0(\gamma)} \leq p^\gamma Q_n(\gamma), \quad (2.3.5)$$

де $I_n^0(\gamma)$, $Q_n(\gamma)$ — див. відповідно (2.3.3), (2.3.4).

Якщо, до того ж, для деякого γ_1 виконується нерівність $p^{\gamma_1} Q_n(\gamma_1) \leq 1$, то для довільного γ_2 такого, що $1 < \gamma_2 < \gamma_1$ буде виконуватися нерівність $p^{\gamma_2} Q_n(\gamma_2) \leq 1$.

Доведення леми 2.3.1.

Спочатку доведемо нерівність (2.3.5). Згідно з лемою 2.1.1 (див. також [114], теорему 5.2.3 роботи [24])

$$I_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \quad (2.3.6)$$

Згідно з нерівністю, отриманою при доведенні наслідку 2.1.1,

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq 2^n \prod_{k=1}^n \alpha_k.$$

При умові $\alpha_0 \sqrt{\gamma} > 2$ і $r(B_0, a_0) \leq p$, справедлива наступна нерівність (див. також доведення теореми 5.2.3 [24]):

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq p^\gamma \cdot 2^n \alpha_0 \left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1} = p^\gamma \cdot 2^n \alpha_0 (2 - \alpha_0)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}.$$

З врахуванням попередньої нерівності і рівності (2.3.6), отримаємо наступний ланцюжок нерівностей:

$$\begin{aligned} & \frac{r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)}{I_n^0(\gamma)} \leq \\ & \leq \frac{p^\gamma \cdot 2^n \cdot \alpha_0 (2 - \alpha_0)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}}{I_n^0(\gamma)} \leq \\ & \leq \frac{p^\gamma \cdot 2^n \cdot \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}}{\left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}} = p^\gamma Q_n(\gamma). \end{aligned}$$

Таким чином, нерівність (2.3.5) доведено.

Дослідимо поведінку виразу $Q_n(\gamma)$ як функції від γ при фіксованому n . Зауважимо, що

$$\left[\ln \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)} \right) \right]'_{\gamma} = \frac{n - \sqrt{\gamma}}{2\gamma(\sqrt{\gamma} - 1)} > 0. \quad (2.3.7)$$

Таким чином, чисельник виразу $Q_n(\gamma)$ зростає по γ при довільному n .

Щоб довести, що знаменник даного виразу спадає, достатньо показати спадання $I_n^0(\gamma)$. Згідно з лемою 2.1.2 отримаємо

$$(\ln I_n^0(\gamma))' = \left(\frac{1}{n} \ln \left(\frac{4\gamma}{n^2 - \gamma} \right) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \ln \left(\frac{n - \sqrt{\gamma}}{n + \sqrt{\gamma}} \right) \right).$$

Обидва доданки, які знаходяться в правій частині попередньої рівності, при умовах леми 2.3.1 є від'ємними. Звідси випливає, що функція $I_n^0(\gamma)$ спадає при фіксованому $n \geq 6$. Таким чином, на проміжку $\gamma \in (1; n]$ виконується нерівність

$$I_n^0(\gamma_2) \leq I_n^0(\gamma_1).$$

Враховуючи останню нерівність і нерівність (2.3.7) отримаємо, що функція $Q_n(\gamma)$ монотонно зростає по γ на проміжку $(1; \gamma_1]$, а отже

$$\frac{I_n(\gamma_2)}{I_n^0(\gamma_2)} \leq p^{\gamma_2} Q_n(\gamma_2) < p^{\gamma_1} Q_n(\gamma_1) \leq 1,$$

де $I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)$.

Лема 2.3.1 доведена.

Приступимо тепер до доведення основного твердження теореми 2.3.1. Розглянемо для початку випадок $\gamma = n$. Тоді, згідно з лемою 2.3.1,

$$\begin{aligned} \frac{I_n(n)}{I_n^0(n)} &\leq Q_n(n) = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}}{\frac{1}{n^n} \frac{\frac{4}{n}}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1}} \left(\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}\right)^{2\sqrt{n}}} = \\ &= \frac{1}{4} n^{\frac{3}{2}} \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n-1}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}}\right)^2. \end{aligned}$$

Дослідимо наведений вище вираз для $n \geq 76$. Послідовність $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}$ зростає до e , тому $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2\sqrt{n}} < e^2$, а послідовність $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2\sqrt{n}}$ зростає до e^{-2} , а тому $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-2\sqrt{n}} \leq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{76}}\right)^{-2\sqrt{76}} < 8.3677$. Тоді $\frac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2\sqrt{n}}}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2\sqrt{n}}} < 8.3677e^2$. Крім того, $\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 < 1$.

Таким чином,

$$\begin{aligned} Q_n(n) &< \frac{1}{4} \cdot e^2 \cdot 8.3677 \cdot n^{\frac{3}{2}} \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n-1}{\sqrt{n}}} < \\ &< 15.4677 n^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{n-1}{\sqrt{n}}} < 15.4677 n^{\frac{3}{2}} e^{-\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}}. \end{aligned}$$

Враховуючи, що для $n \geq 76$ виконується нерівність $e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} < 1.1215$, остаточно отримуємо оцінку

$$Q_n(n) < 17.5131 n^{\frac{3}{2}} e^{-\sqrt{n}}.$$

Дослідимо вираз $q(x) = x^{\frac{3}{2}}e^{-\sqrt{x}}$ для $x \in [76, +\infty)$.

$$(q(x))' = \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}} \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{x}}{2} \right) < 0.$$

Звідси випливає, що вираз $q(n) = n^{\frac{3}{2}}e^{-\sqrt{n}}$ спадає при зростанні n . Оскільки для $n = 94$ правильна нерівність $17.5131 \cdot q(94) < 0.9827 < 1$, то для $n \geq 94$ маємо $Q_n(n) \leq Q_{94}(94) < 1$. Безпосереднім обчисленням виразу $Q_n(n)$ для $76 \leq n < 94$ отримаємо, що

$$\begin{aligned} Q_{76}(76) &< 0.9639; & Q_{85}(85) &< 0.6879; \\ Q_{77}(77) &< 0.9280; & Q_{86}(86) &< 0.6630; \\ Q_{78}(78) &< 0.8935; & Q_{87}(87) &< 0.6390; \\ Q_{79}(79) &< 0.8605; & Q_{88}(88) &< 0.6160; \\ Q_{80}(80) &< 0.8287; & Q_{89}(89) &< 0.5939; \\ Q_{81}(81) &< 0.7982; & Q_{90}(90) &< 0.5727; \\ Q_{82}(82) &< 0.7689; & Q_{91}(91) &< 0.5522; \\ Q_{83}(83) &< 0.7408; & Q_{92}(92) &< 0.5326; \\ Q_{84}(84) &< 0.7138; & Q_{93}(93) &< 0.5137. \end{aligned}$$

Таким чином, для $n \geq 76$ виконується нерівність $Q_n(n) < 1$. З леми 2.3.1 випливає, що для даних n і при умові $r(B_0, a_0) \leq 1$ правильна нерівність

$$\frac{r^n(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)}{I_n^0(n)} < 1.$$

Тоді

$$r^n(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) < I_n^0(n).$$

До того ж, оскільки для $n \geq 76$ і $\gamma = n$, а також при умові $r(B_0, a_0) \leq 1$ виконується нерівність (2.3.1), то, згідно з лемою 2.3.1, дана нерівність буде виконуватися і для довільного γ такого, що $1 < \gamma \leq n$.

Теорема 2.3.1 доведена.

Зауважимо, що за допомогою деякого вдосконалення методу дослідження, в роботі [35] було доведено, що при виконанні всіх інших умов теореми 2.3.1 можна брати $n \geq 4$.

З теореми 2.3.1 випливає наступний наслідок.

Наслідок 2.3.1. *Нехай $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$, — попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{0, n}$, причому $B_0 \subset U$, де U — одиничний круг. Тоді для довільного натурального n , $n \geq 76$, і довільного дійсного γ такого, що $1 < \gamma \leq n$, правильна нерівність (2.3.1).*

Для доведення даного наслідку достатньо зауважити, що з умови $B_0 \subset U$ випливає, що $r(B_0, a_0) \leq 1$.

Правильний також і дещо сильніший результат.

Теорема 2.3.2. [28] *Нехай $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$, ($n \geq 2$) — попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{0, n}$. Тоді для довільного натурального n , $n \geq 76$, існує таке додатне число $\varepsilon(n)$, що для довільного дійсного γ такого, що $1 < \gamma \leq n$, правильна нерівність (2.3.1) при умові $r(B_0, a_0) \leq 1 + \varepsilon(n)$.*

Доведення теореми 2.3.2. Для довільного натурального n , $n \geq 76$, розглянемо число $p(n) = \frac{1}{(Q_n(n))^{\frac{1}{n}}}$. За теоремою 2.3.1 $Q_n(n) < 1$, а отже $p(n) > 1$. Тоді для $\gamma = n$ і при умові $r(B_0, a_0) \leq p(n)$ згідно з лемою 2.3.1 виконується нерівність:

$$\frac{r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)}{I_n^0(\gamma)} \leq p^n Q_n(n) \leq \left(\frac{1}{(Q_n(n))^{\frac{1}{n}}} \right)^n Q_n(n) = 1.$$

Крім того, для $n \geq 76$ і $p(n) = \frac{1}{(Q_n(n))^{\frac{1}{n}}}$ за лемою 2.3.1 при довільному $\gamma_2(n)$ такому, що $1 < \gamma_2(n) < n$ буде виконуватися нерівність $\frac{I_n(\gamma_2(n))}{I_n^0(\gamma_2(n))} < 1$. Тоді за $\varepsilon(n)$ можна взяти довільне $0 < \varepsilon < p(n) - 1$.

Теорема 2.3.2 доведена.

Зауважимо, що вираз $p(n) - 1$ зростає для $76 \leq n \leq 361$ і спадає для $n > 361$, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} (p(n) - 1) = 0$. Зокрема, для $104 \leq n \leq 6662$ за $\varepsilon(n)$ можна взяти число 0.01, для $192 \leq n \leq 865$ — число 0.02, для $n = 361$ — число 0.02246191.

Однак, якщо при умовах теореми 2.3.1 розглядати випадок $1 < \gamma \leq \gamma_0 < n$, то можна дещо зменшити номер n , починаючи з якого виконується нерівність (2.3.1). Зокрема, правильне наступне твердження.

Теорема 2.3.3. *Нехай $\alpha \in \mathbb{R}$, причому $0 < \alpha < 1$. Тоді існує $n_0(\alpha) \in \mathbb{N}$ таке, що для довільних натурального $n \geq n_0(\alpha)$, дійсного γ , такого, що $1 < \gamma \leq n^\alpha$, довільного набору точок a_k , таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k , таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, а також за умови $r(B_0, 0) \leq 1$, правильна нерівність*

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \quad (2.3.8)$$

Зокрема, для випадку $\alpha = 0.9$ можна взяти $n_0(\alpha) = 26$, для $\alpha = 0.8$ взяти $n_0(\alpha) = 13$, для $\alpha = 0.7$ взяти $n_0(\alpha) = 8$.

Доведення теореми 2.3.3. Використовуючи лему 2.3.1, отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{I_n(n^\alpha)}{I_n^0(n^\alpha)} &\leq Q_n(n^\alpha) = \frac{n^{-\alpha/2} (1 - n^{-\alpha/2})^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}}{n^{-n} \frac{(4n^{\alpha-2})^{n^{\alpha-1}}}{(1 - n^{\alpha-2})^{n + n^{\alpha-1}}} \left(\frac{1 - n^{\alpha/2-1}}{1 + n^{\alpha/2-1}}\right)^{2n^{\frac{\alpha}{2}}}} = \\ &= n^{1-\frac{\alpha}{2}} \left(1 - \frac{1}{n^{2-\alpha}}\right)^{n + \frac{1}{n^{1-\alpha}}} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{4} n^{2-\alpha}\right)^{n^{\alpha-1}} \cdot \\ &\cdot \left(\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha/2}}\right)^{n^{\alpha/2}}\right)^{\frac{n-1}{n^{\alpha/2}}} \left(\frac{(1 + n^{\alpha/2-1})^{n^{1-\alpha/2}}}{(1 - n^{\alpha/2-1})^{n^{1-\alpha/2}}}\right)^{\frac{2}{n^{1-\alpha}}}. \end{aligned}$$

Позначимо

$$R_1(n) = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}; \quad R_2(n, \alpha) = n^{1-\frac{\alpha}{2}} \left(\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha/2}}\right)^{n^{\alpha/2}} \right)^{\frac{n-1}{n^{\alpha/2}}};$$

$$R_3(n, \alpha) = \left(1 - \frac{1}{n^{2-\alpha}}\right)^{n+\frac{1}{n^{1-\alpha}}}; \quad R_4(n, \alpha) = \left(\frac{1}{4}n^{2-\alpha}\right)^{n^{\alpha-1}};$$

$$R_5(n, \alpha) = \left(\frac{(1 + n^{\alpha/2-1})^{n^{1-\alpha/2}}}{(1 - n^{\alpha/2-1})^{n^{1-\alpha/2}}} \right)^{\frac{2}{n^{1-\alpha}}}.$$

Оцінимо кожен з виразів $R_s(n, \alpha)$, $s = \overline{1, 5}$. Розглянемо спочатку випадок $\alpha = 0.9$ і $n \geq 26$.

Так,

$$R_1(n) < e. \quad (2.3.9)$$

Далі,

$$R_2(n, 0.9) = n^{0.55} \left(\left(1 - \frac{1}{n^{0.45}}\right)^{n^{0.45}} \right)^{\frac{n-1}{n^{0.45}}} < n^{0.55} \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{n-1}{n^{0.45}}}.$$

Функція $n^{0.55} \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{n-1}{n^{0.45}}}$ монотонно спадає для $n \geq 26$, зокрема, для зручності подальших обчислень, розглянемо $n \geq 65$. Для даних значень n виконується нерівність

$$R_2(n, 0.9) < 0.00056. \quad (2.3.10)$$

Далі,

$$R_3(n, 0.9) < 1. \quad (2.3.11)$$

Елементарними дослідженнями перевіряємо, що значення виразу $R_4(n, 0.9) = \left(\frac{1}{4}n^{1.1}\right)^{n^{-0.1}}$ не перевищує 35,428, тому

$$R_4(n, 0.9) < 35,428. \quad (2.3.12)$$

І насамкінець, вираз $R_5(n, 0.9)$ спадає для $n \geq 26$, а тому

$$R_5(n, 0.9) < R_5(26, 0.9) < 18.45. \quad (2.3.13)$$

Враховуючи (2.3.9)-(2.3.13), для $n \geq 65$ отримаємо:

$$Q_n(n^{0.9}) < e \cdot 0.00056 \cdot 35,428 \cdot 18.45 < 0.996 < 1.$$

Безпосередніми обчисленнями переконуємося, що для всіх n , таких, що $26 \leq n < 65$, також правильна нерівність $Q_n(n^{0.9}) < 1$. Тому, враховуючи лему 2.3.1, теорема правильна для всіх $n \geq 26$ і $1 < \gamma \leq n^{0.9}$.

Розглянемо тепер випадок $\alpha = 0.8$ і $n \geq 13$.

Так, нерівності (2.3.9) та (2.3.11) теж справджуються.

Для випадку $R_2(n, 0.8)$ отримаємо

$$R_2(n, 0.8) = n^{0.6} \left(\left(1 - \frac{1}{n^{0.4}} \right)^{n^{0.4}} \right)^{\frac{n-1}{n^{0.4}}} < n^{0.6} \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{n-1}{n^{0.4}}}.$$

Функція $n^{0.6} \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{n-1}{n^{0.4}}}$ монотонно спадає для $n \geq 13$. Для зручності подальших обчислень розглянемо $n \geq 27$. Для даних значень n виконується нерівність

$$R_2(n, 0.8) < 0.00688. \quad (2.3.14)$$

Крім того, за допомогою елементарних досліджень перевіряємо, що значення виразу $R_4(n, 0.8) = \left(\frac{1}{4} n^{1.2} \right)^{n^{-0.2}}$ не перевищує 5,76565, тому

$$R_4(n, 0.8) < 5,76565. \quad (2.3.15)$$

І насамкінець, вираз $R_5(n, 0.8)$ спадає для $n \geq 27$, а тому

$$R_5(n, 0.8) < R_5(27, 0.8) < 8.02447. \quad (2.3.16)$$

Враховуючи (2.3.9), (2.3.11) та (2.3.14)-(2.3.16), для $n \geq 27$ отримаємо:

$$Q_n(n^{0.8}) < e \cdot 0.00688 \cdot 5,76565 \cdot 8.02447 < 0.86527 < 1.$$

Безпосередніми обчисленнями переконуємося, що для всіх n , таких, що $13 \leq n < 27$, також правильна нерівність $Q_n(n^{0.8}) < 1$. Тому, враховуючи лему 2.3.1, теорема правильна для всіх $n \geq 13$ і $1 < \gamma \leq n^{0.8}$.

Розглянемо тепер випадок $\alpha = 0.7$ і $n \geq 8$.

Так, нерівності (2.3.9) та (2.3.11) теж справджуються.

Для випадку $R_2(n, 0.7)$ отримаємо

$$R_2(n, 0.7) = n^{0.65} \left(\left(1 - \frac{1}{n^{0.35}} \right)^{n^{0.35}} \right)^{\frac{n-1}{n^{0.35}}} < n^{0.65} \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{n-1}{n^{0.35}}}.$$

Функція $n^{0.65} \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{n-1}{n^{0.35}}}$ монотонно спадає для $n \geq 8$, зокрема, для зручності подальших обчислень, розглянемо $n \geq 17$. Для даних значень n виконується нерівність

$$R_2(n, 0.7) < 0.01668. \quad (2.3.17)$$

Елементарними дослідженнями перевіряємо, що значення виразу $R_4(n, 0.7) = \left(\frac{1}{4} n^{1.3} \right)^{n^{-0.3}}$ не перевищує 3.18256, тому

$$R_4(n, 0.7) < 3.18256. \quad (2.3.18)$$

І насамкінець, вираз $R_5(n, 0.7)$ спадає для $n \geq 17$, а тому

$$R_5(n, 0.7) < R_5(17, 0.7) < 5.60843. \quad (2.3.19)$$

Враховуючи (2.3.9), (2.3.11) та (2.3.17)-(2.3.19), для $n \geq 17$ отримаємо:

$$Q_n(n^{0.7}) < e \cdot 0.01668 \cdot 3.18256 \cdot 5.60843 < 0.80931 < 1.$$

Безпосередніми обчисленнями переконуємося, що для всіх n , таких, що $8 \leq n < 17$, також правильна нерівність $Q_n(n^{0.7}) < 1$. Тому, враховуючи лему 2.3.1, теорема правильна для всіх $n \geq 8$ і $1 < \gamma \leq n^{0.7}$.

Таким чином, нерівність (2.3.8) виконується для випадків $\alpha = 0.9$ і $n_0(\alpha) = 26$; для $\alpha = 0.8$ і $n_0(\alpha) = 13$, а також для $\alpha = 0.7$ і $n_0(\alpha) = 8$.

Теорему 2.3.3 доведено.

У випадку, якщо при дослідженні проблеми 2.1.1 не ставити жодних додаткових умов на області B_k , $k = \overline{1, n}$, можна накласти деякі обмеження на параметр γ , а саме спробувати знайти деяку мажоранту для γ , яка

зростає при зростанні n . Дану мажоранту зручно шукати у вигляді n^α для деякого $0 < \alpha < 1$. Зокрема, в 2011 році в роботі [201] було встановлено мажоранту $\gamma_n = n^{\frac{1}{4}}$ для $n \geq 8$, а пізніше, в 2012 році, в роботі [48] було встановлено мажоранту $\gamma_n = n^{\frac{1}{3}}$ для $n \geq 5$.

В наступній теоремі розглядається випадок $n \geq 541$ і $0 < \gamma \leq \sqrt{n}$.

Теорема 2.3.4. [205] *Для довільного натурального $n \geq 541$, довільного дійсного γ такого, що $0 < \gamma \leq \sqrt{n}$, довільного набору точок a_k , таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k , $k = \overline{0, n}$, таких, що $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{0, n}$, виконується нерівність*

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}},$$

причому рівність досягається, зокрема, для точок a_k^0 і областей D_k , які є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}dw^2. \quad (2.3.20)$$

Доведення теореми 2.3.4. Враховуючи результати роботи [64], нам достатньо довести, що даний результат справджується для $1 < \gamma \leq \sqrt{n}$.

Встановимо спочатку, що наведене твердження правильне для $\gamma = \sqrt{n}$. В доведенні суттєво використовуються проміжні результати, отримані під час доведення теореми 5.2.3 роботи [24], які, в свою чергу, були отримані за допомогою методу розділяючого перетворення областей, який детально розроблений в роботі [64].

Нехай $I_n^0(\gamma)$ — значення функціонала $I_n(\gamma)$ для областей D_k і точок a_k^0 , згаданих в умові теореми. Тоді, згідно з лемою 2.1.1, виконується

рівність:

$$I_n^0(\gamma) = r^\gamma(D_0, 0) \prod_{k=1}^n r(D_k, a_k^0) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}, \quad (2.3.21)$$

де D_k, a_k^0 — згадані вище кругові області та полюси квадратичного диференціала (2.3.20).

Згідно з умовою теореми, $a_0 = 0, |a_k| = 1, k = \overline{1, n}$. Припустимо, для конкретності, що

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \dots < \arg a_n < 2\pi.$$

Означимо числа α_k таким чином:

$$\alpha_1 := \frac{1}{\pi}(\arg a_2 - \arg a_1), \alpha_2 := \frac{1}{\pi}(\arg a_3 - \arg a_2) \dots \alpha_n := \frac{1}{\pi}(2\pi - \arg a_n).$$

Враховуючи результати роботи [114], нам залишається лише довести правильність теореми 2.3.4 при умові $\alpha_0\sqrt{\gamma} > 2$, де $\alpha_0 = \max_k \alpha_k$. Знову ж таки, за теоремою 5.2.3 [24], при умові $\alpha_0\sqrt{\gamma} > 2$ отримаємо наступну нерівність:

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left[2^n \alpha_0 \left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}} = \left[2^n \alpha_0 (2 - \alpha_0)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Оцінимо тепер величину

$$P_n(\gamma) := \frac{r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)}{r^\gamma(D_0, 0) \prod_{k=1}^n r(D_k, a_k^0)} \leq \frac{\left[2 \cdot 2^{n-1} \cdot \alpha_0 (2 - \alpha_0)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^{n-1-\gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \left(\frac{4}{n}\right)^{\gamma+1-\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left[\frac{n}{4}\right]^{\gamma+1-\frac{\gamma}{n}} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right]^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}} \cdot \\
&\cdot \left(\frac{n^2}{4\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} \cdot \\
&\cdot \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}} \cdot
\end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned}
P_n(\sqrt{n}) &\leq \left[\frac{n}{4}\right]^{\sqrt{n}+1-\frac{1}{\sqrt{n}}} \left[1 - \frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right]^{n-1-\frac{n-1}{\sqrt{n}}} \cdot \\
&\cdot \left(\frac{n^{\frac{3}{2}}}{4}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \left(1 - \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)^{n+\frac{1}{\sqrt{n}}} \left(\frac{1 + \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}}{1 - \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}}\right)^{2n^{\frac{1}{4}}} \cdot \\
&\cdot \left(\frac{4}{n^{\frac{1}{4}}}\right)^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\frac{n-1}{\sqrt{n}}} \cdot
\end{aligned}$$

Дослідимо поведінку наступних функцій на проміжку $x \in [547; \infty)$:

$$g(x) = \left[\frac{x}{4}\right]^{\sqrt{x}+1-\frac{1}{\sqrt{x}}} \left[1 - \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right]^{x-1-\frac{x-1}{\sqrt{x}}} ;$$

$$f_1(x) = \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{4}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} ;$$

$$f_2(x) = \left(1 - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)^{x+\frac{1}{\sqrt{x}}} ;$$

$$f_3(x) = \left(\frac{1 + \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}}{1 - \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}}\right)^{2x^{\frac{1}{4}}} ;$$

$$f_4(x) = \left(\frac{4}{x^{\frac{1}{4}}}\right)^{1-\frac{1}{\sqrt{x}}} ;$$

$$f_5(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1-\frac{x-1}{\sqrt{x}}} .$$

Функція $f_1(x)$ є монотонно спадною на проміжку $x \in [547; \infty)$, тому для $\forall n \geq 547$ виконується нерівність:

$$\left(\frac{n^{\frac{3}{2}}}{4}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \leq \left(\frac{547^{\frac{3}{2}}}{4}\right)^{\frac{1}{\sqrt{547}}} \leq 1.4121.$$

Для функції $f_2(x)$ на даному проміжку виконується нерівність

$$f_2(x) < 1.$$

Функції $f_3(x)$, $f_4(x)$ на проміжку $[547; +\infty)$ є монотонно спадними, а тому $\forall n \geq 547$ виконуються наступні нерівності:

$$f_3(x) = \left(\frac{1 + \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}}{1 - \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}}\right)^{2n^{\frac{1}{4}}} \leq \left(\frac{1 + \frac{1}{547^{\frac{3}{4}}}}{1 - \frac{1}{547^{\frac{3}{4}}}}\right)^{2 \cdot 547^{\frac{1}{4}}} \leq 1.18653.$$

$$f_4(x) = \left(\frac{4}{x^{\frac{1}{4}}}\right)^{1 - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}} \leq 0.83385.$$

Дослідимо функцію $f_5(x)$. Оскільки $\frac{x}{x-1} > 1$ для $\forall x \in [547; +\infty)$, то

$$f_5(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1 - \frac{x-1}{x^{\frac{1}{2}}}} \leq \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1} = \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{x-1}$$

Функція $\left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{x-1}$ є монотонно зростаючою на проміжку $[547; +\infty)$, причому

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{x-1} = e,$$

тому $\forall x \in [547; +\infty)$

$$f_5(x) < e.$$

Звідси робимо висновок, що для $\forall n \geq 547$

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1 - \frac{n-1}{n^{\frac{1}{2}}}} \leq e.$$

Враховуючи властивості досліджених функцій $f_j(x)$, $j = \overline{1, 5}$, будемо мати:

$$P(\sqrt{n}) = g(n) \prod_{j=1}^5 f_j(n) < g(n) \cdot 1.4121 \cdot 1 \cdot 1.18653 \cdot 0.83385 \cdot e < 3.7978g(n).$$

Залишилося дослідити функцію $g(x)$. Взявши від даної функції логарифмічну похідну, отримаємо

$$(\ln(g(x)))' < 0,$$

а тому функція $g(x)$ є монотонно спадною для $x \geq 547$. Звідси

$$g(n) \leq g(547) \leq 0.26187$$

Отримаємо, що $P(\sqrt{n}) \leq 3.7978 \cdot 0.26187 < 0.9946 < 1$.

Зауважимо також, що для

$$n = 541 \quad P(\sqrt{541}) = 0.99954 < 1;$$

$$n = 542 \quad P(\sqrt{542}) = 0.98446 < 1;$$

$$n = 543 \quad P(\sqrt{543}) = 0.96960 < 1;$$

$$n = 544 \quad P(\sqrt{544}) = 0.95495 < 1;$$

$$n = 545 \quad P(\sqrt{545}) = 0.94050 < 1;$$

$$n = 546 \quad P(\sqrt{546}) = 0.92624 < 1.$$

Отже, для $n \geq 541$ при $\gamma = \sqrt{n}$ і $\alpha_0\sqrt{\gamma} > 2$ виконується нерівність

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq r^\gamma(D_0, 0) \prod_{k=1}^n r(D_k, d_k) = I_n^0(\gamma)$$

для довільної конфігурації областей $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$.

Звідси випливає, що для $\gamma = \sqrt{n}$ екстремальною є конфігурація, записана в умові теореми 2.3.4, тому для даного випадку теорема доведена.

Нехай тепер $\gamma \in (1; \sqrt{n})$. Врахувавши, що

$$I_n(\gamma) \leq \left[2 \cdot 2^{n-1} \cdot \alpha_0 (2 - \alpha_0)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)} \right]^{1-\frac{\gamma}{n}},$$

а функція

$$\left[2 \cdot 2^{n-1} \cdot \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \right)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)} \right]^{1-\frac{\gamma}{n}}$$

при фіксованому n монотонно зростає по γ на проміжку $(1; \sqrt{n}]$, отри-
маємо, що

$$I_n(\gamma) \leq I_n(\sqrt{n}).$$

Дослідимо монотонність функції

$$I_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n} \right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2} \right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2} \right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}} \right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Згідно з лемою 2.1.2

$$\begin{aligned} & (I_n^0(\gamma))' = \\ & = I_n^0(\gamma) \left(\frac{1}{n} \ln \left(\frac{4\gamma}{n^2 - \gamma} \right) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \ln \left(\frac{n - \sqrt{\gamma}}{n + \sqrt{\gamma}} \right) \right). \end{aligned}$$

Неважко переконатися, що обидва доданки в дужках останнього ви-
разу є від'ємними при фіксованому n і $\gamma \in (1; \sqrt{n})$.

Звідси випливає, що

$$I_n^0(\gamma) \geq I_n^0(\sqrt{n}).$$

А звідси

$$P_n(\gamma) = \frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} < \frac{I_n(\sqrt{n})}{I_n^0(\sqrt{n})} = P_n(\sqrt{n}) < 1,$$

тобто $I_n(\gamma) < I_n^0(\gamma)$.

Теорему 2.3.4 доведено.

Зауважимо, що пізніше, в роботі [35] було доведено аналогічну теоре-
му, але для $n \geq 3$.

Наступна теорема для довільного натурального $n \geq 2$ і $\gamma < \frac{n}{2}$ дає
оцінку частки

$$\frac{r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)}{r^\gamma(D_0, d_0) \prod_{k=1}^n r(D_k, d_k)},$$

де $r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)$ — функціонал, який досліджується в проблемі 2.1.1, а $r^\gamma(D_0, d_0) \prod_{k=1}^n r(D_k, d_k)$ — значення даного функціонала для конфігурації областей і точок, яка описана в лемі 2.1.1. Зокрема, якщо для певних значень n і γ вдасться довести, що дана частка не перевищує одиниці, то це дозволить вказати екстремальну конфігурацію для даних значень параметрів.

Теорема 2.3.5. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in \mathbb{R}$, — деякі числа, причому $\gamma < \frac{n}{2}$; a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір точок комплексної площини, такий, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, причому*

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \dots < \arg a_n < 2\pi$$

та існує k таке, що $\arg a_{k+1} - \arg a_k \geq \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma}}$ ($\arg a_{n+1} := 2\pi$); $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$ — попарно неперетинні області в $\mathbb{C}$ такі, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{0, n}$. Тоді виконується нерівність:

$$\frac{r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)}{r^\gamma(D_0, d_0) \prod_{k=1}^n r(D_k, d_k)} < n^{\gamma+1+\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{8\pi}{81\sqrt{3}} \right)^\gamma \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right)^{n-\gamma-1+\frac{2\gamma}{n}} \frac{e}{\sqrt{\gamma}} \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}} \right)^{2\sqrt{\gamma}},$$

де d_k, D_k , — відповідно полюси і кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}dw^2. \quad (2.3.22)$$

Доведення теореми 2.3.5. Згідно з умовою теореми, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$. Позначимо

$$\alpha_1 := \frac{1}{\pi}(\arg a_2 - \arg a_1), \alpha_2 := \frac{1}{\pi}(\arg a_3 - \arg a_2) \dots \alpha_n := \frac{1}{\pi}(2\pi - \arg a_n).$$

Позначимо також $\alpha_0 = \max_k \alpha_k$. Зауважимо, що з умови теореми випливає, що $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$.

Позначимо

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k).$$

Нехай $I_n^0(\gamma)$ – значення функціонала $I_n(\gamma)$ для областей D_k і точок d_k , згаданих в умові теореми. Тоді, згідно з лемою 2.1.1, виконується рівність:

$$\begin{aligned} I_n^0(\gamma) &= r^\gamma(D_0, 0) \prod_{k=1}^n r(D_k, d_k) = \\ &= \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

Виконаємо з виразом $I_n(\gamma)$ наступні перетворення:

$$\begin{aligned} I_n(\gamma) &= r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) = \\ &= \left(\prod_{k=1}^n (r(B_0, a_0)r(B_k, a_k)r(B_{k+1}, a_{k+1}))\right)^{\frac{\gamma}{n}} \left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)\right)^{1-\frac{2\gamma}{n}}, \end{aligned}$$

де $B_{n+1} := B_1$, $a_{n+1} := a_1$, і, відповідно, $r(B_{n+1}, a_{n+1}) = r(B_1, a_1)$.

Згідно з теоремою Голузіна [83, с. 165]

$$\begin{aligned} r(B_0, a_0)r(B_k, a_k)r(B_{k+1}, a_{k+1}) &\leq \\ &\leq \frac{64}{81\sqrt{3}}|a_k - a_0| \cdot |a_{k+1} - a_0| \cdot |a_{k+1} - a_k|. \end{aligned}$$

Враховуючи, що $|a_k - a_0| = 1$ і $|a_{k+1} - a_0| = 1$, отримаємо

$$r(B_0, a_0)r(B_k, a_k)r(B_{k+1}, a_{k+1}) \leq \frac{64}{81\sqrt{3}}|a_{k+1} - a_k|.$$

Таким чином,

$$\left(\prod_{k=1}^n (r(B_0, a_0)r(B_k, a_k)r(B_{k+1}, a_{k+1}))\right)^{\frac{\gamma}{n}} \leq \left(\frac{64}{81\sqrt{3}}\right)^\gamma \left(\prod_{k=1}^n |a_{k+1} - a_k|\right)^{\frac{\gamma}{n}}.$$

Припустимо для конкретності, що $\alpha_0 = \alpha_n$. Дослідивши останній вираз при умові $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$, отримаємо, що максимум його досягається для $\alpha_n = \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$, а всі інші $\alpha_k = \frac{1}{n-1} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)$ для $k = \overline{1, n-1}$, а тому

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{k=1}^n (r(B_0, a_0) r(B_k, a_k) r(B_{k+1}, a_{k+1})) \right)^{\frac{\gamma}{n}} \leq \\ & \leq \left(\frac{64}{81\sqrt{3}} \right)^{\gamma} \left(2 \sin \left(\frac{\pi}{n-1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right) \right) \right)^{\frac{(n-1)\gamma}{n}} \left(2 \sin \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right) \right)^{\frac{\gamma}{n}}. \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

Оцінимо тепер вираз $\left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{1-\frac{2\gamma}{n}}$. Згідно з нерівністю, отриманою під час доведення теореми 5.2.3 роботи [24], маємо:

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{1-\frac{2\gamma}{n}} \leq \left[2^n \prod_{k=1}^n \alpha_k \right]^{1-\frac{2\gamma}{n}} \leq \left[2^n \alpha_0 \left(\frac{2 - \alpha_0}{n-1} \right)^{n-1} \right]^{1-\frac{2\gamma}{n}} < \\ & < \left[\frac{2^{n+1}}{(n-1)^{n-1} \sqrt{\gamma}} \cdot \left(2 - \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \right)^{n-1} \right]^{1-\frac{2\gamma}{n}}. \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

Враховуючи (2.3.24) і (2.3.25), отримаємо наступну нерівність:

$$\begin{aligned} I_n(\gamma) & < \left(\frac{64}{81\sqrt{3}} \right)^{\gamma} \left(2 \sin \left(\frac{\pi}{n-1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right) \right) \right)^{\frac{(n-1)\gamma}{n}} \cdot \\ & \cdot \left(2 \sin \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right) \right)^{\frac{\gamma}{n}} \left[\frac{2^{n+1}}{(n-1)^{n-1} \sqrt{\gamma}} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \right)^{n-1} \right]^{1-\frac{2\gamma}{n}}. \end{aligned}$$

Тоді, враховуючи останню нерівність і рівність (2.3.23), отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} & < \left(\frac{64}{81\sqrt{3}} \right)^{\gamma} \left(2 \sin \left(\frac{\pi}{n-1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right) \right) \right)^{\frac{(n-1)\gamma}{n}} \cdot \\ & \cdot \left(2 \sin \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right) \right)^{\frac{\gamma}{n}} \left[\frac{2^{n+1}}{(n-1)^{n-1} \sqrt{\gamma}} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \right)^{n-1} \right]^{1-\frac{2\gamma}{n}}. \end{aligned}$$

$$\left(\frac{n}{4}\right)^n \left(\frac{n^2}{4\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Зауважимо, що $\sin\left(\frac{\pi}{n-1}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)\right) < \left(\frac{\pi}{n-1}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)\right)$, а $\sin\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) < \pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)$. Виконавши деякі очевидні перетворення, отримаємо нерівність:

$$\begin{aligned} \frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} &< 2^{-\frac{2\gamma}{n}} \left(\frac{8\pi}{81\sqrt{3}}\right)^\gamma \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-\gamma-1+\frac{2\gamma}{n}} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-\gamma-1+\frac{\gamma}{n}} \\ &\cdot \frac{n^{\gamma+1+\frac{\gamma}{n}}}{\sqrt{\gamma}} \left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} < n^{\gamma+1+\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{8\pi}{81\sqrt{3}}\right)^\gamma \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-\gamma-1+\frac{2\gamma}{n}} P_n(\gamma), \quad (2.3.26)$$

де

$$P_n(\gamma) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-\gamma-1+\frac{\gamma}{n}} \frac{2^{-\frac{2\gamma}{n}}}{\sqrt{\gamma}} \left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Врахувавши, що $\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-\gamma-1+\frac{\gamma}{n}} < e$, $2^{-\frac{2\gamma}{n}} < 1$ і $\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}} < 1$, отримаємо, що

$$P_n(\gamma) < \frac{e}{\sqrt{\gamma}} \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \quad (2.3.27)$$

Враховуючи (2.3.26) і (2.3.27), отримаємо, що

$$\begin{aligned} \frac{r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)}{r^\gamma(D_0, d_0) \prod_{k=1}^n r(D_k, d_k)} &< n^{\gamma+1+\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{8\pi}{81\sqrt{3}}\right)^\gamma \\ &\cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-\gamma-1+\frac{2\gamma}{n}} \frac{e}{\sqrt{\gamma}} \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \end{aligned}$$

Теорему 2.3.5 доведено.

Позначимо

$$G_n(\gamma) = n^{\gamma+1+\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{8\pi}{81\sqrt{3}} \right)^\gamma \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right)^{n-\gamma-1+\frac{2\gamma}{n}} \frac{e}{\sqrt{\gamma}} \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}} \right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

З теореми 2.3.5 випливає такий наслідок.

Наслідок 2.3.2. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 10$, і $1 < \gamma \leq \gamma_n$, де γ_n — корінь рівняння $G_n(\gamma) = 1$. Тоді виконується нерівність*

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n} \right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2} \right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2} \right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}} \right)^{2\sqrt{\gamma}} \quad (2.3.28)$$

де B_k , $k = \overline{0, n}$ — попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $a_j \in B_j$, $j = \overline{0, n}$, причому рівність досягається, наприклад, для областей D_k і точок d_k , які є відповідно круговими областями і полюсами квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}dw^2.$$

Доведення наслідку 2.3.2. Зауважимо, що якщо для довільного $k = \overline{1, n}$ правильна нерівність $\arg a_{k+1} - \arg a_k \leq \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma}}$ ($\arg a_{n+1} := 2\pi$), то нерівність (2.3.28) випливає з результату роботи [114]. У протилежному випадку виконуються всі умови теореми 2.3.5, а тому для $\gamma = \gamma_n$ наслідок 2.3.2 доведено. Залишилося розглянути випадок $1 < \gamma < \gamma_n$.

Для кожного конкретного $n \geq 10$ дослідимо вираз $G_n(\gamma)$ як функцію від γ на монотонність. Відзначимо, що

$$(G_n(\gamma))' = G_n(\gamma) (\ln(G_n(\gamma)))';$$

$$\begin{aligned} \ln(G_n(\gamma)) &= \left(\gamma + 1 + \frac{\gamma}{n} \right) \ln n + \gamma \ln \frac{8\pi}{81\sqrt{3}} + \left(n - \gamma - 1 + \frac{2\gamma}{n} \right) \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right) + \\ &+ 1 - \frac{1}{2} \ln \gamma + 2\sqrt{\gamma} \ln \left(1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n} \right) - 2\sqrt{\gamma} \ln \left(1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\ln(G_n(\gamma)))' &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \ln n + \ln \frac{8\pi}{81\sqrt{3}} + \left(-1 + \frac{2}{n}\right) \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) + \\
&+ \frac{n - \gamma - 1 + \frac{2\gamma}{n}}{2\gamma(\sqrt{\gamma} - 1)} - \frac{1}{2\gamma} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \ln \left(1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right) - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \ln \left(1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right) + \\
&+ \frac{1}{n + \sqrt{\gamma}} + \frac{1}{n - \sqrt{\gamma}}.
\end{aligned}$$

Відзначимо, що в наведеному виразі при умовах наслідку 2.3.2

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) \ln n + \ln \frac{8\pi}{81\sqrt{3}} - \frac{1}{2\gamma} > \ln 10 - 1,8 - 0,5 > 0,$$

а всі інші доданки більші нуля, тому звідси випливає, що $G_n(\gamma)$ зростає по γ для кожного фіксованого n . А це означає, що $\forall n \geq 10$ і $\forall \gamma$ такого, що $1 < \gamma \leq \gamma_n$ правильна нерівність $G_n(\gamma) < 1$, що й доводить нерівність (2.3.28).

Наслідок 2.3.2 доведено.

Приблизні розв'язки γ_n рівняння $G_n(\gamma) = 1$ для деяких n наведено в таблиці

$\gamma_{100} \approx 9.95;$	$\gamma_{1100} \approx 35.64;$
$\gamma_{200} \approx 14.28;$	$\gamma_{1200} \approx 37.38;$
$\gamma_{300} \approx 17.70;$	$\gamma_{1300} \approx 39.07;$
$\gamma_{400} \approx 20.62;$	$\gamma_{1400} \approx 40.70;$
$\gamma_{500} \approx 23.24;$	$\gamma_{1500} \approx 42.28;$
$\gamma_{600} \approx 25.64;$	$\gamma_{1600} \approx 43.81;$
$\gamma_{700} \approx 27.86;$	$\gamma_{1700} \approx 45.31;$
$\gamma_{800} \approx 29.96;$	$\gamma_{1800} \approx 46.76;$
$\gamma_{900} \approx 31.94;$	$\gamma_{1900} \approx 48.19.$
$\gamma_{1000} \approx 33.83;$	$\gamma_{2000} \approx 49.58.$

В наступній теоремі розглядається проблема 2.1.1 для випадку $n \geq 40$ та $1 < \gamma \leq \gamma_n$, однак з умовою однозв'язності областей B_k . Для її доведення нам буде потрібна така лема.

Лема 2.3.2. [29] Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma > 0$. Нехай система взаємно неперетинних однозв'язних областей $\{B_0, B_1, B_2, \dots, B_n\}$ така, що $0 \in B_0$, $a_k \in B_k \cap \Gamma$, $k = \overline{1, n}$, де $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$ — одиничне коло, і $r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) > I_n^0(\gamma)$. Тоді правильна нерівність

$$r(B_0, 0) \leq n^{-\frac{n}{2(n-\gamma)}} I_n^0(\gamma)^{-\frac{1}{n-\gamma}}.$$

Правильне наступне твердження:

Теорема 2.3.6. [199] Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, причому $n \geq 40$ і $1 < \gamma \leq n^{\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \frac{\ln(\frac{5}{6} \ln(n))}{\ln(n)}}$. Тоді виконується нерівність

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}, \quad (2.3.29)$$

де B_k , $k = \overline{0, n}$, — попарно неперетинні однозв'язні області в $\mathbb{C}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $a_j \in B_j$, $j = \overline{0, n}$, причому рівність досягається, зокрема, для областей D_k і точок d_k , які є відповідно круговими областями і полюсами квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}dw^2.$$

Доведення теореми 2.3.6. Введемо наступні позначення. Нехай

$$r^\gamma(D_0, d_0) \prod_{k=1}^n r(D_k, d_k) = I_n^0(\gamma).$$

Зауважимо, що, згідно з лемою 2.1.1, правильна рівність

$$I_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \quad (2.3.30)$$

Як і в попередніх теоремах, припустимо, для конкретності, що

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \dots < \arg a_n < 2\pi.$$

Означимо числа α_k , $k = \overline{1, n}$, та α_0 так, як і у формулах (2.1.2) та (2.1.3).

Згідно з лемою 2.3.2, а також з результатом роботи [114], нам залишається дослідити випадок $r(B_0, 0) \leq n^{-\frac{n}{2(n-\gamma)}} I_n^0(\gamma)^{-\frac{1}{n-\gamma}}$ і $\alpha_0 > \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$.

Доведемо, що при даних умовах

$$\frac{r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)}{\left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}} < 1,$$

тобто отримаємо суперечність з умовою $r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) > I_n^0(\gamma)$.

Так, $r^\gamma(B_0, a_0) \leq n^{-\frac{n\gamma}{2(n-\gamma)}} I_n^0(\gamma)^{-\frac{\gamma}{n-\gamma}}$.

Також, згідно з теоремою 5.2.3 роботи [24] правильна наступна нерівність:

$$\begin{aligned} \left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)\right) &\leq 2^n \prod_{k=1}^n \alpha_k \leq 2^n \alpha_0 \left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1} < \\ &< \frac{4^n}{(n-1)^{n-1} \sqrt{\gamma}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}. \end{aligned} \quad (2.3.31)$$

Таким чином, правильна наступна нерівність:

$$\frac{r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)}{I_n^0(\gamma)} \leq \frac{\frac{4^n}{(n-1)^{n-1} \sqrt{\gamma}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}}{n^{\frac{n\gamma}{2(n-\gamma)}} I_n^0(\gamma)^{\frac{n}{n-\gamma}}} := G_n(\gamma)$$

Враховуючи останню нерівність і рівність (2.3.30), отримаємо наступний вираз:

$$\begin{aligned} G_n(\gamma) &= n^{\frac{n\gamma+2n+2\gamma}{2(n-\gamma)}} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1} \\ &\quad \left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n^2+\gamma}{n-\gamma}} \left(\frac{1}{4\sqrt{\gamma}}\right)^{\frac{n+\gamma}{n-\gamma}} \left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{\frac{2n\sqrt{\gamma}}{n-\gamma}}. \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

Зауважимо, що для того, щоб довести теорему 2.3.6 для деяких n і γ , нам достатньо показати, що для них $G_n(\gamma) < 1$.

Оцінимо вираз $G_n(\gamma)$ при умовах теореми. Так, $\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} < e$. Далі, $\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n^2+\gamma}{n-\gamma}} < 1$. Також правильна наступна оцінка:

$$\left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{\frac{2n\sqrt{\gamma}}{n-\gamma}} \left(\frac{1}{4\sqrt{\gamma}}\right)^{\frac{n+\gamma}{n-\gamma}} < 0.06 < \frac{1}{e}.$$

Таким чином,

$$G_n(\gamma) < n^{\frac{n\gamma+2n+2\gamma}{2(n-\gamma)}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}. \quad (2.3.33)$$

Оцінимо тепер вираз $n^{\frac{n\gamma+2n+2\gamma}{2(n-\gamma)}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}$ при умовах теореми.

Правильні наступні перетворення:

$$\begin{aligned} n^{\frac{n\gamma+2n+2\gamma}{2(n-\gamma)}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1} &= n^{\frac{n\gamma+2n+2\gamma}{2(n-\gamma)}} \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{\sqrt{\gamma}}\right)^{\frac{n-1}{\sqrt{\gamma}}} < \\ &< \left(n \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{2n^2-2n-2n\gamma+2\gamma}{n\gamma\sqrt{\gamma}+2n\sqrt{\gamma}+2\gamma\sqrt{\gamma}}}\right)^{\frac{n\gamma+2n+2\gamma}{2(n-\gamma)}} = \left(n \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{n}{\gamma^{\frac{3}{2}}} \frac{2-\frac{2}{n}-\frac{2\gamma}{n}+\frac{2\gamma}{n^2}}{1+\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{n}}}\right)^{\frac{n\gamma+2n+2\gamma}{2(n-\gamma)}}. \end{aligned} \quad (2.3.34)$$

Оскільки в роботі [?] задачу було розв'язано для $n \geq 3$ і $1 < \gamma \leq \sqrt{n}$, то нам достатньо розглядати тільки $\gamma > \sqrt{n}$.

Для $n \geq 40$ і $\sqrt{n} < \gamma \leq n^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\frac{\ln(\frac{5}{6}\ln(n))}{\ln(n)}}$ правильна нерівність $\frac{2-\frac{2}{n}-\frac{2\gamma}{n}+\frac{2\gamma}{n^2}}{1+\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{n}} > \frac{6}{5}$, тому отримаємо:

$$n \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{n}{\gamma^{\frac{3}{2}}} \frac{2-\frac{2}{n}-\frac{2\gamma}{n}+\frac{2\gamma}{n^2}}{1+\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{n}}} < n \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{6}{5} \frac{n}{\gamma^{\frac{3}{2}}}}. \quad (2.3.35)$$

Врахувавши, що $\gamma \leq n^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\frac{\ln(\frac{5}{6}\ln(n))}{\ln(n)}}$, отримаємо, що

$$\frac{6}{5} \frac{n}{\gamma^{\frac{3}{2}}} \geq \frac{6}{5} \frac{n}{n^{\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\frac{\ln(\frac{5}{6}\ln(n))}{\ln(n)}\right)}} = \frac{6}{5} n^{\frac{\ln(\frac{5}{6}\ln(n))}{\ln(n)}}.$$

Таким чином,

$$n \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{6}{5} \frac{n}{\gamma^2}} \leq n \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{6}{5} n \frac{\ln(\frac{5}{6} \ln(n))}{\ln(n)}} = n \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{6}{5} n \log_n(\frac{5}{6} \ln(n))} = 1.$$

Підставивши даний результат в нерівності (2.3.35) і (2.3.34), отримаємо, що $n^{\frac{n\gamma+2n+2\gamma}{2(n-\gamma)}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right)^{n-1} < 1$.

Таким чином, в нерівності (2.3.33) отримаємо, що для заданих в теоремі 2.3.6 n і γ виконується нерівність $G_n(\gamma) < 1$, а це означає, що

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq I_n^0(\gamma),$$

що суперечить нашому припущенню.

Теорема 2.3.6 доведена.

Якщо ж відкинути умову однозв'язності, можна отримати дещо інше твердження. Для його доведення нам буде потрібна така лема.

Лема 2.3.3. [33] *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma > 0$ і $a_0 = 0$. Тоді для довільної системи фіксованих точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}/\{0\}$, такої, що $\prod_{k=1}^n |a_k| \leq 1$ і довільного набору неперетинних областей $\{B_0, B_1, B_2, \dots, B_n\}$ такого, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$ правильна нерівність*

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{1 - \frac{\gamma}{n}}.$$

Правильна теорема.

Теорема 2.3.7. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 14$ і $1 < \gamma \leq n^{\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}}$. Тоді виконується нерівність*

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n} \right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2} \right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2} \right)^{n + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}} \right)^{2\sqrt{\gamma}} \quad (2.3.36)$$

де B_k , $k = \overline{0, n}$, — попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{0, n}$, причому рівність досягається, зокрема, для областей D_k і точок d_k , які є відповідно круговими областями і полюсами квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}dw^2.$$

Доведення теореми 2.3.7. Введемо наступні позначення. Нехай

$$r^\gamma(D_0, d_0) \prod_{k=1}^n r(D_k, d_k) = I_n^0(\gamma).$$

Зауважимо, що, згідно з лемою 2.1.1 правильна рівність

$$I_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \quad (2.3.37)$$

Як і в попередніх теоремах, припустимо, для конкретності, що

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \dots < \arg a_n < 2\pi.$$

Означимо числа α_k , $k = \overline{1, n}$, та α_0 так, як і у формулах (2.1.2) та (2.1.3).

Згідно результатом роботи [114], нам залишається розглянути випадок $\alpha_0 > \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$.

Доведемо, що при даній умові

$$\frac{r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)}{I_n^0(\gamma)} < 1.$$

Також, згідно з теоремою 5.2.3 роботи [24] правильна наступна нерівність:

$$\begin{aligned} \left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)\right) &\leq 2^n \prod_{k=1}^n \alpha_k \leq 2^n \alpha_0 \left(\frac{2 - \alpha_0}{n - 1}\right)^{n-1} < \\ &< \frac{4^n}{(n - 1)^{n-1} \sqrt{\gamma}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}, \end{aligned} \quad (2.3.38)$$

тому

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) < \\ < n^{-\frac{\gamma}{2}} 4^{n-\gamma} \left(\frac{1}{n-1} \right)^{\frac{n^2-n-n\gamma+\gamma}{n}} \left(\frac{1}{\gamma} \right)^{\frac{n-\gamma}{2n}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right)^{\frac{n^2-n-n\gamma+\gamma}{n}}.$$

Таким чином, правильна наступна нерівність:

$$\frac{r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)}{I_n^0(\gamma)} \leq 4^{-\gamma-\frac{\gamma}{n}} n^{n-\frac{\gamma}{2}+\frac{2\gamma}{n}} \left(\frac{1}{\gamma} \right)^{\frac{n+\gamma}{2n}} \\ \left(\frac{1}{n-1} \right)^{\frac{n^2-n-n\gamma+\gamma}{n}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right)^{\frac{n^2-n-n\gamma+\gamma}{n}} \left(1 - \frac{\gamma}{n^2} \right)^{n+\frac{\gamma}{n}} \\ \left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}} \right)^{2\sqrt{\gamma}} := G_n(\gamma).$$

Відзначимо також, що

$$n^{n-\frac{\gamma}{2}+\frac{2\gamma}{n}} \left(\frac{1}{n-1} \right)^{\frac{n^2-n-n\gamma+\gamma}{n}} = n^{\frac{\gamma}{2}+1+\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{n}{n-1} \right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}}.$$

Враховуючи останні рівності, отримаємо наступний вираз:

$$G_n(\gamma) = 4^{-\gamma-\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{1}{\gamma} \right)^{\frac{n+\gamma}{2n}} n^{\frac{\gamma}{2}+1+\frac{\gamma}{n}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right)^{\frac{n^2-n-n\gamma+\gamma}{n}} \\ \left(\frac{n}{n-1} \right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}} \left(1 - \frac{\gamma}{n^2} \right)^{n+\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}} \right)^{2\sqrt{\gamma}}. \quad (2.3.39)$$

Зауважимо, що для того, щоб довести теорему 2.3.7 для деяких n і γ , нам достатньо показати, що для них $G_n(\gamma) < 1$.

Оскільки в роботі [35] задачу було розв'язано для $n \geq 3$ і $1 < \gamma \leq \sqrt{n}$, то нам достатньо розглядати тільки $\gamma > \sqrt{n}$.

Оцінимо вираз $G_n(\gamma)$ при умовах теореми. Так, $\left(\frac{n}{n-1} \right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}} < e$. Далі, $\left(1 - \frac{\gamma}{n^2} \right)^{n+\frac{\gamma}{n}} < 1$. Також правильна наступна оцінка: $\left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}} \right)^{2\sqrt{\gamma}} 4^{-\gamma-\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{1}{\gamma} \right)^{\frac{n+\gamma}{2n}} < 0.06 < \frac{1}{e}$.

Таким чином,

$$G_n(\gamma) < n^{\frac{\gamma}{2}+1+\frac{\gamma}{n}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{\frac{n^2-n-n\gamma+\gamma}{n}}. \quad (2.3.40)$$

Оцінімо тепер вираз $n^{\frac{\gamma}{2}+1+\frac{\gamma}{n}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{\frac{n^2-n-n\gamma+\gamma}{n}}$ при умовах теореми.

Правильні також наступні перетворення:

$$\begin{aligned} n^{\frac{\gamma}{2}+1+\frac{\gamma}{n}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{\frac{n^2-n-n\gamma+\gamma}{n}} &= n^{\frac{\gamma}{2}+1+\frac{\gamma}{n}} \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^{\sqrt{\gamma}} \right)^{\frac{n^2-n-n\gamma+\gamma}{\sqrt{n\gamma}}} < \\ &< \left(n \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{2(n^2-n-n\gamma+\gamma)}{n\gamma\sqrt{\gamma}+2n\sqrt{\gamma}+2\gamma\sqrt{\gamma}}} \right)^{\frac{\gamma}{2}+1+\frac{\gamma}{n}} = \\ &= \left(n \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{n}{\gamma^2} \frac{2\left(1-\frac{1}{n}-\frac{\gamma}{n}+\frac{\gamma}{n^2}\right)}{1+\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{n}}} \right)^{\frac{\gamma}{2}+1+\frac{\gamma}{n}}. \end{aligned}$$

Для $n \geq 14$ і $\sqrt{n} < \gamma < n^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}}$ (для тих випадків, коли $\sqrt{n} \geq n^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}}$ твердження теореми правильне на основі роботи [35]) правильна нерівність $\frac{1-\frac{1}{n}-\frac{\gamma}{n}+\frac{\gamma}{n^2}}{1+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{n}} > 0.5$, тому отримаємо:

$$\begin{aligned} n \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{2n}{\gamma^2} \frac{1-\frac{1}{n}-\frac{\gamma}{n}+\frac{\gamma}{n^2}}{1+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{n}}} &< n \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{n}{\gamma^2}} < \\ &< n \left(\frac{1}{e} \right)^{n^{\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}\right)}} = n \left(\frac{1}{e} \right)^{n^{\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}}} = 1. \end{aligned}$$

Таким чином, в нерівності (2.3.40) отримаємо, що для заданих в теоремі 2.3.7 n і γ виконується нерівність $G_n(\gamma) < 1$, а це означає, що

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq I_n^0(\gamma).$$

Теорема 2.3.7 доведена.

2.4. Екстремальне розбиття комплексної площини для випадку, коли області, які містять точки одиничного кола, симетричні відносно даного кола

Даний підрозділ присвячений дослідженню проблеми 2.1.2, тобто потрібно знайти максимум функціонала

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k),$$

де a_k , B_k , $k = \overline{0, n}$, — деякий набір, відповідно, точок і областей розширеної комплексної площини, таких, що $a_0 = 0$, $|a_1| = \dots = |a_n| = 1$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, де $B_i \cap B_j = \emptyset$ для $0 \leq i, j \leq n$ і $i \neq j$, і області $B_1, \dots, B_n$ симетричні відносно одиничного кола.

В наступній теоремі досліджується випадок, коли кількість областей, які містять точки одиничного кола і які симетричні відносно даного кола, дорівнює трьом.

Теорема 2.4.1. [194] Для довільного набору точок a_k , таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, 3}$, довільного набору взаємно неперетинних областей B_k , таких, що $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, 3}$, причому області B_k , $k = \overline{1, 3}$, симетричні відносно одиничного кола $|w| = 1$, і довільного дійсного γ , такого, що $0 < \gamma \leq 1.233$, правильна нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^3 r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3 \frac{(2\gamma)^{\frac{\gamma}{3}}}{27(9-2\gamma)^{\frac{3}{2}+\frac{\gamma}{3}}} \left(\frac{3-\sqrt{2\gamma}}{3+\sqrt{2\gamma}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}. \quad (2.4.1)$$

Знак рівності в цій нерівності досягається, зокрема, у випадку, якщо точки a_k і області B_k , $k = \overline{0, 3}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^6 + 2(9-\gamma)w^3 + \gamma}{w^2(w^3-1)^2} dw^2. \quad (2.4.2)$$

Доведення теореми 2.4.1. Згідно з умовою, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, 3}$. Припустимо, не зменшуючи загальності, що

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \arg a_3 < 2\pi.$$

Означимо числа α_k , $k = \overline{1, 3}$, та α_0 так, як і у формулах (2.1.2) та (2.1.3).

Зауважимо, що для $n = 3$ випадок $0 < \gamma < 1$ був розглянутий в роботі [185], випадок $\gamma = 1$ — в роботі [116], а випадок $\alpha_0 \leq \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$ — в роботі [34]. Таким чином, нам достатньо розглянути випадок $1 < \gamma \leq 1.233$ і $\alpha_0 > \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$. Для зручності в подальших міркуваннях будемо вважати, що $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$.

Доведення теореми 2.4.1 ґрунтується на методах і ідеях робіт [24, 65, 116]. Позначимо

$$I_3(\gamma) := r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^3 r(B_k, a_k).$$

Покажемо, що при умові $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$ значення функціонала $I_3(\gamma)$ задовольняє співвідношення (2.4.1).

Позначимо через $B_k^{(0)}$ і $a_k^{(0)}$ відповідно кругові області та полюси квадратичного диференціала 2.4.2. За лемою 2.1.3 (див. також [64, 65]), отримаємо

$$\begin{aligned} I_3^0(\gamma) &:= r^\gamma(B_0^{(0)}, 0) \prod_{k=1}^3 r(B_k^{(0)}, a_k^{(0)}) = \\ &= \left(\frac{4}{3}\right)^3 \frac{(2\gamma)^{\frac{7}{3}}}{27(9-2\gamma)^{\frac{3}{2}+\frac{7}{3}}} \left(\frac{3-\sqrt{2\gamma}}{3+\sqrt{2\gamma}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}. \end{aligned}$$

Відзначимо, що для областей B_k і точок a_k , $k = \overline{0, 3}$, виконуються всі умови леми 2.2.1, а тому правильне наступне твердження: нехай $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$, ($n \geq 2$), — попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, 3}$, ($a_j \in B_j$), $j = \overline{0, 3}$ і $q \in \mathbb{R}$, $q > 0$, $r(B_j, a_j)$ — внутрішній радіус області B_j в точці a_j і $0 < \gamma < 3$. Тоді при умові, що

$$r(B_0, a_0) \geq q^{\frac{1}{\gamma-n}}$$

виконується нерівність:

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq q.$$

Взявши в лемі 2.2.1 $q = I_n^0(\gamma)$, отримаємо, що для $r(B_0, a_0) \geq (I_n^0(\gamma))^{\frac{1}{\gamma-n}}$ правильна нерівність (2.4.1). Тому нам достатньо розглядати тільки випадок $r(B_0, a_0) < (I_n^0(\gamma))^{\frac{1}{\gamma-n}}$.

Зауважимо, що:

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^3 r(B_k, a_k) = r^{\gamma-1}(B_0, 0) \prod_{k=0}^3 r(B_k, a_k). \quad (2.4.3)$$

За теоремою 2 роботи [121], врахувавши, що $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, а також те, що $|a_k - a_0| = 1$ для $k = \overline{1, 3}$, правильна нерівність

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^3 r(B_k, a_k) &\leq \frac{9}{4^{\frac{8}{3}}} (|a_1 - a_2| \cdot |a_1 - a_3| \cdot |a_2 - a_3|)^{\frac{2}{3}} < \\ &< \frac{9}{4^{\frac{8}{3}}} \left(8 \sin^2 \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \right) \sin \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \right) \right)^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Таким чином, в (2.4.3) отримаємо

$$\begin{aligned} r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^3 r(B_k, a_k) &< \frac{9}{4^{\frac{5}{3}}} (I_3^0(\gamma))^{\frac{\gamma-1}{\gamma-3}} \\ &\left(\sin^2 \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \right) \sin \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \right) \right)^{\frac{2}{3}}. \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Далі, нехай

$$J_3(\gamma) = \frac{I_3(\gamma)}{I_3^0(\gamma)} = \frac{r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^3 r(B_k, a_k)}{r^\gamma(B_0^{(0)}, 0) \prod_{k=1}^3 r(B_k^{(0)}, a_k^{(0)})}.$$

Використовуючи (2.4.4), отримаємо наступну нерівність:

$$J_3(\gamma) \leq \frac{9}{4^{\frac{5}{3}}} \left(\sin^2 \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \right) \sin \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \right) \right)^{\frac{2}{3}} (I_3^0(\gamma))^{\frac{2}{\gamma-3}}. \quad (2.4.5)$$

Зауважимо, що $J_3(1.233) < 1$, таким чином для $\gamma = 1.233$ і довільного набору областей B_k і точок a_k , $k = \overline{0, 3}$, які задовольняють умови теореми 2.4.1, правильна нерівність $I_3(\gamma) < I_3^0(\gamma)$, а значить для даного випадку теорема доведена.

Перевіримо тепер правильність твердження теореми 2.4.1 для випадку $1 < \gamma < 1.233$. Для цього дослідимо вираз, записаний в правій частині нерівності (2.4.5), на монотонність по γ .

Так, нехай для деяких дійсних γ_1 і γ_2 виконується нерівність $1 < \gamma_1 < \gamma_2 \leq 1.233$. Тоді $1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma_1}} < 1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma_2}}$, а отже і

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma_1}} \right) \sin \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma_1}} \right) &\leq \\ &\leq \sin^2 \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma_2}} \right) \sin \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma_2}} \right). \end{aligned}$$

Розглянемо тепер вираз $(I_3^0(\gamma))^{\frac{2}{\gamma-3}} = (I_3^0(\gamma))^{-\frac{2}{3-\gamma}}$ для даних γ_1 і γ_2 . Використовуючи лему 2.1.4 та елементарні обчислення, отримаємо, що $1 > I_3^0(1) > I_3^0(\gamma_1) > I_3^0(\gamma_2)$, а тому $(I_3^0(\gamma_2))^{-1} > (I_3^0(\gamma_1))^{-1} > 1$. Відзначимо також, що $\frac{2}{3-\gamma_2} > \frac{2}{3-\gamma_1}$, а отже

$$(I_3^0(\gamma_1))^{\frac{2}{\gamma_1-3}} < (I_3^0(\gamma_2))^{\frac{2}{\gamma_2-3}}.$$

Враховуюючи наведені вище міркування, отримаємо, що вираз, записаний в правій частині нерівності (2.4.5), монотонно зростає по γ на проміжку $[1; 1.233]$, а тому для довільного γ з даного проміжку $J_3(\gamma) < J_3(1.233) < 1$, а тому для даних γ виконується нерівність $I_3(\gamma) < I_3^0(\gamma)$.

Теорема 2.4.1 доведена.

В наступній теоремі проблема 2.1.2 розглядається у випадку, коли степінь γ , до якого підноситься внутрішній радіус області, яка містить точку нуль, обмежений деяким степенем числа n .

Теорема 2.4.2. [207] Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ для деякого $n_0 \in \mathbb{N}$ і нехай дано дійсне число γ таке, що $1 < \gamma \leq n^{\frac{2}{3}-q(n)}$, де $q(n) = \frac{2}{3} \frac{\ln\left(\frac{1}{p(n_0)} \ln(n)\right)}{\ln(n)}$, причому можна взяти $n_0 = 20$ і $p(20) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Тоді для довільного набору точок a_k , таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k , таких, що $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{0, n}$, причому області B_k , $k = \overline{1, n}$, симетричні відносно одиничного кола $|w| = 1$, правильна нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2} + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}. \quad (2.4.6)$$

Знак рівності в цій нерівності досягається, зокрема, у випадку, коли a_k і B_k , $k = \overline{0, n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2. \quad (2.4.7)$$

Доведення. Доведення теореми 2.4.2 ґрунтується на методах і ідеях робіт [24, 115, 116].

Позначимо

$$I_n(\gamma) := r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k).$$

Для кожного натурального n і дійсного γ , які задовольняють умови теореми, позначимо a_k^0 і B_k^0 , $k = \overline{0, n}$, відповідно полюси і кругові області квадратичного диференціала (2.4.7). Позначимо також

$$I_n^0(\gamma) = r^\gamma(B_0^0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k^0, a_k^0). \quad (2.4.8)$$

Згідно з лемою 2.1.3, правильна рівність

$$I_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2} + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}. \quad (2.4.9)$$

Нехай для конкретності

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \dots < \arg a_n < 2\pi.$$

Означимо числа α_k , $k = \overline{1, n}$, та α_0 так, як і у формулах (2.1.2) та (2.1.3).

Зауважимо, що випадок випадок $\alpha_0 \leq \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$ був розглянутий в роботі [34]. Таким чином, нам достатньо розглянути випадок $\alpha_0 > \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$. Для зручності доведення будемо проводити для дещо загальнішого випадку, а саме $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$. Покажемо, що при даній умові значення функціонала $I_n(\gamma)$ задовольняє співвідношення (2.4.6).

Правильні наступні леми.

Лема 2.4.1. *Для довільного $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, для довільного набору точок a_k , таких, що $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, причому $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k , $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, правильна нерівність:*

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \frac{4^n}{\sqrt{2\gamma}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}. \quad (2.4.10)$$

Доведення леми 2.4.1. Згідно з теоремою 5.1.1 роботи [24] (див. також наслідок 2.1.1), правильна наступна оцінка:

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq 2^n \prod_{k=1}^n \alpha_k. \quad (2.4.11)$$

Далі, враховуючи те, що $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 2$, і використовуючи нерівність між середнім геометричним і середнім арифметичним, отримаємо:

$$2^n \prod_{k=1}^n \alpha_k \leq 2^n \alpha_0 \left(\frac{2 - \alpha_0}{n - 1}\right)^{n-1} = 2^n \alpha_0 (2 - \alpha_0)^{n-1} (n - 1)^{-(n-1)}.$$

А оскільки $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, використовуючи елементарні дослідження

функції на максимум, отримаємо в нерівності (2.4.11)

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) &\leq 2^n \frac{2}{\sqrt{2\gamma}} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)} = \\ &= \frac{4^n}{\sqrt{2\gamma}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}. \end{aligned}$$

Лему 2.4.1 доведено.

Позначимо $a_{n+1} := a_1$, $a_{n+2} := a_2$, $B_{n+1} := B_1$, $B_{n+2} := B_2$.

Лема 2.4.2. *Нехай точки a_k і області B_k , $k = \overline{0, n}$, задовольняють всі умови теореми 2.4.2. Тоді при умові $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$ правильна наступна нерівність:*

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n (r(B_0, 0) r(B_k, a_k) r(B_{k+1}, a_{k+1}) r(B_{k+2}, a_{k+2})) &\leq \\ &\leq \left(\frac{9\pi^2}{4^{\frac{4}{3}}}\right)^n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{\frac{6n-8}{3}} \left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{6n-4}{3}} \left(\frac{\sqrt{2\gamma} + n - 2}{4\gamma}\right)^{\frac{4}{3}}. \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

Доведення лема 2.4.2. Згідно з нерівністю теореми 2 роботи [121], для довільного набору точок a_s і взаємно неперетинних областей B_s , таких, що $a_s \in B_s$, $s = \overline{1, 4}$, правильна нерівність:

$$\prod_{s=1}^4 r(B_s, a_s) \leq \frac{9}{4^{\frac{8}{3}}} \prod_{1 \leq k < l \leq 4} |a_l - a_k|^{\frac{2}{3}},$$

а тому

$$\begin{aligned} r(B_0, 0) r(B_k, a_k) r(B_{k+1}, a_{k+1}) r(B_{k+2}, a_{k+2}) &\leq \\ &\leq \frac{9}{4^{\frac{8}{3}}} (|a_{k+1} - a_k| |a_{k+2} - a_{k+1}| |a_{k+2} - a_{k+1}|)^{\frac{2}{3}} = \\ &= \frac{9}{4^{\frac{5}{3}}} \left(\sin \frac{\pi \alpha_k}{2} \sin \frac{\pi \alpha_{k+1}}{2} \sin \frac{\pi(\alpha_k + \alpha_{k+1})}{2}\right)^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Далі, постановивши $\alpha_{n+1} = \alpha_1$, отримаємо:

$$\prod_{k=1}^n (r(B_0, 0) r(B_k, a_k) r(B_{k+1}, a_{k+1}) r(B_{k+2}, a_{k+2})) \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{9}{4^{\frac{5}{3}}}\right)^n \prod_{k=1}^n \left(\sin \frac{\pi\alpha_k}{2} \sin \frac{\pi\alpha_{k+1}}{2} \sin \frac{\pi(\alpha_k + \alpha_{k+1})}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = \\
&= \left(\frac{9}{4^{\frac{5}{3}}}\right)^n \prod_{k=1}^n \left(\sin^2 \frac{\pi\alpha_k}{2} \sin \frac{\pi(\alpha_k + \alpha_{k+1})}{2}\right)^{\frac{2}{3}}.
\end{aligned}$$

Припустимо для конкретності, що $\alpha_0 = \alpha_n$. Дослідивши останній вираз при умові $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, отримаємо, що максимум його досягається для випадку, коли $\alpha_n = \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, а всі інші $\alpha_k = \frac{1}{n-1} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}\right)$ для $k = \overline{1, n-1}$. Врахувавши також нерівність $\sin x < x$ для $x > 0$, отримаємо

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{9}{4^{\frac{5}{3}}}\right)^n \prod_{k=1}^n \left(\sin^2 \frac{\pi\alpha_k}{2} \sin \frac{\pi(\alpha_k + \alpha_{k+1})}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \leq \\
&\leq \left(\frac{9\pi^2}{4^{\frac{5}{3}}}\right)^n \left(\frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\right)^{\frac{4n-4}{3}} \left(\frac{2}{n-1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\right)^{\frac{2n-4}{3}} \left(\frac{\sqrt{2\gamma} + n - 2}{2\gamma(n-1)}\right)^{\frac{4}{3}} = \\
&= \left(\frac{9\pi^2}{4^{\frac{4}{3}}}\right)^n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{\frac{6n-8}{3}} \left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{6n-4}{3}} \left(\frac{\sqrt{2\gamma} + n - 2}{4\gamma}\right)^{\frac{4}{3}},
\end{aligned}$$

а звідси і випливає нерівність (2.4.12). **Лему 2.4.2 доведено.**

Лема 2.4.3. *Нехай точки a_k і області B_k , $k = \overline{0, n}$, задовольняють всі умови теореми 2.4.2. Тоді при умові $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$ правильна наступна нерівність:*

$$J(n, \gamma) := \frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} \leq n^{\gamma+1-\frac{5\gamma}{3n}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-\gamma-1+\frac{\gamma}{3n}} \left(\frac{9\pi^2}{4^{\frac{13}{3}}}\right)^{\gamma} P(n, \gamma) \quad (2.4.13)$$

де

$$\begin{aligned}
P(n, \gamma) &= \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-\gamma-1+\frac{5\gamma}{3n}} \left(\sqrt{2\gamma}\right)^{\frac{3\gamma}{n}-1} \cdot \\
&\cdot \left(\frac{\sqrt{2\gamma} + n - 2}{4\gamma}\right)^{\frac{4\gamma}{3n}} \left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1 - \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}.
\end{aligned}$$

Доведення лема 2.4.3. Для початку проведемо оцінку виразу $I_n(\gamma)$, використовуючи нерівності (2.4.10) і (2.4.12).

$$\begin{aligned}
I_n(\gamma) &= r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) = \\
&= \left(\prod_{k=1}^n r(B_0, 0) r(B_k, a_k) r(B_{k+1}, a_{k+1}) r(B_{k+2}, a_{k+2}) \right)^{\frac{\gamma}{n}} \left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{1-\frac{3\gamma}{n}} \leq \\
&\leq \left(\frac{9\pi^2}{4^{\frac{4}{3}}} \right)^\gamma \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \right)^{n-\gamma-1+\frac{\gamma}{3n}} \left(\frac{1}{n-1} \right)^{n-\gamma-1+\frac{5\gamma}{3n}} \frac{4^{n-3\gamma}}{(\sqrt{2\gamma})^{1-\frac{3\gamma}{n}}} \left(\frac{\sqrt{2\gamma} + n - 2}{4\gamma} \right)^{\frac{4\gamma}{3n}}.
\end{aligned}$$

Використовуючи отриману вище нерівність і рівність (2.4.9), отримаємо наступну оцінку

$$\begin{aligned}
J(n, \gamma) &\leq \left(\frac{9\pi^2}{4^{\frac{4}{3}}} \right)^\gamma \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \right)^{n-\gamma-1+\frac{\gamma}{3n}} \left(\frac{1}{n-1} \right)^{n-\gamma-1+\frac{5\gamma}{3n}} \frac{4^{n-3\gamma}}{(\sqrt{2\gamma})^{1-\frac{3\gamma}{n}}} \\
&\quad \left(\frac{\sqrt{2\gamma} + n - 2}{4\gamma} \right)^{\frac{4\gamma}{3n}} \left(\frac{n}{4} \right)^n \left(\frac{2\gamma}{n^2} \right)^{\frac{\gamma}{n}} \left(1 - \frac{2\gamma}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1 - \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}} \right)^{\sqrt{2\gamma}} = \\
&= n^{\gamma+1-\frac{5\gamma}{3n}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \right)^{n-\gamma-1+\frac{\gamma}{3n}} \left(\frac{9\pi^2}{4^{\frac{13}{3}}} \right)^\gamma P(n, \gamma).
\end{aligned} \tag{2.4.14}$$

Лему 2.4.3 доведено.

Для закінчення доведення теореми 2.4.2 достатньо показати, що вираз, записаний в правій частині нерівності (2.4.14), при умовах теореми менший від одиниці.

Оцінимо для початку вираз $P(n, \gamma)$, причому випадок $1 < \gamma \leq 2$ розглянемо окремо.

Так, $\left(\frac{n}{n-1} \right)^{n-\gamma-1+\frac{5\gamma}{3n}} = \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{(n-1)(1-\frac{3n\gamma-5\gamma}{3n(n-1)})} < e$. Далі, $(\sqrt{2\gamma})^{\frac{3\gamma}{n}-1} < 1.16$ (для $1 < \gamma \leq 2$ отримаємо $(\sqrt{2\gamma})^{\frac{3\gamma}{n}-1} < 0.75$). Потім $\left(\frac{\sqrt{2\gamma}+n-2}{4\gamma} \right)^{\frac{4\gamma}{3n}} < 1.15$. Далі, вираз $\left(1 - \frac{2\gamma}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}} < 1$, а вираз $\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}} \right)^{\sqrt{2\gamma}} < 4.45$ (для $1 < \gamma \leq 2$ отримаємо $\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}} \right)^{\sqrt{2\gamma}} < 1.5$).

Враховуючи це, отримаємо що $P(n, \gamma) < 6e$ (для $1 < \gamma \leq 2$ отримаємо $P(n, \gamma) < 1.29e$).

Правильні також наступні перетворення:

$$\begin{aligned} n^{\gamma+1-\frac{5\gamma}{3n}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-\gamma-1+\frac{\gamma}{3n}} \left(\frac{9\pi^2}{4^{\frac{13}{3}}}\right)^{\gamma} &= \\ &= \left(\frac{9\pi^2}{4^{\frac{13}{3}}}\right)^{\gamma} n^{\gamma+1-\frac{5\gamma}{3n}} \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}\right)^{\frac{n-\gamma-1+\frac{\gamma}{3n}}{\sqrt{2\gamma}}} < \\ &< \left(n \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{n-\gamma-1+\frac{\gamma}{3n}}{\sqrt{2\gamma}(\gamma+1-\frac{5\gamma}{3n})}}\right)^{\gamma+1-\frac{5\gamma}{3n}} \left(\frac{9\pi^2}{4^{\frac{13}{3}}}\right)^{\gamma}. \end{aligned}$$

Оцінимо при даних n і γ вираз

$$n \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{n-\gamma-1+\frac{\gamma}{3n}}{\sqrt{2\gamma}(\gamma+1-\frac{5\gamma}{3n})}} = \frac{n}{e^l},$$

$$\text{де } l = \frac{n(1-n^{-1}-\frac{\gamma}{n}+\frac{\gamma}{3n^2})}{\sqrt{2}\gamma^{\frac{3}{2}}(1+\gamma^{-1}-\frac{5}{3}n^{-1})}.$$

Зауважимо також, что для даних n і γ маємо:

$$\frac{(1 - n^{-1} - \frac{\gamma}{n} + \frac{\gamma}{3n^2})}{\sqrt{2}(1 + \gamma^{-1} - \frac{5}{3}n^{-1})} > p(20) = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

а отже отримаємо:

$$\frac{n}{e^l} < \frac{n}{e^{p(n) \cdot \frac{n}{\gamma^{\frac{3}{2}}}}} < \frac{n}{e^{p(n) \cdot \frac{n}{n^{\frac{3}{2}}(\frac{2}{3}-q(n))}}} = \frac{n}{e^{p(n) \cdot n \frac{\ln(\frac{1}{p(n)} \ln(n))}{\ln(n)}}} = 1.$$

Таким чином, для $1 < \gamma \leq 2$ в нерівності (2.4.14) отримаємо:

$$J(n, \gamma) \leq 1.29e \frac{9\pi^2}{4^{\frac{13}{3}}} < 0.77 < 1.$$

Для $2 < \gamma$ в нерівності отримаємо:

$$J(n, \gamma) \leq 6e \left(\frac{9\pi^2}{4^{\frac{13}{3}}}\right)^2 < 0.8 < 1.$$

А оскільки $J(n, \gamma) = \frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)}$, то для $n \geq 20$ і $1 < \gamma \leq n^{\frac{2}{3}-q(n)}$ і $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$ правильна нерівність $I_n(\gamma) < I_n^0(\gamma)$, а тому, враховуючи (2.4.9), для даного випадку нерівність (2.4.6) доведена.

Таким чином, нерівність (2.4.6) доведена і для $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, і для $\alpha_0 < \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$.

Теорему 2.4.2 доведено.

Зауважимо, що взявши в теоремі 2.4.2 $n_0 > 20$, ми можемо уточнити вираз $p(n_0)$, а отже й записати екстремальні конфігурації для більших γ для того ж натурального n .

Наступна теорема є деяким аналогом теореми 2.3.1 для випадку симетричних областей.

Теорема 2.4.3. [213] *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 258$ і $\gamma \in \mathbb{R}$, $1 < \gamma \leq n$. Тоді для довільного набору точок a_k , таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k , таких, що $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{0, n}$, причому області B_k , $k = \overline{1, n}$, симетричні відносно одиничного кола $|w| = 1$, а також за умови, що $r(B_0, 0) \leq 1$, правильна нерівність*

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2} + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}. \quad (2.4.15)$$

Знак рівності в цій нерівності досягається, зокрема, у випадку, коли a_k і B_k , $k = \overline{0, n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2. \quad (2.4.16)$$

Доведення теореми 2.4.3. Як і в попередніх теоремах, нехай

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \dots < \arg a_n < 2\pi.$$

Означимо числа α_k , $k = \overline{1, n}$, та α_0 так, як і у формулах (2.1.2) та (2.1.3).

Зауважимо, що випадок випадок $\alpha_0 \leq \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$ був розглянутий в роботі [34]. Таким чином, нам достатньо розглянути випадок $\alpha_0 > \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$. Для зручності доведення будемо проводити для дещо загальнішого випадку, а саме $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$.

Введемо наступні позначення. Так, нехай

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k),$$

а також

$$I_n^0(\gamma) = r^\gamma(D_0, 0) \prod_{k=1}^n r(D_k, d_k),$$

де d_k і D_k , $k = \overline{1, n}$, – відповідно полюси і кругові області квадратичного диференціала (2.4.16). Згідно з лемою 2.1.3

$$I_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2} + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}. \quad (2.4.17)$$

Також, згідно з лемою 2.4.1, виконується нерівність

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \frac{4^n}{\sqrt{2\gamma}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}. \quad (2.4.18)$$

Позначимо також

$$Q_n(\gamma) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}}{\frac{1}{n^n} \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2} + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}}. \quad (2.4.19)$$

Доведемо спочатку наступну лему.

Лема 2.4.4. *Нехай $n \geq 2$ – фіксоване натуральне число, $\gamma > 1$ – деяке дійсне число. Тоді для довільної конфігурації неперетинних областей B_k і точок a_k ($k = \overline{0, n}$), таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$,*

$a_k \in B_k$, $k = \overline{0, n}$, для яких виконуються умови $r(B_0, a_0) \leq 1$ і $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, правильна нерівність:

$$\frac{r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)}{I_n^0(\gamma)} \leq Q_n(\gamma), \quad (2.4.20)$$

де $I_n^0(\gamma)$, $Q_n(\gamma)$ — див. відповідно (2.4.17), (2.4.19).

Якщо, до того ж, якщо $\gamma_1(n)$ — корінь рівняння $Q_n(\gamma) = 1$, то для довільного γ_2 такого, що $1 < \gamma_2 < \gamma_1(n)$ буде виконуватися нерівність $Q_n(\gamma_2) < 1$.

Доведення леми 2.4.4. Відзначимо, що правильність нерівності (2.4.20) випливає з нерівності (2.4.18) і з рівності (2.4.17). Тому нам залишається довести, що з правильності нерівності $Q_n(\gamma_1) \leq 1$ випливає правильність нерівності $Q_n(\gamma_2) < 1$ для довільного $\gamma_2 > 1$ і $\gamma_2 < \gamma_1$. Дослідимо функцію $Q_n(\gamma)$ на монотонність.

Спочатку візьмемо логарифмічну похідну від чисельника даного виразу. Так,

$$\begin{aligned} & \left[\ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \right)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)} \right) \right]'_{\gamma} = \\ & = \left[-\frac{1}{2} \ln(2\gamma) + (n-1) \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \right) - (n-1) \ln(n-1) \right]'_{\gamma} = \\ & = \frac{n - \sqrt{2\gamma}}{2\gamma(\sqrt{2\gamma} - 1)} > 0, \end{aligned}$$

тому чисельник виразу $Q_n(\gamma)$ зростає по γ для довільних n і γ , які задовольняють умовам леми 2.4.4.

З іншого боку, згідно з лемою 2.1.4

$$(I_n^0(\gamma))' = I_n^0(\gamma) \left(\frac{1}{n} \ln \left(\frac{2\gamma}{n^2 - 2\gamma} \right) + \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \ln \left(\frac{n - \sqrt{2\gamma}}{n + \sqrt{2\gamma}} \right) \right) < 0,$$

тому знаменник виразу $Q_n(\gamma)$ спадає по γ для тих n і γ , які задовольняють умовам леми 2.4.4.

Таким чином, отримаємо, що функція $Q_n(\gamma)$ монотонно зростає по γ , тобто $Q_n(\gamma_2) < Q_n(\gamma_1) < 1$.

Лему 2.4.4 доведено.

Перейдемо тепер до доведення основного твердження теореми 2.4.3. Спочатку розглянемо випадок $\gamma = n$. Тоді, згідно з лемою 2.4.4,

$$\begin{aligned} \frac{I_n(n)}{I_n^0(n)} &\leq Q_n(n) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2n}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}}{\frac{1}{n^n} \frac{\frac{2}{n}}{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}+1}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}}\right)^{\sqrt{2n}}} = \\ &= \frac{n^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2}} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}+1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right)^{\sqrt{2n}}\right)^{\frac{n-1}{\sqrt{2n}}} \left(\frac{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}}}{\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}}}\right)^2. \end{aligned}$$

Позначимо тепер

$$P_1(n) := \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}+1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1};$$

$$P_2(n) := \left(\frac{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}}}{\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}}}\right)^2;$$

$$P_3(n) := \frac{n^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2}} \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right)^{\sqrt{2n}}\right)^{\frac{n-1}{\sqrt{2n}}}.$$

Дослідимо кожен з цих виразів для $n \geq 258$. Так,

$$P_1(n) < \frac{1}{e} \cdot e = 1.$$

Далі, вираз $P_2(n)$ спадає до e^4 і для $n \geq 258$ правильна нерівність $P_2(n) \leq 55.1682$. В той же час вираз $P_3(n)$ монотонно зростає для $n \leq 16$ і спадає для $n > 16$, причому $P_3(258) \approx 0.0180$. Таким чином, для $n \geq 258$ отримаємо:

$$Q_n(n) = P_1(n)P_2(n)P_3(n) < 1 \cdot P_2(258) \cdot P_3(258) <$$

$$< 55.1704 \cdot 0.0182 < 1.$$

Використовуючи останню нерівність і нерівність (2.4.20), отримаємо, що для $n \geq 258$, довільної конфігурації областей B_k і точок a_k , $k = \overline{0, n}$, які задовольняють всім умовам теореми 2.4.3, а також для довільного дійсного γ , такого, що $1 < \gamma \leq n$, правильна нерівність:

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq I_n^0(\gamma).$$

А звідси, враховуючи (2.4.17), і отримаємо нерівність (2.4.15).

Теорему 2.4.3 доведено.

Правильний наступний наслідок:

Наслідок 2.4.1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 258$ і $\gamma \in \mathbb{R}$, $1 < \gamma \leq n$. Тоді для довільного набору точок a_k , таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k , таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, причому області B_k , $k = \overline{1, n}$, симетричні відносно одиничного кола $|w| = 1$, а також якщо $B_0 \subset U$, де U — відкритий одиничний круг, правильна нерівність (2.4.15). Знак рівності в цій нерівності досягається, зокрема, у випадку, коли a_k і B_k , $k = \overline{0, n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала (2.4.16).*

Правильність даного наслідку випливає з теореми 2.4.3 та з того, що якщо $B_0 \subset U$, то правильна нерівність $r(B_0, a_0) \leq 1$.

Також можна суттєво зменшити номер n_0 , починаючи з якого виконується нерівність (2.4.15), якщо брати $\gamma \leq \gamma_0$ для деякого $\gamma_0 < n$. Зокрема, правильна теорема.

Теорема 2.4.4. *[213] Нехай $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, причому $0 < \alpha < 1$. Тоді існує $n_0(\alpha) \in \mathbb{N}$ таке, що для довільних натурального $n \geq n_0(\alpha)$, дійсного γ , такого, що $1 < \gamma \leq n^\alpha$, довільного набору точок a_k , таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, і довільного набору взаємно неперетинних*

областей B_k , таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, причому області B_k , $k = \overline{1, n}$, симетричні відносно одиничного кола $|w| = 1$, а також за умови $r(B_0, 0) \leq 1$, правильна нерівність (2.4.15). Знак рівності в цій нерівності досягається, зокрема, у випадку, коли a_k і B_k , $k = \overline{0, n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала (2.4.16). Зокрема, для випадку $\alpha = 0.9$ можна взяти $n_0(\alpha) = 78$, для $\alpha = 0.8$ взяти $n_0(\alpha) = 38$, для $\alpha = 0.7$ взяти $n_0(\alpha) = 23$, для $\alpha = 0.6$ взяти $n_0(\alpha) = 16$.

Доведення теореми 2.4.4. Використовуючи лему 2.4.4, отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{I_n(n^\alpha)}{I_n^0(n^\alpha)} &\leq Q_n(n^\alpha) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} n^{-\alpha/2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} n^{-\alpha/2}\right)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}}{n^{-n} \cdot \frac{(2n^{\alpha-2})^{n^{\alpha-1}}}{(1-2n^{\alpha-2})^{\frac{n}{2}+n^{\alpha-1}}} \left(\frac{1-\sqrt{2}n^{\alpha/2-1}}{1+\sqrt{2}n^{\frac{\alpha}{2}-1}}\right)^{\sqrt{2}n^{\frac{\alpha}{2}}}} = \\ &= \frac{n^{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{2}{n^{2-\alpha}}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{1}{n^{1-\alpha}}} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{2} n^{2-\alpha}\right)^{n^{\alpha-1}} \cdot \\ &\cdot \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}n^{\alpha/2}}\right)^{\sqrt{2}n^{\alpha/2}}\right)^{\frac{n-1}{\sqrt{2}n^{\alpha/2}}} \left(\frac{(1 + \sqrt{2}n^{\alpha/2-1})^{\frac{n^{1-\alpha/2}}{\sqrt{2}}}}{(1 - \sqrt{2}n^{\alpha/2-1})^{\frac{n^{1-\alpha/2}}{\sqrt{2}}}}\right)^{\frac{2}{n^{1-\alpha}}}. \end{aligned}$$

Позначимо

$$\begin{aligned} R_1(n) &= \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}; \quad R_2(n, \alpha) = \frac{n^{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{2}} \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}n^{\alpha/2}}\right)^{\sqrt{2}n^{\alpha/2}}\right)^{\frac{n-1}{\sqrt{2}n^{\alpha/2}}}; \\ R_3(n, \alpha) &= \left(1 - \frac{2}{n^{2-\alpha}}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{1}{n^{1-\alpha}}}; \quad R_4(n, \alpha) = \left(\frac{1}{2} n^{2-\alpha}\right)^{n^{\alpha-1}}; \\ R_5(n, \alpha) &= \left(\frac{(1 + \sqrt{2}n^{\alpha/2-1})^{\frac{n^{1-\alpha/2}}{\sqrt{2}}}}{(1 - \sqrt{2}n^{\alpha/2-1})^{\frac{n^{1-\alpha/2}}{\sqrt{2}}}}\right)^{\frac{2}{n^{1-\alpha}}}. \end{aligned}$$

Розглянемо кожен з наведених в теоремі випадків окремо.

Випадок $\alpha = 0.9$.

Спочатку розглянемо випадок $\alpha = 0.9$ і $n \geq 78$. Оцінимо кожен з виразів $R_k(n, \alpha)$, $k = \overline{1, 5}$.

Так,

$$R_1(n) < e. \quad (2.4.21)$$

Далі,

$$R_2(n, 0.9) = \frac{n^{0.55}}{\sqrt{2}} \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}n^{0.45}} \right)^{\sqrt{2}n^{0.45}} \right)^{\frac{n-1}{\sqrt{2}n^{0.45}}} < \frac{n^{0.55}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{n-1}{\sqrt{2}n^{0.45}}}.$$

Функція $\frac{n^{0.55}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{n-1}{\sqrt{2}n^{0.45}}}$ монотонно спадає для $n \geq 78$, однак для зручності подальших обчислень візьмемо $n \geq 119$. Отримаємо

$$R_2(n, 0.9) < \frac{119^{0.55}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{119}{\sqrt{2} \cdot 119^{0.45}}} < 0.000593. \quad (2.4.22)$$

Далі,

$$R_3(n, 0.9) < 1. \quad (2.4.23)$$

Вираз $R_4(n, 0.9) = \left(\frac{1}{2}n^{1.1} \right)^{n^{-0.1}}$ обмежений згори, причому правильна нерівність

$$R_4(n, 0.9) < 45. \quad (2.4.24)$$

Крім того, вираз $R_5(n, 0.9)$ спадає для $n \geq 78$, а тому

$$R_5(n, 0.9) \leq R_5(78, 0.9) < 13.4876. \quad (2.4.25)$$

Враховуючи нерівності (2.4.21)-(2.4.25), для $n \geq 119$ отримаємо

$$Q_n(n^{0.9}) < e \cdot 0.000593 \cdot 45 \cdot 13.4876 < 0.98 < 1.$$

Безпосередніми обчисленнями переконуємося, що для всіх n , таких, що $78 \leq n < 119$, також правильна нерівність $Q_n(n^{0.9}) < 1$. Тому, враховуючи лему 2.4.4, теорема 2.4.4 правильна для всіх $n \geq 78$ і $1 < \gamma \leq n^{0.9}$.

Випадок $\alpha = 0.8$.

Дослідимо тепер випадок $\alpha = 0.8$ і $n \geq 38$, однак для зручності будемо розглядати випадок $n \geq 45$.

Так, нерівності (2.4.21) та (2.4.23) для даного випадку теж справджуються.

Далі,

$$R_2(n, 0.8) = \frac{n^{0.6}}{\sqrt{2}} \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}n^{0.4}} \right)^{\sqrt{2}n^{0.4}} \right)^{\frac{n-1}{\sqrt{2}n^{0.4}}} < \frac{n^{0.6}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{n-1}{\sqrt{2}n^{0.4}}}.$$

Функція $\frac{n^{0.6}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{n-1}{\sqrt{2}n^{0.4}}}$ монотонно спадає для $n \geq 45$, тому

$$R_2(n, 0.8) < \frac{45^{0.6}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{45}{\sqrt{2} \cdot 45^{0.4}}} < 0.00784. \quad (2.4.26)$$

Вираз $R_4(n, 0.8) = \left(\frac{1}{2}n^{1.2} \right)^{n^{-0.2}}$ зростає для $n \leq 264$ і спадає для $n > 264$, тому

$$R_4(n, 0.8) \leq P_4(264, 0.8) < 7.14534. \quad (2.4.27)$$

І насамкінець, вираз $R_5(n, 0.8)$ спадає для $n \geq 45$, а тому

$$R_5(n, 0.8) \leq R_5(45, 0.8) < 6.56181. \quad (2.4.28)$$

Враховуючи (2.4.21), (2.4.23) та (2.4.26)-(2.4.28), для $n \geq 45$ отримаємо:

$$Q_n(n^{0.8}) < e \cdot 0.00784 \cdot 7.14534 \cdot 6.56181 < 0.99922 < 1.$$

Безпосередніми обчисленнями переконуємося, що для всіх n , таких, що $38 \leq n < 45$, також правильна нерівність $Q_n(n^{0.8}) < 1$. Тому, враховуючи лему 2.4.4, теорема 2.4.4 правильна для всіх $n \geq 38$ і $1 < \gamma \leq n^{0.8}$.

Випадок $\alpha = 0.7$.

Дослідимо тепер випадок $\alpha = 0.7$ і $n \geq 23$. Для зручності спочатку розглянемо випадок $n \geq 26$.

Так, нерівності (2.4.21) та (2.4.23) для даного випадку теж справджуються.

Далі,

$$R_2(n, 0.7) = \frac{n^{0.65}}{\sqrt{2}} \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}n^{0.35}} \right)^{\sqrt{2}n^{0.35}} \right)^{\frac{n-1}{\sqrt{2}n^{0.35}}} < \frac{n^{0.65}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{n-1}{\sqrt{2}n^{0.35}}}.$$

Функція $\frac{n^{0.65}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{n-1}{\sqrt{2}n^{0.35}}}$ монотонно спадає для $n \geq 26$, тому

$$R_2(n, 0.7) < \frac{26^{0.65}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{26}{\sqrt{2} \cdot 26^{0.35}}} < 0.02065. \quad (2.4.29)$$

Вираз $R_4(n, 0.7) = \left(\frac{1}{2}n^{1.3}\right)^{n^{-0.3}}$ зростає для $n \leq 48$ і спадає для $n > 48$, тому

$$R_4(n, 0.7) \leq P_4(48, 0.7) < 3.89035. \quad (2.4.30)$$

І насамкінець, вираз $R_5(n, 0.7)$ спадає для $n \geq 26$, а тому

$$R_5(n, 0.7) \leq R_5(26, 0.7) < 4.57172. \quad (2.4.31)$$

Враховуючи (2.4.21), (2.4.23) та (2.4.29)-(2.4.31), для $n \geq 26$ отримаємо:

$$Q_n(n^{0.7}) < e \cdot 0.02065 \cdot 3.89035 \cdot 4.57172 < 0.99836 < 1.$$

Безпосередніми обчисленнями переконуємося, що для всіх n , таких, що $23 \leq n < 26$, також правильна нерівність $Q_n(n^{0.7}) < 1$. Тому, враховуючи лему 2.4.4, теорема 2.4.4 правильна для всіх $n \geq 23$ і $1 < \gamma \leq n^{0.7}$.

Випадок $\alpha = 0.6$.

Дослідимо тепер випадок $\alpha = 0.6$ і $n \geq 16$. Для зручності спочатку розглянемо випадок $n \geq 18$.

Так, нерівності (2.4.21) та (2.4.23) для даного випадку теж справджуються.

Далі,

$$R_2(n, 0.6) = \frac{n^{0.7}}{\sqrt{2}} \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}n^{0.3}}\right)^{\sqrt{2}n^{0.3}} \right)^{\frac{n-1}{\sqrt{2}n^{0.3}}} < \frac{n^{0.7}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{n-1}{\sqrt{2}n^{0.3}}}.$$

Функція $\frac{n^{0.6}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{n-1}{\sqrt{2}n^{0.3}}}$ монотонно спадає для $n \geq 18$, тому

$$R_2(n, 0.6) < \frac{18^{0.6}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{20}{\sqrt{2} \cdot 18^{0.3}}} < 0.03426. \quad (2.4.32)$$

Вираз $R_4(n, 0.6) = \left(\frac{1}{2}n^{1.4}\right)^{n^{-0.4}}$ зростає для $n \leq 20$ і спадає для $n > 20$, тому

$$R_4(n, 0.6) \leq P_4(20, 0.6) < 2.87557. \quad (2.4.33)$$

І насамкінець, вираз $R_5(n, 0.6)$ спадає для $n \geq 18$, а тому

$$R_5(n, 0.6) \leq R_5(18, 0.6) < 3.57431. \quad (2.4.34)$$

Враховуючи (2.4.21), (2.4.23) та (2.4.32)-(2.4.34), для $n \geq 18$ отримаємо:

$$Q_n(n^{0.6}) < e \cdot 0.03426 \cdot 2.87557 \cdot 3.57431 < 0.95719 < 1.$$

Безпосередніми обчисленнями переконуємося, що для $n = 16$ та $n = 17$ також правильна нерівність $Q_n(n^{0.6}) < 1$. Тому, враховуючи лему 2.4.4, теорема 2.4.4 правильна для всіх $n \geq 16$ і $1 < \gamma \leq n^{0.6}$.

Таким чином, нерівність (2.4.15) виконується для випадків $\alpha = 0.9$ і $n_0(\alpha) = 78$; для $\alpha = 0.8$ і $n_0(\alpha) = 38$; для $\alpha = 0.7$ і $n_0(\alpha) = 23$, а також для $\alpha = 0.6$ і $n_0(\alpha) = 16$.

Теорему 2.4.4 доведено.

Наступна теорема є деяким аналогом теореми 2.3.7 для випадку симетричних областей.

Теорема 2.4.5. [213] *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 31$, $\alpha \in \mathbb{R}$, причому*

$$0 < \alpha < \frac{2}{3} - \frac{2 \ln(1.25 \ln(n))}{3 \ln(n)}.$$

Тоді для довільного дійсного γ , такого, що $1 < \gamma \leq n^\alpha$, довільного набору точок a_k , таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k , таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, причому області B_k , $k = \overline{1, n}$, симетричні відносно одиничного кола $|w| = 1$, правильна нерівність (2.4.15). Знак рівності в цій нерівності досягається, зокрема, у випадку, коли a_k і B_k , $k = \overline{0, n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала (2.4.16).

Доведення теореми 2.4.5. Означимо числа α_k , $k = \overline{1, n}$, та α_0 так, як і у формулах (2.1.2) та (2.1.3). Як і в попередніх теоремах, нам достатньо розглянути випадок $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$. Також, врахувавши результат роботи [35], нам достатньо розглянути тільки випадок $\alpha > \frac{1}{2}$.

Згідно з лемою 2.3.3 (див. також [35]), правильна нерівність:

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Використовуючи попередню нерівність та нерівність (2.4.18), маємо

$$\begin{aligned} r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) &\leq \\ &\leq 2^{2n-2\gamma-\frac{n-\gamma}{2n}} n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\frac{1}{n-1} \right)^{\frac{n^2-n-n\gamma+\gamma}{n}} \left(\frac{1}{\gamma} \right)^{\frac{n-\gamma}{2n}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \right)^{\frac{n^2-n-n\gamma+\gamma}{n}}. \end{aligned}$$

Врахувавши також, що

$$n^{n-\frac{\gamma}{2}+\frac{2\gamma}{n}} \left(\frac{1}{n-1} \right)^{\frac{n^2-n-n\gamma+\gamma}{n}} = n^{\frac{\gamma}{2}+1+\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{n}{n-1} \right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}},$$

отримаємо нерівність

$$\begin{aligned} \frac{r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)}{I_n^0(\gamma)} &\leq 4^{-\gamma-\frac{n+\gamma}{4n}} n^{\frac{\gamma}{2}+1+\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{1}{\gamma} \right)^{\frac{n+\gamma}{2n}} \\ &\quad \left(\frac{n}{n-1} \right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \right)^{\frac{n^2-n-n\gamma+\gamma}{n}} \left(1 - \frac{2\gamma}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}} \\ &\quad \left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}} \right)^{\sqrt{2\gamma}} := G_n(\gamma). \end{aligned}$$

Оцінимо вираз $G_n(\gamma)$ при умовах теореми. Зокрема, правильна наступна оцінка: $\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}} \right)^{\sqrt{2\gamma}} 4^{-\gamma-\frac{n+\gamma}{4n}} \left(\frac{1}{\gamma} \right)^{\frac{n+\gamma}{2n}} < \frac{1}{e}$. Також правильні нерівності $\left(\frac{n}{n-1} \right)^{n-1-\gamma+\frac{\gamma}{n}} < e$ і $\left(1 - \frac{2\gamma}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}} < 1$.

Таким чином, щоб довести, що при умовах теореми $G_n(\gamma) < 1$, нам достатньо довести, що $n^{\frac{\gamma}{2}+1+\frac{\gamma}{n}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{\frac{n^2-n-n\gamma+\gamma}{n}} < 1$.

Правильні наступні перетворення.

$$\begin{aligned} n^{\frac{\gamma}{2}+1+\frac{\gamma}{n}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{\frac{n^2-n-n\gamma+\gamma}{n}} &= n^{\frac{\gamma}{2}+1+\frac{\gamma}{n}} \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{\sqrt{2\gamma}} \right)^{\frac{n^2-n-n\gamma+\gamma}{n\sqrt{2\gamma}}} < \\ &< \left(n \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{\sqrt{2}(n^2-n-n\gamma+\gamma)}{n\gamma\sqrt{\gamma}+2n\sqrt{\gamma}+2\gamma\sqrt{\gamma}}} \right)^{\frac{\gamma}{2}+1+\frac{\gamma}{n}} = \\ &= \left(n \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{n}{\gamma^{\frac{3}{2}}} \frac{\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{n}-\frac{\gamma}{n}+\frac{\gamma}{n^2}\right)}{1+\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{n}}} \right)^{\frac{\gamma}{2}+1+\frac{\gamma}{n}}. \end{aligned}$$

Для $n \geq 31$ і $n^{0.5} < \gamma < n^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\frac{\ln(1.25\ln(n))}{\ln(n)}}$ правильна нерівність $\frac{\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{n}-\frac{\gamma}{n}+\frac{\gamma}{n^2}\right)}{1+\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{n}} > 0.8$, тому отримаємо:

$$\begin{aligned} n \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{n}{\gamma^{\frac{3}{2}}} \frac{\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{n}-\frac{\gamma}{n}+\frac{\gamma}{n^2}\right)}{1+\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{n}}} &< n \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{0.8n}{\gamma^{\frac{3}{2}}}} < \\ &< n \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{n}{1.25n^{\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\frac{\ln(1.25\ln(n))}{\ln(n)}\right)}}} = n \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{1}{1.25}n^{\frac{\ln(1.25\ln(n))}{\ln(n)}}} = 1. \end{aligned}$$

Таким чином, для заданих в теоремі 2.4.5 n і γ правильна нерівність $G_n(\gamma) < 1$, а це означає, що

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq I_n^0(\gamma),$$

звідки і випливає твердження теореми. **Теорему 2.4.5 доведено.**

Зауваження. Оцінюючи вираз $\frac{\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{n}-\frac{\gamma}{n}+\frac{\gamma}{n^2}\right)}{1+\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{n}}$ для більших n , можемо отримати і уточнені оцінки для γ . Так, для $n \geq 80$ даний вираз більше одиниці, а тому, повторюючи міркування теореми 2.4.5, для таких n можна брати $1 < \gamma \leq n^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}}$ і т.д.

Висновки до розділу 2

В другому розділі дисертаційної роботи розглядається відкрита проблема про максимум добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей, які містять точки одиничного кола і степеня γ внутрішнього радіуса області, яка містить точку нуль, як у загальному випадку, так і у випадку, коли області, які містять точки одиничного кола, симетричні відносно даного кола.

Зокрема, в другому розділі отримано такі результати:

- для випадків $n = \overline{3, 8}$ наведено дійсне число γ_n таке, що для даних n і $0 < \gamma \leq \gamma_n$ знайдено максимум відповідного функціонала та вказано екстремальну конфігурацію областей, де цей максимум досягається;

- для випадку, коли n — довільне натуральне число, більше деякого фіксованого n_0 , і, залежно від початкових умов на n та області, знайдено декілька способів задання зростаючої мажоранти для γ ;

- для випадку, коли область, яка містить точку нуль, лежить в одиничному крузі, знайдено екстремальну конфігурацію для $n \geq 76$ і $1 < \gamma \leq n$;

- коли області, які містять точки одиничного кола, симетричні відносно даного кола знайдено екстремальне розбиття площини в умовах сформульованої проблеми як для випадку, коли n — деяке фіксоване число, так і для випадку, коли n більше деякого фіксованого n_0 , і для всіх згаданих випадків вказано відповідні обмеження на γ , для яких вказана конфігурація є екстремальною.

Зроблено порівняльний аналіз отриманих результатів з результатами, отриманими в роботах попередників.

Результати розділу опубліковано в роботах [26, 28, 193, 194, 199, 200, 205–207, 213].

Розділ 3

Задача про екстремальне розбиття комплексної площини з n довільними фіксованими полюсами

3.1 Деякі допоміжні твердження, які вико- ристовуються при доведенні основних результатів розділу

Однією з задач, які вивчаються в даній роботі, є така проблема:

Проблема 3.1.1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякі фіксовані точки розширеної комплексної площини. Знайти максимум виразу $\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)$, де B_k , $k = \overline{1, n}$, — довільна конфігурація областей, таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, причому $B_i \cap B_j = \emptyset$ для $1 \leq i, j \leq n$ та $i \neq j$.*

Тобто, іншими словами, потрібно знайти максимум добутку внутрішніх радіусів для довільної конфігурації n неперетинних областей, які містять відповідно n заданих фіксованих точок комплексної площини.

Проблему 3.1.1 можна розглядати також в дещо модифікованому вигляді.

Проблема 3.1.1*. *Для довільного натурального $n \geq 2$, довільного набору точок a_k , $k = \overline{1, n}$, та областей B_k , $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, причому $B_i \cap B_j = \emptyset$ для $1 \leq i, j \leq n$ та $i \neq j$, знайти*

оцінку виразу

$$T_n := \frac{\prod_{k=1}^n r(D_k, a_k)}{\left\{ \prod_{1 \leq k < l \leq n} |a_k - a_l| \right\}^{\frac{2}{n-1}}} \quad (3.1.1)$$

(тут штрих у добутку означає, що для нескінченно віддаленої точки під відповідним множником розуміємо одиницю).

Зауважимо, що вираз T_n є інваріантним відносно дробово-лінійних відображень площини. Виходячи з результатів робіт [129], [83], [121], отримуємо наступні оцінки:

$$T_2 \leq 1; \quad T_3 \leq \frac{64}{81\sqrt{3}} \approx 0.45618; \quad T_4 \leq \frac{9}{4^{8/3}} \approx 0.22323.$$

Також було висловлено припущення (див. [125]), що $T_5 \leq 4^{\frac{11}{3}} \cdot 3^{-\frac{3}{4}} \cdot 5^{-\frac{25}{6}} \approx 8.656 \cdot 10^{-2}$, і вказано конфігурацію, для якої в попередній нерівності досягається рівність.

Зауважимо, що проблему 3.1.1* можна розглядати як задачу з вільними полюсами, оскільки для кожного натурального n потрібно знайти максимум T_n по всім можливим конфігураціям точок a_k і областей B_k , які задовольняють умови даної проблеми, і знайдений максимум може не досягатися для деяких фіксованих конфігурацій точок a_k , тому проблема 3.1.1* не тотожна до проблеми 3.1.1. Тобто навіть у випадку, коли для деякого конкретного $n \geq 5$ вдасться отримати точну оцінку у проблемі 3.1.1*, це не означатиме, що для даної вказаної конфігурації n точок дана оцінка буде точною в умовах проблеми 3.1.1.

При дослідженні проблеми 3.1.1 розглядався також інший функціонал

$$P_n = \frac{\prod_{k=1}^n r(D_k, a_k)}{\prod_{k=1}^n |a_{k+1} - a_k|}, \quad a_{n+1} := a_1,$$

інваріантний щодо конформних автоморфізмів комплексної площини. Зауважимо, що для випадків $n = 2$ і $n = 3$ функціонали P_n і T_n співпа-

дають.

Для випадку $n = 4$ правильна наступна теорема:

Теорема 3.1.1. [107] Нехай a_k , $k = \overline{1, 4}$, — деякі фіксовані точки розширеної комплексної площини. Тоді для довільної конфігурації неперетинних однозв'язних областей B_k , $k = \overline{1, 4}$, таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, причому $B_i \cap B_j = \emptyset$ для $1 \leq i, j \leq 4$ та $i \neq j$, правильна нерівність:

$$\frac{\prod_{k=1}^4 r(D_k, a_k)}{\prod_{k=1}^4 |a_{k+1} - a_k|} \leq \frac{1}{4}, \quad a_5 := a_1.$$

Рівність досягається, з точністю до конформних автоморфізмів, для $a_k = \exp\left(\frac{i\pi k}{2}\right)$ і $D_k = \{z : \left|\arg z - \frac{\pi(k-1)}{2}\right| < \frac{\pi}{4}\}$, $k = 1, \dots, 4$.

Функціонал P_n є обмеженим для довільного натурального $n \geq 2$. Зокрема, правильна наступна лема.

Лема 3.1.1. Для довільного натурального $n \geq 2$ правильна нерівність

$$P_n \leq 1.$$

Доведення лема 3.1.1. Позначимо $a_{n+1} := a_1$ і $D_{n+1} := D_1$. Тоді $r(D_{n+1}, a_{n+1}) = r(D_1, a_1)$. Отримаємо

$$\prod_{k=1}^n r(D_k, a_k) = \sqrt{\prod_{k=1}^n r^2(D_k, a_k)} = \sqrt{\prod_{k=1}^n r(D_k, a_k) r(D_{k+1}, a_{k+1})}.$$

Згідно з нерівністю (1.6.1), для $k = \overline{1, n}$ будемо мати, що $r(D_k, a_k) r(D_{k+1}, a_{k+1}) \leq |a_k - a_{k+1}|^2$, а тому

$$\prod_{k=1}^n r(D_k, a_k) \leq \sqrt{\prod_{k=1}^n |a_k - a_{k+1}|^2} = \prod_{k=1}^n |a_k - a_{k+1}|.$$

Це означає, що $\prod_{k=1}^n r(D_k, a_k) \leq \prod_{k=1}^n |a_{k+1} - a_k|$, а отже і $P_n \leq 1$.

Лемі 3.1.1 доведено.

3.2. Оцінки добутків внутрішніх радіусів неперетинних областей відносно n наперед заданих точок

Нехай $n \in \mathbb{N}$ — деяке натуральне число, $n \geq 2$. Для кожної конфігурації областей B_k , $k = \overline{1, n}$, і точок a_k , таких, що $a_k \in B_k \in \overline{\mathbb{C}}$ і для довільного набору індексів $k_1; k_2; \dots; k_p$, $k_i \leq n$, $i = \overline{1, p}$ введемо наступний вектор з дійсними координатами

$$\vec{r}_{k_1; k_2; \dots; k_p} := (r(B_{k_1}, a_{k_1}); r(B_{k_2}, a_{k_2}); \dots; r(B_{k_p}, a_{k_p})). \quad (3.2.1)$$

Надалі під вектором $\vec{r}_{k_1; k_2; \dots; k_p}$ будемо розуміти саме вектор з координатами $r(B_{k_i}, a_{k_i})$, якщо не вказано іншого.

Для довільного вектора $\vec{r} = (r_1; r_2; \dots; r_n)$ норма цього вектора визначається за формулою $\|\vec{r}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n r_k^2}$.

Для введеної вище конфігурації областей B_k і точок a_k правильні такі твердження.

Лема 3.2.1. *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 2$, нехай p, k — деякі натуральні числа, такі, що $1 \leq p, k \leq n$, $p \neq k$; області B_p , B_k і точки a_p , a_k такі, що $a_p \in B_p$, $a_k \in B_k$, $B_p \cap B_k = \emptyset$, і нехай $B_p^{(k)}$ і $a_p^{(k)}$ — образи відповідно множини B_p і точки a_p при відображенні $w = \frac{1}{z - a_k}$. Тоді правильна рівність*

$$r(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}) = \frac{r(B_p, a_p)}{|a_p - a_k|^2}. \quad (3.2.2)$$

Доведення лема 3.2.1. За означенням функції Гріна маємо, що для $z \rightarrow a_p$ правильний асимптотичний розклад

$$G_{B_p}(z, a_p) = \ln \frac{1}{|z - a_p|} + \ln r(B_p, a_p) + o(1). \quad (3.2.3)$$

З іншого боку, використовуючи конформну інваріантність функції Гріна для відображення $w = \frac{1}{z-a_k}$, будемо мати:

$$\begin{aligned}
G_{B_p}(z, a_p) &= G_{B_p^{(k)}}(w, a_p^{(k)}) = \ln \frac{1}{|w - a_p^{(k)}|} + \ln r(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}) + o(1) = \\
&= \ln \frac{1}{\left| \frac{1}{z-a_k} - \frac{1}{a_p-a_k} \right|} + \ln r(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}) + o(1) = \\
&= \ln \frac{|z - a_k| |a_p - a_k|}{|z - a_p|} + \ln r(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}) + o(1) = \\
&= \ln \frac{1}{|z - a_p|} + \ln |a_p - a_k| |a_p - a_k + z - a_p| + \ln r(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}) + o(1) = \\
&= \ln \frac{1}{|z - a_p|} + \ln |a_p - a_k|^2 + \ln \left| 1 + \frac{z - a_p}{a_p - a_k} \right| + \ln r(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}) + o(1) = \\
&= \ln \frac{1}{|z - a_p|} + \ln |a_p - a_k|^2 r(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}) + o(1).
\end{aligned}$$

З написаного вище і рівності (3.2.3), отримаємо

$$r(B_p, a_p) = |a_p - a_k|^2 r(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}),$$

звідки і випливає рівність (3.2.2).

Лему 3.2.1 доведено.

Лема 3.2.2. *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 2$, $a_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок комплексної площини; $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, — деякий набір областей, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$. Тоді для кожного $k = \overline{1, n}$ правильна нерівність:*

$$r(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n r(B_p, a_p) \right)^{-\frac{1}{n-1}} \quad (3.2.4)$$

Доведення лема 3.2.2. Скористаємося ідеєю, запропонованою в роботі [115], а також при доведенні теореми 1 роботи [33]. Нехай $d(E)$ —

трансфінітний діаметр компактої множини $E \subset \mathbb{C}$ (див. означення 1.2.1, або, напр., [83, с. 286]). Нехай $B_p^{(k)}$ і $a_p^{(k)}$ — образи відповідно множини B_p і точки a_p при відображенні $w = \frac{1}{z-a_k}$. З конформної інваріантності функції Гріна випливає наступне співвідношення:

$$r(B_k, a_k) = r(B_k^{(k)}, \infty). \quad (3.2.5)$$

Згідно з теоремою 3 [83, с. 304] (див. також [65, с. 15]) внутрішній радіус області, яка містить нескінченно віддалену точку, дорівнює величині, оберненій до трансфінітного діаметра доповнення до даної області, тобто правильна рівність:

$$r(B_k^{(k)}, \infty) = \frac{1}{d(\overline{\mathbb{C}} \setminus B_k^{(k)})}. \quad (3.2.6)$$

Далі, згідно з відомою теоремою Поїа [145, с. 28], правильна наступна нерівність:

$$d(E) \geq \sqrt{\frac{\mu E}{\pi}},$$

де μE позначає міру Лебега компактої множини E . Звідси отримаємо

$$\frac{1}{d(\overline{\mathbb{C}} \setminus B_k^{(k)})} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\pi} \mu(\overline{\mathbb{C}} \setminus B_k^{(k)})}}. \quad (3.2.7)$$

Враховуючи монотонність та адитивність міри Лебега, будемо мати:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\pi} \mu(\overline{\mathbb{C}} \setminus B_k^{(k)})}} \leq \left(\frac{1}{\pi} \mu \left(\bigcup_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n \overline{B_p^{(k)}} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{\pi} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n \mu(\overline{B_p^{(k)}}) \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.2.8)$$

Враховуючи співвідношення (3.2.5)-(3.2.8), отримаємо:

$$r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{1}{\pi} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n \mu(\overline{B_p^{(k)}}) \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Далі, за теоремою про мінімізацію площі [83, с. 34], отримаємо нерівність $\mu B \geq \pi r^2(B, a)$, а тому в попередній нерівності отримаємо:

$$r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{1}{\pi} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n \mu(B_p^{(k)}) \right)^{-\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n r^2(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}) \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.2.9)$$

Зауваження 3.2.1. Нерівність (3.2.9) можна записати у вигляді $r(B_k, a_k) \leq \|\vec{r}_{1;2;\dots;k-1;k+1;\dots;n}\|^{-1}$, де координатами вектора $\vec{r}_{1;2;\dots;k-1;k+1;\dots;n}$ є величини $r(B_p^{(k)}, a_p^{(k)})$.

Далі, за нерівністю Коші, отримаємо:

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n r^2(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}) \geq (n-1) \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n r(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}) \right)^{\frac{2}{n-1}},$$

а звідси будемо мати

$$\left(\sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n r^2(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}) \right)^{-\frac{1}{2}} \leq (n-1)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n r(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}) \right)^{-\frac{1}{n-1}}. \quad (3.2.10)$$

Далі, використовуючи (3.2.9), (3.2.10) та (3.2.2), отримаємо

$$\begin{aligned} r(B_k, a_k) &\leq \\ &\leq (n-1)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{|a_1 - a_k|^2 |a_2 - a_k|^2 \dots |a_{k-1} - a_k|^2 |a_{k+1} - a_k|^2 \dots |a_n - a_k|^2}{r(B_1, a_1) r(B_2, a_2) \dots r(B_{k-1}, a_{k-1}) r(B_{k+1}, a_{k+1}) \dots r(B_n, a_n)} \right]^{\frac{1}{n-1}} = \\ &= (n-1)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n r(B_p, a_p) \right)^{-\frac{1}{n-1}}, \end{aligned}$$

що й доводить нерівність (3.2.4).

Лему 3.2.2 доведено.

Правильна наступна теорема.

Теорема 3.2.1. [53, 195] Нехай $n \in \mathbb{N}$ — деяке натуральне число, $n \geq 2$, $a_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$ — деякий набір фіксованих точок комплексної площини. Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \mathbb{C}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$ правильна нерівність:

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}}. \quad (3.2.11)$$

Доведення теореми 3.2.1.

Виходячи з леми 3.2.2, отримаємо наступні нерівності:

$$r(B_1, a_1) \leq (n-1)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{|a_2 - a_1|^2 |a_3 - a_1|^2 \dots |a_n - a_1|^2}{r(B_2, a_2) r(B_3, a_3) \dots r(B_n, a_n)} \right]^{\frac{1}{n-1}},$$

$$r(B_2, a_2) \leq (n-1)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{|a_1 - a_2|^2 |a_3 - a_2|^2 \dots |a_n - a_2|^2}{r(B_1, a_1) r(B_3, a_3) \dots r(B_n, a_n)} \right]^{\frac{1}{n-1}},$$

...

$$r(B_p, a_p) \leq (n-1)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{|a_1 - a_p|^2 |a_2 - a_p|^2 \dots |a_{p-1} - a_p|^2 |a_{p+1} - a_p|^2 \dots |a_n - a_p|^2}{r(B_1, a_1) r(B_2, a_2) \dots r(B_{p-1}, a_{p-1}) r(B_{p+1}, a_{p+1}) \dots r(B_n, a_n)} \right]^{\frac{1}{n-1}},$$

...

$$r(B_n, a_n) \leq (n-1)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{|a_1 - a_n|^2 |a_2 - a_n|^2 \dots |a_{n-1} - a_n|^2}{r(B_1, a_1) r(B_2, a_2) \dots r(B_{n-1}, a_{n-1})} \right]^{\frac{1}{n-1}}.$$

Перемноживши отримані нерівності, будемо мати

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) &\leq \prod_{k=1}^n \left((n-1)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n r(B_p, a_p) \right)^{-\frac{1}{n-1}} \right) = \\ &= (n-1)^{-\frac{n}{2}} \prod_{k=1}^n \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}} \prod_{k=1}^n \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n r(B_p, a_p) \right)^{-\frac{1}{n-1}}. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Зауважимо, що

$$\prod_{k=1}^n \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}} = \left(\prod_{\substack{p,k=1 \\ p \neq k}}^n |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}} = \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |a_p - a_k| \right)^{\frac{4}{n-1}},$$

а також що

$$\prod_{k=1}^n \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n r(B_p, a_p) \right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\prod_{k=1}^n r^{n-1}(B_k, a_k) \right)^{\frac{1}{n-1}} = \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k).$$

З написаного вище та з нерівності (3.2.12) отримаємо

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{n}{2}} \frac{\left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |a_p - a_k| \right)^{\frac{4}{n-1}}}{\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)},$$

звідки будемо мати

$$\left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^2 \leq (n-1)^{-\frac{n}{2}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |a_p - a_k| \right)^{\frac{4}{n-1}}.$$

Добуваючи корінь з обох частин попередньої нерівності, отримаємо:

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}},$$

що й доводить нерівність (3.2.11).

Теорему 3.2.1 доведено.

Доведена теорема дозволяє провести оцінку виразу T_n для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Правильний наступний результат:

Наслідок 3.2.1. *Нехай для довільного натурального $n \geq 2$ області B_k і точки a_k , $k = \overline{1, n}$, задовольняють всім умовам теореми 3.2.1. Тоді правильна нерівність:*

$$T_n \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}}. \quad (3.2.13)$$

Порівняємо цю оцінку з точними оцінками, отриманими в роботах [129], [83], [121]. Так, для $n = 2$ за формулою (3.2.13) отримуємо $T_2 \leq 1$, що збігається з точною оцінкою, отриманою в роботі [129]. Для $n = 3$ отримуємо $T_3 \leq 2^{-\frac{3}{4}} \approx 0.5947$, в той час як отримане в роботі [83] точне значення $T_3 = \frac{64}{81\sqrt{3}} \leq 0.4562$; для даного випадку відносна похибка $\delta_3 \approx 30\%$; для $n = 4$ отримуємо $T_4 \leq \frac{1}{3} \approx 0.3334$, в той час як отримане в роботі [121] точне значення $T_4 = \frac{9}{4^{8/3}} \leq 0.2233$ (відносна похибка $\delta_4 \approx 49\%$).

Також було висловлено припущення (див. [125]), що $T_5 \leq 4^{\frac{11}{3}} \cdot 3^{-\frac{3}{4}} \cdot 5^{-\frac{25}{6}} = 8.656 \cdot 10^{-2}$, причому рівність виконується, зокрема, коли $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = \{1, e^{-\frac{2\pi i}{3}}, 0, e^{\frac{2\pi i}{3}}, \infty\}$, а області B_k , $k = \overline{1; 5}$ є відповідно круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(z)dz^2 = -\frac{z^6 + 7z^2 + 1}{z^2(z^3 - 1)^2}dz^2.$$

Згідно з нерівністю (3.2.13) отримуємо $T_5 \leq 4^{-\frac{5}{4}} \approx 0.1769$, тобто для цього випадку відносна похибка $\delta_5 \approx 104\%$.

Для зручності величину $d_n(\{a_p\}_{p=1}^n) := \left(\prod_{1 \leq k < l \leq n} |a_k - a_l| \right)^{\frac{2}{n-1}}$ будемо називати n -м діаметром системи точок $\{a_p\}_{p=1}^n$, $a_p \in \mathbb{C}$.

Теорему 3.2.1, використовуючи введене поняття n -го діаметра системи точок, можна записати в дещо іншій формі.

Теорема 3.2.1*. *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 2$, $a_k \in \mathbb{C}$, $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$ — деякий набір відповідно точок і областей комплексної площини, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$. Тоді*

правильна нерівність:

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \cdot d_n(\{a_p\}_{p=1}^n).$$

Теорему 3.2.1 можна також сформулювати для випадку однозв'язних областей і конформних радіусів.

Теорема 3.2.1.** *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 2$, $a_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок комплексної площини. Тоді для довільного набору функцій f_k , $k = \overline{1, n}$, регулярних і однолистих в крузі $|z| < 1$, для яких $f_k(0) = a_k$, причому $f_i(z_1) \neq f_j(z_2)$ для довільних натуральних $1 \leq i, j \leq n$ та $i \neq j$ та довільних $z_1, z_2 \in U$, правильна нерівність:*

$$\prod_{k=1}^n |f'_k(0)| \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}}. \quad (3.2.14)$$

У випадку, коли одна з точок a_k є нескінченно віддаленою, тоді в нерівності (3.2.11) всі множники в правій частині нерівності, які містять дану точку, перетворюються на одиницю. Зокрема, правильна наступна теорема.

Теорема 3.2.2. [195] *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 2$, a_k , $k = \overline{1, n}$ — деякий набір фіксованих точок розширеної комплексної площини, причому $a_n = \infty$. Тоді для довільного набору областей B_k таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, правильна нерівність:*

$$r(B_n, \infty) \prod_{k=1}^{n-1} r(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n-1} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}}. \quad (3.2.15)$$

Доведення теореми 3.2.2. Як і в теоремі 3.2.1, зафіксуємо деяке натуральне k таке, що $1 \leq k \leq n-1$. Нехай $B_p^{(k)}$ і $a_p^{(k)}$ — образи відповідно множини B_p і точки a_p при відображенні $w = \frac{1}{z-a_k}$. Провівши аналогічні

перетворення, отримаємо, як і в (3.2.10), що

$$r(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n r(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}) \right)^{-\frac{1}{n-1}}. \quad (3.2.16)$$

Доведемо, що $r(B_n^{(k)}, a_n^{(k)}) = r(B_n^{(k)}, 0) = r(B_n, \infty)$.

Згідно з означенням функції Гріна

$$G_{B_n}(z, \infty) = \ln |z| + \ln r(B_n, \infty) + o(1), z \rightarrow \infty.$$

З іншого боку, використовуючи конформну інваріантність функції Гріна для відображення $w = \frac{1}{z-a_k}$, будемо мати:

$$\begin{aligned} G_{B_n}(z, \infty) &= G_{B_n^{(k)}}(w, 0) = \ln \frac{1}{|w|} + \ln r(B_n^{(k)}, 0) + o(1) = \\ &= \ln \frac{1}{\left| \frac{1}{z-a_k} \right|} + \ln r(B_n^{(k)}, 0) + o(1) = \ln |z - a_k| + \ln r(B_n^{(k)}, 0) + o(1) = \\ &= \ln |z| + \ln \left| 1 - \frac{a_k}{z} \right| + \ln r(B_n^{(k)}, 0) + o(1) = \\ &= \ln |z| + \ln r(B_n^{(k)}, 0) + o(1), \end{aligned}$$

а звідси і випливає рівність $r(B_n^{(k)}, 0) = r(B_n, \infty)$.

Для $1 \leq p \leq n-1, p \neq k$, провівши перетворення, як і в теоремі 3.2.1, отримаємо рівність

$$r(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}) = \frac{r(B_p, a_p)}{|a_p - a_k|^2}.$$

Таким чином, з (3.2.16) для $1 \leq k \leq n-1$, отримаємо:

$$r(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{n-1} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n r(B_p, a_p) \right)^{-\frac{1}{n-1}}. \quad (3.2.17)$$

Якщо ж $k = n$, то правильна рівність:

$$r(B_n, \infty) = \frac{1}{d(\overline{\mathbb{C}} \setminus B_n)},$$

а далі, провівши міркування, аналогічні до проведених в лемі 3.2.2, отримаємо

$$r(B_n, \infty) \leq \left(\sum_{p=1}^{n-1} r^2(B_p, a_p) \right)^{-\frac{1}{2}},$$

а звідси

$$r(B_n, \infty) \leq (n-1)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{p=1}^{n-1} r(B_p, a_p) \right)^{-\frac{1}{n-1}}. \quad (3.2.18)$$

Аналогічно до теореми 3.2.1, враховуючи (3.2.17) і (3.2.18), отримаємо:

$$r(B_n, \infty) \prod_{k=1}^{n-1} r(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{n}{2}} \frac{\left(\prod_{\substack{p,k=1 \\ p \neq k}}^{n-1} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}}}{r(B_n, \infty) \prod_{k=1}^{n-1} r(B_k, a_k)}.$$

Звідси випливає наступна нерівність:

$$\left(r(B_n, \infty) \prod_{k=1}^{n-1} r(B_k, a_k) \right)^2 \leq (n-1)^{-\frac{n}{2}} \left(\prod_{\substack{p,k=1 \\ p \neq k}}^{n-1} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}}.$$

А звідси будемо мати:

$$r(B_n, \infty) \prod_{k=1}^{n-1} r(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n-1} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}},$$

що й доводить нерівність (3.2.15).

Теорему 3.2.2 доведено.

Теорему 3.2.2 теж можна записати в дещо іншій формі.

Теорема 3.2.2*. *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 2$, B_k , a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір відповідно областей і точок розширеної комплексної площини, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$ і*

$a_n = \infty$. Тоді правильна нерівність

$$r(B_n, \infty) \prod_{k=1}^{n-1} r(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \cdot d_{n-1}(\{a_p\}_{p=1}^{n-1}).$$

Для випадку однозв'язних областей теорему 3.2.2 можна сформулювати так:

Теорема 3.2.2.** *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 2$, a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок розширеної комплексної площини, причому $a_n = \infty$. Тоді для довільного набору функцій f_k , $k = \overline{1, n}$, де для $k = \overline{1, n-1}$ функції f_k регулярні і однолисті в крузі $|z| < 1$, причому $f_k(0) = a_k$, а функція f_n — регулярна і однолиста в області $|z| > 1$, за винятком нескінченно віддаленої точки, причому $f_n(\infty) = \infty$, крім того, $f_i(z_1) \neq f_j(z_2)$ для довільних натуральних $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ та довільних z_1, z_2 , правильна нерівність*

$$\frac{1}{|f'_n(\infty)|} \prod_{k=1}^{n-1} |f'_k(0)| \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n-1} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}}. \quad (3.2.19)$$

3.3. Застосування теореми 3.2.1 для отримання оцінок в інших екстремальних задачах геометричної теорії функцій

Отримана в нерівності (3.2.11) оцінка може бути застосована і для оцінки функціонала

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k), \quad (3.3.1)$$

де $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0; n]$, $a_0 = 0$, $|a_1| = \dots = |a_n| = 1$, $a_k \in B_k \in \overline{\mathbb{C}}$, де $B_i \cap B_j = \emptyset$ для $0 \leq i, j \leq n$ та $i \neq j$. Зауважимо також, що в роботі [33] було дано точну оцінку даного функціонала для випадку $n = 2$ і $\gamma \in (0; 2]$, тому достатньо розглядати випадок $n \geq 3$. Правильна така теорема.

Теорема 3.3.1. [195] Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $n \geq 3$ і $0 < \gamma \leq n$. Тоді для довільного набору точок a_k , таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k , таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, у випадку $n = 2m$ для деякого $m \in \mathbb{N}$ правильна нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq 2^{n-\gamma} n^{-\frac{\gamma}{2}} (n-1)^{-\frac{n-\gamma}{4}} \left(\prod_{k=1}^{m-1} \sin \frac{k\pi}{n} \right)^{\frac{2(n-\gamma)}{n-1}}; \quad (3.3.2)$$

якщо ж $n = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}$, то нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq 2^{n-\gamma} n^{-\frac{\gamma}{2}} (n-1)^{-\frac{n-\gamma}{4}} \left(\prod_{k=1}^m \sin \frac{k\pi}{n} \right)^{\frac{2(n-\gamma)}{n-1}}. \quad (3.3.3)$$

Доведення теореми 3.3.1. Згідно з теоремою 1 роботи [33], правильна нерівність:

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{\frac{n-\gamma}{n}}. \quad (3.3.4)$$

Далі, згідно з нерівністю (3.2.11), маємо

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}}. \quad (3.3.5)$$

Припустимо, для конкретності, що

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \dots < \arg a_n < 2\pi.$$

Позначимо

$$\begin{aligned} \alpha_1 &:= \frac{1}{\pi}(\arg a_2 - \arg a_1), & \alpha_2 &:= \frac{1}{\pi}(\arg a_3 - \arg a_2), \dots \\ \alpha_n &:= \frac{1}{\pi}(2\pi - \arg a_n). \end{aligned}$$

Звідси

$$\prod_{1 \leq p < k \leq n} |a_p - a_k| = \prod_{1 \leq p < k \leq n} 2 \sin \frac{\pi(\alpha_p + \dots + \alpha_{k-1})}{2}. \quad (3.3.6)$$

Врахувавши, що $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 2$, і дослідивши добуток, записаний в правій частині нерівності (3.3.6), отримаємо, що максимум даного виразу досягається тоді, коли всі α_k рівні між собою, а тому для $n = 2m$ отримаємо

$$\prod_{1 \leq p < k \leq n} \left(2 \sin \frac{\pi(\alpha_p + \dots + \alpha_{k-1})}{2} \right) \leq 2^{\frac{n^2-n}{2}} \left(\prod_{k=1}^{m-1} \sin \frac{k\pi}{n} \right)^n.$$

Підставивши отриману нерівність в (3.3.5), будемо мати:

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq 2^n (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{k=1}^{m-1} \sin \frac{k\pi}{n} \right)^{\frac{2n}{n-1}}. \quad (3.3.7)$$

Далі, використовуючи (3.3.7) і (3.3.4), отримаємо нерівність (3.3.2).

Якщо ж $n = 2m + 1$, то отримаємо

$$\prod_{1 \leq p < k \leq n} \left(2 \sin \frac{\pi(\alpha_p + \dots + \alpha_{k-1})}{2} \right) \leq 2^{\frac{n^2-n}{2}} \left(\prod_{k=1}^m \sin \frac{k\pi}{n} \right)^n,$$

звідки будемо мати

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq 2^n (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{k=1}^m \sin \frac{k\pi}{n} \right)^{\frac{2n}{n-1}}, \quad (3.3.8)$$

а далі, підставивши отриману нерівність в (3.3.5) і (3.3.6), і отримаємо (3.3.3).

Теорему 3.3.1 доведено.

Зауважимо, що для $\gamma > n$ в загальному випадку функціонал (3.3.1) необмежений, однак для деяких підкласів множини допустимих конфігурацій областей функціонал (3.3.1) обмежений для довільного $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Правильна така теорема.

Теорема 3.3.2. [195] Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ і $\varepsilon > 0$. Тоді для довільного набору точок a_k , таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k , таких, що

$a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, причому $\|\vec{r}_{1;2;\dots;n}\| \geq \varepsilon$, де $\vec{r}_{1;2;\dots;n}$ див. (3.2.1)
а) у випадку $n = 2$ правильна нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^2 r(B_k, a_k) \leq 4 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^\gamma;$$

б) у випадку $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq 2^n \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^\gamma (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{k=1}^{m-1} \sin \frac{k\pi}{n}\right)^{\frac{2n}{n-1}};$$

в) якщо ж $n = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}$, то нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq 2^n \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^\gamma (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{k=1}^m \sin \frac{k\pi}{n}\right)^{\frac{2n}{n-1}}.$$

Доведення теореми 3.3.2. Правильна лема.

Лема 3.3.1. Нехай області B_k і точки a_k , $k = \overline{0, n}$ задовольняють всім умовам теореми 3.2.2. Тоді правильна нерівність:

$$r(B_0, 0) \leq \frac{1}{\varepsilon}. \quad (3.3.9)$$

Доведення леми 3.3.1. Розглянемо відображення $w = \frac{1}{z}$. Враховуючи (3.2.2), отримаємо, що $r(B_k^{(0)}, a_k^{(0)}) = r(B_k, a_k)$. Тоді, повторюючи міркування леми 3.2.2, згідно з нерівністю (3.2.9), отримаємо:

$$r(B_0, 0) \leq \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^n r^2(B_k^{(0)}, a_k^{(0)})}} = \|\vec{r}_{1;2;\dots;n}\|^{-1}.$$

Враховуючи те, що $\|\vec{r}_{1;2;\dots;n}\| \geq \varepsilon$, будемо мати

$$r(B_0, 0) \leq \frac{1}{\varepsilon},$$

що і доводить нерівність (3.3.9).

Лему 3.3.1 доведено.

Використовуючи Лему 3.3.1, отримаємо

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^\gamma \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k). \quad (3.3.10)$$

Далі, для випадку $n = 2$, за теоремою Лаврентьєва [129], будемо мати, що $\prod_{k=1}^2 r(B_k, a_k) \leq 4$, а тому в (3.3.10) отримаємо

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^2 r(B_k, a_k) \leq 4 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^\gamma.$$

Для випадку $n = 2m$, $m \geq 2$, враховуючи (3.3.7), отримаємо

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq 2^n \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^\gamma (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{k=1}^{m-1} \sin \frac{k\pi}{n}\right)^{\frac{2n}{n-1}}.$$

Якщо ж $n = 2m + 1$, то, підставивши (3.3.8) в (3.3.10), отримаємо

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq 2^n \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^\gamma (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{k=1}^m \sin \frac{k\pi}{n}\right)^{\frac{2n}{n-1}}.$$

Теорему 3.3.2 доведено.

Наслідок 3.3.1. *Нехай області B_k і точки a_k , $k = \overline{0, n}$, задовольняють всім умовам теореми 3.3.2, причому $\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \geq \varepsilon$. Тоді у випадку $n = 2$ правильна нерівність*

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^2 r(B_k, a_k) \leq 4 \left(\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\right)^\gamma;$$

у випадку $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, правильна нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq 2^n \left(\frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon} \sqrt[n]{n}}\right)^\gamma (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{k=1}^{m-1} \sin \frac{k\pi}{n}\right)^{\frac{2n}{n-1}};$$

якщо ж $n = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}$, тоді нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq 2^n \left(\frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon} \sqrt{n}} \right)^\gamma (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{k=1}^m \sin \frac{k\pi}{n} \right)^{\frac{2n}{n-1}}.$$

Для доведення даного наслідку достатньо зауважити, що за нерівністю між середнім геометричним і середнім квадратичним будемо мати, що

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon} \sqrt{n}} \sqrt{\sum_{k=1}^n r^2(B_k, a_k)},$$

звідки випливає, що $\|\vec{r}_{1;2;\dots;n}\| \geq \sqrt[n]{\varepsilon} \sqrt{n}$, а далі використати Лему 3.3.1 і нерівності (3.3.7) та (3.3.8).

Отримані оцінки можна застосувати і при дослідженні наступної проблеми.

Проблема 3.3.1. Довести, що максимум функціонала

$$J_n(\gamma) = [r(B_0, 0) r(B_{n+1}, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k), \quad (3.3.11)$$

де $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n, B_{n+1}$, ($n \geq 2$) — попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \infty$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $r(B_j, a_j)$ — внутрішній радіус області B_j в точці a_j ($a_j \in B_j$), $j = \overline{0, n+1}$, досягається для деякої конфігурації областей, які мають n -кратну симетрію.

У даній роботі розглянемо також дещо загальніший випадок, коли на точки a_k , $k = \overline{1, n}$, не накладається умова $|a_k| = 1$.

Правильні такі леми.

Лема 3.3.2. [188] Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Тоді для будь-якої фіксованої системи різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ і для довільного набору попарно неперетинних областей $B_0, B_{n+1}, \{B_k\}_{k=1}^n$ таких, що

$a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{n+1} = \infty \in B_{n+1} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, причому існує $\varepsilon > 0$ таке, що $r(B_k, a_k) \geq \varepsilon$ для $\forall k = \overline{1, n}$. Тоді правильна нерівність

$$r(B_0, 0) \leq \varepsilon^{-\frac{n}{n+1}} \frac{\left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{2}{n+1}}}{(n+1)^{\frac{1}{2}} (r(B_{n+1}, \infty))^{\frac{1}{n+1}}}. \quad (3.3.12)$$

Доведення лема 3.3.2. Розглянемо відображення $w = \frac{1}{z}$, і нехай $B^+ = \{z : \frac{1}{z} \in B\}$.

Тоді, повторюючи міркування лема 3.2.2, згідно з нерівністю (3.2.9), отримаємо

$$r(B_0, 0) \leq \frac{1}{\left[\sum_{k=1}^{n+1} r^2(B_k^+, a_k^+) \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.3.13)$$

Знайдемо величини $r(B_k^+, a_k^+)$ для $k = \overline{1, n}$. Відзначимо, що $g_{B_k}(z, a_k) = -\ln|z - a_k| + \ln r(B_k, a_k) + o(1)$, $o(1) \Rightarrow 0$, $z \rightarrow a_k$. Оскільки функція Гріна інваріантна при конформному та однолистому відображенні, маємо

$$g_{B_k}(z, a_k) = g_{B_k^+}(w^+, a_k^+), \quad w^+ = \frac{1}{z}.$$

Звідси,

$$\begin{aligned} g_{B_k^+}(w^+, a_k^+) &= g_{B_k^+}\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{a_k}\right) = \ln \frac{1}{\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{a_k}\right|} + \ln r(B_k^+, a_k^+) + o(1) = \\ &= \ln \frac{|za_k|}{|z - a_k|} + \ln r(B_k^+, a_k^+) + o(1) = \\ &= \ln \frac{1}{|z - a_k|} + \ln |a_k|^2 + \ln r(B_k^+, a_k^+) + \ln \frac{|z|}{|a_k|} + o(1). \end{aligned}$$

Оскільки для $z \rightarrow a_k$ вираз $\ln \frac{|z|}{|a_k|} \rightarrow 0$, отримуємо

$$g_{B_k^+}(w^+, a_k^+) = \ln \frac{1}{|z - a_k|} + \ln |a_k|^2 r(B_k^+, a_k^+) + o(1).$$

Таким чином,

$$r(B_k^+, a_k^+) = \frac{r(B_k, a_k)}{|a_k|^2}. \quad (3.3.14)$$

Знайдемо тепер $r(B_{n+1}^+, a_{n+1}^+)$. Оскільки $a_{n+1} = \infty$, то з інваріантності функції Гріна отримаємо

$$\begin{aligned} g_{B_{n+1}}(z, \infty) &= g_{B_{n+1}^+}(w, 0) = \ln \frac{1}{|w|} + \ln r(B_{n+1}^+, 0) + o(1) = \\ &= \ln |z| + \ln r(B_{n+1}^+, 0) + o(1), \end{aligned}$$

а звідси і випливає рівність

$$r(B_{n+1}^+, 0) = r(B_{n+1}, \infty). \quad (3.3.15)$$

Підставивши рівності (3.3.14) і (3.3.15) в нерівність (3.3.13), отримаємо:

$$r(B_0, 0) \leq \left[r^2(B_{n+1}, \infty) + \sum_{k=1}^n \frac{r^2(B_k, a_k)}{|a_k|^4} \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

За нерівністю Коші отримаємо

$$\begin{aligned} r^2(B_{n+1}, \infty) + \sum_{k=1}^n \frac{r^2(B_k, a_k)}{|a_k|^4} &\geq \\ &\geq (n+1) \left(r(B_{n+1}, \infty) \prod_{k=1}^n \frac{r(B_k, a_k)}{|a_k|^2} \right)^{\frac{2}{n+1}}, \end{aligned}$$

а отже

$$r(B_0, 0) \leq \left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{-\frac{1}{n+1}} \frac{\left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{2}{n+1}}}{(n+1)^{\frac{1}{2}} (r(B_{n+1}, \infty))^{\frac{1}{n+1}}}.$$

Врахувавши, що, згідно з умовою теореми для $k = \overline{1, n}$ правильна нерівність $r(B_k, a_k) \geq \varepsilon$, отримаємо $\left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{-\frac{1}{n+1}} \leq \varepsilon^{-\frac{n}{n+1}}$. Підставивши даний вираз в попередню нерівність, і отримаємо нерівність (3.3.12).

Лему 3.3.2 доведено.

Знайдемо тепер оцінку для виразу $r(B_{n+1}, \infty)$. Правильна лема.

Лема 3.3.3. [188] Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Тоді для будь-якої фіксованої системи різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ і для довільного набору попарно неперетинних областей $B_0, B_{n+1}, \{B_k\}_{k=1}^n$ таких, що $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{n+1} = \infty \in B_{n+1} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, причому існує $\varepsilon > 0$ таке, що $r(B_k, a_k) \geq \varepsilon$ для $\forall k = \overline{1, n}$. Тоді правильна нерівність

$$r(B_{n+1}, \infty) \leq \frac{\varepsilon^{-\frac{n}{n+1}}}{(n+1)^{\frac{1}{2}} (r(B_0, 0))^{\frac{1}{n+1}}}. \quad (3.3.16)$$

Доведення лема 3.3.3. Провівши з величиною $r(B_{n+1}, \infty)$ перетворення, аналогічні до проведених в лемі 3.2.2 та теоремі 3.2.2, отримаємо нерівність

$$r(B_{n+1}, \infty) \leq \frac{1}{\left[\sum_{k=0}^n r^2(B_k, a_k) \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Далі, за нерівністю Коші, отримаємо

$$\sum_{k=0}^n r^2(B_k, a_k) \geq (n+1) \left[\prod_{k=0}^n r(B_k, a_k) \right]^{\frac{2}{n+1}},$$

а тому

$$r(B_{n+1}, \infty) \leq \frac{\left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{-\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^{\frac{1}{2}} (r(B_0, 0))^{\frac{1}{n+1}}}.$$

Відзначимо, що, згідно з умовою теореми для $k = \overline{1, n}$ правильна нерівність $r(B_k, a_k) \geq \varepsilon$, а тому $\left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{-\frac{1}{n+1}} \leq \varepsilon^{-\frac{n}{n+1}}$. Підставивши даний вираз в попередню нерівність, і отримаємо нерівність (3.3.16).

Лему 3.3.3 доведено.

Використовуючи лема 3.3.2 і 3.3.3, отримаємо таку теорему.

Теорема 3.3.3. [188] Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Тоді для будь-якої фіксованої системи різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ і для довільного набору попарно неперетинних областей $B_0, B_{n+1}, \{B_k\}_{k=1}^n$ таких, що $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{n+1} = \infty \in B_{n+1} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, причому існує $\varepsilon > 0$ таке, що $r(B_k, a_k) \geq \varepsilon$ для $\forall k = \overline{1, n}$, справедлива нерівність

$$J_n(\gamma) \leq \varepsilon^{-\frac{2n\gamma}{n+2}} (n+1)^{-\frac{\gamma(n+1)}{n+2}} \left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{2\gamma}{n+2}} \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k), \quad (3.3.17)$$

де $J_n(\gamma)$ — див. (3.3.11).

Доведення теореми 3.3.3. Перемноживши нерівності (3.3.12) і (3.3.16), отримаємо наступний ланцюжок нерівностей:

$$\begin{aligned} r(B_0, 0) r(B_{n+1}, \infty) &\leq \varepsilon^{-\frac{2n}{n+1}} \frac{\left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{2}{n+1}}}{(n+1) (r(B_0, 0) r(B_{n+1}, \infty))^{\frac{1}{n+1}}}; \\ (r(B_0, 0) r(B_{n+1}, \infty))^{\frac{n+2}{n+1}} &\leq \varepsilon^{-\frac{2n}{n+1}} \frac{\left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{2}{n+1}}}{n+1}; \\ r(B_0, 0) r(B_{n+1}, \infty) &\leq \varepsilon^{-\frac{2n}{n+2}} (n+1)^{-\frac{n+1}{n+2}} \left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{2}{n+2}}, \end{aligned}$$

а звідси

$$\begin{aligned} [r(B_0, 0) r(B_{n+1}, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) &\leq \\ &\leq \varepsilon^{-\frac{2n\gamma}{n+2}} (n+1)^{-\frac{\gamma(n+1)}{n+2}} \left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{2\gamma}{n+2}} \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k), \end{aligned}$$

що й доводить нерівність (3.3.17).

Теорему 3.3.3 доведено.

Зауваження 3.3.1. Зауважимо, що умова $r(B_k, a_k) \geq \varepsilon$ для $k = \overline{1, n}$ є суттєвою, оскільки вона дозволила отримати оцінку $r(B_0, 0)$ і $r(B_{n+1}, \infty)$ без жодних додаткових обмежень на γ .

Теорема 3.3.3 має досить загальний характер, однак якщо точки a_k задовольняють певним умовам, то можна записати більш конкретні оцінки. В наступній теоремі розглядається випадок, коли всі точки a_k , $k = \overline{1, n}$, належать одиничному колу. Зокрема, правильний наступний результат.

Теорема 3.3.4. [188] Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Тоді для будь-якої фіксованої системи різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=0}^{n+1} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ таких, що $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \infty$, $|a_k| = 1$ для $k = \overline{1, n}$, і набору будь-яких областей, що взаємно не перетинаються, $B_0, B_{n+1}, \{B_k\}_{k=1}^n$, таких, що $a_0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_{n+1} \in B_{n+1} \subset \overline{\mathbb{C}}$, і $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, причому існує $\varepsilon > 0$ таке, що $r(B_k, a_k) \geq \varepsilon$ для $\forall k = \overline{1, n}$, і якщо $n = 2m$ для деякого $m \in \mathbb{N}$, справедлива нерівність

$$J_n(\gamma) \leq 2^n \varepsilon^{-\frac{2n\gamma}{n+2}} (n+1)^{-\frac{\gamma(n+1)}{n+2}} (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{k=1}^{m-1} \sin \frac{k\pi}{n} \right)^{\frac{2n}{n-1}}; \quad (3.3.18)$$

якщо ж $n = 2m + 1$, то нерівність

$$J_n(\gamma) \leq 2^n \varepsilon^{-\frac{2n\gamma}{n+2}} (n+1)^{-\frac{\gamma(n+1)}{n+2}} (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{k=1}^m \sin \frac{k\pi}{n} \right)^{\frac{2n}{n-1}}. \quad (3.3.19)$$

Доведення теореми 3.3.4. Оскільки описана в умові даної теореми конфігурація областей B_k і точок a_k задовольняє всім умовам теореми 3.3.3, то для неї правильна нерівність (3.3.17). Зауважимо, що, оскільки $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, то

$$\left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{2\gamma}{n+2}} = 1. \quad (3.3.20)$$

Оцінимо тепер вираз $\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)$. Згідно нерівністю (3.2.11), пра-

вильна нерівність

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}}. \quad (3.3.21)$$

Нехай, для конкретності

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \dots < \arg a_n < 2\pi.$$

Позначимо

$$\alpha_1 := \frac{1}{\pi}(\arg a_2 - \arg a_1), \alpha_2 := \frac{1}{\pi}(\arg a_3 - \arg a_2) \dots \alpha_n := \frac{1}{\pi}(2\pi - \arg a_n).$$

Провівши міркування, аналогічні до проведених в теоремі 3.3.1, для випадку $n = 2m$ отримаємо

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq 2^n (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{k=1}^{m-1} \sin \frac{k\pi}{n} \right)^{\frac{2n}{n-1}}. \quad (3.3.22)$$

Далі, підставивши нерівності (3.3.22) і (3.3.20) в нерівність (3.3.17), отримаємо нерівність (3.3.18).

Якщо ж $n = 2m + 1$, то отримаємо

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq 2^n (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{k=1}^m \sin \frac{k\pi}{n} \right)^{\frac{2n}{n-1}}. \quad (3.3.23)$$

Підставивши нерівності (3.3.23) і (3.3.20) в нерівність (3.3.17), отримаємо нерівність (3.3.19).

Теорему 3.3.4 доведено.

В наступній теоремі розглядається випадок, коли всі точки a_k , $k = \overline{1, n}$, належать деякій прямій, яка паралельна уявній осі.

Теорема 3.3.5. [188] *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Тоді для будь-якої фіксованої системи різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, такої, що $\{a_k\} = 1 + iy_k$, де y_k , $k = \overline{1, n}$ — деякі дійсні числа, і набору будь-яких*

областей, що взаємно не перетинаються, $B_0, B_{n+1}, \{B_k\}_{k=1}^n$, таких, що $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}, a_{n+1} = \infty \in B_{n+1} \subset \overline{\mathbb{C}}, a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}, k = \overline{1, n}$, причому існує $\varepsilon > 0$ таке, що $r(B_k, a_k) \geq \varepsilon$ для довільного $k = \overline{1, n}$, справедлива нерівність

$$J_n(\gamma) \leq \varepsilon^{-\frac{2n\gamma}{n+2}} (n+1)^{-\frac{\gamma(n+1)}{n+2}} (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{k=1}^n (1+y_k^2) \right)^{\frac{\gamma}{n+2}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |y_p - y_k| \right)^{\frac{2}{n-1}}. \quad (3.3.24)$$

Доведення теореми 3.3.5. Для початку зауважимо, що для $k = \overline{1, n}$ виконується рівність $|a_k| = \sqrt{1+y_k^2}$, а тому

$$\left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{2\gamma}{n+2}} = \left(\prod_{k=1}^n (1+y_k^2) \right)^{\frac{\gamma}{n+2}}. \quad (3.3.25)$$

Далі, врахувавши, що всі точки $\{a_k\}, k = \overline{1, n}$, належать одній прямій, то з нерівності (3.2.11) отримаємо

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |y_p - y_k| \right)^{\frac{2}{n-1}}. \quad (3.3.26)$$

Підставивши вирази (3.3.25) і (3.3.26) в нерівність (3.3.17), отримаємо нерівність (3.3.24).

Теорему 3.3.5 доведено.

Зауваження 3.3.2. Зауважимо, що випадок, коли точки $\{a_k\}, k = \overline{1, n}$, належать деякій довільній прямій, яка не проходить через початок координат, завжди можна звести до теореми 3.3.5 деяким лінійним перетворенням.

3.4. Теореми спотворення

Даний підрозділ присвячений застосуванню отриманих раніше результатів для отримання т.зв. теорем спотворення, причому розглядаються

як функції, які регулярні та однолисті в одиничному крузі, так і важливий частинний випадок функцій, які належать до класу S^* , який буде описаний нижче.

Для встановлення основних результатів даного підрозділу доведемо наступні леми.

Лема 3.4.1. [59] *Нехай $B = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ — права півплощина і $a \in B$. Тоді*

$$R(B, a) = 2\operatorname{Re} a. \quad (3.4.1)$$

Доведення леми 3.4.1. Нехай $a = x_a + iy_a$, де x_a, y_a — відповідно дійсна та уявна частини числа a . Зрозуміло, що $x_a > 0$. Відображення, яке відображає одиничний круг на праву півплощину так, що $f(0) = a$, має вигляд $f(z) = \frac{x_a + x_a z}{1 - z} + iy_a$. Тоді $f'(z) = \frac{2x_a}{(1 - z)^2}$, а тому

$$R(B, a) = f'(0) = 2x_a = 2\operatorname{Re} a.$$

Лему 3.4.1 доведено.

В наступній лемі під z^α ми маємо на увазі функцію $z^\alpha := \exp(\alpha \ln(z))$, причому ми беремо ту гілку функції $\ln(z)$, де $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$.

Лема 3.4.2. [59] *Нехай $P_\alpha = \{z : 0 < |z| < 1; -\frac{\pi}{\alpha} < \arg(z) < \frac{\pi}{\alpha}\}$, де $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1$. і $z_0 \in P_\alpha$. Тоді*

$$R(P_\alpha; z_0) = \frac{4}{\alpha} \left| \frac{z_0(1 - z_0^\alpha)}{(1 + z_0^\alpha)} \right| \cos \left(\arg \left(\frac{z_0^{\frac{\alpha}{2}}}{(1 - z_0^\alpha)} \right) \right). \quad (3.4.2)$$

Доведення леми 3.4.2. Розглянемо функцію $w_1(z) = z^\alpha$. Дана функція відображає сектор P_α на відкритий одиничний круг з розрізом по півінтервалі $(-1; 0]$. Далі, функція $w_2(\zeta) = \frac{\zeta}{(1 - \zeta)^2}$ відображає відкритий одиничний круг з розрізом по півінтервалі $(-1; 0]$ на площину з розрізом по дійсній від'ємній півосі, а тому $w_2(w_1(z)) = \frac{z^\alpha}{(1 - z^\alpha)^2}$ відображає сектор P_α саме на дану область. Функція $w_3(z) = \sqrt{w_2(w_1(z))} = \frac{z^{\frac{\alpha}{2}}}{1 - z^\alpha}$, де ми беремо ту гілку функції $\sqrt{z}$, де $\sqrt{1} = 1$, відображає сектор P_α на

праву півплощину $B = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, причому $w_3(z_0) = \frac{z_0^{\frac{\alpha}{2}}}{1-z_0^\alpha}$. Для того, щоб відобразити праву півплощину на відкритий одиничний круг так, щоб точка $w_3(z_0)$ перейшла в 0, потрібно, щоб точка, симетрична точці $w_3(z_0)$ відносно уявної осі, перейшла в ∞ . Для цього візьмемо функцію $w_4(z) = \frac{w_3(z)-w_3(z_0)}{w_3(z)+w_3(z_0)}$. Функція

$$w_4(z) := w_4(z, \alpha) = \frac{\frac{z^{\frac{\alpha}{2}}}{1-z^\alpha} - \frac{z_0^{\frac{\alpha}{2}}}{1-z_0^\alpha}}{\frac{z^{\frac{\alpha}{2}}}{1-z^\alpha} + \frac{z_0^{\frac{\alpha}{2}}}{1-z_0^\alpha}} \quad (3.4.3)$$

конформно відображає сектор P_α на відкритий одиничний круг, причому $w_4(z_0) = 0$. Тоді

$$w_4'(z_0) = (w_4(w_3(z_0)))' = w_4'(w_3(z_0))w_3'(z_0). \quad (3.4.4)$$

В той же час, за лемою 3.4.1

$$w_4'(w_3(z_0)) = \frac{1}{R(B, w_3(z_0))} = \frac{1}{2\operatorname{Re}(w_3(z_0))}. \quad (3.4.5)$$

Також відзначимо, що

$$w_3'(z_0) = \frac{\alpha z_0^{\frac{\alpha}{2}}}{2z_0} \frac{1+z_0^\alpha}{(1-z_0^\alpha)^2}. \quad (3.4.6)$$

Підставивши вирази (3.4.5) і (3.4.6) у рівність (3.4.4), отримаємо, що

$$R(P_\alpha; z_0) = \left| \frac{1}{w_4'(z_0)} \right| = \frac{4}{\alpha} \left| \frac{z_0(1-z_0^\alpha)^2}{z_0^{\frac{\alpha}{2}}(1+z_0^\alpha)} \right| \operatorname{Re} \frac{z_0^{\frac{\alpha}{2}}}{(1-z_0^\alpha)}.$$

Також, врахувавши, що

$$\left| \frac{1-z_0^\alpha}{z_0^{\frac{\alpha}{2}}} \right| \operatorname{Re} \frac{z_0^{\frac{\alpha}{2}}}{(1-z_0^\alpha)} = \cos \left(\arg \left(\frac{z_0^{\frac{\alpha}{2}}}{(1-z_0^\alpha)} \right) \right),$$

і підставивши отриманий вираз в попередню формулу, отримаємо (3.4.2).

Лему 3.4.2 доведено.

З леми 3.4.2 випливає наступний наслідок.

Наслідок 3.4.1. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \{z : 0 < |z| < 1; -\frac{\pi}{n} < \arg(z) < \frac{\pi}{n}\}$ і число $p \in \mathbb{R}$, $0 < p < 1$. Тоді

$$R(P_n; p) = \frac{4p(1-p^n)}{n(1+p^n)}. \quad (3.4.7)$$

Правильність даного наслідку випливає з того, що у формулі (3.4.2) для дійсного z_0 виконується рівність $\cos \left(\arg \left(\frac{z_0^{\frac{\alpha}{2}}}{(1-z_0^\alpha)} \right) \right) = 1$.

Правильна теорема.

Теорема 3.4.1. [59] Нехай $n \in \mathbb{N}$, $z_k = \rho_k \exp i\theta_k$, $k = \overline{1, n}$, — деякий набір точок відкритого одиничного круга U , $\rho_k \in (0, 1)$, $\rho_0 := \rho_n$, $\rho_{n+1} := \rho_1$, причому $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < 2\pi$, $\theta_0 := \theta_n$, $\theta_{n+1} := \theta_1$. Тоді для кожної функції $f(z)$, регулярної і однолистої в U , справедлива нерівність

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n |f'(z_k)| &\leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \prod_{k=1}^n \left(\frac{4\rho_k}{\alpha_k} \left| \frac{1 - (\rho_k \exp i\omega_k)^{\alpha_k}}{1 + (\rho_k \exp i\omega_k)^{\alpha_k}} \right| \right)^{-1} \\ &\cdot \prod_{k=1}^n \sec \left(\arg \left(\frac{(\rho_k \exp i\omega_k)_0^{\frac{\alpha_k}{2}}}{(1 - (\rho_k \exp i\omega_k)^{\alpha_k})} \right) \right) \cdot \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |(f(z_p) - f(z_k))| \right)^{\frac{2}{n-1}}, \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

де $\alpha_k = \frac{\pi}{\theta_{k+1} - \theta_{k-1}}$ і $\omega_k = \frac{1}{4} (2\theta_k - \theta_{k+1} - \theta_{k-1})$.

Доведення теореми 3.4.1. Нехай $\psi_k = \frac{\theta_{k-1} + \theta_k}{2}$, $k = \overline{1, n}$. Розглянемо набір секторів Δ_k , $k = \overline{1, n}$, введених наступним чином:

$$\Delta_k = \{w \in U : \psi_k < \arg w < \psi_{k+1}\}.$$

Дані сектори не перетинаються, причому $z_k \in \Delta_k$.

Розглянемо набір функцій $\varphi_k(z) := w_4(z \cdot \exp(-i\omega_k), \alpha_k)$, $k = \overline{1, n}$, де w_4 — див (3.4.3), $\omega_k = \frac{1}{4} (2\theta_k - \theta_{k+1} - \theta_{k-1})$ і в ролі параметра виступає $\alpha_k = \frac{\pi}{\theta_{k+1} - \theta_{k-1}}$. Для кожного $k = \overline{1, n}$ функція $\varphi_k(z)$ однолисто відображає

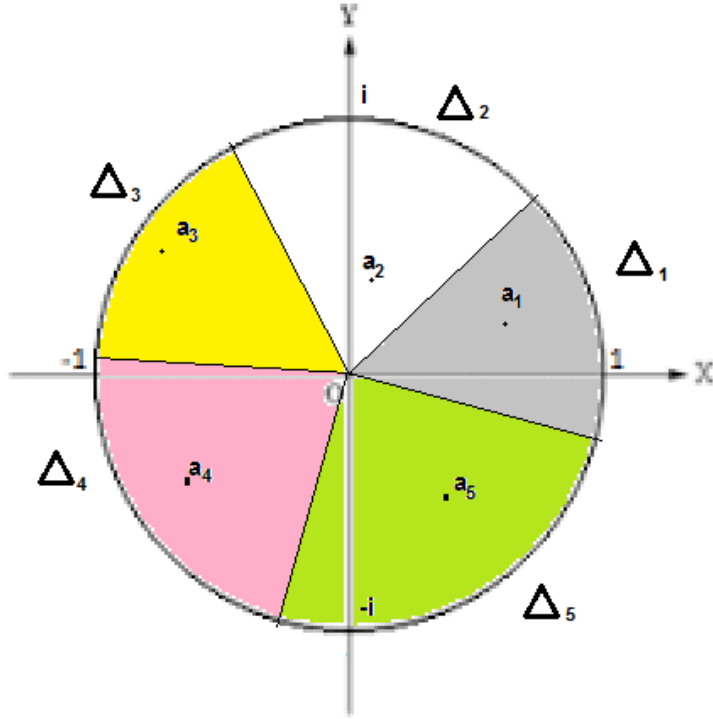


Рис. 3.1: Мал. до теореми 3.4.1

сектор Δ_k на відкритий одиничний круг так, що $\varphi_k(z_k) = 0$, причому, згідно з рівністю (3.4.2)

$$R(\Delta_k; z_k) = \frac{1}{\varphi'_k(z_k)} = \frac{4\rho_k}{\alpha_k} \left| \frac{1 - (\rho_k \exp i\omega_k)^{\alpha_k}}{1 + (\rho_k \exp i\omega_k)^{\alpha_k}} \right| \cos \left(\arg \left(\frac{(\rho_k \exp i\omega_k)_0^{\frac{\alpha}{2}}}{(1 - (\rho_k \exp i\omega_k)^{\alpha})} \right) \right). \quad (3.4.9)$$

Позначимо через B_k , $k = \overline{1, n}$, області, які є образами секторів Δ_k при відображенні функцією $f(z)$. Зрозуміло, що області B_k також утворюють систему областей, що не перетинаються, причому $f(z_k) \in B_k$, $k = \overline{1, n}$.

Для кожного $k = \overline{1, n}$ функції $f(\varphi_k^{-1}(\zeta))$ здійснюють однолисте і кон-

формне відображення U на області B_k так, що $f(\varphi_k^{-1}(0)) = f(z_k)$ і

$$|f'(\varphi_k^{-1}(0))| = \frac{|f'(z_k)|}{|\varphi'_k(0)|} = r(B_k, f(z_k)).$$

Звідси отримаємо, що

$$\prod_{k=1}^n |f'(z_k)| = \prod_{k=1}^n (r(B_k, f(z_k)) |\varphi'_k(0)|). \quad (3.4.10)$$

Згідно з теоремою 3.2.1 (див. також теорему 2.1 роботи [195]), правильна нерівність

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, f(z_k)) \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{1 \leq k < p \leq n} |f(z_k) - f(z_p)| \right)^{\frac{2}{n-1}}.$$

Використовуючи дану нерівність, а також рівність (3.4.10), маємо нерівність

$$\prod_{k=1}^n |f'(z_k)| \prod_{k=1}^n (R(\Delta_k; z_k)) \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |f(z_p) - f(z_k)| \right)^{\frac{2}{n-1}}.$$

Поділивши обидві частини останньої нерівності на $\prod_{k=1}^n (R(\Delta_k; z_k))$ і врахувавши рівність (3.4.9), одержуємо нерівність (3.4.8).

Теорему 3.4.1 доведено.

Однак, якщо побудувати систему секторів Δ_k іншими чином, можна отримати хоч і менш точну, однак дещо простішу нерівність.

Нехай $\theta_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, n}$, причому $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < 2\pi$, $\theta_0 := \theta_n$, $\theta_{n+1} := \theta_1$. Для кожного $k = \overline{1, n}$ позначимо через m_k найменше натуральне число, для якого

$$\frac{\pi}{m_k} \leq \min \left\{ \frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{2}, \frac{\theta_k - \theta_{k-1}}{2} \right\}.$$

Теорема 3.4.2. [54] Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\rho_k \in (0, 1)$, $\rho_0 := \rho_n$, $\rho_{n+1} := \rho_1$, $z_k = \rho_k \exp i\theta_k$, $k = \overline{1, n}$. Тоді для кожної функції $f(z)$, регулярної і однолистої в відкритому одиничному крузі U , справедлива нерівність

$$\prod_{k=1}^n |f'(z_k)| \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \prod_{k=1}^n \left(\frac{4\rho_k}{m_k} \cdot \frac{1 - (\rho_k)^{m_k}}{1 + (\rho_k)^{m_k}} \right)^{-1} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |(f(z_p) - f(z_k))| \right)^{\frac{2}{n-1}}. \quad (3.4.11)$$

Доведення. Розглянемо набір секторів

$$\Delta_k = \left\{ w \in U : |\arg w - \theta_k| < \frac{\pi}{m_k} \right\},$$

$k = \overline{1, n}$. Зрозуміло, що дані сектори не перетинаються. Тоді області $f(\Delta_k) =: B_k$, $f(z_k) \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, також утворюють систему областей, що не перетинаються.

Нехай $z = \varphi_k(\zeta)$ — однолисте і конформне відображення U на Δ_k , $k = \overline{1, n}$, $\varphi_k(0) = z_k$, $\varphi'_k(0) > 0$. Використовуючи рівність (3.4.7), отримаємо, що

$$|\varphi'_k(0)| = \left(\frac{4\rho_k}{m_k} \cdot \frac{1 - (\rho_k)^{m_k}}{1 + (\rho_k)^{m_k}} \right). \quad (3.4.12)$$

Тоді функції $f(\varphi_k(\zeta))$ здійснюють однолисте і конформне відображення U на області B_k так, що $f(\varphi_k(0)) = f(z_k)$ і

$$|f'(\varphi_k(0))| = |f'(z_k)| \cdot |\varphi'_k(0)| = r(B_k, f(z_k)).$$

Звідси отримаємо, що

$$\prod_{k=1}^n |f'(z_k)| = \prod_{k=1}^n \left(\frac{r(B_k, f(z_k))}{|\varphi'_k(0)|} \right) \quad (3.4.13)$$

Згідно з теоремою 3.2.1, правильна нерівність

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, f(z_k)) \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{1 \leq k < p \leq n} |f(z_k) - f(z_p)| \right)^{\frac{2}{n-1}}.$$

Використовуючи дану нерівність, а також рівності (3.4.12) і (3.4.13), маємо нерівність

$$\prod_{k=1}^n |f'(z_k)| \cdot \prod_{k=1}^n \left(\frac{4\rho_k}{m_k} \cdot \frac{1 - (\rho_k)^{m_k}}{1 + (\rho_k)^{m_k}} \right) \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |f(z_p) - f(z_k)| \right)^{\frac{2}{n-1}}.$$

Поділивши обидві частини останньої нерівності на $\prod_{k=1}^n \left(\frac{4\rho_k}{m_k} \cdot \frac{1 - (\rho_k)^{m_k}}{1 + (\rho_k)^{m_k}} \right)$, одержуємо нерівність (3.4.11).

Теорему 3.4.2 доведено.

З теореми 3.4.2 отримуємо подальше твердження.

Наслідок 3.4.2. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\rho \in (0, 1)$, $z_k = \rho \exp i \frac{2\pi}{n}(k-1)$, $k = \overline{1, n}$. Тоді, для кожної функції $f(z)$, регулярної і однолистої в U , справедлива нерівність*

$$\prod_{k=1}^n |f'(z_k)| \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\frac{4\rho}{n} \cdot \frac{1 - \rho^n}{1 + \rho^n} \right)^{-n} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |f(z_p) - f(z_k)| \right)^{\frac{2}{n-1}}.$$

Для доведення даного результату достатньо покласти в рівності (3.4.12) всі $\rho_k = \rho$ і $m_k = n$.

Наведені вище оцінки в теоремах 3.4.1 і 3.4.2 правильні для довільних функцій, регулярних і однолистих в одиничному крузі U за умови, що вибрані точки z_k попарно не належать одному радіусу. Однак для деяких вужчих класів функцій можна записати і дещо точнішу оцінку.

Однолиста область називається зіркоподібною відносно деякої точки, якщо відрізок, що з'єднує будь-яку її точку з вказаною точкою, повністю належить цій області. Позначимо через S^* клас всіх однолистих і регулярних функцій $f(z)$ в крузі U , таких, що $f(0) = 1 - f'(0) = 0$, і які відображають U на області, зіркоподібні відносно початку координат. Якщо функція $f(z) \in S^*$, то при русі z по $|z| = r$, $0 < r < 1$, у визначеному напрямку $\arg f(z)$ змінюється в тому ж напрямку, тобто виконується

нерівність

$$\operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0.$$

Позначимо також

$$M(\{z_k\}_{k=1}^n) = \prod_{k=1}^n \chi(|z_k|^{\frac{n}{2}}) \cdot |z_k|, \quad (3.4.14)$$

де $\chi(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ — функція Жуковського.

Правильне наступне твердження.

Теорема 3.4.3. [59] Нехай $n \in \mathbb{N}$, $R \in \mathbb{R}^+$, $z_k = \rho_k \exp i\theta_k$, $k = \overline{1, n}$, — деякий набір точок відкритого одиничного круга U , $\rho_k \in (0, 1)$, $\rho_0 := \rho_n$, $\rho_{n+1} := \rho_1$, причому $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < 2\pi$, $\theta_0 := \theta_n$, $\theta_{n+1} := \theta_1$. Тоді для кожної функції $f \in S^*$ правильна нерівність

$$\prod_{k=1}^n |f'(z_k)| \leq R^n \prod_{k=1}^n \left(\frac{4\rho_k}{\alpha_k} \left| \frac{1 - (\rho_k \exp i\omega_k)^{\alpha_k}}{1 + (\rho_k \exp i\omega_k)^{\alpha_k}} \right| \right)^{-1} \cdot \prod_{k=1}^n \sec \left(\arg \left(\frac{(\rho_k \exp i\omega_k)^{\frac{\alpha_k}{2}}}{(1 - (\rho_k \exp i\omega_k)^{\alpha_k})} \right) \right) M \left(\left\{ \frac{f(z_k)}{R} \right\}_{k=1}^n \right), \quad (3.4.15)$$

де $\alpha_k = \frac{\pi}{\theta_{k+1} - \theta_{k-1}}$ і $\omega_k = \frac{1}{4} (2\theta_k - \theta_{k+1} - \theta_{k-1})$. Рівність в нерівності (3.4.15) досягається для випадку, коли всі $\rho_k = \rho$ для деякого $\rho \in (0, 1)$, $z_k = \rho \exp i\frac{2\pi}{n}(k-1)$, $k = \overline{1, n+1}$, $f(z) = \frac{z}{(1-z^n)^{\frac{2}{n}}}$ і $R = \frac{\rho}{(1-\rho^n)^{\frac{2}{n}}}$.

Доведення теореми 3.4.3. Розглянемо набір секторів Δ_k і функцій $\varphi_k(z)$, $k = \overline{1, n}$, таких, як і в теоремі 3.4.1. Області $D_k = f(\Delta_k)$, $k = \overline{1, n}$, утворюють систему областей, які не перетинаються. Оскільки $f(z) \in S^*$, то точки $f(z_k)$ лежать попарно на різних променях, які виходять з початку координат. Позначимо $\beta_k = \frac{1}{\pi} \arg \frac{f(z_{k+1})}{f(z_k)}$, $f(z_{n+1}) := f(z_1)$. Області D_k і точки $f(z_k)$ задовольняють всі умови теореми 3.1.1 роботи [24] (див. теорему 1.5.1, а також [13], [22].) Врахувавши, що

$$\prod_{k=1}^n \beta_k \leq \left(\frac{2}{n} \right)^n,$$

а також те, що добуток відповідних коефіцієнтів зміщення не перевищує одиниці, отримаємо нерівність

$$\prod_{k=1}^n r(D_k, f(z_k)) \leq \left(\frac{4R}{n}\right)^n \cdot M \left(\left\{ \frac{f(z_k)}{R} \right\}_{k=1}^n \right). \quad (3.4.16)$$

Для кожного $k = \overline{1, n}$ функції $f(\varphi_k^{-1}(\zeta))$ здійснюють однолисте і конформне відображення U на області D_k так, що $f(\varphi_k^{-1}(0)) = f(z_k)$, а тому правильна рівність

$$\prod_{k=1}^n |f'(z_k)| = \prod_{k=1}^n (r(D_k, f(z_k)) |\varphi_k'(0)|) \quad (3.4.17)$$

Підставивши нерівність (3.4.16) в (3.4.17), а також врахувавши (3.4.9) отримаємо нерівність (3.4.15).

Теорему 3.4.3 доведено.

3.5. Еволюційні нерівності для добутків внутрішніх радіусів

Даний підрозділ присвячений отриманню деяких еволюційних нерівностей для функціоналів наступних типів:

$$I_n(1) = r(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k),$$

$$Y_n(1) = r(B_\infty, \infty) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k),$$

$$J_n(1) = r(B_0, 0) r(B_\infty, \infty) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k),$$

де $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ — довільна фіксована система точок множини $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, B_0, B_∞ і $\{B_k\}_{k=1}^n$ — довільна система попарно неперетинних

областей, таких, що $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$.

Скористаємось методом, запропонованим в роботах [33, 115], а також деякими виразами, отриманими при доведенні лем 3.2.2, 3.3.2 та 3.3.3. Правильна теорема.

Теорема 3.5.1. [56] *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\tau \in (0, 1)$. Тоді для довільної системи фіксованих різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a_0 = 0$, та для довільної системи попарно неперетинних областей B_k таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, правильна нерівність*

$$I_n(1) \leq n^{-\frac{1-\tau}{2}} I_n(\tau) (I_n(0))^{-\frac{1-\tau}{n}} \left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{2(1-\tau)}{n}}, \quad (3.5.1)$$

де $I_n(\tau) := r^\tau(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)$, $I_n(0) = \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)$.

Доведення теореми 3.5.1. Нехай $d(E)$ — трансфінітний діаметр компактної множини $E \subset \mathbb{C}$. Відомо (див. [24, 70, 83]), що

$$\text{cap} E = d(E) = \frac{1}{r(\overline{\mathbb{C}} \setminus E, \infty)}.$$

Також, згідно з теоремою 2 [39] правильні співвідношення

$$r(B_0, 0) = r(B_0^+, \infty) = \frac{1}{d(\overline{\mathbb{C}} \setminus B_0^+, \infty)}, \quad B^+ = \left\{ z : \frac{1}{z} \in B \right\}. \quad (3.5.2)$$

Використовуючи міркування, аналогічні до наведених при доведенні леми 3.3.2 (див. нерівність (3.3.13)), отримаємо нерівність

$$r(B_0, 0) \leq \frac{1}{\left[\sum_{k=1}^n r^2(B_k^+, a_k^+) \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.5.3)$$

Також, згідно з рівністю (3.3.14),

$$r(B_k^+, a_k^+) = \frac{r(B_k, a_k)}{|a_k|^2}.$$

Підставивши для кожного $k = \overline{1, n}$ дану рівність в нерівність (3.5.3), отримаємо

$$r(B_0, 0) \leq \frac{1}{\left[\sum_{k=1}^n \frac{r^2(B_k, a_k)}{|a_k|^4} \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Домноживши обидві частини попередньої нерівності на $\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)$, будемо мати

$$I_n(1) \leq \frac{\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)}{\left[\sum_{k=1}^n \frac{r^2(B_k, a_k)}{|a_k|^4} \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.5.4)$$

Згідно з нерівністю Коші між середнім арифметичним і середнім геометричним, правильне наступне співвідношення

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{r^2(B_k, a_k)}{|a_k|^4} \geq \left(\prod_{k=1}^n \frac{r^2(B_k, a_k)}{|a_k|^4} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Звідси отримаємо

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{r^2(B_k, a_k)}{|a_k|^4} \right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(n \left(\prod_{k=1}^n \frac{r^2(B_k, a_k)}{|a_k|^4} \right)^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{1}{2}} \geq n^{\frac{1}{2}} \left(\prod_{k=1}^n \frac{r(B_k, a_k)}{|a_k|^2} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Підставивши отриману нерівність в (3.5.4), будемо мати

$$I_n(1) \leq n^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{1-\frac{1}{n}} \left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{2}{n}}. \quad (3.5.5)$$

Очевидно, що

$$\begin{aligned} I_n(1) &= r^\tau(B_0, 0) \left(r^{1-\tau}(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right) = \\ &= r^\tau(B_0, 0) (I_n(1))^{1-\tau} \left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^\tau. \end{aligned}$$

Використовуючи дану рівність та нерівність (3.5.5), будемо мати

$$I_n(1) \leq r^\tau(B_0, 0) \left(n^{-\frac{1-\tau}{2}} \left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{1-\frac{1-\tau}{n}} \left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{2(1-\tau)}{n}} \right).$$

Після певних перетворень отримаємо

$$\begin{aligned} I_n(1) &\leq r^\tau(B_0, 0) \left(n^{-\frac{1-\tau}{2}} \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{-\frac{1-\tau}{n}} \left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{2(1-\tau)}{n}} \right) = \\ &= n^{-\frac{1-\tau}{2}} r^\tau(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{-\frac{1-\tau}{n}} \left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{2(1-\tau)}{n}}, \end{aligned}$$

звідки і випливає нерівність (3.5.1).

Теорему 3.5.1 доведено.

Використовуючи теорему 3.2.1 та нерівність (3.5.5), з теореми 3.5.1 отримаємо наступний результат.

Наслідок 3.5.1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Тоді для довільної системи фіксованих різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a_0 = 0$, та для довільного набору взаємно неперетинних областей B_k таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, правильна нерівність*

$$I_n(1) \leq n^{-\frac{1}{2}} (n-1)^{-\frac{n-1}{4}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n}} \left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{2}{n}}.$$

Аналогічно можна отримати оцінку і для функціонала $Y_n(1)$.

Теорема 3.5.2. [56] *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\tau \in (0, 1)$. Тоді для довільної системи фіксованих різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}$ та для довільного набору попарно неперетинних областей B_∞, B_k , $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, правильна нерівність*

$$Y_n(1) \leq n^{-\frac{1-\tau}{2}} Y_n(\tau) (Y_n(0))^{-\frac{1-\tau}{n}}, \quad (3.5.6)$$

де $Y_n(\tau) := r^\tau(B_\infty, \infty) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)$, $Y_n(0) = \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)$.

Доведення теореми 3.5.2. Як і в лемі 3.3.3, отримаємо нерівність

$$r(B_{n+1}, \infty) \leq \frac{1}{\left[\sum_{k=1}^n r^2(B_k, a_k) \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Далі будемо мати

$$Y_n(1) \leq \frac{\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)}{\left[\sum_{k=1}^n r^2(B_k, a_k) \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.5.7)$$

Згідно з нерівністю Коші між середнім арифметичним і середнім геометричним, правильно наступне співвідношення

$$\sum_{k=1}^n r^2(B_k, a_k) \geq n \left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{\frac{2}{n}}.$$

Підставивши отриману нерівність в (3.5.7), будемо мати

$$Y_n(1) \leq n^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{1-\frac{1}{n}}. \quad (3.5.8)$$

Очевидно, що

$$\begin{aligned} Y_n(1) &= r^\tau(B_\infty, \infty) \left(r^{1-\tau}(B_\infty, \infty) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right) = \\ &= r^\tau(B_\infty, \infty) (Y_n(1))^{1-\tau} \left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^\tau. \end{aligned}$$

Використовуючи дану рівність та нерівність (3.5.8), будемо мати

$$\begin{aligned} Y_n(1) &\leq n^{-\frac{1-\tau}{2}} r^\tau(B_\infty, \infty) \left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{\tau + \frac{(1-\tau)(n-1)}{n}} = \\ &= n^{-\frac{1-\tau}{2}} r^\tau(B_\infty, \infty) \left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{1-\frac{1-\tau}{n}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n^{-\frac{1-\tau}{2}} r^\tau(B_\infty, \infty) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{-\frac{1-\tau}{n}} = \\
&= n^{-\frac{1-\tau}{2}} Y_n(\tau) (Y_n(0))^{-\frac{1-\tau}{n}},
\end{aligned}$$

що й доводить нерівність (3.5.6).

Теорему 3.5.2 доведено.

Правильний також наступний наслідок.

Наслідок 3.5.2. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Тоді для довільної системи фіксованих різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}$ та для довільного набору попарно неперетинних областей B_∞, B_k , $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, правильна наступна нерівність*

$$Y_n(1) \leq n^{-\frac{1}{2}} (n-1)^{-\frac{n-1}{4}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n}}.$$

Даний наслідок випливає з теореми 3.2.1 та нерівності (3.5.8).

Наступна теорема присвячена оцінці функціонала $J_n(1)$.

Теорема 3.5.3. [56] *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\tau \in (0, 1)$. Тоді для довільної системи фіксованих різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ та для довільного набору попарно неперетинних областей B_0, B_∞, B_k , $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, правильна нерівність*

$$J_n(1) \leq (n+1)^{-(1-\tau)\frac{n+1}{n+2}} J_n(\tau) [J_n(0)]^{-\frac{2(1-\tau)}{n+2}} \prod_{k=1}^n |a_k|^{\frac{2(1-\tau)}{n+2}}, \quad (3.5.9)$$

де $J_n(\tau) := [r(B_0, 0) r(B_\infty, \infty)]^\tau \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)$, $J_n(0) = \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)$.

Доведення теореми 3.5.3. Використовуючи міркування, проведені при доведенні, відповідно, лем 3.3.2 та 3.3.3, отримаємо нерівності

$$r(B_0, 0) \leq \left[r^2(B_\infty, \infty) + \sum_{k=1}^n \frac{r^2(B_k, a_k)}{|a_k|^4} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

та

$$r(B_\infty, \infty) \leq \left[r^2(B_0, 0) + \sum_{k=1}^n r^2(B_k, a_k) \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Далі, використовуючи нерівність Коші між середнім арифметичним та середнім геометричним, отримаємо такі оцінки

$$r(B_0, 0) \leq (n+1)^{-\frac{1}{2}} \left(r(B_\infty, \infty) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{-\frac{1}{n+1}} \prod_{k=1}^n |a_k|^{\frac{2}{n+1}}$$

та

$$r(B_\infty, \infty) \leq (n+1)^{-\frac{1}{2}} \left(r(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{-\frac{1}{n+1}}.$$

Перемноживши дві попередні нерівності та провівши елементарні перетворення, будемо мати

$$(r(B_0, 0) r(B_\infty, \infty))^{1+\frac{1}{n+1}} \leq \frac{1}{n+1} \frac{\left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{2}{n+1}}}{\left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{\frac{2}{n+1}}}.$$

Піднесемо отриману нерівність до степеня $\frac{n+1}{n+2}$. Отримаємо

$$r(B_0, 0) r(B_\infty, \infty) \leq (n+1)^{-\frac{n+1}{n+2}} \left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{-\frac{2}{n+2}} \left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{2}{n+2}}. \quad (3.5.10)$$

Очевидно, що

$$\begin{aligned} & r(B_0, 0) r(B_\infty, \infty) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) = \\ & = [r(B_0, 0) r(B_\infty, \infty)]^\tau \left([r(B_0, 0) r(B_\infty, \infty)]^{1-\tau} \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right). \end{aligned}$$

Підставивши нерівність (3.5.10) в попередню рівність, отримаємо

$$J_n(1) \leq [r(B_0, 0) r(B_\infty, \infty)]^\tau \left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right).$$

$$\cdot \left((n+1)^{-\frac{(1-\tau)(n+1)}{n+2}} \left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{-\frac{2(1-\tau)}{n+2}} \left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{2(1-\tau)}{n+2}} \right),$$

звідки і випливає нерівність (3.5.9).

Теорема 3.5.3 доведена.

Наступне твердження є наслідком нерівності (3.5.10) та теореми 3.2.1.

Наслідок 3.5.3. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Тоді, для довільної системи фіксованих різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ та для довільного набору попарно неперетинних областей B_0, B_∞, B_k , $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$ правильна нерівність*

$$J_n(1) \leq (n+1)^{-\frac{n+1}{n+2}} \left((n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}} \right)^{1 - \frac{2}{n+2}} \left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{2}{n+2}}.$$

Висновки до розділу 3

У третьому розділі дисертаційної роботи розглядається відома екстремальна проблема про максимум функціонала $\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)$, де a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякі фіксовані точки комплексної площини, а B_k , $k = \overline{1, n}$, — довільний набір областей, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$. Для $n = 2$ дану проблему розв'язав М.О. Лаврентьєв, для $n = 3$ — Г.М. Голузін, для $n = 4$ — Г.В. Кузьміна. Для $n \geq 5$ повного розв'язку даної проблеми на даний момент не отримано.

У третьому розділі отримано оцінки добутку, вказаного в згаданій проблемі, для випадку довільних $n \geq 2$ фіксованих скінченних точок комплексної площини, а також для випадку, коли одна з точок нескінченно віддалена. Також наведено приклади, як дані оцінки можуть бути застосовані в інших задачах геометричної теорії функцій, зокрема в проблемі 2.1.1, а також у проблемі 3.3.1. Крім того, за допомогою оцінок, отриманих при доведенні теореми 3.2.1, було отримано декілька багатоточкових теорем спотворення як для функцій, регулярних та однолистих у відкритому одиничному крузі, так і для функцій з дещо вужчого класу S^* . Також отримано деякі оцінки еволюційного типу для добутків внутрішніх радіусів областей, де на точки a_k накладаються певні додаткові умови, зокрема, що одна з них дорівнює нулю або нескінченно віддалена.

Результати розділу опубліковані в роботах [53, 54, 56, 59, 188, 195, 210].

Розділ 4

Задача про добуток деяких степенів внутрішніх радіусів неперетинних областей відносно n наперед заданих фіксованих точок

4.1 Деякі допоміжні твердження, які вико- ристовуються при доведенні основних результатів

В даному розділі вивчається така проблема:

Проблема 4.1.1. *Нехай n — деяке натуральне число, причому $n \geq 3$, γ_k , $k = \overline{1, n}$, — деякі додатні дійсні числа; a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір точок комплексної площини. Знайти максимум добутку*

$$\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\gamma_k}, \quad (4.1.1)$$

де B_k , $k = \overline{1, n}$, — довільний набір областей, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Тобто, іншими словами, для даних n фіксованих точок комплексної площини і n наперед заданих дійсних чисел γ_k потрібно знайти максимум виразу (4.1.1) для всеможливих конфігурацій областей B_k , які задовольняють всім умовам проблеми 4.1.1.

Відзначимо, що проблема 3.1.1 є частинним випадком проблеми 4.1.1, якщо всі степені α_k взяти рівними одиниці. Однак якщо проблема 3.1.1 має розв'язок для довільної конфігурації точок a_k , то в проблемі 4.1.1 для деяких конфігурацій точок a_k і степенів α_k добуток внутрішніх радіусів областей B_k може бути і необмеженим.

Розглянемо наступний контрприклад. Для цього розглянемо наступну задачу, яка є частинним випадком проблеми 4.1.1.

Так, нехай дано деяке дійсне $\varepsilon > 0$; $a_1 = 0$, $a_2 = 1$; однозв'язні області B_1 і B_2 такі, що $a_1 \in B_1$, $a_2 \in B_2$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$; функції $f_1(z)$ і $f_2(z)$ однолисто відображають відкритий одиничний круг U , відповідно, на області B_1 і B_2 так, що $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = 1$. Знайти максимум виразу

$$P(\varepsilon) = |f'_1(0)| \cdot |f'_2(0)|^{1+\varepsilon}$$

за умови, що функції $f_1(z)$ і $f_2(z)$ регулярні, за винятком однієї, яка, можливо, мероморфна.

Нехай $B_1 = \{z : |z| < k\}$ і $B_2 = \{z : |z| > k\}$ для деякого дійсного k , $0 < k < 1$. Тоді $f_1(z) = kz$, $f_2(z) = k\frac{1+z}{z+k}$. Відповідно $|f'_1(0)| = k$ і $f'_2(z) = k\frac{k^2-1}{(z+k)^2}$, а тому $|f'_2(0)| = \frac{1-k^2}{k}$. Таким чином, $P(\varepsilon) = k \cdot \left(\frac{1-k^2}{k}\right)^{1+\varepsilon} = \frac{(1-k^2)^{1+\varepsilon}}{k^\varepsilon}$. Якщо k спрямувати до нуля, то вираз $P(\varepsilon)$ прямує до нескінченності.

Даний приклад має місце лише тоді, коли одна з областей B_1 і B_2 може мати нескінченність внутрішньою точкою. Якщо обидві функції регулярні, то максимум існує завжди.

Для дослідження виразу (4.1.1) введемо наступні позначення.

Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок комплексної площини, і нехай γ_k , $k = \overline{1, n}$, — деякі додатні дійсні числа, $B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, — деякий набір областей,

таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$. Позначимо

$$P(n; \{B_k\}_{k=1}^n; \{a_k\}_{k=1}^n; \{\gamma_k\}_{k=1}^n) := \frac{\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\gamma_k}}{\prod_{i,j=1, i < j}^n |a_j - a_i|^{\frac{2}{n-2}(\gamma_i + \gamma_j - \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \gamma_k)}}. \quad (4.1.2)$$

Зауважимо, що вираз, аналогічний до (4.1.2), розглядався також в роботі [79].

Вираз 4.1.2 має наступну важливу властивість.

Теорема 4.1.1. [196] *Функціонал $P(n; \{B_k\}_{k=1}^n; \{a_k\}_{k=1}^n; \{\gamma_k\}_{k=1}^n)$ інваріантний щодо конформних автоморфізмів комплексної площини.*

Доведення теореми 4.1.1. Нехай області B_k , точки a_k і числа γ_k , $k = \overline{1, n}$ — такі ж, як і в проблемі 4.1.1. Нехай

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (4.1.3)$$

— деякий конформний автоморфізм комплексної площини, і нехай $B_k^* = f(B_k)$ та $a_k^* = f(a_k)$ для довільного $k = \overline{1, n}$.

Для довільного k функція Гріна для області B_k і точки a_k має вигляд

$$G_{B_k}(z, a_k) = \ln \frac{1}{|z - a_k|} + \ln r(B_k, a_k) + o(1).$$

З конформної інваріантності функції Гріна випливає, що

$$G_{B_k^*}(w, a_k^*) = \ln \frac{1}{|w - a_k^*|} + \ln r(B_k^*, a_k^*) + o(1).$$

Враховуючи 4.1.3, будемо мати

$$\begin{aligned}
G_{B_k^*}(w, a_k^*) &= \ln \frac{1}{\left| \frac{az+b}{cz+d} - \frac{aa_k+b}{ca_k+d} \right|} + \ln r(B_k^*, a_k^*) + o(1) = \\
&= \ln \frac{|cz+d||ca_k+d|}{|(az+b)(ca_k+d) - (cz+d)(aa_k+b)|} + \ln r(B_k^*, a_k^*) + o(1) = \\
&= \ln \frac{|cz+d||ca_k+d|}{|adz - cbz + bca_k - ada_k|} + \ln r(B_k^*, a_k^*) + o(1) = \\
&= \ln \frac{|cz+d||ca_k+d|^2}{|(ca_k+d)(z-a_k)(ad-bc)|} + \ln r(B_k^*, a_k^*) + o(1) = \\
&= \ln \frac{1}{|z-a_k|} + \ln \frac{|ca_k+d|^2}{|ad-bc|} r(B_k^*, a_k^*) + \ln \frac{|cz+d|}{|ca_k+d|} + o(1) = \\
&= \ln \frac{1}{|z-a_k|} + \ln \frac{|ca_k+d|^2}{|ad-bc|} r(B_k^*, a_k^*) + o(1).
\end{aligned}$$

Звідси отримаємо, що:

$$r(B_k^*, a_k^*) = r(B_k, a_k) \frac{|ad-bc|}{|ca_k+d|^2}.$$

Будемо мати

$$\prod_{k=1}^n (r(B_k^*, a_k^*))^{\gamma_k} = \prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\gamma_k} \frac{|ad-bc|^{\sum_{k=1}^n \gamma_k}}{\prod_{k=1}^n |ca_k+d|^{2\gamma_k}}. \quad (4.1.4)$$

В той же час

$$|a_i^* - a_j^*| = \left| \frac{aa_i+b}{ca_i+d} - \frac{aa_j+b}{ca_j+d} \right| = \left| \frac{(ad-bc)(a_i-a_j)}{(ca_i+d)(ca_j+d)} \right|.$$

Тому отримаємо

$$\begin{aligned}
\prod_{i,j=1,i<j}^n |a_i^* - a_j^*|^{\frac{2}{n-2} \left(\gamma_i + \gamma_j - \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \gamma_k \right)} &= \prod_{i,j=1,i<j}^n |a_i - a_j|^{\frac{2}{n-2} \left(\gamma_i + \gamma_j - \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \gamma_k \right)} \\
|ad - bc|^{\frac{2}{n-2} \left((n-1) \sum_{k=1}^n \gamma_k - \frac{n(n-1)}{2(n-1)} \sum_{k=1}^n \gamma_k \right)} &\prod_{k=1}^n (ca_k + d)^{-\frac{2}{n-2} \left((n-1) \gamma_k - \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n \gamma_p - \sum_{k=1}^n \gamma_k \right)} = \\
&= \prod_{i,j=1,i<j}^n |a_i - a_j|^{\frac{2}{n-2} \left(\gamma_i + \gamma_j - \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \gamma_k \right)} |ad - bc|^{\sum_{k=1}^n \gamma_k} \prod_{k=1}^n (ca_k + d)^{-2\gamma_k}.
\end{aligned}$$

Враховуючи останню рівність і рівність (4.1.4), будемо мати:

$$\begin{aligned}
P(n; \{B_k^*\}_{k=1}^n; \{a_k^*\}_{k=1}^n; \{\gamma_k\}_{k=1}^n) &= \frac{\prod_{k=1}^n (r(B_k^*, a_k^*))^{\gamma_k}}{\prod_{i,j=1,i<j}^n |a_j^* - a_i^*|^{\frac{2}{n-2} \left(\gamma_i + \gamma_j - \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \gamma_k \right)}} = \\
&= \prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\gamma_k} \frac{|ad - bc|^{\sum_{k=1}^n \gamma_k} \prod_{k=1}^n (ca_k + d)^{2\gamma_k}}{\prod_{k=1}^n |ca_k + d|^{2\gamma_k} |ad - bc|^{\sum_{k=1}^n \gamma_k}} \times \\
&\times \prod_{i,j=1,i<j}^n |a_i - a_j|^{-\frac{2}{n-2} \left(\gamma_i + \gamma_j - \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \gamma_k \right)} = \frac{\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\gamma_k}}{\prod_{i,j=1,i<j}^n |a_j - a_i|^{\frac{2}{n-2} \left(\gamma_i + \gamma_j - \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \gamma_k \right)}} = \\
&= P(n; \{B_k\}_{k=1}^n; \{a_k\}_{k=1}^n; \{\gamma_k\}_{k=1}^n).
\end{aligned}$$

Теорему 4.1.1 доведено.

Таким чином, проблему 4.1.1, аналогічно до проблеми 3.1.1, можна розглядати також в дещо модифікованому вигляді.

Проблема 4.1.1*. Нехай дано натуральне число n , $n \geq 2$, і деякий набір додатних дійсних чисел γ_k , $k = \overline{1, n}$. Знайти максимум виразу $P(n; \{B_k\}_{k=1}^n; \{a_k\}_{k=1}^n; \{\gamma_k\}_{k=1}^n)$ по всім можливим конфігураціям точок

a_k , $k = \overline{1, n}$ та областей B_k , $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, причому $B_i \cap B_j = \emptyset$ для $1 \leq i, j \leq n$ та $i \neq j$.

Відзначимо, що проблема 4.1.1* не тотожна до проблеми 4.1.1, оскільки максимум виразу $P(n; \{B_k\}_{k=1}^n; \{a_k\}_{k=1}^n; \{\gamma_k\}_{k=1}^n)$, знайдений по всіх можливих конфігураціях точок a_k , для певної конкретної конфігурації може і не досягатися.

4.2. Оцінки добутків деяких степенів внутрішніх радіусів неперетинних областей відносно n наперед заданих фіксованих точок

Наступне допоміжне твердження дозволяє отримати оцінку виразу (4.1.1) за допомогою добутку внутрішніх радіусів вказаних областей в певному степені.

Теорема 4.2.1. [196] *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок комплексної площини, α_k , $k = \overline{1, n}$, — деякі додатні дійсні числа, і нехай $\lambda := \sum_{k=1}^n \alpha_k$. Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, правильна нерівність:*

$$\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\alpha_k} \leq (n-1)^{-\frac{\lambda}{2} \frac{n-1}{n-2}} \cdot \frac{\prod_{i,j=1, i < j}^n |a_j - a_i|^{\frac{2(\alpha_i + \alpha_j)}{n-2}}}{\left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{\frac{\lambda}{n-2}}}. \quad (4.2.1)$$

Доведення теореми 4.2.1. Як і при доведенні теореми 3.2.1, зафіксуємо деяке натуральне $1 \leq k \leq n$ і нехай $B^{(k)}$, $a^{(k)}$ — образи відповідно множини B та точки a при відображенні $\frac{1}{z-a_k}$. Провівши міркування,

аналогічні до проведених при доведенні лема 3.2.1, для кожного $p \neq k$ отримаємо рівність

$$r(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}) = \frac{r(B_p, a_p)}{|a_p - a_k|^2}. \quad (4.2.2)$$

Також, аналогічно до лема 3.2.2, для кожного $k = \overline{1, n}$ отримаємо нерівність

$$r(B_k, a_k) \leq \frac{\left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}}}{(n-1)^{\frac{1}{2}} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n r(B_p, a_p) \right)^{\frac{1}{n-1}}}.$$

Звідси будемо мати, що

$$(r(B_k, a_k))^{\alpha_k} \leq \frac{\left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n |a_p - a_k| \right)^{\frac{2\alpha_k}{n-1}}}{(n-1)^{\frac{\alpha_k}{2}} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n r(B_p, a_p) \right)^{\frac{\alpha_k}{n-1}}}. \quad (4.2.3)$$

Тоді, враховуючи (4.2.3) і те, що $\lambda := \sum_{k=1}^n \alpha_k$, отримаємо

$$\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\alpha_k} \leq (n-1)^{-\frac{\lambda}{2}} \cdot \frac{\prod_{i,j=1, i < j}^n |a_j - a_i|^{\frac{2(\alpha_i + \alpha_j)}{n-1}}}{\left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{\frac{\lambda}{n-1}}} \left(\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\alpha_k} \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

З останньої нерівності отримаємо:

$$\left(\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\alpha_k} \right)^{1 - \frac{1}{n-1}} \leq (n-1)^{-\frac{\lambda}{2}} \frac{\prod_{i,j=1, i < j}^n |a_j - a_i|^{\frac{2(\alpha_i + \alpha_j)}{n-1}}}{\left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{\frac{\lambda}{n-1}}}.$$

А звідси, підносячи обидві частини останньої нерівності до степеня $\frac{n-1}{n-2}$, і отримаємо нерівність (4.2.1).

Теорему 4.2.1 доведено.

Правильний наступний наслідок:

Наслідок 4.2.1. *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок комплексної площини, α_k , $k = \overline{1, n}$, — деякі додатні дійсні числа. Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, правильна нерівність:*

$$\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\alpha_k + \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k}{n-2}} \leq (n-1)^{-\frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k}{2} \frac{n-1}{n-2}} \prod_{i,j=1, i < j}^n |a_j - a_i|^{\frac{2(\alpha_i + \alpha_j)}{n-2}}.$$

Введемо наступні позначення. Нехай $I_0(n) = \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)$ і $I(n; \{\alpha_k\}_{k=1}^n) = \prod_{k=1}^n r^{\alpha_k}(B_k, a_k)$. Тоді з теореми 4.2.1 випливає наступний наслідок:

Наслідок 4.2.2. *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок комплексної площини, α_k , $k = \overline{1, n}$, — деякі додатні дійсні числа, і нехай $\lambda := \sum_{k=1}^n \alpha_k$. Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, правильна нерівність:*

$$I_0^{\frac{\lambda}{n-2}}(n) I(n; \{\alpha_k\}_{k=1}^n) \leq (n-1)^{-\frac{\lambda}{2} \frac{n-1}{n-2}} \prod_{i,j=1, i < j}^n |a_j - a_i|^{\frac{2(\alpha_i + \alpha_j)}{n-2}}.$$

Якщо в теоремі 4.2.1 накласти умову, що внутрішні радіуси областей B_k не можуть бути меншими деякого додатнього числа ε , це дозволить отримати оцінку виразу (4.1.1), не використовуючи значень внутрішніх радіусів областей в правій частині нерівності.

Наслідок 4.2.3. Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок комплексної площини, α_k , $k = \overline{1, n}$, — деякі додатні дійсні числа, і нехай $\lambda := \sum_{k=1}^n \alpha_k$. Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, а також за умови, що $r(B_k, a_k) \geq \varepsilon$ для деякого $\varepsilon > 0$ і для всіх $k = \overline{1, n}$, правильна нерівність:

$$\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\alpha_k} \leq \varepsilon^{-\frac{n\lambda}{n-2}} (n-1)^{-\frac{\lambda}{2} \frac{n-1}{n-2}} \prod_{i,j=1, i < j}^n |a_j - a_i|^{\frac{2(\alpha_i + \alpha_j)}{n-2}}. \quad (4.2.4)$$

Правильність нерівності (4.2.4) випливає з нерівності (4.2.1) та з умови, що $r(B_k, a_k) \geq \varepsilon$ для всіх $k = \overline{1, n}$.

Для випадку однозв'язних областей та конформного радіуса теорему 4.2.1 можна записати в наступній формі:

Теорема 4.2.1*. Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок комплексної площини, α_k , $k = \overline{1, n}$, — деякі додатні дійсні числа, і нехай $\lambda := \sum_{k=1}^n \alpha_k$. Тоді для довільного набору функцій f_k , $k = \overline{1, n}$, регулярних і однолистих в крузі $|z| < 1$, для яких $f_k(0) = a_k$, причому $f_i(z_1) \neq f_j(z_2)$ для довільних натуральних $1 \leq i, j \leq n$ та $i \neq j$ та довільних $z_1, z_2 \in U$, правильна нерівність:

$$\prod_{k=1}^n |f'_k(0)|^{\alpha_k} \leq (n-1)^{-\frac{\lambda}{2} \frac{n-1}{n-2}} \frac{\prod_{i,j=1, i < j}^n |a_j - a_i|^{\frac{2(\alpha_i + \alpha_j)}{n-2}}}{\left(\prod_{k=1}^n |f'_k(0)| \right)^{\frac{\lambda}{n-2}}}. \quad (4.2.5)$$

Використовуючи отриману вище теорему 4.2.1, доведемо наступний результат.

Теорема 4.2.2. [196] Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок комплексної площини, і нехай γ_k , $k = \overline{1, n}$, — деякі додатні дійсні числа, причому $\gamma_k \geq \frac{\sum_{s=1}^n \gamma_s}{2n-2}$ для

кожного $k = \overline{1, n}$. Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, правильна нерівність:

$$\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\gamma_k} \leq (n-1)^{-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \gamma_k} \prod_{i,j=1, i < j}^n |a_j - a_i|^{\frac{2}{n-2} \left(\gamma_i + \gamma_j - \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \gamma_k \right)}. \quad (4.2.6)$$

Зауважимо, що умова $\gamma_k \geq \frac{\sum_{s=1}^n \gamma_s}{2n-2}$ є суттєвою, оскільки в протилежному випадку при виконанні всіх інших умов теореми 4.2.2 для деяких наборів областей B_k і точок a_k нерівність (4.2.6) може і не виконуватися. В той же час в даній теоремі не накладено ніяких додаткових умов на внутрішні радіуси областей B_k , на відміну від, наприклад, наслідку 4.2.3.

Доведення теореми 4.2.2.

Для того, щоб використати нерівність, отриману в наслідку 4.2.1, знайдемо такі числа α_k , щоб для кожного k була правильною рівність $\gamma_k = \alpha_k + \frac{\sum_{s=1}^n \alpha_s}{n-2}$, тобто наступні рівності:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \alpha_1 + \frac{\sum_{s=1}^n \alpha_s}{n-2}; \\ \gamma_2 &= \alpha_2 + \frac{\sum_{s=1}^n \alpha_s}{n-2}; \\ &\dots \\ \gamma_k &= \alpha_k + \frac{\sum_{s=1}^n \alpha_s}{n-2}; \\ &\dots \\ \gamma_n &= \alpha_n + \frac{\sum_{s=1}^n \alpha_s}{n-2}. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Додавши всі рівності в (4.2.7), отримаємо:

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k = \frac{2n-2}{n-2} \sum_{k=1}^n \alpha_k,$$

а звідси

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = \frac{n-2}{2n-2} \sum_{k=1}^n \gamma_k. \quad (4.2.8)$$

Підставивши рівність (4.2.8) в кожну з рівностей (4.2.7), для кожного $k = \overline{1, n}$ отримаємо:

$$\gamma_k = \alpha_k + \frac{\sum_{s=1}^n \gamma_s}{2n-2},$$

а звідси

$$\alpha_k = \gamma_k - \frac{1}{2n-2} \sum_{s=1}^n \gamma_s.$$

З нерівності (4.2.1) для степенів α_k отримаємо:

$$\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\alpha_k + \frac{\lambda}{n-2}} \leq (n-1)^{-\frac{\lambda}{2} \frac{n-1}{n-2}} \prod_{i,j=1, i < j}^n |a_j - a_i|^{\frac{2(\alpha_i + \alpha_j)}{n-2}}, \quad (4.2.9)$$

де $\lambda = \sum_{k=1}^n \alpha_k$.

Крім того, будемо мати:

$$\alpha_k + \frac{\lambda}{n-2} = \gamma_k;$$

$$-\frac{\lambda}{2} \frac{n-1}{n-2} = -\frac{n-2}{2n-2} \frac{n-1}{2(n-2)} \sum_{k=1}^n \gamma_k = -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \gamma_k;$$

$$\frac{2(\alpha_i + \alpha_j)}{n-2} = \frac{2}{n-2} \left(\gamma_i + \gamma_j - \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \gamma_k \right).$$

Підставивши останні рівності в нерівність (4.2.9), отримаємо нерівність (4.2.6).

Теорему 4.2.2 доведено.

Для випадку однозв'язних областей та конформного радіуса теорему 4.2.2 можна записати в наступній формі:

Теорема 4.2.2*. *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок комплексної площини, і нехай γ_k , $k = \overline{1, n}$, — деякі додатні дійсні числа, причому $\gamma_k > \frac{\sum_{s=1}^n \gamma_s}{2n-2}$ для кожного $k = \overline{1, n}$. Тоді для довільного набору функцій f_k , $k = \overline{1, n}$, регулярних і однолистих в крузі $|z| < 1$, для яких $f_k(0) = a_k$, причому $f_i(z_1) \neq f_j(z_2)$ для довільних натуральних $1 \leq i, j \leq n$ та $i \neq j$ та довільних $z_1, z_2 \in U$, правильна нерівність:*

$$\prod_{k=1}^n |f'_k(0)|^{\gamma_k} \leq (n-1)^{-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \gamma_k} \prod_{i,j=1, i < j}^n |f_j(0) - f_i(0)|^{\frac{2}{n-2} \left(\gamma_i + \gamma_j - \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \gamma_k \right)}.$$

З теореми 4.2.2 випливає наступний наслідок:

Наслідок 4.2.4. *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок комплексної площини, і нехай γ_k , $k = \overline{1, n}$, — деякі додатні дійсні числа, причому*

$$\gamma_k \geq \frac{\sum_{s=1}^n \gamma_s}{2n-2}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, правильна нерівність:

$$P(n; \{B_k\}_{k=1}^n; \{a_k\}_{k=1}^n; \{\gamma_k\}_{k=1}^n) \leq (n-1)^{-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \gamma_k}.$$

Зауваження 4.2.1. Для кожного натурального $n \geq 2$ і деяких наборів додатніх чисел $\{\alpha_k\}$ і $\{\gamma_k\}$, $k = \overline{1, n}$, функціонал $I_n(\alpha_k) = \prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\alpha_k}$ будемо називати спряженим до функціонала $I_n(\gamma_k) = \prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\gamma_k}$, якщо для них виконуються рівності $\gamma_k = \alpha_k + \frac{1}{n-2} \sum_{k=1}^n \alpha_k$ і $\alpha_k = \gamma_k - \frac{1}{2n-2} \sum_{k=1}^n \gamma_k$. Таким чином, ми оцінюємо функціонал $I_n(\gamma_k)$ за допомогою спряженого функціонала.

Зауваження 4.2.2. Рівності (4.2.7) можна розглядати як систему n рівнянь з невідомими $\{\alpha_k\}$ для $k = \overline{1, n}$, задану матричним рівнянням

$$AX = B, \quad (4.2.10)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} \frac{n-1}{n-2} & \frac{1}{n-2} & \cdots & \frac{1}{n-2} \\ \frac{1}{n-2} & \frac{n-1}{n-2} & \cdots & \frac{1}{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n-2} & \frac{1}{n-2} & \cdots & \frac{n-1}{n-2} \end{pmatrix};$$

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ і } B = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \cdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}.$$

Знайшовши обернену матрицю A^{-1} і помноживши її на обидві частини рівності (4.2.10), отримаємо матрицю X .

Правильні наступні твердження.

Наслідок 4.2.5. *Нехай $\{a_k\}_{k=1}^3$ і $\{B_k\}_{k=1}^3$ — деякий набір відповідно точок і областей комплексної площини, причому $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$. Тоді правильна нерівність:*

$$\prod_{k=1}^3 r(B_k, a_k) \leq 2^{-\frac{3}{4}} |a_2 - a_1| |a_3 - a_1| |a_3 - a_2|.$$

Для доведення даного наслідку достатньо поставити в нерівності (4.2.6) $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1$.

Оскільки $2^{-\frac{3}{4}} \approx 0.5946$, а $\frac{64}{81\sqrt{3}} \leq 0.4562$, то наша оцінка ненабагато поступається точній оцінці Г.М. Голузіна [83, с. 165].

Наслідок 4.2.6. *Нехай $\{a_k\}_{k=1}^3$ і $\{B_k\}_{k=1}^3$ — деякий набір відповідно точок і областей комплексної площини, причому $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, і γ_k ,*

$k = \overline{1, 3}$ — деякі додатні дійсні числа, причому $\gamma_k \geq \frac{\sum_{k=1}^3 \gamma_k}{4}$ для довільного $k = \overline{1, 3}$. Тоді правильна нерівність:

$$\prod_{k=1}^3 (r(B_k, a_k))^{\alpha_k} \leq 2^{-\frac{\sum_{k=1}^3 \gamma_k}{4}} |a_1 - a_2|^{\alpha+\beta-\gamma} |a_1 - a_3|^{\alpha-\beta+\gamma} |a_2 - a_3|^{-\alpha+\beta+\gamma}.$$

Зауваження 4.2.3. Оцінка, отримана в теоремі 4.2.2, для багатьох окремих випадків точніша за оцінку, отриману в Теоремі 1 [132, с. 220]. Розглянемо, наприклад, наступну конфігурацію: $a_3 = 0$, $a_k = \exp(\frac{2\pi i}{3}k)$, $k = \overline{0, 2}$ і $\gamma_k = 1$, $k = \overline{0, 3}$. Тоді за нерівністю (4.2.6) отримаємо:

$$\prod_{k=0}^3 (r(B_k, a_k))^{\gamma_k} \leq \frac{1}{3} \left((\sqrt{3})^3 \right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Взявши ж в нерівності Теоремі 1 [132, с. 220] $\gamma_0 = \gamma_1 = 1$; $\gamma_2 = \gamma_3 = -1$, отримаємо:

$$\prod_{k=0}^3 (r(B_k, a_k))^{\gamma_k} \leq (\sqrt{3})^2 (\sqrt{3})^2 (\sqrt{3})^{-2} = 3.$$

Таким чином, для вказаної конфігурації наша оцінка точніша.

У випадку, коли одна з точок a_k є нескінченно віддаленою, в правій частині нерівності (4.2.6) всі множники, які містять дану точку, перетворюються на одиницю. Зокрема, правильна теорема.

Теорема 4.2.3. [196] Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок комплексної площини, причому $a_n = \infty$, і нехай γ_k , $k = \overline{1, n}$, — деякі додатні дійсні числа, причому $\gamma_k \geq \frac{\sum_{s=1}^n \gamma_s}{2n-2}$ для $\forall k = \overline{1, n}$. Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, правильна

нерівність:

$$(r(B_n, a_n))^{\gamma_n} \prod_{k=1}^{n-1} (r(B_k, a_k))^{\gamma_k} \leq (n-1)^{-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \gamma_k} \prod_{i,j=1, i < j}^{n-1} |a_j - a_i|^{\frac{2}{n-2} \left(\gamma_i + \gamma_j - \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \gamma_k \right)}. \quad (4.2.11)$$

Доведення теореми 4.2.3. Правильна лема, аналогічна до теореми 4.2.1.

Лема 4.2.1. Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок комплексної площини, причому $a_n = \infty$, і нехай α_k , $k = \overline{1, n}$, — деякі додатні дійсні числа. Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, правильна нерівність:

$$\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\alpha_k} \leq (n-1)^{-\frac{\lambda}{2} \frac{n-1}{n-2}} \cdot \frac{\prod_{i,j=1, i < j}^{n-1} |a_j - a_i|^{\frac{2(\alpha_i + \alpha_j)}{n-2}}}{\left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{\frac{\lambda}{n-2}}}, \quad (4.2.12)$$

$$\text{де } \lambda := \sum_{k=1}^n \alpha_k.$$

Як і в теоремі 4.2.1, зафіксуємо деяке натуральне k таке, що $1 \leq k \leq n-1$. Провівши перетворення, аналогічні до проведених в лемі 3.2.2, отримаємо

$$r(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n r(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}) \right)^{-\frac{1}{n-1}}. \quad (4.2.13)$$

Доведемо, що $r(B_n^{(k)}, a_n^{(k)}) = r(B_n^{(k)}, 0) = r(B_n, \infty)$.

Використовуючи конформну інваріантність функції Гріна для відображення $w = \frac{1}{z-a_k}$, враховуючи, що $a_n^{(k)} = 0$, будемо мати:

$$\begin{aligned} G_{B_n}(z, \infty) &= G_{B_n^{(k)}}(w, 0) = \ln \frac{1}{|w|} + \ln r(B_n^{(k)}, 0) + o(1) = \\ &= \ln \frac{1}{\left| \frac{1}{z-a_k} \right|} + \ln r(B_n^{(k)}, 0) + o(1) = \ln |z - a_k| + \ln r(B_n^{(k)}, 0) + o(1) = \\ &= \ln |z| + \ln \left| 1 - \frac{a_k}{z} \right| + \ln r(B_n^{(k)}, 0) + o(1) = \\ &= \ln |z| + \ln r(B_n^{(k)}, 0) + o(1), \end{aligned}$$

а звідси і випливає рівність $r(B_n^{(k)}, 0) = r(B_n, \infty)$.

Для $1 \leq p \leq n-1$, $p \neq k$, провівши перетворення, як і в лемі 3.2.1, отримаємо рівність $r(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}) = \frac{r(B_p, a_p)}{|a_p - a_k|^2}$.

Таким чином, з (4.2.13) для $1 \leq k \leq n-1$ отримаємо:

$$r(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{n-1} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n r(B_p, a_p) \right)^{-\frac{1}{n-1}}.$$

Звідси будемо мати

$$(r(B_k, a_k))^{\alpha_k} \leq (n-1)^{-\frac{\alpha_k}{2}} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{n-1} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2\alpha_k}{n-1}} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n r(B_p, a_p) \right)^{-\frac{\alpha_k}{n-1}}. \quad (4.2.14)$$

Якщо ж $k = n$, то отримаємо нерівність, аналогічну до (4.2.13)

$$\begin{aligned} r(B_n, \infty) &\leq (n-1)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{p=1}^{n-1} r(B_p, a_p) \right)^{-\frac{1}{n-1}}. \\ (r(B_n, \infty))^{\alpha_n} &\leq (n-1)^{-\frac{\alpha_n}{2}} \left(\prod_{p=1}^{n-1} r(B_p, a_p) \right)^{-\frac{\alpha_n}{n-1}}. \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

Перемноживши для $k = \overline{1, n}$ нерівності (4.2.14) і (4.2.15), отримаємо нерівність (4.2.12).

Далі, позначивши $\gamma_k = \alpha_k + \frac{\lambda}{n-2}$, і провівши перетворення, аналогічні до проведених в теоремі 4.2.2, і отримаємо нерівність (4.2.11).

Теорему 4.2.3 доведено.

4.3. Оцінки добутку деяких степенів внутрішніх радіусів еволюційного типу

Метою даного підрозділу є отримання оцінок еволюційного типу для добутку деяких степенів внутрішніх радіусів неперетинних областей. Дані оцінки можуть бути корисними, наприклад, тоді, коли нам відомі точні оцінки для певної фіксованої конфігурації точок a_k та певного набору степенів θ_k , а нам потрібно знайти оцінки для цієї ж конфігурації точок, однак для іншого набору степенів α_k . Отримані таким чином оцінки можуть бути точнішими, ніж отримані безпосередньо.

Правильна лема.

Лема 4.3.1. [214] *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок комплексної площини, α_k , $k = \overline{1, n}$, — деякі додатні дійсні числа, і нехай $\lambda := \sum_{k=1}^n \alpha_k$, причому всі $\alpha_k \geq \frac{\lambda}{2n-2}$. Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, і для довільного набору невід’ємних дійсних чисел δ_k , $k = \overline{1, n}$, таких, що $\delta_k \leq \alpha_k$, $k = \overline{1, n}$, правильна нерівність:*

$$\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\alpha_k} \leq (n-1)^{-\frac{\sum_{k=1}^n \delta_k}{2} \frac{n-1}{n-2}} \cdot \prod_{i,j=1, i < j}^n |a_j - a_i|^{\frac{2(\delta_i + \delta_j)}{n-2}} \prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\alpha_k - \delta_k - \frac{\sum_{k=1}^n \delta_k}{n-2}}. \quad (4.3.1)$$

Доведення лема 4.3.1. Зауважимо, що, згідно з теоремою 4.2.1, умова $\alpha_k \geq \frac{\lambda}{2^{n-2}}$, $k = \overline{1, n}$, є достатньою для того, щоб функціонал $\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\alpha_k}$ був обмеженим.

Правильні наступні рівності:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\alpha_k} &= \prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\alpha_k - \delta_k + \delta_k} = \\ &= \prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\alpha_k - \delta_k} \prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\delta_k}. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Згідно з результатом теореми 4.2.1, правильна нерівність

$$\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\delta_k} \leq (n-1)^{-\frac{\sum_{s=1}^n \delta_s}{2} \frac{n-1}{n-2}} \cdot \frac{\prod_{i,j=1, i < j}^n |a_j - a_i|^{\frac{2(\delta_i + \delta_j)}{n-2}}}{\left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{\frac{\sum_{k=1}^n \delta_k}{n-2}}}.$$

Підставивши останню нерівність в рівність (4.3.2), отримаємо:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\alpha_k} &\leq \prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\alpha_k - \delta_k} \frac{1}{(n-1)^{\frac{\sum_{s=1}^n \delta_s}{2} \frac{n-1}{n-2}}} \cdot \frac{\prod_{i,j=1, i < j}^n |a_j - a_i|^{\frac{2(\delta_i + \delta_j)}{n-2}}}{\left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{\frac{\sum_{s=1}^n \delta_s}{n-2}}} = \\ &= (n-1)^{-\frac{\sum_{k=1}^n \delta_k}{2} \frac{n-1}{n-2}} \prod_{i,j=1, i < j}^n |a_j - a_i|^{\frac{2(\delta_i + \delta_j)}{n-2}} \prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\alpha_k - \delta_k - \frac{\sum_{s=1}^n \delta_s}{n-2}}, \end{aligned}$$

що й доводить нерівність (4.3.1).

Лему 4.3.1 доведено.

Таким чином, вибираючи числа δ_k , ми можемо отримувати оцінки для функціонала (4.1.1) за допомогою значень функціонала для інших степенів внутрішніх радіусів.

Правильна наступна теорема.

Теорема 4.3.1. [214] Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок комплексної площини, α_k , θ_k , $k = \overline{1, n}$, — деякі додатні дійсні числа, які задовольняють наступні умови:

- а) всі $\alpha_k \geq \frac{\lambda}{2n-2}$, де $\lambda := \sum_{k=1}^n \alpha_k$;
- б) $\alpha_k \geq \theta_k$ для $\forall k = \overline{1, n}$;
- в) для довільного $k = \overline{1, n}$ виконується нерівність

$$\theta_k \leq \alpha_k - \frac{1}{2n-2} \sum_{s=1}^n (\alpha_s - \theta_s). \quad (4.3.3)$$

Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$ правильна нерівність:

$$\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\alpha_k} \leq (n-1)^{-\frac{\sum_{k=1}^n (\alpha_k - \theta_k)}{4}} \cdot \prod_{i,j=1, i < j}^n |a_j - a_i|^{\frac{2}{n-2} \left(\alpha_i + \alpha_j - \theta_i - \theta_j - \frac{\sum_{k=1}^n (\alpha_k - \theta_k)}{n-1} \right)} \prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\theta_k}. \quad (4.3.4)$$

Доведення теореми 4.3.1. Відзначимо, що, як і в лемі 4.3.1, умова $\alpha_k \geq \frac{\lambda}{2n-2}$, $k = \overline{1, n}$, нам потрібна для того, щоб функціонал $\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\alpha_k}$ був обмеженим.

Використовуючи лему 4.3.1, знайдемо умови, для яких всі степені, до яких підносяться $r(B_k, a_k)$ в правій частині рівності (4.3.1), дорівнюють наперед заданим числам θ_k . Іншими словами, нам потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{aligned}
\alpha_1 - \delta_1 - \frac{\sum_{k=1}^n \delta_k}{n-2} &= \theta_1; \\
\alpha_2 - \delta_2 - \frac{\sum_{k=1}^n \delta_k}{n-2} &= \theta_2; \\
&\dots \\
\alpha_s - \delta_s - \frac{\sum_{k=1}^n \delta_k}{n-2} &= \theta_s; \\
&\dots \\
\alpha_n - \delta_n - \frac{\sum_{k=1}^n \delta_k}{n-2} &= \theta_n.
\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Додавши всі рівності в системі (4.3.5), отримаємо

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k - \frac{2n-2}{n-2} \sum_{k=1}^n \delta_k = \sum_{k=1}^n \theta_k,$$

а звідси

$$\sum_{k=1}^n \delta_k = \frac{n-2}{2n-2} \sum_{k=1}^n (\alpha_k - \theta_k).$$

Підставивши останню рівність в кожну з рівностей (4.3.5), для кожного $k = \overline{1, n}$ отримаємо:

$$\delta_k = \alpha_k - \theta_k - \frac{1}{n-2} \sum_{k=1}^n \delta_k = \alpha_k - \theta_k - \frac{1}{2n-2} \sum_{k=1}^n (\alpha_k - \theta_k).$$

Зауваживши, що згідно з (4.3.3) для кожного $k = \overline{1, n}$ правильна нерівність $\delta_k \geq 0$.

Підставивши останні рівності в нерівність (4.3.1), отримаємо нерівність (4.3.4).

Теорему 4.3.1 доведено.

Наслідок 4.3.1. [214] Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок комплексної площини, α_k , $k = \overline{1, n}$, — деякі додатні дійсні числа, причому для довільного $k = \overline{1, n}$ $\alpha_k > 1$ і

$$\alpha_k \geq 1 + \frac{\sum_{s=1}^n \alpha_s - n}{2n - 2}. \quad (4.3.6)$$

Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, правильна нерівність:

$$\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\alpha_k} \leq (n-1)^{-\frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k - n}{4}} \cdot \prod_{i,j=1, i < j}^n |a_j - a_i|^{\frac{2}{n-2} \left(\alpha_i + \alpha_j - \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k + 3n - 2}{n-1} \right)} \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k).$$

Для доведення даного наслідку достатньо покласти в нерівності (4.3.4) всі $\theta_k = 1$.

Зауважимо, що умова (4.3.6) потрібна для виконання умови (4.3.3).

Наслідок 4.3.2. [214] Нехай a_k , $k = \overline{1, 4}$, — деякий набір фіксованих точок комплексної площини, α_k , $k = \overline{1, 4}$ — деякі додатні дійсні числа, причому

$$\alpha_k \geq 1 + \frac{\sum_{s=1}^4 \alpha_s - 4}{6}.$$

Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, 4}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, 4}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, правильна нерівність

$$\prod_{k=1}^4 (r(B_k, a_k))^{\alpha_k} \leq \frac{9}{4^{8/3}} \cdot 3^{-\frac{\sum_{k=1}^4 \alpha_k - 4}{4}} \prod_{i,j=1, i < j}^4 |a_j - a_i|^{\left(\alpha_i + \alpha_j - \frac{\sum_{k=1}^4 \alpha_k}{3} - \frac{8}{3} \right)}.$$

Для доведення даного наслідку достатньо відзначити, що, згідно з теоремою 2 роботи [121], правильна нерівність

$$\prod_{k=1}^4 r(B_k, a_k) \leq \frac{9}{4^{8/3}} \left(\prod_{1 \leq k < l \leq 4} |a_l - a_k| \right)^{\frac{2}{3}},$$

і підставити даний вираз в нерівність (4.3.6).

Відзначимо, що використовуючи наслідок 4.2.3, можна отримати де-що інші оцінки еволюційного типу, однак з певними обмеженнями на внутрішні радіуси областей. Зокрема, правильна така теорема.

Теорема 4.3.2. *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок комплексної площини, α_k, θ_k , $k = \overline{1, n}$, — деякі додатні дійсні числа, причому $\alpha_k \geq \theta_k$ для $\forall k = \overline{1, n}$. Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, а також за умови, що $r(B_k, a_k) \geq \varepsilon$ для деякого $\varepsilon > 0$ для всіх $k = \overline{1, n}$, правильна нерівність:*

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\alpha_k} &\leq \varepsilon^{-\frac{n}{n-2} \sum_{k=1}^n (\alpha_k - \theta_k)} (n-1)^{-\frac{\sum_{k=1}^n (\alpha_k - \theta_k)}{4} \frac{n-1}{n-2}} \\ &\cdot \prod_{i,j=1, i < j}^n |a_j - a_i|^{\frac{2}{n-2}(\alpha_i + \alpha_j - \theta_i - \theta_j)} \prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\theta_k}. \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Відзначимо, що умова $r(B_k, a_k) \geq \varepsilon$ дозволяє не накладати додаткових умов на степені α_k , наприклад, що всі $\alpha_k \geq \frac{\lambda}{2n-2}$, де $\lambda := \sum_{k=1}^n \alpha_k$, як це було в теоремах 4.2.2 і 4.3.1.

Доведення теореми 4.3.2. Зрозуміло, що

$$\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\alpha_k} = \prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\alpha_k - \theta_k} \prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\theta_k}.$$

Застосувавши до виразу $\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\alpha_k - \theta_k}$ нерівність (4.2.4) та підставивши в попередню рівність, отримаємо нерівність (4.3.7).

Теорему 4.3.2 доведено.

Наслідок 4.3.3. Нехай a_k , $k = \overline{1,4}$, — деякий набір фіксованих точок комплексної площини, α_k , $k = \overline{1,4}$, — деякі додатні дійсні числа, причому $\alpha_k \geq 1$ для всіх k . Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,4}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,4}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, а також за умови, що $r(B_k, a_k) \geq \varepsilon$ для деякого $\varepsilon > 0$ для всіх $k = \overline{1,4}$, правильна нерівність:

$$\prod_{k=1}^4 (r(B_k, a_k))^{\alpha_k} \leq \frac{9}{4^{8/3}} \cdot \varepsilon^{-\frac{\sum_{k=1}^4 \alpha_k - 4}{2}} \cdot 3^{-\frac{3 \left(\sum_{k=1}^4 \alpha_k - 4 \right)}{8}} \prod_{i,j=1, i < j}^4 |a_j - a_i|^{(\alpha_i + \alpha_j - \frac{4}{3})}.$$

Для доведення даного наслідку достатньо відзначити, що, згідно з теоремою 2 роботи [121], правильна нерівність

$$\prod_{k=1}^4 r(B_k, a_k) \leq \frac{9}{4^{8/3}} \left(\prod_{1 \leq k < l \leq 4} |a_l - a_k| \right)^{\frac{2}{3}},$$

і підставити даний вираз в нерівність (4.3.7), взявши в згаданій нерівності $n = 4$ та $\theta_k = 1$ для $k = \overline{1,4}$.

4.4. Застосування отриманих оцінок в інших екстремальних задачах геометричної теорії функцій

Отримана в нерівності (4.2.6) оцінка може бути застосована і для оцінки функціонала

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k), \quad (4.4.1)$$

де $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0; n]$ $a_0 = 0$, $|a_1| = \dots = |a_n| = 1$, $a_k \in B_k \in \overline{\mathbb{C}}$, де $B_i \cap B_j = \emptyset$ для $0 \leq i, j \leq n$ та $i \neq j$. Правильна наступна теорема.

Теорема 4.4.1. [196] Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ і $0 < \gamma \leq n$. Тоді для довільного набору точок a_k , таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, і довільного

набору взаємно неперетинних областей B_k , таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, у випадку $n = 2m$ для деякого $m \in \mathbb{N}$ правильна нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq n^{-\frac{\gamma+n}{4}} 2^{n-\gamma} \left(\prod_{k=1}^{m-1} \sin \frac{k\pi}{n} \right)^{\frac{2(n-\gamma)}{n-1}}; \quad (4.4.2)$$

якщо ж якщо $n = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}$, то нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq n^{-\frac{\gamma+n}{4}} 2^{n-\gamma} \left(\prod_{k=1}^m \sin \frac{k\pi}{n} \right)^{\frac{2(n-\gamma)}{n-1}}. \quad (4.4.3)$$

Доведення теореми 4.4.1. Застосуємо нерівність (4.2.6) для $n + 1$ областей для функціонала (4.4.1), взявши $\gamma_0 = \gamma$ і $\gamma_k = 1$ для $k = \overline{1, n}$. Отримаємо наступну нерівність:

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq n^{-\frac{\gamma+n}{4}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |a_j - a_i|^{\frac{2}{n-1} \left(1 - \frac{\gamma}{n}\right)}. \quad (4.4.4)$$

Нехай, для конкретності,

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \dots < \arg a_n < 2\pi.$$

Позначимо

$$\begin{aligned} \alpha_1 &:= \frac{1}{\pi}(\arg a_2 - \arg a_1), & \alpha_2 &:= \frac{1}{\pi}(\arg a_3 - \arg a_2) \dots \\ \alpha_n &:= \frac{1}{\pi}(2\pi - \arg a_n), & \alpha_0 &= \max_k \alpha_k. \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Звідси

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} |a_j - a_i| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} 2 \sin \frac{\pi(\alpha_i + \dots + \alpha_{j-1})}{2}. \quad (4.4.6)$$

Врахувавши, що $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 2$, і, дослідивши добуток, записаний в правій частині нерівності (4.4.6), отримаємо, що максимум даного виразу

досягається тоді, коли всі α_k рівні між собою, а тому для $n = 2m$ отримаємо

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(2 \sin \frac{\pi(\alpha_i + \dots + \alpha_{j-1})}{2} \right) \leq 2^{\frac{n^2-n}{2}} \left(\prod_{k=1}^{m-1} \sin \frac{k\pi}{n} \right)^n.$$

Підставивши отриману нерівність в (4.4.4), будемо мати:

$$\begin{aligned} r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) &\leq n^{-\frac{\gamma+n}{4}} \left(2^{\frac{n^2-n}{2}} \left(\prod_{k=1}^{m-1} \sin \frac{k\pi}{n} \right)^n \right)^{\frac{2(n-\gamma)}{n(n-1)}} = \\ &= n^{-\frac{\gamma+n}{4}} 2^{n-\gamma} \left(\prod_{k=1}^{m-1} \sin \frac{k\pi}{n} \right)^{\frac{2(n-\gamma)}{n-1}}. \end{aligned}$$

що й доводить нерівність (4.4.2).

Якщо ж $n = 2m + 1$, то отримаємо

$$\prod_{1 \leq p < k \leq n} \left(2 \sin \frac{\pi(\alpha_p + \dots + \alpha_{k-1})}{2} \right) \leq 2^{\frac{n^2-n}{2}} \left(\prod_{k=1}^m \sin \frac{k\pi}{n} \right)^n.$$

Далі, підставивши отриману нерівність в (4.4.4), будемо мати:

$$\begin{aligned} r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) &\leq n^{-\frac{\gamma+n}{4}} \left(2^{\frac{n^2-n}{2}} \left(\prod_{k=1}^m \sin \frac{k\pi}{n} \right)^n \right)^{\frac{2(n-\gamma)}{n(n-1)}} = \\ &= n^{-\frac{\gamma+n}{4}} 2^{n-\gamma} \left(\prod_{k=1}^m \sin \frac{k\pi}{n} \right)^{\frac{2(n-\gamma)}{n-1}}. \end{aligned}$$

що й доводить (4.4.3).

Теорему 4.4.1 доведено.

Однак, за допомогою нерівностей еволюційного типу, доведених в теоремі 4.3.1, можна отримати дещо інші оцінки функціонала (4.4.1).

Припустимо для конкретності, що

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \dots < \arg a_n < 2\pi.$$

Нехай також α_k , $k = \overline{1, n}$, та α_0 — такі ж, як і в (4.4.5).

Зауважимо, що в роботі [114] було знайдено максимум виразу (4.4.1) для довільного $n \geq 5$ і $\alpha_0 \leq \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$, тому нам достатньо розглянути випадок $\alpha_0 > \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$. Для зручності візьмемо $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$. Відзначимо також, що вираз (4.4.1) при виконанні всіх умов проблеми 2.1.1 інваріантний стосовно повороту відносно початку координат на довільний кут, а тому, не зменшуючи загальності, можна взяти $\alpha_n = \alpha_0$, оскільки для довільної конфігурації точок a_k і областей B_k завжди можна знайти таку конфігурацію, де $a_1 = 1$ і $\alpha_n = \alpha_0$, причому значення виразу (4.4.1) не зміниться.

Правильна наступна лема.

Лема 4.4.1. *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 2$, і γ — деяке дійсне число, $1 < \gamma < \frac{n}{2}$. Тоді для довільного набору точок a_k , $k = \overline{0, n}$, таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, і довільного набору попарно неперетинних областей B_k , таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{0, n}$, правильна нерівність*

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq n^{\frac{3n-2\gamma+1}{8}} \prod_{i,j=1, i < j}^n |a_j - a_i|^{\frac{n-2\gamma+1}{n(n-1)}} \cdot \left(\frac{4}{n^2 - 1} \right)^{\frac{n}{2} + \frac{1}{2n}} \left(\frac{n-1}{n+1} \right). \quad (4.4.7)$$

Доведення лема 4.4.1. Знайдемо спочатку оцінку виразу

$$r^{2\gamma}(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r^2(B_k, a_k) = \left(r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^2.$$

Для цього в нерівності (4.3.4) для системи $n+1$ областей B_k і точок a_k , $k = \overline{0, n}$, візьмемо $\alpha_0 = 2\gamma$, $\alpha_k = 2$ для $k = \overline{1, n}$ і $\theta_k = 1$ для $k = \overline{0, n}$. Для даної конфігурації отримаємо, що

$$\sum_{k=0}^n (\alpha_k - \theta_k) = 2\gamma + n - 1; \quad |a_k - a_0| = 1, \quad k = \overline{1, n}; \quad (4.4.8)$$

$$\alpha_i + \alpha_j - \theta_i - \theta_j - \frac{\sum_{k=0}^n (\alpha_k - \theta_k)}{n} = 1 - \frac{2\gamma - 1}{n}, \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

Підставивши рівності (4.4.8) в нерівність (4.3.4), отримаємо

$$r^{2\gamma}(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r^2(B_k, a_k) \leq n^{-\frac{2\gamma+n-1}{4}} \cdot \prod_{i,j=1, i<j}^n |a_j - a_i|^{\frac{2}{n-1}(1-\frac{2\gamma-1}{n})} \prod_{k=0}^n (r(B_k, a_k)). \quad (4.4.9)$$

Зауважимо, що для виразу (4.4.1) для випадку довільного $n \geq 2$ і $\gamma = 1$ було встановлено наступну нерівність (див. [64, с. 56]):

$$r(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq n^n \left(\frac{4}{n^2 - 1} \right)^{n+\frac{1}{n}} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2.$$

Підставивши дану нерівність в (4.4.9) і добувши корінь з обох частин, отримаємо нерівність (4.4.7).

Лему 4.4.1 доведено.

Правильна наступна теорема.

Теорема 4.4.2. [214] *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 2$, і γ — деяке дійсне число, $1 < \gamma < \frac{n}{2}$. Тоді для довільного набору точок a_k , $k = \overline{0, n}$, таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, причому $\alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$, де α_0 — див. (4.4.5), і довільного набору попарно неперетинних областей B_k , таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{0, n}$, правильна нерівність*

$$r^\gamma(B_0, a_0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq n^{\frac{3n-2\gamma+1}{8}} \left(\prod_{k=1}^{n-1} k^{n-k} \right)^{\frac{n-2\gamma+1}{n(n-1)}} \cdot \left(\frac{2\pi}{n-1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right) \right)^{\frac{n-2\gamma+1}{2}} \left(\frac{4}{n^2-1} \right)^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2n}} \left(\frac{n-1}{n+1} \right). \quad (4.4.10)$$

Доведення теореми 4.4.2.

Знайдемо оцінку виразу $\prod_{1 \leq i < j \leq n} |a_j - a_i|$. Будемо мати

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} |a_j - a_i| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} 2 \sin \frac{\pi(\alpha_i + \dots + \alpha_{j-1})}{2}.$$

Врахувавши, що $\sin(x) < x$ для $x > 0$, в попередній нерівності отримаємо

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} |a_j - a_i| < \pi^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i + \dots + \alpha_{j-1}). \quad (4.4.11)$$

Виконавши при наведених вище умовах, зокрема для $\alpha_n = \alpha_0 \geq \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$, елементарні дослідження виразу, який записаний у правій частині нерівності (4.4.11), отримаємо, що його максимум досягається для $\alpha_n = \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$, $\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)$ і $\alpha_k = \frac{2}{n-1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)$ для $k = \overline{1, n-1}$.

Підставивши отримані значення в нерівність (4.4.11), отримаємо нерівність

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} |a_j - a_i| < \left(\frac{2\pi}{n-1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) \right)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=1}^{n-1} k^{n-k}.$$

Підставивши наведену вище нерівність в (4.4.7), отримаємо нерівність (4.4.10).

Теорему 4.4.2 доведено.

4.5. Застосування отриманих оцінок в теоремах спотворення

Оцінки, отримані в теоремі 4.2.2, можна застосувати для отримання теорем спотворення для функцій, регулярних і однолистих в одиничному крузі.

Правильна теорема.

Теорема 4.5.1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $z_k = \rho_k \exp i\theta_k$, $k = \overline{1, n}$, — деякий набір точок відкритого одиничного круга U , $\rho_k \in (0, 1)$, $\rho_0 := \rho_n$, $\rho_{n+1} := \rho_1$, причому $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < 2\pi$, $\theta_0 := \theta_n$, $\theta_{n+1} := \theta_1$, і нехай γ_k , $k = \overline{1, n}$, — деякі додатні дійсні числа, причому $\gamma_k > \frac{\sum_{s=1}^n \gamma_s}{2n-2}$ для $\forall k = \overline{1, n}$.*

Тоді для кожної функції $f(z)$, регулярної і однолистої в U , справедлива нерівність

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n |f'(z_k)|^{\gamma_k} &\leq (n-1)^{-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \gamma_k} \prod_{k=1}^n \left(\frac{4\rho_k}{\alpha_k} \left| \frac{1 - (\rho_k \exp i\omega_k)^{\alpha_k}}{1 + (\rho_k \exp i\omega_k)^{\alpha_k}} \right| \right)^{-\gamma_k} \cdot \\ &\cdot \prod_{k=1}^n \sec^{\gamma_k} \left(\arg \left(\frac{(\rho_k \exp i\omega_k)_0^{\frac{\alpha_k}{2}}}{(1 - (\rho_k \exp i\omega_k)^{\alpha_k})} \right) \right) \cdot \\ &\cdot \prod_{1 \leq p < k \leq n} |(f(z_p) - f(z_k))^{\frac{2}{n-2} \left(\gamma_i + \gamma_j - \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \gamma_k \right)}|, \quad (4.5.1) \end{aligned}$$

де $\alpha_k = \frac{\pi}{\theta_{k+1} - \theta_{k-1}}$ і $\omega_k = \frac{1}{4} (2\theta_k - \theta_{k+1} - \theta_{k-1})$.

Доведення теореми 4.5.1. Як і в теоремі 3.4.1, нехай $\psi_k = \frac{\theta_{k-1} + \theta_k}{2}$, $k = \overline{1, n}$, і розглянемо набір секторів Δ_k , $k = \overline{1, n}$, таких, що

$$\Delta_k = \{w \in U : \psi_k < \arg w < \psi_{k+1}\}.$$

Розглянемо набір функцій $\varphi_k(z) := w_4(z \cdot \exp(-i\omega_k), \alpha_k)$, $k = \overline{1, n}$, де w_4 — див (3.4.3), $\omega_k = \frac{1}{4} (2\theta_k - \theta_{k+1} - \theta_{k-1})$ і в ролі параметра виступає $\alpha_k = \frac{\pi}{\theta_{k+1} - \theta_{k-1}}$. Для кожного $k = \overline{1, n}$ функція $\varphi_k(z)$ однолисто відображає сектор Δ_k на відкритий одиничний круг так, що $\varphi_k(z_k) = 0$, причому, згідно з рівністю (3.4.2),

$$R(\Delta_k; z_k) = \frac{4\rho_k}{\alpha_k} \left| \frac{1 - (\rho_k \exp i\omega_k)^{\alpha_k}}{1 + (\rho_k \exp i\omega_k)^{\alpha_k}} \right| \cos \left(\arg \left(\frac{(\rho_k \exp i\omega_k)_0^{\frac{\alpha}{2}}}{(1 - (\rho_k \exp i\omega_k)^{\alpha})} \right) \right). \quad (4.5.2)$$

Позначимо через B_k , $k = \overline{1, n}$, області, які є образами секторів Δ_k при відображенні функцією $f(z)$. Зрозуміло, що області B_k також утворюють систему областей, що не перетинаються, причому $f(z_k) \in B_k$, $k = \overline{1, n}$.

Для кожного $k = \overline{1, n}$ функції $f(\varphi_k^{-1}(\zeta))$ здійснюють однолисте і конформне відображення U на області B_k так, що $f(\varphi_k^{-1}(0)) = f(z_k)$ і

$$|f'(\varphi_k^{-1}(0))| = \frac{|f'(z_k)|}{|\varphi'_k(0)|} = r(B_k, f(z_k)).$$

Звідси отримаємо, що

$$\prod_{k=1}^n |f'(z_k)|^{\gamma_k} = \prod_{k=1}^n (r(B_k, f(z_k)) |\varphi'_k(0)|)^{\gamma_k}. \quad (4.5.3)$$

Згідно з теоремою 4.2.2 (див. також теорему 1.2 роботи [196]), правильна нерівність

$$\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\gamma_k} \leq (n-1)^{-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \gamma_k} \prod_{i,j=1, i < j}^n |a_j - a_i|^{\frac{2}{n-2} \left(\gamma_i + \gamma_j - \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \gamma_k \right)}.$$

Використовуючи дану нерівність, а також рівність (4.5.3), маємо нерівність

$$\prod_{k=1}^n |f'(z_k)|^{\gamma_k} \prod_{k=1}^n (R(\Delta_k; z_k))^{\gamma_k} \leq (n-1)^{-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \gamma_k} \prod_{i,j=1, i < j}^n |f(z_j) - f(z_i)|^{\frac{2}{n-2} \left(\gamma_i + \gamma_j - \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \gamma_k \right)}.$$

Поділивши обидві частини останньої нерівності на $\prod_{k=1}^n (R(\Delta_k; z_k))^{\gamma_k}$ і, врахувавши рівність (4.5.2), одержуємо нерівність (4.5.1).

Теорему 4.5.1 доведено.

Однак, якщо побудувати систему секторів Δ_k іншими чином, зокрема так, як і в теоремі 3.4.2, можна отримати хоч і менш точну, однак дещо простішу нерівність.

Нехай $\theta_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, n}$, причому $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < 2\pi$, $\theta_0 := \theta_n$, $\theta_{n+1} := \theta_1$. Для кожного $k = \overline{1, n}$ позначимо через m_k найменше натуральне число, для якого

$$\frac{\pi}{m_k} \leq \min \left\{ \frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{2}, \frac{\theta_k - \theta_{k-1}}{2} \right\}.$$

Теорема 4.5.2. [54] *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\rho_k \in (0, 1)$, $\rho_0 := \rho_n$, $\rho_{n+1} := \rho_1$, $z_k = \rho_k \exp i\theta_k$, $k = \overline{1, n}$, і нехай γ_k , $k = \overline{1, n}$, — деякі додатні дійсні*

числа, причому $\gamma_k > \frac{\sum_{s=1}^n \gamma_s}{2n-2}$ для $\forall k = \overline{1, n}$. Тоді для кожної функції $f(z)$, регулярної і однолистої у відкритому одиничному крузі U , справедлива нерівність

$$\prod_{k=1}^n |f'(z_k)|^{\gamma_k} \leq (n-1)^{-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \gamma_k} \prod_{k=1}^n \left(\frac{4\rho_k}{m_k} \cdot \frac{1 - (\rho_k)^{m_k}}{1 + (\rho_k)^{m_k}} \right)^{-\gamma_k} \cdot \prod_{i,j=1, i < j}^n |f(z_j) - f(z_i)|^{\frac{2}{n-2}(\gamma_i + \gamma_j - \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \gamma_k)}. \quad (4.5.4)$$

Доведення. Ідея доведення даної теореми аналогічна до відповідної ідеї в теоремі 3.4.2. Розглянемо набір секторів

$$\Delta_k = \left\{ w \in U : |\arg w - \theta_k| < \frac{\pi}{m_k} \right\},$$

$k = \overline{1, n}$. Зрозуміло, що дані сектори не перетинаються. Тоді області $f(\Delta_k) =: B_k$, $f(z_k) \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, також утворюють систему областей, що не перетинаються.

Нехай $z = \varphi_k(\zeta)$ — однолисте і конформне відображення U на Δ_k , $k = \overline{1, n}$, $\varphi_k(0) = z_k$, $\varphi'_k(0) > 0$. Використовуючи рівність (3.4.7), отримаємо, що

$$|\varphi'_k(0)| = \left(\frac{4\rho_k}{m_k} \cdot \frac{1 - (\rho_k)^{m_k}}{1 + (\rho_k)^{m_k}} \right). \quad (4.5.5)$$

Тоді функції $f(\varphi_k(\zeta))$ здійснюють однолисте і конформне відображення U на області B_k так, що $f(\varphi_k(0)) = f(z_k)$ і

$$|f'(\varphi_k(0))| = |f'(z_k)| \cdot |\varphi'_k(0)| = r(B_k, f(z_k)).$$

Звідси отримаємо, що

$$\prod_{k=1}^n |f'(z_k)|^{\gamma_k} = \prod_{k=1}^n \left(\frac{r(B_k, f(z_k))}{|\varphi'_k(0)|} \right)^{\gamma_k}. \quad (4.5.6)$$

Згідно з теоремою 4.2.2, правильна нерівність

$$\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\gamma_k} \leq (n-1)^{-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \gamma_k} \prod_{i,j=1, i < j}^n |a_j - a_i|^{\frac{2}{n-2}(\gamma_i + \gamma_j - \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \gamma_k)}. \quad (4.5.7)$$

Підставивши нерівність (4.5.7) і рівність (4.5.5) в (4.5.6), отримаємо нерівність (4.5.4).

Висновки до розділу 4

У четвертому розділі дисертаційної роботи розглядається відома екстремальна проблема про знаходження максимуму добутку деяких степенів внутрішніх радіусів n неперетинних областей, які містять, відповідно, n наперед заданих фіксованих точок, а саме для набору фіксованих точок a_k та заданих степенів γ_k потрібно знайти оцінку функціонала $\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\gamma_k}$ по всеможливих конфігураціях неперетинних областей B_k , де $k = \overline{1, n}$. В загальному випадку дана проблема на даний момент не розв'язана, однак деякі частинні випадки досліджувалися в роботах Л.І. Колбіної, З. Нехарі, М.А. Лебедева, Л.Л. Громової та інших. Відомо також, що дана проблема має розв'язок не для всіх конфігурацій фіксованих точок a_k та заданих степенів γ_k .

У теоремах 4.2.1-4.2.3 знайдено оцінку шуканого добутку як для випадку, коли всі точки a_k скінченні, так і у випадку, коли одна з них нескінченно віддалена. Також в даному розділі наведено функціонал, за допомогою якого можна оцінювати шуканий добуток внутрішніх радіусів, і доведено, що він інваріантний щодо конформних автоморфізмів комплексної площини.

В теоремі 4.3.1 наведено деякі оцінки еволюційного типу, а саме показано, як добуток деяких степенів внутрішніх радіусів неперетинних областей можна оцінити за допомогою добутку внутрішніх радіусів тих же областей, але вже в інших, менших степенях.

У підрозділі 4.4 показано, як отримані оцінки можна застосовувати в інших задачах геометричної теорії функцій, зокрема і у проблемі, яка досліджувалася в розділі 2 даної роботи. Крім того, в підрозділі 4.5 за допомогою попередніх оцінок було отримано багатоточкові теореми спотворення для функцій, регулярних і однолистих в одиничному крузі (теореми 4.5.1 і 4.5.2).

Результати розділу були опубліковані в роботах [54, 196, 214].

Розділ 5

Екстремальне розбиття обмеженої області та деякі пов'язані задачі

5.1. Формулювання проблеми та деякі допоміжні твердження

Як уже відзначалося раніше, згідно з теоремою про уніформізацію аналітичних функцій, довільна однозв'язна ріманова поверхня конформно еквівалентна одній з трьох областей: відкритому одиничному колу, комплексній площині або сфері Рімана, тобто комплексній площині, компактифікованій однією нескінченно віддаленою точкою. Тому задача про екстремальне розбиття обмеженої області не зводиться до проблем, розглянутих в попередніх розділах. Найбільш природньо в даному напрямку розглянути задачу про екстремальне розбиття одиничного кола, а саме в даному розділі досліджується наступна проблема.

Проблема 5.1.1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, і $U = \{z : |z| < 1\}$ — відкритий одиничний круг. Знайти максимум виразу*

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k),$$

де $a_k \in U$, $k = \overline{1, n}$, області $B_k \subset U$, $k = \overline{1, n}$, такі, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, причому $B_i \cap B_j = \emptyset$ для $1 \leq i, j \leq n$ та $i \neq j$.

Тобто, іншими словами, для кожного натурального n потрібно розбити відкритий одиничний круг на n неперетинних областей, щоб добу-

ток внутрішніх радіусів даних областей був максимальним. Відзначимо, що проблема 5.1.1 відноситься до задач з вільними полюсами, оскільки максимум потрібно знайти по всеможливих конфігураціях точок a_k , які належать кругу U , та областей B_k , які теж належать даному кругу, містять дані точки a_k і попарно не перетинаються між собою.

Для $n = 2$ дана проблема була розв'язана в роботі [119], для $n = 3$ — в роботах [113, 125]. Для $n \geq 4$ повного розв'язку даної проблеми на даний момент невідомо.

Суттєву роль в дослідженні в даному розділі відіграватиме відображення, яке здійснює функція $w(z) = z - \sqrt{z^2 - 1}$, тобто функція, обернена до функції Жуковського. В наступній лемі встановлено, як змінюється внутрішній радіус області при даному відображенні.

Лема 5.1.1. *Нехай $B \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1; 1]$ — деяка область і точка $a \in B$ ($a \neq \infty$), і нехай B^* і a^* — образи відповідно множини B і точки a при відображенні $w(z) = z - \sqrt{z^2 - 1}$, де ми беремо ту гілку кореня, для якої $\sqrt{1} = 1$. Тоді правильна рівність*

$$r(B, a) = \left| \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a - \sqrt{a^2 - 1}} \right| r(B^*, a^*). \quad (5.1.1)$$

Доведення лема 5.1.1. Згідно з означенням функції Гріна для області B з полюсом в точці a , правильна рівність

$$g_B(z, a) = \ln \frac{1}{|z - a|} + \ln r(B, a) + o(1). \quad (5.1.2)$$

Враховуючи конформну інваріантність функції Гріна, будемо мати:

$$g_B(z, a) = g_{B^*}(w, a^*) = \ln \frac{1}{|w - a^*|} + \ln r(B^*, a^*) + o(1). \quad (5.1.3)$$

Оцінимо тепер вираз $\ln \frac{1}{|w - a^*|}$. Будемо мати:

$$\ln \frac{1}{|w - a^*|} = \ln \left| \frac{1}{z - \sqrt{z^2 - 1} - a + \sqrt{a^2 - 1}} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \ln \frac{1}{|z-a|} + \ln \left| \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{z^2-1}-\sqrt{a^2-1}}{z-a}} \right| = \\
&= \ln \frac{1}{|z-a|} + \ln \left| \frac{1}{1 - \frac{(\sqrt{z^2-1}-\sqrt{a^2-1})(\sqrt{z^2-1}+\sqrt{a^2-1})}{(z-a)(\sqrt{z^2-1}+\sqrt{a^2-1})}} \right| = \\
&= \ln \frac{1}{|z-a|} + \ln \left| \frac{1}{1 - \frac{z+a}{\sqrt{z^2-1}+\sqrt{a^2-1}}} \right| = \\
&= \ln \frac{1}{|z-a|} + \ln \left| \frac{\sqrt{z^2-1} + \sqrt{a^2-1}}{\sqrt{z^2-1} + \sqrt{a^2-1} - z - a} \right| = \\
&= \ln \frac{1}{|z-a|} + \ln \left| \frac{\sqrt{a^2-1}}{a - \sqrt{a^2-1}} \right| + \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{z^2-1}{a^2-1}} + 1}{1 + \frac{\sqrt{z^2-1}-z}{\sqrt{a^2-1}-a}} \right|.
\end{aligned}$$

Підставивши даний вираз в (5.1.3), а також врахувавши, що при $z \rightarrow a$ вираз $\ln \left| \frac{\sqrt{\frac{z^2-1}{a^2-1}}+1}{1+\frac{\sqrt{z^2-1}-z}{\sqrt{a^2-1}-a}} \right| \rightarrow 0$, отримаємо:

$$G_B(z, a) = \ln \frac{1}{|z-a|} + \ln \left(\left| \frac{\sqrt{a^2-1}}{a - \sqrt{a^2-1}} \right| r(B^*, a^*) \right) + o(1).$$

Порівнявши даний вираз з (5.1.2), будемо мати:

$$\ln r(B, a) = \ln \left(\left| \frac{\sqrt{a^2-1}}{a - \sqrt{a^2-1}} \right| r(B^*, a^*) \right),$$

а звідси і отримаємо рівність (5.1.1).

Лему 5.1.1 доведено.

5.2. Оцінки добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей, які лежать у відкритому одиничному крузі

Оскільки проблема 5.1.1 на даний момент розв'язана тільки для $n = 2$ та $n = 3$, актуальною є задача отримати якщо не точний розв'язок, то хоча б оцінку максимуму добутку $\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)$, причому, якщо можливо, отримати оцінку не тільки згори, а і знизу, щоб можна було побачити приблизну величину похибки.

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Позначимо M_n максимум виразу $\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)$ для всеможливих конфігурацій областей B_k і точок a_k , таких, що $a_k \in U$, $k = \overline{1, n}$, де $U = \{z : |z| < 1\}$, області $B_k \subset U$, $k = \overline{1, n}$, такі, що $a_k \in B_k$, причому $B_i \cap B_j = \emptyset$ для $1 \leq i, j \leq n$ та $i \neq j$.

Правильна теорема.

Теорема 5.2.1. [56] Для довільного $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, правильна нерівність:

$$(\sqrt{n^2 + 1} - n) \left(\frac{n + 1 - \sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt{n^2 + 1} - n + 1} \right)^n \leq M_n \leq \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{n}{2}}. \quad (5.2.1)$$

Доведення теореми 5.2.1.

Для доведення лівої частини нерівності (5.2.1) достатньо знайти конфігурацію областей B_k^* і точок a_k^* , які задовольняють всі умови теореми 5.2.1, для яких $\prod_{k=1}^n r(B_k^*, a_k^*) \geq (\sqrt{n^2 + 1} - n) \left(\frac{n+1-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}-n+1} \right)^n$.

Нехай P_n — сектор одиничного круга, такий, що $P_n = \{z : |z| < 1; -\frac{\pi}{n} < \arg(z) < \frac{\pi}{n}\}$ і нехай дано $p \in \mathbb{R}$, $0 < p < 1$. Згідно з наслідком 3.4.1 (див. формулу (3.4.7)), правильна рівність

$$R(P_n; p) = \frac{4p(1 - p^n)}{n(1 + p^n)}, \quad (5.2.2)$$

де $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Визначимо, для якого значення p значення конформного радіуса сектора P_n буде максимальним. Для цього дослідимо вираз, записаний у правій частині рівності (5.2.2). Отримаємо

$$\begin{aligned} \left(\frac{4p(1-p^n)}{n(1+p^n)} \right)'_p &= \frac{4((1+(n+1)p^n)(1+p^n) - np^n(1-p^n))}{n(1+p^n)^2} = \\ &= \frac{4(1+p^n - (n+1)p^n - (n+1)p^{2n} - np^n + np^{2n})}{n(1+p^n)^2} = \frac{4(-p^{2n} - 2np^n + 1)}{n(1+p^n)^2}. \end{aligned}$$

Прирівнявши вираз, записаний в чисельнику попередньої рівності, до нуля, отримаємо, що максимум конформного радіуса сектора $R(P_n; p)$ досягається для випадку $p_n = \sqrt[n]{\sqrt{n^2+1} - n}$ і дорівнює

$$R_{\max}(P_n; p_n) = \frac{\sqrt[n]{\sqrt{n^2+1} - n}(n+1 - \sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2+1} - n + 1}.$$

Розбивши одиничне коло на n секторів з центральним кутом $\frac{2\pi}{n}$ і взявши точки a_k на бісектрисах цих секторів на відстані $\sqrt[n]{\sqrt{n^2+1} - n}$ від центра, отримаємо рівність

$$\prod_{k=1}^n R(P_n, p_n) = \left(\sqrt{n^2+1} - n \right) \left(\frac{n+1 - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1} - n + 1} \right)^n,$$

що й доводить ліву частину нерівності (5.2.1).

Доведемо тепер, що $M_n \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$. Нехай площа області $S(B_k) = S_k$. Зрозуміло, що $\sum_{k=1}^n S_k \leq \pi$. За теоремою про мінімізацію площі (див. [83, с. 34]), серед областей з однаковою площею найбільший внутрішній радіус має круг відносно центра, а тому $\pi r^2(B_k, a_k) \leq S_k$, а отже $\sum_{k=1}^n \pi r^2(B_k, a_k) \leq \sum_{k=1}^n S_k$ і $\sum_{k=1}^n r^2(B_k, a_k) \leq 1$. За нерівністю Коші між середнім арифметичним і середнім геометричним

$$\frac{\sum_{k=1}^n r^2(B_k, a_k)}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n r^2(B_k, a_k)}.$$

А тому

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{\sum_{k=1}^n r^2(B_k, a_k)}{n} \right)^{\frac{n}{2}} \leq \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{n}{2}},$$

що й доводить праву частину нерівності (5.2.1).

Теорему 5.2.1 доведено.

Для $n = 4$, наприклад, отримаємо оцінку $0.04575 \leq M_4 \leq 0.0625$, тобто похибка оцінки виразу M_4 є відносно невеликою.

Нерівність (5.2.1) можна застосувати також для оцінки добутку внутрішніх радіусів необмежених неперетинних областей, а саме розглядати задачу, аналогічну до проблеми 3.1.1, але з умовою, що всі області B_k лежать в комплексній площині з розрізом по відрізку $[-1; 1]$ дійсної осі. Зокрема, правильна наступна теорема.

Теорема 5.2.2. [56] *Для довільного набору точок a_k , таких, що $a_k \in \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1; 1]$, $k = \overline{1, n}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k , таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1; 1]$, $k = \overline{1, n}$, правильна нерівність*

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{n}{2}} \prod_{k=1}^n \left| \frac{\sqrt{a_k^2 - 1}}{a_k - \sqrt{a_k^2 - 1}} \right|. \quad (5.2.3)$$

Доведення теореми 5.2.2.

Нехай B_k^* - образ множини B_k при відображенні $w = z - \sqrt{z^2 - 1}$, де ми беремо ту гілку кореня, для якої $\sqrt{1} = 1$.

Згідно з лемою 5.1.1, отримаємо:

$$r(B_k, a_k) = \left| \frac{\sqrt{a_k^2 - 1}}{a_k - \sqrt{a_k^2 - 1}} \right| r(B_k^*, a_k^*). \quad (5.2.4)$$

А отже

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) = \prod_{k=1}^n r(B_k^*, a_k^*) \prod_{k=1}^n \left| \frac{\sqrt{a_k^2 - 1}}{a_k - \sqrt{a_k^2 - 1}} \right|. \quad (5.2.5)$$

Функція $w = z - \sqrt{z^2 - 1}$ відобразила точки a_k на точки a_k^* , які лежать в одиничному колі, а області B_k , які містять відповідно точки a_k , на області B_k^* , які містять відповідно точки a_k^* , причому $B_k^* \subset U$, де U — одиничний круг. Тому для них виконуються всі умови теореми 5.2.1. Отже,

$$\prod_{k=1}^n r(B_k^*, a_k^*) \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Підставивши отриману нерівність в нерівність (5.2.5) і отримаємо нерівність (5.2.3).

Теорему 5.2.2 доведено.

Використовуючи теорему 5.2.2 та нерівність (3.5.5), отримаємо наступний результат.

Наслідок 5.2.1. [56] Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Тоді для довільної системи фіксованих різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ та для довільної системи неперетинних областей B_k , $k = \overline{0, n}$, таких, що $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$, $k = \overline{1, n}$, правильна нерівність

$$I_n(1) \leq n^{-\frac{n}{2}} \left(\prod_{k=1}^n \left| \frac{\sqrt{a_k^2 - 1}}{a_k - \sqrt{a_k^2 - 1}} \right| \right)^{1 - \frac{1}{n}} \left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{2}{n}},$$

де

$$I_n(1) = r(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k).$$

Використовуючи теорему 5.2.2 та формулу (3.5.8), отримаємо наступний результат.

Наслідок 5.2.2. [56] Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Тоді для довільної системи фіксованих різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ та для довільного набору попарно неперетинних областей B_∞, B_k , $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$, $k = \overline{1, n}$, правильна нерівність

$$Y_n(1) \leq n^{-\frac{n}{2}} \left(\prod_{k=1}^n \left| \frac{\sqrt{a_k^2 - 1}}{a_k - \sqrt{a_k^2 - 1}} \right| \right)^{1 - \frac{1}{n}},$$

де

$$Y_n(1) = r(B_\infty, \infty) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k).$$

Наступне твердження є наслідком з теорем 3.5.3 та 5.2.2 (див. формулу 3.5.10).

Наслідок 5.2.3. [56] Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Тоді для довільної системи фіксованих різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ та для довільного набору попарно неперетинних областей $B_0, B_\infty, B_k, a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}, \infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}, a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1], k = \overline{1, n}$, правильна нерівність

$$J_n(1) \leq (n+1)^{-\frac{n+1}{n+2}} \left((n)^{-\frac{n}{2}} \prod_{k=1}^n \left| \frac{\sqrt{a_k^2 - 1}}{a_k - \sqrt{a_k^2 - 1}} \right| \right)^{1 - \frac{2}{n+2}} \left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{2}{n+2}},$$

де

$$J_n = r(B_0, 0) r(B_\infty, \infty) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k).$$

5.3. Оцінки добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей, які містять точки довільного еліпса

Метод, використаний при доведенні теореми 5.2.2, можна застосувати також для оцінки добутку внутрішніх радіусів областей з полюсами на деякому еліпсі. Зокрема, для випадку трьох фіксованих точок та трьох неперетинних областей можна записати точні оцінки.

Нехай $L = \left\{ z = x + iy : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1 \right\}$ — еліпс, де $b = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{\sqrt{10} + 3} + \sqrt[3]{\sqrt{10} - 3} \right)$ і $c = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{\sqrt{10} + 3} - \sqrt[3]{\sqrt{10} - 3} \right)$. Тоді правильна наступна теорема:

Теорема 5.3.1. [186] Для довільного набору точок a_k , таких, що $a_k \in L, k = \overline{1, 3}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей

B_k , таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1; 1]$, $k = \overline{1, 3}$, правильна нерівність

$$\prod_{k=1}^3 r(B_k, a_k) \leq \frac{64}{729} (223 - 70\sqrt{10}) \prod_{k=1}^3 \left| \frac{\sqrt{a_k^2 - 1}}{a_k - \sqrt{a_k^2 - 1}} \right|, \quad (5.3.1)$$

причому рівність досягається, зокрема, для точок $a_k^0 = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{\sqrt{10} - 3} \cdot e^{i(\varphi + \frac{2\pi}{3}(k-1))} + \sqrt[3]{\sqrt{10} + 3} \cdot e^{-i(\varphi + \frac{2\pi}{3}(k-1))} \right)$, де $k = \overline{1, 3}$, і $\varphi \in [0; \frac{2\pi}{3})$, і областей B_k^0 , які обмежені чотирьохвершинними гіперболою $\frac{x^2}{\cos^2(\varphi + \frac{2\pi}{3}(k-1) + \frac{\pi}{3})} - \frac{y^2}{\sin^2(\varphi + \frac{2\pi}{3}(k-1) + \frac{\pi}{3})} = 1$ і $\frac{x^2}{\cos^2(\varphi + \frac{2\pi}{3}(k-1) - \frac{\pi}{3})} - \frac{y^2}{\sin^2(\varphi + \frac{2\pi}{3}(k-1) - \frac{\pi}{3})} = 1$ (які можуть вироджуватися в дійсну чи уявну півосі), і які містять відповідно точки a_k^0 .

Доведення теореми 5.3.1. Нехай B_k^* — образ множини B_k при відображенні $w = z - \sqrt{z^2 - 1}$, де ми беремо ту гілку кореня, для якої $\sqrt{1} = 1$. Згідно з лемою 5.1.1, правильна рівність

$$r(B_k, a_k) = \left| \frac{\sqrt{a_k^2 - 1}}{a_k - \sqrt{a_k^2 - 1}} \right| r(B_k^*, a_k^*). \quad (5.3.2)$$

А отже

$$\prod_{k=1}^3 r(B_k, a_k) = \prod_{k=1}^3 r(B_k^*, a_k^*) \prod_{k=1}^3 \left| \frac{\sqrt{a_k^2 - 1}}{a_k - \sqrt{a_k^2 - 1}} \right|. \quad (5.3.3)$$

Функція $w = z - \sqrt{z^2 - 1}$ відобразила точки a_k , які лежать на еліпсі L , на точки a_k^* , які лежать на колі з центром в початку координат і радіусом $\sqrt[3]{\sqrt{10} - 3}$, а області B_k , які містять відповідно точки a_k еліпса, на області B_k^* , які містять відповідно точки a_k^* , причому $B_k^* \subset U$, де U — одиничний круг. Згідно з теоремою 3.1 роботи [113], правильна нерівність:

$$\prod_{k=1}^3 r(B_k^*, a_k^*) \leq \frac{64}{729} (223 - 70\sqrt{10}), \quad (5.3.4)$$

причому рівність досягається тільки для секторів одиничного кола з центральним кутом $\frac{2\pi}{3}$ і для точок a_k^* , які лежать на їхніх бісектрисах і на колі радіусом $\sqrt[3]{\sqrt{10} - 3}$.

Враховуючи останню нерівність і нерівність (5.3.3), будемо мати:

$$\prod_{k=1}^3 r(B_k, a_k) \leq \frac{64}{729} (223 - 70\sqrt{10}) \prod_{k=1}^3 \left| \frac{\sqrt{a_k^2 - 1}}{a_k - \sqrt{a_k^2 - 1}} \right|,$$

причому рівність досягається, зокрема, для точок a_k^0 і областей B_k^0 , зазначених в умові теореми, які при відображенні $w = z - \sqrt{z^2 - 1}$ є, відповідно, прообразами точок a_k^* і секторів, для яких виконується рівність в нерівності (5.3.4).

Теорема 5.3.1 доведена.

Теорему 5.3.1 можна записати і в набагато загальнішому вигляді:.

Теорема 5.3.2. [186] *Для довільного набору точок a_k , таких, що $a_k \in \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1; 1]$, $k = \overline{1, 3}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k , таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1; 1]$, $k = \overline{1, 3}$, правильна нерівність*

$$\prod_{k=1}^3 r(B_k, a_k) \leq \frac{64}{729} (223 - 70\sqrt{10}) \prod_{k=1}^3 \left| \frac{\sqrt{a_k^2 - 1}}{a_k - \sqrt{a_k^2 - 1}} \right|, \quad (5.3.5)$$

причому рівність досягається, зокрема, для точок a_k^0 і областей B_k^0 , які описані в теоремі 5.3.1.

Доведення теореми 5.3.2. Для доведення даної теореми достатньо відзначити, що нерівність (5.3.4) виконується для довільної конфігурації точок $a_k^* \in B_k^* \subset U$, $k = \overline{1, 3}$, де B_k^* — неперетинні області, і повторити міркування теореми 5.3.1.

Теорема 5.3.2 доведена.

Зауваження 5.3.1. Зауважимо, що випадок, коли точки $a_k \in L$, цікавий насамперед у зв'язку з тим, що рівність в нерівності (5.3.1) досягається саме для цього випадку, причому екстремальні конфігурації областей можна записати в явному вигляді.

Зауваження 5.3.2. Теорема 5.3.2 дає дещо іншу оцінку для добутку внутрішніх радіусів трьох неперетинних областей, ніж теорема Голузіна [83, с. 156–165]. Оцінка, дана в теоремі 5.3.2, для багатьох окремих випадків точніша. Однак відзначимо, що оцінку теореми 5.3.2 можна застосовувати тільки тоді, коли області B_k належать розширеній комплексній площині з розрізом по деякому відрізку. Випадок, коли даний відрізок не співпадає з відрізком $[-1; 1]$, можна звести до випадку, який розглядається в теоремі 5.3.2, деяким лінійним перетворенням.

Правильна також аналогічна теорема і для випадку $n > 3$, але при умові, що всі області B_k лежать в деякому крузі, а точки a_k на вказаному вище еліпсі L .

Теорема 5.3.3. [186] *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$, $R \in \mathbb{R}^+$, $R > \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{\sqrt{10} + 3} + \sqrt[3]{\sqrt{10} - 3} \right)$; $\chi(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ — функція Жуковського, $R_0 = \chi(R)$ і нехай $U_{R_0} = \{z : |z| < R_0\}$. Тоді для довільної системи різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \in L$ і довільної системи попарно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, $a_k \in B_k \subset U_{R_0} \setminus [-1, 1]$, $k = \overline{1, n}$, виконується нерівність*

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{2}{n} \right)^n \cdot (\sqrt{10} - 3)^{\frac{n}{3}} \cdot \prod_{k=1}^n \left| \frac{\sqrt{a_k^2 - 1}}{a_k - \sqrt{a_k^2 - 1}} \right| \cdot \left(\prod_{k=1}^n \chi \left(\left(\sqrt[3]{\sqrt{10} - 3} \right)^{\frac{1}{\alpha_k}} \right) \chi \left(\left(\sqrt[3]{\sqrt{10} - 3} \right)^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}} \right) \right)^{\frac{1}{2}},$$

де

$$\alpha_1 := \frac{1}{\pi}(\arg a_2 - \arg a_1), \alpha_2 := \frac{1}{\pi}(\arg a_3 - \arg a_2) \dots \alpha_n := \frac{1}{\pi}(2\pi - \arg a_n).$$

Рівність тут виконується тоді, коли a_k і B_k , $k = \overline{1, n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(z)dz^2 = - \frac{\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{2z} \right)^{n-2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{4z^4} \right) \left(R^n + \left(\frac{z}{2} + \frac{1}{2z} \right)^n \right)^2}{\left[\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{2z} \right)^n - (\sqrt{2} - 1)^2 R^n \right]^2 \left[\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{2z} \right)^n - (\sqrt{2} + 1)^2 R^n \right]^2} dz^2. \quad (5.3.6)$$

Доведення теореми 5.3.3

Аналогічно до теореми 5.3.1, нехай функція $w = z - \sqrt{z^2 - 1}$ відображає точки a_k , які лежать на еліпсі L на точки a_k^* , які лежать на колі з центром в початку координат і радіусом $\sqrt[3]{\sqrt{10} - 3}$, а області B_k , які містять відповідно точки a_k еліпса, на області $B_k^* \subset U$, які містять відповідно точки a_k^* .

Використовуючи міркування, аналогічні до наведених при доведенні наслідку 3.1.19 [24, с. 125], утворимо $(n, 2)$ -променеву систему $A_{n,2}^* = \{a_{k,p}^*\}$, і покладемо $a_{k,p}^* := R^2(\overline{a_{k,l}^*})^{-1}$, $p + l = 3$, $k = \overline{1, n}$, $p \in \{1, 2\}$, і систему областей $\{B_{k,p}^*\}$, $a_{k,p}^* \in B_{k,p}^*$, $B_{k,p}^*$ симетрична до області $B_{k,l}^*$, $k + l = 3$, $k = \overline{1, n}$, $p \in \{1, 2\}$. Далі, застосувавши теорему 3.1.1. [24, с. 95], маємо оцінку

$$\begin{aligned} & \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^2 r(B_{k,p}^*, a_{k,p}^*) \leq \\ & \leq (2R)^{2n} \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k \right)^2 \left(\prod_{k=1}^n \mu_k(R) \right)^{\frac{1}{2}} \left[\prod_{k=1}^n \chi \left(\left| \frac{a_{k,1}^*}{R} \right|^{\frac{1}{\alpha_k}} \right) \chi \left(\left| \frac{a_{k,1}^*}{R} \right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Використовуючи співвідношення

$$\begin{aligned} & \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^2 |a_{k,p}^*| = R^{2n}, \\ & r(B_{k,3-p}^*, a_{k,3-p}^*) = r(B_{k,p}^*, a_{k,p}^*) \cdot \frac{R^2}{|a_{k,p}^*|^2}, \end{aligned}$$

отримуємо

$$\begin{aligned} & \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^2 r(B_{k,p}^*, a_{k,p}^*) = \left[\prod_{k=1}^n r(B_{k,1}^*, a_{k,1}^*) \right]^2 \cdot R^{2n} \cdot \left[\prod_{k=1}^n |a_{k,1}^*| \right]^{-2} \leq \\ & \leq (2R)^{2n} \left(\frac{1}{2} \right)^{2n} \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k \right)^2 \prod_{k=1}^n \chi \left(\left| \frac{a_{k,1}^*}{R} \right|^{\frac{1}{\alpha_k}} \right) \chi \left(\left| \frac{a_{k,1}^*}{R} \right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}} \right). \end{aligned}$$

Тоді

$$\left[\prod_{k=1}^n r(B_{k,1}^*, a_{k,1}^*) \right]^2 \leq \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k \right)^2 \prod_{k=1}^n \chi \left(\left| \frac{a_{k,1}^*}{R} \right|^{\frac{1}{\alpha_k}} \right) \chi \left(\left| \frac{a_{k,1}^*}{R} \right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}} \right) \cdot \left[\prod_{k=1}^n |a_{k,1}^*| \right]^2.$$

Добуваючи квадратний корінь з обох частин нерівності, отримуємо

$$\prod_{k=1}^n r(B_{k,1}^*, a_{k,1}^*) \leq \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k \right) \cdot \left(\prod_{k=1}^n \chi \left(\left| \frac{a_{k,1}^*}{R} \right|^{\frac{1}{\alpha_k}} \right) \chi \left(\left| \frac{a_{k,1}^*}{R} \right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \prod_{k=1}^n |a_{k,1}^*|.$$

Враховуючи нерівність $\prod_{k=1}^n \alpha_k \leq \left(\frac{2}{n} \right)^n$, отримуємо

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n r(B_{k,1}^*, a_{k,1}^*) &\leq \left(\frac{2}{n} \right)^n \cdot \left(\prod_{k=1}^n \chi \left(\left| \frac{a_{k,1}^*}{R} \right|^{\frac{1}{\alpha_k}} \right) \chi \left(\left| \frac{a_{k,1}^*}{R} \right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \prod_{k=1}^n |a_{k,1}^*| \leq \\ &\leq \left(\frac{2}{n} \right)^n \cdot \left(\prod_{k=1}^n \chi \left(\left(\sqrt[3]{\sqrt{10}-3} \right)^{\frac{n}{2}} \right) \chi \left(\left(\sqrt[3]{\sqrt{10}-3} \right)^{\frac{n}{2}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sqrt[3]{\sqrt{10}-3} \right)^n \leq \\ &\leq \left(\frac{2}{n} \right)^n \cdot \frac{1}{2^n} \left(\left(\sqrt[3]{\sqrt{10}-3} \right)^{\frac{n}{2}} + \left(\sqrt[3]{\sqrt{10}-3} \right)^{\frac{2}{n}} \right)^n \cdot \left(\sqrt[3]{\sqrt{10}-3} \right)^n \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{n} \right)^n \cdot \left(\sqrt{10}-3 \right)^{\frac{n}{3}} \cdot \left(\left(\sqrt{10}-3 \right)^{\frac{n}{6}} + \left(\sqrt{10}-3 \right)^{\frac{2}{3n}} \right)^n, \end{aligned}$$

рівність тут досягається тоді, коли $a_{k,1}^*$ і $B_{k,1}^*$, $k = \overline{1, n}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(R^n + w^n)^2}{[w^n - (\sqrt{2}-1)^2 R^n]^2 [w^n - (\sqrt{2}+1)^2 R^n]^2} dw^2, \quad (5.3.7)$$

які лежать в U .

Далі, використовуючи рівність (5.3.2), отримуємо

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{2}{n} \right)^n \cdot \left(\prod_{k=1}^n \chi \left(|a_k^*|^{\frac{1}{\alpha_k}} \right) \chi \left(|a_k^*|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \prod_{k=1}^n |a_k^*| \cdot \prod_{k=1}^n \left| \frac{\sqrt{a_k^2 - 1}}{a_k - \sqrt{a_k^2 - 1}} \right|.$$

Виконуючи заміну змінної в квадратичному диференціалі (5.3.7) за формулою

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right),$$

маємо

$$dw = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right) dz,$$

тоді

$$dw^2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z^4} \right) dz^2.$$

І, таким чином, одержуємо квадратичний диференціал (5.3.6).

Теорему 5.3.3 доведено.

Метод доведення теореми 5.3.1 дозволяє отримати оцінку добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей, які містять точки a_k , які, в свою чергу, належать довільному еліпсу.

Нехай $M = \left\{ z = x + iy : \frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{t^2} = 1 \right\}$, причому $d^2 - t^2 = 1$ і нехай $d^* = d - \sqrt{d^2 - 1}$. Тоді правильна теорема:

Теорема 5.3.4. [186] Для довільного натурального n , $n \geq 3$, довільного набору точок a_k , таких, що $a_k \in M$, $k = \overline{1, n}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k , таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1; 1]$, $k = \overline{1, n}$, правильна нерівність

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4(d - \sqrt{d^2 - 1})}{n} \right)^n \left(\frac{1 - (d - \sqrt{d^2 - 1})^n}{1 + (d - \sqrt{d^2 - 1})^n} \right)^n \cdot \prod_{k=1}^n \left| \frac{\sqrt{a_k^2 - 1}}{a_k - \sqrt{a_k^2 - 1}} \right|, \quad (5.3.8)$$

причому рівність досягається, зокрема, для точок і областей, які є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(z)dz^2 = - \frac{\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{2z}\right)^{n-2} \left(\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{2z}\right)^n + 1\right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{z^4}\right)}{\left(\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{2z}\right)^n - (d^*)^n\right) \left(1 - \left(\frac{z}{2} + \frac{1}{2z}\right)^n (d^*)^n\right)} dz^2. \quad (5.3.9)$$

Доведення теореми 5.3.4. Нехай, як і в теоремі 5.3.1, B_k^* — образ множини B_k , $k = \overline{1, n}$, при відображенні $w = z - \sqrt{z^2 - 1}$, де ми беремо ту гілку кореня, для якої $\sqrt{1} = 1$. Тоді точки a_k^* , які є образами точок a_k при даному відображенні, лежать на колі з центром в початку координат і радіусом $d^* = d - \sqrt{d^2 - 1}$, а $B_k^* \subset U$, $k = \overline{1, n}$. Згідно з результатами роботи [62], для областей B_k^* і точок a_k^* , $k = \overline{1, n}$ правильна нерівність:

$$\prod_{k=1}^n r(B_k^*, a_k^*) \leq \left(\frac{4d^*}{n} \right)^n \left(\frac{1 - (d^*)^n}{1 + (d^*)^n} \right)^n, \quad (5.3.10)$$

причому рівність в останній нерівності досягається тоді, коли точки a_k^* і області B_k^* є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(w^n + 1)}{(w^n - (d^*)^n)(1 - w^n(d^*)^n)}dw^2. \quad (5.3.11)$$

Врахувавши рівність (5.3.2), а також те, що $d^* = d - \sqrt{d^2 - 1}$, і підставивши даний вираз в нерівність (5.3.10), і отримаємо нерівність (5.3.8), причому полюси і кругові області квадратичного диференціала (5.3.9) є прообразами, відповідно, полюсів і кругових областей квадратичного диференціала (5.3.11) при відображенні $w = z - \sqrt{z^2 - 1}$, тому рівність в нерівності (5.3.8) виконується саме для них.

Теорему 5.3.4 доведено.

Зауваження 5.3.3. Зауважимо, що довільний еліпс $\frac{x-x_0}{d_0^2} + \frac{y-y_0}{t_0^2} = 1$ на комплексній площині деяким лінійним перетворенням $w = pz + z_0$ можна перевести в еліпс виду $\frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{t^2} = 1$, для якого $d^2 - t^2 = 1$, причому внутрішні радіуси відповідних областей при даному перетворенні будуть відноситися як $|p| : 1$. Тому для того, щоб отримати оцінку добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей, які містять точки довільного еліпса, потрібно належним лінійним перетворенням перевести його в еліпс виду M і застосувати теорему 5.3.4.

Можна розглядати також задачу, де одна з точок a_k нескінченно віддалена, а інші належать деякому еліпсу. Правильна наступна теорема.

Теорема 5.3.5. [58] Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$; a_k , $k = \overline{0, n}$ — деякий набір фіксованих точок комплексної площини, таких, що $a_0 = \infty$, $a_k \in M$ для $k = \overline{1, n}$, де $M = \left\{ z = x + iy : \frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{t^2} = 1 \right\}$ — деякий еліпс, причому $d^2 - t^2 = 1$ і нехай $d^* = d - \sqrt{d^2 - 1}$. Тоді для довільного набору взаємно неперетинних областей B_k , $k = \overline{0, n}$, таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1; 1]$, $k = \overline{0, n}$, правильна нерівність

$$\begin{aligned} & \sqrt{r(B_0, \infty)} \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \\ & \leq \sqrt{2}(d^*)^n \prod_{k=1}^n \left| \frac{\sqrt{a_k^2 - 1}}{a_k - \sqrt{a_k^2 - 1}} \right| \frac{2^{2n+\frac{1}{n}}}{(n^2 - 2)^{\frac{1}{n}+\frac{n}{2}}} \left(\frac{n - \sqrt{2}}{n + \sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

Доведення теореми 5.3.5. Нехай B_k^* , a_k^* — образи відповідно множини B_k і точки a_k , $k = \overline{0, n}$ при відображенні $w = \frac{1}{d^*} (z - \sqrt{z^2 - 1})$, де ми беремо ту гілку кореня, для якої $\sqrt{1} = 1$. Зауважимо, що w відображає еліпс M на одиничне коло, тому $|a_k^*| = 1$ для $k = \overline{1, n}$, а також $a_0^* = 0$. Також відзначимо, що $\bigcup_{k=0}^n B_k^* \subset D$, де $D = \left\{ w : |w| < \frac{1}{d^*} \right\}$.

Встановимо, як змінюється внутрішній радіус області при відображенні w . Розглянемо спочатку випадок $k = \overline{1, n}$.

Використовуючи конформну інваріантність функції Гріна, будемо мати:

$$G_{B_k}(z, a_k) = G_{B_k^*}(w, a_k^*) = \ln \frac{1}{|w - a_k^*|} + \ln r(B_k^*, a_k^*) + o(1). \quad (5.3.13)$$

Оцінимо тепер вираз $\ln \frac{1}{|w - a_k^*|}$. Будемо мати:

$$\ln \frac{1}{|w - a_k^*|} = \ln \left| \frac{d^*}{z - \sqrt{z^2 - 1} - a_k + \sqrt{a_k^2 - 1}} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \ln \frac{1}{|z - a_k|} + \ln \left| \frac{d^*}{1 - \frac{\sqrt{z^2-1} - \sqrt{a_k^2-1}}{z-a_k}} \right| = \\
&= \ln \frac{1}{|z - a_k|} + \ln \left| \frac{d^*}{1 - \frac{(\sqrt{z^2-1} - \sqrt{a_k^2-1})(\sqrt{z^2-1} + \sqrt{a_k^2-1})}{(z-a_k)(\sqrt{z^2-1} + \sqrt{a_k^2-1})}} \right| = \\
&= \ln \frac{1}{|z - a_k|} + \ln \left| \frac{d^*}{1 - \frac{z+a_k}{\sqrt{z^2-1} + \sqrt{a_k^2-1}}} \right| = \\
&= \ln \frac{1}{|z - a_k|} + \ln d^* \left| \frac{\sqrt{z^2-1} + \sqrt{a_k^2-1}}{\sqrt{z^2-1} + \sqrt{a_k^2-1} - z - a_k} \right| = \\
&= \ln \frac{1}{|z - a_k|} + \ln d^* \left| \frac{\sqrt{a_k^2-1}}{a_k - \sqrt{a_k^2-1}} \right| + \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{z^2-1}{a_k^2-1}} + 1}{1 + \frac{\sqrt{z^2-1}-z}{\sqrt{a_k^2-1}-a_k}} \right|.
\end{aligned}$$

Підставивши даний вираз в (5.3.13), а також врахувавши, що при $z \rightarrow a_k$ вираз $\ln \left| \frac{\sqrt{\frac{z^2-1}{a_k^2-1}} + 1}{1 + \frac{\sqrt{z^2-1}-z}{\sqrt{a_k^2-1}-a_k}} \right| \rightarrow 0$, будемо мати:

$$G_{B_k}(z, a_k) = \ln \frac{1}{|z - a_k|} + \ln d^* \left| \frac{\sqrt{a_k^2-1}}{a_k - \sqrt{a_k^2-1}} \right| r(B_k^*, a_k^*) + o(1).$$

Звідси отримаємо:

$$r(B_k, a_k) = d^* \left| \frac{\sqrt{a_k^2-1}}{a_k - \sqrt{a_k^2-1}} \right| r(B_k^*, a_k^*). \quad (5.3.14)$$

Доведемо тепер, що

$$r(B_0, \infty) = 2d^* r(B_0^*, 0). \quad (5.3.15)$$

$$\begin{aligned}
G_{B_0}(z, \infty) &= G_{B_0^*}(w, 0) = \ln \frac{1}{|w|} + \ln r(B_0^*, 0) + o(1) = \\
&= \ln \frac{d^*}{|z - \sqrt{z^2 - 1}|} + \ln r(B_0^*, 0) + o(1) = \\
&= \ln d^* |z + \sqrt{z^2 - 1}| + \ln r(B_0^*, 0) + o(1) = \\
&= \ln |z| + \ln 2d^* + \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{z^2}}}{2} \right| + \ln r(B_0^*, 0) + o(1) = \\
&= \ln |z| + \ln 2d^* r(B_0^*, 0) + o(1),
\end{aligned}$$

що й доводить рівність (5.3.15).

Використовуючи рівності (5.3.14) і (5.3.15), отримаємо, що

$$\begin{aligned}
\sqrt{r(B_0, \infty)} \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) &= \\
&= \sqrt{2}(d^*)^{\frac{1}{2}+n} \prod_{k=1}^n \left| \frac{\sqrt{a_k^2 - 1}}{a_k - \sqrt{a_k^2 - 1}} \right| \sqrt{r(B_0^*, 0)} \prod_{k=1}^n r(B_k^*, a_k^*). \quad (5.3.16)
\end{aligned}$$

Позначимо $B_{n+1}^* = \left\{ w : |w| > \frac{1}{d^*} \right\}$. Відзначимо, що $r(B_{n+1}^*, \infty) = d^*$. Тому правильна рівність

$$\sqrt{r(B_0^*, 0)} \prod_{k=1}^n r(B_k^*, a_k^*) = \frac{1}{\sqrt{d^*}} \sqrt{r(B_0^*, 0) r(B_{n+1}^*, \infty)} \prod_{k=1}^n r(B_k^*, a_k^*). \quad (5.3.17)$$

Області B_k^* , $k = \overline{0, n+1}$ утворюють систему взаємно неперетинних областей, для яких правильні всі умови теореми 6 роботи [64]. Тому правильна нерівність:

$$\sqrt{r(B_0^*, 0) r(B_{n+1}^*, \infty)} \prod_{k=1}^n r(B_k^*, a_k^*) \leq \frac{2^{2n+\frac{1}{n}}}{(n^2 - 2)^{\frac{1}{n}+\frac{n}{2}}} \left(\frac{n - \sqrt{2}}{n + \sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2}}.$$

Підставивши наведену нерівність послідовно в рівності (5.3.17) і (5.3.16), і отримаємо нерівність теореми.

Теорему 5.3.5 доведено.

Для випадку, коли області B_k , $k = \overline{0, n}$, є однозв'язними, аналогічну теорему можна довести для набагато ширшого діапазону γ .

Теорема 5.3.6. [58] *Нехай n , $n \geq 3$ — деяке натуральне число; γ — деяке додатне дійсне число, причому $\gamma \leq \frac{n^2}{8}$; a_k , $k = \overline{0, n}$ — деякий набір фіксованих точок комплексної площини, таких, що $a_0 = \infty$, $a_k \in M$ для $k = \overline{1, n}$, де $M = \left\{ z = x + iy : \frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{t^2} = 1 \right\}$ — деякий еліпс, причому $d^2 - t^2 = 1$ і нехай $d^* = d - \sqrt{d^2 - 1}$. Тоді для довільного набору взаємно неперетинних однозв'язних областей B_k , $k = \overline{0, n}$, таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1; 1]$, $k = \overline{0, n}$ правильна нерівність*

$$r^\gamma(B_0, \infty) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq 2^\gamma (d^*)^n \prod_{k=1}^n \left| \frac{\sqrt{a_k^2 - 1}}{a_k - \sqrt{a_k^2 - 1}} \right| \cdot P, \quad (5.3.18)$$

де

$$P = \exp \left(\frac{4\gamma}{n} \log \frac{\sqrt{\gamma}}{n} - n \log \frac{2}{n} - 2n \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\gamma}}{n} \right)^2 \log \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\gamma}}{n} \right) \right) \cdot \exp \left(-2n \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\gamma}}{n} \right)^2 \log \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\gamma}}{n} \right) \right).$$

Доведення теореми 5.3.6. Як і в теоремі 5.3.5, нехай B_k^* , a_k^* — образи відповідно множин B_k і точок a_k , $k = \overline{0, n}$, при відображенні $w = \frac{1}{d^*} (z - \sqrt{z^2 - 1})$, де ми беремо ту гілку кореня, для якої $\sqrt{1} = 1$. Провівши аналогічні перетворення, отримаємо рівності (5.3.14) і (5.3.15). Далі будемо мати

$$\begin{aligned} r^\gamma(B_0, \infty) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) &= \\ &= 2^\gamma (d^*)^{\gamma+n} \prod_{k=1}^n \left| \frac{\sqrt{a_k^2 - 1}}{a_k - \sqrt{a_k^2 - 1}} \right| r^\gamma(B_0^*, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k^*, a_k^*). \end{aligned} \quad (5.3.19)$$

Позначимо $B_{n+1}^* = \left\{ w : |w| > \frac{1}{d^*} \right\}$. Відзначимо, що $r(B_{n+1}^*, \infty) = d^*$. Тому правильна рівність

$$r^\gamma(B_0^*, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k^*, a_k^*) = \frac{1}{(d^*)^\gamma} (r(B_0^*, 0) r(B_{n+1}^*, \infty))^\gamma \prod_{k=1}^n r(B_k^*, a_k^*). \quad (5.3.20)$$

Області B_k^* , $k = \overline{0, n+1}$ утворюють систему взаємно неперетинних областей, для яких правильні всі умови теореми 2 роботи [125]. Згідно з даною теоремою, правильна нерівність:

$$(r(B_0^*, 0) r(B_{n+1}^*, \infty))^\gamma \prod_{k=1}^n r(B_k^*, a_k^*) \leq P.$$

Підставивши наведену нерівність послідовно в рівності (5.3.19) і (5.3.20), і отримаємо нерівність (5.3.18).

5.4. Оцінки добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей, які містять точки деякої гіперболи

Використовуючи деякі властивості відображень, розглянутих в попередніх підрозділах, отримаємо оцінку добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей, які містять точки деякої гіперболи.

Нехай $M = \left\{ z = x + iy : \frac{x^2}{d^2} - \frac{y^2}{p^2} = 1, x > 0 \right\}$ — права гілка деякої гіперболи, причому $d^2 + p^2 = 1$. З останньої умови випливає, що можемо позначити $d = \cos \alpha$ і $p = \sin \alpha$ для деякого $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, а рівняння гілки гіперболи записати у вигляді $M = \left\{ z = x + iy : \frac{x^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} = 1, x > 0 \right\}$.

Правильна наступна теорема.

Теорема 5.4.1. [60] *Нехай n , $n \geq 3$, — деяке натуральне число; $M = \left\{ z = x + iy : \frac{x^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} = 1, x > 0 \right\}$ — права гілка деякої гіпер-*

боли; a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок комплексної площини, таких, що $a_k \in M$ для $k = \overline{1, n}$, причому $a_k = x_k + iy_k$, де $x_k = \cos \alpha \cosh(t_k)$, а $y_k = \sin \alpha \sinh(t_k)$ для деяких дійсних t_k , причому

$$-\infty < t_1 < t_2 < \dots < t_n < +\infty.$$

Тоді для довільного набору взаємно неперетинних областей B_k , $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k \subset \Omega$, $k = \overline{1, n}$, де

$$\Omega = \overline{\mathbb{C}} \setminus ([-\infty; -1] \cup [1; +\infty]),$$

правильна нерівність

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq 2^{\frac{n}{2n-1}} (2n-1)^{-\frac{n}{4}} \prod_{k=1}^n \left| \frac{\sqrt{a_k^2 - 1}}{a_k - \sqrt{a_k^2 - 1}} \right| \cdot \prod_{1 \leq p < q \leq n} (e^{2t_q} - e^{2t_p})^{\frac{2}{2n-1}} \prod_{k=1}^n e^{\frac{t_k}{2n-1}}. \quad (5.4.1)$$

Доведення теореми 5.4.1. Розглянемо відображення $w(z) = z - \sqrt{z^2 - 1}$, де ми беремо ту гілку багатозначної функції $z - \sqrt{z^2 - 1}$, яка відображає область Ω на верхню півплощину $\text{Im}(w) > 0$. Образом наведеної гілки гіперболи M при даному відображенні буде промінь $w = \rho e^{i\alpha}$, де $\rho > 0$, а образом точок a_k при даному відображенні будуть точки $a_k^* = e^{t_k + i\alpha}$ для $k = \overline{1, n}$.

Нехай B_k^* , a_k^* — образи відповідно області B_k і точки a_k , $k = \overline{1, n}$ при відображенні $w(z)$. Провівши перетворення, аналогічні до проведених в лемі 5.1.1, отримаємо рівність

$$r(B_k, a_k) = \left| \frac{\sqrt{a_k^2 - 1}}{a_k - \sqrt{a_k^2 - 1}} \right| r(B_k^*, a_k^*). \quad (5.4.2)$$

Використовуючи рівності (5.4.2) для кожного k , отримаємо, що

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) = \prod_{k=1}^n \left| \frac{\sqrt{a_k^2 - 1}}{a_k - \sqrt{a_k^2 - 1}} \right| \prod_{k=1}^n r(B_k^*, a_k^*). \quad (5.4.3)$$

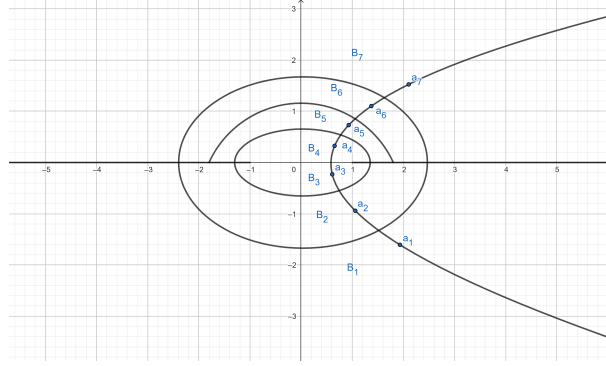


Рис. 5.1: Система n фіксованих точок $a_k \in M$

Оцінимо тепер вираз $\prod_{k=1}^n r(B_k^*, a_k^*)$. Всі точки $a_k^* = e^{t_k + i\alpha}$ будуть знаходитися на промені $w = \rho e^{i\alpha}$, а всі області B_k^* знаходяться у верхній півплощині $\text{Im}(w) > 0$. Для $k = \overline{1, n}$ позначимо $a_{-k}^* = -e^{t_k + i\alpha}$ і $B_{-k}^* = \{w : -w \in B_k^*\}$. Зрозуміло, що для кожного k точки a_{-k}^* симетричні точкам a_k^* , а області B_{-k}^* симетричні областям B_k^* відносно початку координат, причому всі точки a_k^* і a_{-k}^* лежать на одній прямій.

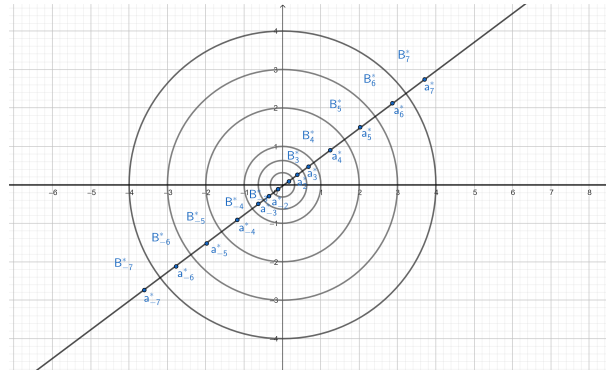


Рис. 5.2: Система $2n$ точок та відповідних неперетинних областей

Очевидно, що

$$\prod_{k=1}^n r(B_k^*, a_k^*) = \prod_{k=1}^n r(B_{-k}^*, a_{-k}^*).$$

Таким чином,

$$\prod_{k=1}^n r(B_k^*, a_k^*) = \sqrt{\prod_{k=1}^n r(B_k^*, a_k^*) \prod_{k=1}^n r(B_{-k}^*, a_{-k}^*)} = \sqrt{\prod_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^n r(B_k^*, a_k^*)}. \quad (5.4.4)$$

Розглянемо вираз $\prod_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^n r(B_k^*, a_k^*)$. Маємо систему $2n$ точок і неперетинних областей, для яких правильні всі умови теореми 2.1 роботи [195] (див. теорему 3.2.1). Тому маємо

$$\prod_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^n r(B_k^*, a_k^*) \leq (2n-1)^{-\frac{n}{2}} \left(\prod_{\substack{-n \leq p < q \leq n \\ p, q \neq 0}} |a_q^* - a_p^*| \right)^{\frac{2}{2n-1}}. \quad (5.4.5)$$

Відзначимо, що для довільних $0 < p < q \leq n$ правильна рівність

$$|a_q^* - a_p^*| = |a_{-p}^* - a_{-q}^*| = e^{t_q} - e^{t_p}. \quad (5.4.6)$$

Якщо ж $-n \leq p < 0 < q \leq n$, причому $-p \neq q$, тоді маємо

$$|a_q^* - a_p^*| = |a_{-p}^* - a_{-q}^*| = e^{t_q} + e^{t_{-p}}. \quad (5.4.7)$$

І насамкінець, якщо $0 < -p = q \leq n$, тоді

$$|a_q^* - a_p^*| = 2e^{t_q}. \quad (5.4.8)$$

Врахувавши рівності (5.4.6)-(5.4.8), отримаємо

$$\prod_{\substack{-n \leq p < q \leq n \\ p, q \neq 0}} |a_q^* - a_p^*| = 2^n \prod_{1 \leq p < q \leq n} (e^{2t_q} - e^{2t_p})^2 \prod_{k=1}^n e^{t_k}.$$

Підставивши отриманий вираз спочатку в нерівність (5.4.5), а потім і в рівність (5.4.4), отримаємо

$$\prod_{k=1}^n r(B_k^*, a_k^*) \leq 2^{\frac{n}{2n-1}} (2n-1)^{-\frac{n}{4}} \prod_{1 \leq p < q \leq n} (e^{2t_q} - e^{2t_p})^{\frac{2}{2n-1}} \prod_{k=1}^n e^{\frac{t_k}{2n-1}}.$$

Підставивши дану нерівність в рівність (5.4.3), отримаємо нерівність (5.4.1).

Теорему 5.4.1 доведено.

Нехай тепер $N = \left\{ z = x + iy : \frac{x^2}{d^2} - \frac{y^2}{p^2} = 1 \right\}$ — деяка гіпербола, причому $d^2 + p^2 = 1$, і нехай $N_1 = \left\{ z = x + iy : \frac{x^2}{d^2} - \frac{y^2}{p^2} = 1, x > 0 \right\}$ і $N_2 = \left\{ z = x + iy : \frac{x^2}{d^2} - \frac{y^2}{p^2} = 1, x < 0 \right\}$ — відповідно її права і ліва гілки. Позначимо $d = \cos \alpha$ і $p = \sin \alpha$ для деякого $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, а рівняння гіперболи запишемо у вигляді $N = \left\{ z = x + iy : \frac{x^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} = 1 \right\}$.

Теорема 5.4.2. [60] *Нехай $n, n \geq 3$ — деяке натуральне число; $N = \left\{ z = x + iy : \frac{x^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} = 1 \right\}$ — деяка гіпербола ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), N_1, N_2 — відповідно її права і ліва гілки; $a_{k,p}, k = \overline{1, 2}, p = \overline{1, n}$ — деякий набір фіксованих точок комплексної площини, таких, що $a_{1,p} \in N_1$, а $a_{2,p} \in N_2$ для $p = \overline{1, n}$, причому $a_{k,p} = x_{k,p} + iy_{k,p}$, де $x_{1,p} = \cos \alpha \cosh(t_{1,p})$, $y_{1,p} = \sin \alpha \sinh(t_{1,p})$, $x_{2,p} = -\cos \alpha \cosh(t_{2,p})$ і $y_{2,p} = \sin \alpha \sinh(t_{2,p})$ для деяких дійсних $t_{k,p}$, причому*

$$-\infty < t_{1,1} < t_{1,2} < \dots < t_{1,n} < +\infty,$$

$$-\infty < t_{2,1} < t_{2,2} < \dots < t_{2,n} < +\infty.$$

Тоді для довільного набору взаємно неперетинних областей $B_{k,p}$, $k = \overline{1, 2}, p = \overline{1, n}$, таких, що $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \Omega$, де $\Omega = \mathbb{C} \setminus ([-\infty; -1] \cup [1; +\infty])$, правильна нерівність

$$\prod_{k=1}^2 \prod_{p=1}^n r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leq \left(\frac{2}{n} \right)^{2n} \cdot \prod_{k=1}^2 \prod_{p=1}^n \left| \frac{\sqrt{a_{k,p}^2 - 1}}{a_{k,p} - \sqrt{a_{k,p}^2 - 1}} \right| \cdot \left(\frac{2\alpha}{\pi} \left(1 - \frac{2\alpha}{\pi} \right) \right)^n \prod_{k=1}^2 \prod_{p=1}^n \left[\chi \left(e^{\frac{t_{k,p}\pi}{\pi-2\alpha}} \right) \cdot \chi \left(e^{\frac{t_{k,p}\pi}{2\alpha}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot e^{t_{k,p}}. \quad (5.4.9)$$

Доведення теореми 5.4.2. Як і в теоремі 5.4.1, розглянемо відображення $w(z) = z - \sqrt{z^2 - 1}$, де ми беремо ту гілку багатозначної

функції $z - \sqrt{z^2 - 1}$, яка відображає область Ω на верхню півплощину $\text{Im}(w) > 0$. Образом гілки N_1 гіперболи при даному відображенні буде промінь $w = \rho e^{i\alpha}$ для деякого $\rho > 0$, а образом точок $a_{1,p}$ при даному відображенні будуть точки $a_{1,p}^* = e^{t_{1,p} + i\alpha}$ для $p = \overline{1, n}$; відповідно образом гілки N_2 гіперболи при даному відображенні буде промінь $w = \rho e^{i(\pi - \alpha)}$ для $\rho > 0$, а образом точок $a_{2,p}$ при даному відображенні будуть точки $a_{2,p}^* = e^{t_{2,p} + i(\pi - \alpha)}$ для $p = \overline{1, n}$. Для $k = \overline{1, 2}$, $p = \overline{1, n}$, позначимо $B_{k,p}^*$ область, яка є образом області $B_{k,p}$ при відображенні $w(z)$.

Використовуючи рівності (5.4.2) для областей $B_{k,p}$, отримаємо, що

$$\prod_{k=1}^2 \prod_{p=1}^n r(B_{k,p}, a_{k,p}) = \prod_{k=1}^2 \prod_{p=1}^n \left| \frac{\sqrt{a_{k,p}^2 - 1}}{a_{k,p} - \sqrt{a_{k,p}^2 - 1}} \right| \prod_{k=1}^2 \prod_{p=1}^n r(B_{k,p}^*, a_{k,p}^*). \quad (5.4.10)$$

Оцінимо тепер вираз $\prod_{k=1}^2 \prod_{p=1}^n r(B_{k,p}^*, a_{k,p}^*)$. Всі точки $a_{1,p}^*$ будуть знаходитися на промені $w = \rho e^{i\alpha}$, точки $a_{2,p}^*$ — на промені $w = \rho e^{i(\pi - \alpha)}$, а всі області $B_{k,p}^*$ знаходитимуться у верхній півплощині $\text{Im}(w) > 0$. Для $p = \overline{1, n}$ позначимо $a_{3,p}^* = -e^{t_{1,p} + i\alpha}$ і $B_{3,p}^* = \{w : -w \in B_{1,p}^*\}$, а також $a_{4,p}^* = -e^{t_{2,p} + i(\pi - \alpha)}$ і $B_{4,p}^* = \{w : -w \in B_{2,p}^*\}$. Очевидно, що

$$\prod_{k=1}^2 \prod_{p=1}^n r(B_{k,p}^*, a_{k,p}^*) = \prod_{k=3}^4 \prod_{p=1}^n r(B_{k,p}^*, a_{k,p}^*),$$

а тому

$$\prod_{k=1}^2 \prod_{p=1}^n r(B_{k,p}^*, a_{k,p}^*) = \sqrt{\prod_{k=3}^4 \prod_{p=1}^n r(B_{k,p}^*, a_{k,p}^*)}. \quad (5.4.11)$$

Розглянемо вираз $\prod_{k=1}^4 \prod_{p=1}^n r(B_{k,p}^*, a_{k,p}^*)$. Маємо систему $(4, n)$ -променеву систему точок $A_{4,n} := \{a_{k,p}^* \in \mathbb{C} : k = \overline{1, 4}, p = \overline{1, n}\}$ і неперетинних областей $B_{k,p}^*$, для яких правильні всі умови теореми 1.5.2. З рівностей (1.5.2) маємо

$$\alpha_1 = \alpha_3 = 1 - \frac{2\alpha}{\pi}; \quad \alpha_2 = \alpha_4 = \frac{2\alpha}{\pi},$$

а тому

$$\left(\prod_{k=1}^4 \alpha_k \right)^n = \left(\frac{2\alpha}{\pi} \left(1 - \frac{2\alpha}{\pi} \right) \right)^{2n}. \quad (5.4.12)$$

Далі, врахувавши, що для $p = \overline{1, n}$ правильні рівності $|a_{1,p}^*| = |a_{3,p}^*| = e^{t_{1,p}}$ і $|a_{2,p}^*| = |a_{4,p}^*| = e^{t_{2,p}}$, у виразі (1.5.4) отримаємо

$$M(A_{4,n}) := \prod_{k=1}^2 \prod_{p=1}^n \chi \left(e^{\frac{t_{k,p}\pi}{\pi-2\alpha}} \right) \cdot \chi \left(e^{\frac{t_{k,p}\pi}{2\alpha}} \right) \cdot e^{2t_{k,p}}. \quad (5.4.13)$$

Підставивши (5.4.12) і (5.4.13) в (1.5.10), отримаємо

$$\prod_{k=1}^4 \prod_{p=1}^n r(B_{k,p}^*, a_{k,p}^*) \leq \left(\frac{2}{n} \right)^{4n} \cdot \left(\frac{2\alpha}{\pi} \left(1 - \frac{2\alpha}{\pi} \right) \right)^{2n} \cdot \prod_{k=1}^2 \prod_{p=1}^n \chi \left(e^{\frac{t_{k,p}\pi}{\pi-2\alpha}} \right) \cdot \chi \left(e^{\frac{t_{k,p}\pi}{2\alpha}} \right) \cdot e^{2t_{k,p}}.$$

Підставивши отриману нерівність послідовно в (5.4.11) і (5.4.10), отримаємо нерівність (5.4.9).

Теорему 5.4.2 доведено.

Висновки до розділу 5

В п'ятому розділі дисертаційної роботи розглядається відкрита проблема про екстремальне розбиття відкритого одиничного круга, яка полягає в знаходженні максимуму добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей, які лежать в даному крузі, відносно n довільних точок, кожна з яких належить відповідній області. Повні розв'язки даної проблеми відомі тільки для $n = 2$ і $n = 3$.

В даному розділі отримано оцінку максимуму добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей, лежать в одиничному крузі для довільного натурального $n \geq 4$, причому знайдено як верхню, так і нижню оцінку даного максимуму. За допомогою отриманого результату було знайдено оцінки добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей, які належать комплексній площині з розрізом по відрітку $[-1; 1]$ дійсної осі.

Також в даному розділі знайдено оцінку добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей, які містять точки довільного еліпса, у таких випадках:

- для трьох точок, які лежать на деякому, явно вказаному еліпсі та трьох неперетинних областей, а також вказано конфігурації, для яких дані оцінки досягаються;

- для випадку n точок, які належать довільному еліпсу з деякою умовою на півосі;

- для випадку, коли одна точка нескінченно віддалена, а інші лежать на еліпсі.

Крім того, розглядалася задача, коли точки, відносно яких шукаються внутрішні радіуси неперетинних областей, лежать на деякій гіперболі, і знайдено відповідні оцінки як у випадку, коли всі точки лежать на одній гілці гіперболи, так і у випадку, коли на кожній гілці гіперболи лежить однакова кількість точок.

Результати розділу опубліковано в роботах [56, 58, 60, 186].

Розділ 6

Оцінки добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей, які містять точки довільної прямої

6.1. Формулювання проблеми та деякі допо- міжні твердження

В даному розділі розглядаються задачі про екстремальне розбиття комплексної площини, де більшість полюсів відповідних квадратичних диференціалів лежать на деякій прямій, зокрема розглядаються випадки, коли одна з точок a_k є нескінченно віддаленою, а також випадок, коли одна з точок a_k лежить поза прямою. Цікавою також є задача, коли внутрішній радіус області, яка містить одну з точок прямої, береться в деякому дійсному степені γ . Деякі оцінки для даного випадку були отримані в роботі [35]. Метою даної роботи є отримання більш точних оцінок для цього випадку.

Всі вказані вище задачі відносяться до т.зв. класу задач з фіксованими полюсам, оскільки для довільного натурального n завжди можна знайти набір з n точок, які належать певній прямій, а також набір з n неперетинних областей такий, що добуток внутрішніх радіусів наведених областей у вказаних точках буде більшим від довільного наперед вказаного дійсного числа. Звідси випливає, що розглядати задачу про максимум добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей з вільними

полюсами на прямій в класичній постановці немає сенсу. Однак цікавою є наступна проблема:

Проблема 6.1.1. Знайти максимум добутку $\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))$ для всіх можливих конфігурацій неперетинних областей $B_k \subset \mathbb{C}$ і точок $a_k \in B_k \cap [-1; 1]$, $k = \overline{1, n}$, де $n > 4$.

Дану проблему було наведено в списку відкритих проблем в роботі [70] під номером 17. Деякі частинні результати в проблемі 6.1.1 було отримано в роботах [68] і [108].

Для доведення деяких результатів даного розділу нам буде потрібна наступна лема.

Лема 6.1.1. Нехай $n \in \mathbb{N}$. Тоді для будь-яких фіксованих скінченних точок a_k , $k = \overline{0, n}$, і будь-якого набору взаємно неперетинних областей B_k , $k = \overline{0, n}$, таких, що $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, справедлива нерівність

$$r(B_0, a_0) \leq \left(\sum_{k=1}^n \frac{r^2(B_k, a_k)}{|a_k|^4} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (6.1.1)$$

Доведення леми 6.1.1. Відзначимо, що правильність твердження леми 6.1.1 для випадку $n = 1$ випливає з теореми Лаврентьєва (див. теорему 1.6.1, а також [129]). Тому достатньо розглянути випадок $n \geq 2$.

Нехай $d(E)$ — трансфінітний діаметр компактої множини $E \subset \mathbb{C}$ і нехай $B^+ = \{z : \frac{1}{z} \in B\}$, а також $a^+ = \frac{1}{a}$.

Повторюючи міркування леми 3.2.2, згідно з нерівністю (3.2.9), отримаємо

$$r(B_0, 0) \leq \frac{1}{\left[\sum_{k=1}^n r^2(B_k^+, a_k^+) \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (6.1.2)$$

Застосувавши інваріантність функції Гріна при конформному та однолистому відображенні, повторюючи міркування леми 3.3.2, як і в (3.3.14), отримаємо

$$r(B_k^+, a_k^+) = \frac{r(B_k, a_k)}{|a_k|^2}.$$

Підставивши для кожного k отриману рівність в нерівність (6.1.2), одержимо нерівність (6.1.1).

Лемі 6.1.1 доведено.

6.2. Оцінки добутку внутрішніх радіусів областей, що містять точки деякої прямої

Виконується таке твердження.

Теорема 6.2.1. [198] *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; $l = \{z : z = z_0 + te^{i\varphi_0}\}$ — деяка пряма, де $z_0 \in \mathbb{C}$, $\varphi_0 \in \mathbb{R}$, — деяке фіксоване число, причому $\varphi_0 \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, а t — параметр, який пробігає множину всіх дійсних чисел. Тоді для будь-яких фіксованих точок a_k , $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k = z_0 + \rho_k e^{i\varphi_0}$, де ρ_k — дійсні числа, причому $0 = \rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_n$, і будь-якого набору взаємно неперетинних областей B_k , $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, справедлива нерівність*

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |\rho_p - \rho_k| \right)^{\frac{2}{n-1}}. \quad (6.2.1)$$

Правильність оцінки 6.2.1 випливає з Теорема 3.2.1 безпосереднім застосуванням формули 3.2.11.

В наступній теоремі розглядається випадок, коли пряма l , якій належать точки a_k , проходить через початок координат, і для даного випадку отримано дещо іншу оцінку.

Теорема 6.2.2. [198] *Нехай $n \in \mathbb{N}$. Тоді для будь-яких фіксованих точок a_k , $k = \overline{0, n}$, які належать деякій прямій $l = \{z : z = te^{i\varphi_0}\}$, де*

$\varphi_0 \in \mathbb{R}$, причому $\varphi_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, а t — параметр, який пробігає множину всіх дійсних чисел, і будь-якого набору взаємно неперетинних областей $\{B_k\}$, $k = \overline{0, n}$, таких, що $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, справедлива нерівність

$$\prod_{k=0}^n r(B_k, a_k) \leq \frac{(n-1)^{-\frac{n-1}{4}}}{\sqrt{n}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n}} \left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{2}{n}}. \quad (6.2.2)$$

Доведення теореми 6.2.2. Взявши до уваги нерівність (6.1.1), одержуємо

$$\prod_{k=0}^n r(B_k, a_k) \leq \frac{\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)}{\left[\sum_{k=1}^n \frac{r^2(B_k, a_k)}{|a_k|^4} \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Із нерівності Коші про середнє арифметичне і середнє геометричне отримуємо наступне співвідношення

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{r^2(B_k, a_k)}{|a_k|^4} \geq \left(\prod_{k=1}^n \frac{r^2(B_k, a_k)}{|a_k|^4} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Звідси

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{r^2(B_k, a_k)}{|a_k|^4} \right)^{\frac{1}{2}} \geq n^{\frac{1}{2}} \left(\prod_{k=1}^n \frac{r(B_k, a_k)}{|a_k|^2} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

І, остаточно, маємо

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^n r(B_k, a_k) &\leq \frac{\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)}{n^{\frac{1}{2}} \left(\prod_{k=1}^n \frac{r(B_k, a_k)}{|a_k|^2} \right)^{\frac{1}{n}}} = \\ &= n^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{1-\frac{1}{n}} \left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{2}{n}}. \end{aligned}$$

Звідси, використавши оцінку (6.2.1) теореми 6.2.1, одержуємо нерівність (6.2.2) даної теореми.

Теорему 6.2.2 доведено.

Наслідок 6.2.1. Нехай $n \in \mathbb{N}$. Тоді за всіх умов теореми 6.2.2, справедлива нерівність

$$r(B_0, 0) \leq \frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)}} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{2}{n}}.$$

Нехай $g_{B_k}(z, a_k)$ — функція Гріна області B_k з полюсом в точці a_k ($k = \overline{1, n}$), де

$$g_{B_k}(z, a_k) = -\ln |z - a_k| + h_k(z, a_k) + o(1), \quad z \rightarrow a_k \quad \text{для} \quad a_k \neq \infty.$$

Нехай також $r(B, a) = e^{h(z, a)}$.

Наслідок 6.2.2. [61] Нехай $n \in \mathbb{N}$ — деяке натуральне число; $a_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{0, n}$ — фіксовані точки прямої $l = \{z : z = te^{i\varphi_0}\}$, $a_0 = 0$; f_k , $k = \overline{0, n}$ — функції, регулярні та однолисті у відкритому одиничному крузі U і не приймають в даному крузі однакових значень, тобто $f_i(z_1) \neq f_j(z_2)$ для довільних натуральних $0 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ і довільних $z_1, z_2 \in U$, для яких $f_k(0) = a_k$, $f_0(0) = 0$, $f_k(U) = B_k$, $k = \overline{1, n}$. Тоді виконується нерівність:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n h_k(z, a_k) \leq \\ & \leq -\frac{n-1}{4} \ln(n-1) - \frac{1}{2} \ln n + \frac{2}{n} \ln \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |a_p - a_k| \right) + \frac{2}{n} \ln \left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right). \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

Для доведення нерівності 6.2.3 потрібно прологарифмувати нерівність 6.2.2.

В наступній теоремі розглядається випадок, аналогічний до розглянутого в теоремі 6.2.2, але за умови, що внутрішній радіус області, яка містить точку 0, підноситься до деякого додатного степеня γ .

Теорема 6.2.3. [198] Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Тоді для будь-яких фіксованих точок a_k , $k = \overline{0, n}$, які належать прямій $l = \{z : z = te^{i\varphi_0}\}$, $t \in \mathbb{R}$,

$\varphi_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і будь-якого набору взаємно неперетинних областей $\{B_k\}$, $k = \overline{0, n}$, таких, що $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, справедлива нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}} (n-1)^{\frac{\gamma-n}{4}} \left(\prod_{1 \leqslant p < k \leqslant n} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1} \left(1 - \frac{\gamma}{n}\right)} \left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{2\gamma}{n}}. \quad (6.2.4)$$

Доведення теореми 6.2.3. Піднісни нерівність (6.1.1) до степеня γ , маємо

$$r^\gamma(B_0, a_0) \leqslant \left(\sum_{k=1}^n \frac{r^2(B_k, a_k)}{|a_k|^4} \right)^{-\frac{\gamma}{2}}.$$

Згідно нерівності Коші про середнє арифметичне і середнє геометричне

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{r^2(B_k, a_k)}{|a_k|^4} \right)^{\frac{\gamma}{2}} \geqslant n^{\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^n \frac{r(B_k, a_k)}{|a_k|^2} \right)^{\frac{\gamma}{n}}.$$

Таким чином,

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{1 - \frac{\gamma}{n}} \left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{2\gamma}{n}}.$$

Далі, застосувавши оцінку (6.2.1) теореми 6.2.1, одержуємо нерівність (6.2.4) даної теореми.

Теорему 6.2.3 доведено.

В наступній теоремі розглядається випадок, коли внутрішній радіус однієї з областей B_k береться відносно нескінченно віддаленої точки.

Теорема 6.2.4. [198] Нехай $n \in \mathbb{N}$. Тоді для будь-яких фіксованих точок a_k , $k = \overline{1, n+1}$, які належать деякій прямій $l = \{z : z = z_0 + te^{i\varphi_0}\}$, де $z_0 \in \mathbb{C}$, $\varphi_0 \in \mathbb{R}$, — деяке фіксоване число, причому $\varphi_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, а t — параметр, який пробігає множину всіх дійсних чисел, і будь-якого

набору взаємно неперетинних областей B_k , $k = \overline{1, n+1}$, таких, що $a_{n+1} = \infty \in B_{n+1} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, справедлива нерівність

$$\prod_{k=1}^{n+1} r(B_k, a_k) \leq \frac{(n-1)^{-\frac{n-1}{4}}}{\sqrt{n}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n}}. \quad (6.2.5)$$

Доведення теореми 6.2.4. Повторюючи міркування, аналогічні до проведених в лемі 3.2.2 (див. нерівність (3.2.9)), і теорему про мінімізацію площі [83], одержуємо нерівність

$$r(B_{n+1}, a_{n+1}) \leq \frac{1}{\left[\sum_{k=1}^n r^2(B_k, a_k) \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Далі із нерівності Коші про середнє арифметичне і середнє геометричне, маємо

$$\left(\sum_{k=1}^n r^2(B_k, a_k) \right)^{\frac{1}{2}} \geq n^{\frac{1}{2}} \left[\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right]^{\frac{1}{n}}.$$

Звідси, одержуємо

$$r(B_{n+1}, a_{n+1}) \leq n^{-\frac{1}{2}} \left[\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right]^{-\frac{1}{n}}.$$

І, таким чином,

$$r(B_{n+1}, a_{n+1}) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq n^{-\frac{1}{2}} \left[\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right]^{1-\frac{1}{n}}.$$

Застосувавши оцінку (6.2.1) до правої частини останньої нерівності, одержуємо співвідношення (6.2.5).

Теорему 6.2.4 доведено.

Наслідок 6.2.3. Нехай $n \in \mathbb{N}$. Тоді за всіх умов теореми 6.2.4, справедлива нерівність

$$r(B_{n+1}, a_{n+1}) \leq \frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)}} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Теорема 6.2.5. [198] Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Тоді для будь-яких фіксованих точок a_k , $k = \overline{1, n+1}$, які належать деякій прямій $l = \{z : z = z_0 + te^{i\varphi_0}\}$, де $z_0 \in \mathbb{C}$, $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ — деяке фіксоване число, причому $\varphi_0 \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, а t — параметр, який пробігає множину всіх дійсних чисел, і будь-якого набору взаємно неперетинних областей B_k , $k = \overline{1, n+1}$, таких, що $a_{n+1} = \infty \in B_{n+1} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, справедлива нерівність

$$r^\gamma(B_\infty, \infty) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leqslant \\ \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}}(n-1)^{\frac{\gamma-n}{4}} \left(\prod_{1 \leqslant p < k \leqslant n} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}(1-\frac{\gamma}{n})}.$$

Доведення теореми 6.2.5 аналогічне доведенню теореми 6.2.3.

Надалі розглядається застосування одержаних оцінок добутків внутрішніх радіусів областей у традиційному розділі геометричної теорії функцій комплексної змінної, а саме доводяться нові теореми для сімей мероморфних функцій, які попарно не приймають спільних значень.

Наведемо наслідки теорем 6.2.1, 6.2.2 та 6.2.4. Новизна цих наслідків полягає у тому, що, ми розглядаємо багатолісті функції з фіксованими значеннями $f_k(0)$ на деякій прямій. На відміну від останніх робіт у цій галузі, ми доводимо оцінки модулів похідних більш ніж у двох точках.

Теорема 6.2.6. [198] Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ — деяке натуральне число, $a_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок прямої $l = \{z : z = z_0 + te^{i\varphi_0}\}$, де $z_0 \in \mathbb{C}$, $\varphi_0 \in \mathbb{R}$, — деяке фіксоване число, причому $\varphi_0 \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, а t — параметр, який пробігає множину всіх дійсних чисел; f_k , $k = \overline{1, n}$ — функції, мероморфні і однолісті в крузі $|z| < 1$, відображають цей круг на взаємно неперетинні області так, що $f_k(0) = a_k$, причому $f_i(z_1) \neq f_j(z_2)$ для довільних натуральних $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$ та довільних $z_1, z_2 \in U$. Тоді правильна наступна

нерівність

$$\prod_{k=1}^n |f'_k(0)| \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |f_p(0) - f_k(0)| \right)^{\frac{2}{n-1}}. \quad (6.2.6)$$

Доведення теореми 6.2.6. Позначимо $f_k(U) = D_k$, $f_k(0) = a_k$, $k = \overline{1, n}$. Тоді точки a_k для $k = 1, \dots, n$ належать прямій l і області D_k однозв'язні, попарно не перетинні, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = 1, \dots, n$. В силу рівності

$$r(B_k, a_k) = |f'_k(0)|, \quad k = 1, \dots, n,$$

нерівність (6.2.6) безпосередньо випливає з теореми 6.2.1.

Теорему 6.2.6 доведено.

Перед формулюванням наступної теореми відзначимо такий факт. Нехай функція f регулярна в крузі $U = \{z : |z| < 1\}$ і приймає там значення w , що належить області D , внутрішній радіус якої $r(D, a)$ в точці $a \in D$. Якщо $f(0) = a$, то справедлива нерівність Хеймана [98]:

$$|f'(0)| \leq r(D, a). \quad (6.2.7)$$

Рівність в (6.2.7) досягається тоді, коли f відображає круг U конформно і однолисто на D , в цьому випадку $r(D, a)$ називають конформним радіусом області D в точці a .

Теорема 6.2.7. [198] Нехай $n \in \mathbb{N}$ — деяке натуральне число, $a_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок прямої $l = \{z : z = te^{i\varphi_0}\}$, де $\varphi_0 \in \mathbb{R}$, — деяке фіксоване число, причому $\varphi_0 \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, а t — параметр, який пробігає множину всіх дійсних чисел; f_k , $k = \overline{0, n}$ — функції, мероморфні і однолисті в крузі U , для яких $f_k(0) = a_k$, $k = \overline{1, n}$, $f_0(0) = 0$, і які попарно не приймають в даному крузі спільних значень, тобто $f_i(z_1) \neq f_j(z_2)$ для довільних натуральних $0 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ та довіль-

них $z_1, z_2 \in U$. Тоді справедлива нерівність

$$\prod_{k=0}^n |f'_k(0)| \leq \frac{(n-1)^{-\frac{n-1}{4}}}{\sqrt{n}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |f_p(0) - f_k(0)| \right)^{\frac{2}{n}} \left(\prod_{k=1}^n |f_k(0)| \right)^{\frac{2}{n}}. \quad (6.2.8)$$

Доведення теореми 6.2.7. Як і в попередній теоремі, покладемо $f_k(U) = D_k$, $f_k(0) = a_k$, $k = 0, \dots, n$. Тоді точки a_k для $k = 0, \dots, n$, належать прямій l та області D_k попарно не перетинаються, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = 0, \dots, n$. Тоді нерівність (6.2.8) випливає з теореми 6.2.2.

Врахувавши нерівність Хеймана (6.2.7), з теореми 6.2.1 тепер легко слідує нерівність (6.2.8).

Теорему 6.2.7 доведено.

Теорема 6.2.8. [198] Нехай $n \in \mathbb{N}$ — деяке натуральне число, $a_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок прямої $l = \{z : z = z_0 + te^{i\varphi_0}\}$, де $z_0 \in \mathbb{C}$, $\varphi_0 \in \mathbb{R}$, — деяке фіксоване число, причому $\varphi_0 \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, а t — параметр, який пробігає множину всіх дійсних чисел; f_k , $k = \overline{1, n}$, — функції, мероморфні і однолисті в крузі U , а функція f_{n+1} — регулярна і однолиста в області $|z| > 1$, за винятком нескінченно віддаленої точки, причому $f_{n+1}(\infty) = \infty$, і дані функції попарно не приймають спільних значень $f_i(z_1) \neq f_j(z_2)$ для довільних натуральних $1 \leq i, j \leq n+1$, $i \neq j$ та довільних $z_1, z_2 \in U$, для яких $f_k(0) = a_k$, $f_{n+1}(0) = \infty$. Тоді справедлива нерівність

$$\frac{1}{|f'_{n+1}(0)|} \prod_{k=1}^n |f'_k(0)| \leq n^{-\frac{1}{2}} (n-1)^{-\frac{n-1}{4}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |f_p(0) - f_k(0)| \right)^{\frac{2}{n}}.$$

Доведення цього результату аналогічне доведенню теорем 6.2.6 і 6.2.7.

6.3. Задача про екстремальне розбиття комплексної площини з полюсами на дійсній прямій та деякі її модифікації

В даному підрозділі розглядаються деякі модифікації задачі про екстремальне розбиття комплексної площини з полюсами на дійсній прямій, зокрема, в наступній теоремі розглядається випадок, коли n точок a_k належать дійсній прямій, а точка a_0 лежить поза прямою, причому внутрішній радіус області, що містить точку a_0 , береться в деякому степені γ .

Теорема 6.3.1. [187] *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 5$, γ — деяке додатне дійсне число, причому $\gamma \leq \sqrt[3]{n}$, a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір фіксованих точок дійсної осі $\text{Im } z = 0$ і нехай $a_0 = i$. Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{0, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, правильна нерівність*

$$r^\gamma(B_0, i) \prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k)) \leq \frac{2^{n+\gamma}}{n^n} \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} \prod_{k=1}^n (a_k^2 + 1). \quad (6.3.1)$$

Знак рівності в наведеній вище нерівності досягається, зокрема, для точок a_k і областей B_k , які при відображенні $w^* = \frac{i+iw}{1-w}$ є образами відповідно точок d_k^* і областей D_k^* ($k = \overline{1, n}$), які є, в свою чергу, полюсами і круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}dw^2.$$

Доведення теореми 6.3.1.

Нехай B_k^* , a_k^* , $k = \overline{0, n}$, — образи відповідно областей B_k і точок a_k при відображенні

$$w = \frac{z - i}{z + i}. \quad (6.3.2)$$

Образом дійсної осі при даному відображенні буде одиничне коло $|z| = 1$. Зауважимо, що відображення w є оберненим відносно відображення w^* .

Доведемо, що для $k = \overline{1, n}$ правильна рівність

$$r(B_k, a_k) = \frac{a_k^2 + 1}{2} r(B_k^*, a_k^*). \quad (6.3.3)$$

За означенням функції Гріна маємо, що для $z \rightarrow a_k$ правильний асимптотичний розклад

$$G_{B_k}(z, a_k) = \ln \frac{1}{|z - a_k|} + \ln r(B_k, a_k) + o(1).$$

З іншого боку, використовуючи конформну інваріантність функції Гріна для відображення $w = \frac{z-i}{z+i}$, будемо мати:

$$\begin{aligned} G_{B_k}(z, a_k) &= G_{B_k^*}(w, a_k^*) = \ln \frac{1}{|w - a_k^*|} + \ln r(B_k^*, a_k^*) + o(1) = \\ &= \ln \frac{1}{\left| \frac{z-i}{z+i} - \frac{a_k-i}{a_k+i} \right|} + \ln r(B_k^*, a_k^*) + o(1) = \ln \frac{|z+i||a_k+i|}{2|z-a_k|} + \ln r(B_k^*, a_k^*) + o(1) = \\ &= \ln \frac{1}{|z-a_k|} + \ln \frac{1}{2} |a_k+i| |z-a_k+a_k+i| + \ln r(B_k^*, a_k^*) + o(1) = \\ &= \ln \frac{1}{|z-a_k|} + \ln \frac{1}{2} |a_k+i|^2 + \ln \left| 1 + \frac{z-a_k}{a_k+i} \right| + \ln r(B_k^*, a_k^*) + o(1). \end{aligned}$$

Врахувавши, що для $z \rightarrow a_k$ вираз $\ln \left| 1 + \frac{z-a_k}{a_k+i} \right| \rightarrow 0$, отримаємо, що

$$G_{B_k}(z, a_k) = \ln \frac{1}{|z-a_k|} + \ln \frac{1}{2} |a_k+i|^2 r(B_k^*, a_k^*) + o(1).$$

А це означає, що

$$r(B_k, a_k) = \frac{|a_k+i|^2}{2} r(B_k^*, a_k^*). \quad (6.3.4)$$

Врахувавши також, що для всіх $k = \overline{1, n}$ a_k — дійсне число, тому $|a_k+i|^2 = a_k^2 + 1$, і отримаємо рівність (6.3.3).

Для області B_0 та точки $a_0 = i$, враховуючи (6.3.4), отримаємо рівність

$$r(B_0, i) = 2r(B_0^*, 0).$$

Звідси отримаємо рівність

$$r^\gamma(B_0, i) \prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k)) = \frac{\prod_{k=1}^n (a_k^2 + 1)}{2^{n-\gamma}} r^\gamma(B_0^*, 0) \prod_{k=1}^n (r(B_k^*, a_k^*)). \quad (6.3.5)$$

Зауважимо, що при умовах теореми, враховуючи результати роботи [48], правильна нерівність

$$r^\gamma(B_0^*, 0) \prod_{k=1}^n (r(B_k^*, a_k^*)) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Підставивши даний вираз в рівність (6.3.5), і отримаємо нерівність (6.3.1).

Теорему 6.3.1 доведено.

Зауважимо, що випадок, коли точки a_k , $k = \overline{1, n}$, належать деякій довільній прямій, а точка a_0 — поза даною прямою, завжди можна звести до випадку, описаного в теоремі 6.3.1, деяким лінійним перетворенням. Відзначимо також, що за допомогою результатів, отриманих в другому розділі даної роботи, можна довести аналогічні теореми для інших конфігурацій n та γ .

Наступна теорема дає оцінку добутку внутрішніх радіусів областей, які містять точки дійсної прямої для випадку, коли одна з даних точок нескінченно віддалена. На відміну від теорем 6.2.4-6.2.5 даної роботи, тут розглядається тільки випадок, коли степінь, до якого підноситься внутрішній радіус області, яка містить нескінченно віддалену точку, дорівнює одиниці, однак для цього випадку наведено точні оцінки.

Теорема 6.3.2. [187] *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, a_k , $k = \overline{1, n-1}$, — деякий набір фіксованих точок дійсної осі $\text{Im } z = 0$ і $a_n = \infty$. Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, правильна нерівність:*

$$r(B_n, \infty) \prod_{k=1}^{n-1} (r(B_k, a_k)) \leq \left(\frac{2}{n}\right)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (a_k^2 + 1). \quad (6.3.6)$$

Знак рівності в даній нерівності досягається, зокрема, для точок a_k і областей B_k , які є образами відповідно точок $d_k^* = \exp\left(\frac{2\pi ki}{n}\right)$ і областей $D_k^* = \{z : \left|\arg z - \frac{2\pi k}{n}\right| < \frac{\pi}{n}\}$ ($k = \overline{1, n}$) при відображенні $w^* = \frac{i+iw}{1-w}$.

Доведення теореми 6.3.2. Нехай $B_k^*, a_k^*, k = \overline{1, n}$ — образи відносно областей B_k і точок a_k при відображенні

$$w = \frac{z-i}{z+i}.$$

Використовуючи (6.3.3), отримаємо, що для $k = \overline{1, n-1}$ правильна рівність

$$r(B_k, a_k) = \frac{a_k^2 + 1}{2} r(B_k^*, a_k^*).$$

Виразимо тепер $r(B_n, \infty)$ через $r(B_n^*, a_n^*)$, зауваживши, що $a_n^* = 1$.

За означенням функції Гріна маємо, що для $z \rightarrow \infty$ правильний асимптотичний розклад

$$G_{B_n}(z, \infty) = \ln |z| + \ln r(B_n, \infty) + o(1).$$

Далі будемо мати:

$$\begin{aligned} G_{B_n}(z, \infty) &= G_{B_n^*}(w, 1) = \ln \frac{1}{|w-1|} + \ln r(B_n^*, a_n^*) + o(1) = \\ &= \ln \frac{1}{\left|\frac{z-i}{z+i} - 1\right|} + \ln r(B_n^*, a_n^*) + o(1) = \ln \frac{|z+i|}{2} + \ln r(B_n^*, a_n^*) + o(1) = \\ &= \ln |z| + \ln \left|1 + \frac{i}{z}\right| + \ln \frac{1}{2} r(B_n^*, a_n^*) + o(1). \end{aligned}$$

Врахувавши, що для $z \rightarrow \infty$ вираз $\ln \left|1 + \frac{i}{z}\right| \rightarrow 0$, отримаємо, що

$$r(B_n, \infty) = \frac{r(B_n^*, 1)}{2}. \quad (6.3.7)$$

Далі, врахувавши рівності (6.3.3) і (6.3.7), а також теорему 3 роботи [64], будемо мати:

$$\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k)) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \prod_{k=1}^{n-1} (a_k^2 + 1) \cdot \prod_{k=1}^n (r(B_k^*, a_k^*)) \leq \left(\frac{2}{n}\right)^n \prod_{k=1}^{n-1} (a_k^2 + 1),$$

що й доводить нерівність (6.3.6).

Знак рівності перевіряється безпосередньо.

Теорему 6.3.2 доведено.

Наслідок 6.3.1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$ — деяке натуральне число, $n \geq 2$, $a_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, n-1}$, — деякий набір фіксованих точок дійсної осі, $f_k(z)$, $k = \overline{1, n-1}$, — функції, регулярні і однолисті в крузі $|z| < 1$, для яких $f_k(0) = a_k$; $a_n = \infty$, $f_n(z)$ — регулярна і однолиста в області $|z| > 1$, за винятком нескінченно віддаленої точки і $f_n(\infty) = \infty$, причому $f_i(z_1) \neq f_j(z_2)$ для довільних натуральних $1 \leq i, j \leq n$ та $i \neq j$ та довільних різних $z_1, z_2 \in U$. Тоді правильна нерівність:*

$$\frac{1}{|f'_n(\infty)|} \prod_{k=1}^{n-1} |f'_k(0)| \leq \left(\frac{2}{n}\right)^n \prod_{k=1}^{n-1} (f_k^2(0) + 1).$$

Наступна теорема дає деяку оцінку виразу $\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))$ для точок a_k і областей B_k , які задовольняють всі умови проблеми 6.1.1, і нехай R_n — максимум виразу даного виразу для всеможливих таких конфігурацій точок a_k і областей B_k , однак з додатковою умовою, що $a_1 = -1$ і $a_n = 1$.

Теорема 6.3.3. [187] *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 5$, a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір точок відрізка $[-1; 1]$, причому $a_1 = -1$ і $a_n = 1$. Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, правильна нерівність:*

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{n}\right)^n \prod_{k=1}^n \left(\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{2n} \right) \operatorname{ctg}^2 \frac{(2k-1)\pi}{2n} + 1 \right) &\leq R_n \leq \\ &\leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2k}{n-1} \right)^{\frac{2(n-k)}{n-1}}. \end{aligned} \quad (6.3.8)$$

Доведення теореми 6.3.3. Доведемо спочатку ліву частину нерівності (6.3.8). Для цього достатньо знайти конфігурацію областей B_k і

точок a_k , $k = \overline{1, n}$, які задовольняють умови теореми 6.3.3, для яких дана нерівність перетворюється в рівність.

Розглянемо набір точок $a_k^* = e^{\frac{(2k-1)\pi}{n}i}$ і областей $B_k^* = \{z : \left| \arg z - \frac{(2k-1)\pi}{n} \right| < \frac{\pi}{n}\}$ для $k = \overline{1, n}$. Зрозуміло, що в цьому випадку $a_k^* \in B_k^*$, причому для даних точок і областей, згідно з теоремою 3 роботи [64], правильна рівність

$$\prod_{k=1}^n (r(B_k^*, a_k^*)) = \left(\frac{4}{n}\right)^n.$$

Розглянемо відображення $\varphi = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2n} \right) \frac{i+iw}{1-w}$ і нехай D_k і d_k — образи відповідно областей B_k^* і точок a_k^* , $k = \overline{1, n}$, при відображенні φ . Елементарними обчисленнями переконуємося, що отримана система областей D_k і точок d_k , $k = \overline{1, n}$, задовольняє всі умови теореми 6.3.3, причому $d_k = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} \operatorname{ctg} \frac{(2k-1)\pi}{2n}$. Тому, використовуючи рівність (6.3.3), отримаємо, що

$$r(D_k, d_k) = \frac{\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{2n} \right) \operatorname{ctg}^2 \frac{(2k-1)\pi}{2n} + 1}{2} r(B_k^*, a_k^*),$$

а звідси

$$\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k)) \geq \prod_{k=1}^n (r(D_k, d_k)) = \left(\frac{2}{n}\right)^n \prod_{k=1}^n \left(\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{2n} \right) \operatorname{ctg}^2 \frac{(2k-1)\pi}{2n} + 1 \right).$$

Ліва частина нерівності (6.3.8) доведена.

З іншого боку, для областей B_k і точок a_k , які задовольняють всі умови теореми 6.3.3, виконується нерівність (3.2.11) з теореми 3.2.1 (див. також теорему 2.1 роботи [195]), а тому правильна нерівність

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}}. \quad (6.3.9)$$

Елементарними дослідженнями переконуємося, що вираз, який знаходиться в правій частині нерівності (6.3.9), досягає свого максимального

значення у випадку, коли всі відстані між сусідніми точками a_k на відріжку $[-1; 1]$ рівні між собою, тобто у випадку $a_{k+1} - a_k = \frac{2}{n-1}$. Тоді отримаємо, що

$$\left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2k}{n-1} \right)^{\frac{2(n-k)}{n-1}}.$$

Підставивши отриману рівність в нерівність (6.3.9), отримаємо праву частину нерівності (6.3.8).

Теорему 6.3.3 доведено.

6.4 Оцінки добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей, які містять точки прямої для випадку, коли внутрішній радіус одної з областей береться в деякому додатному степені

В даному підрозділі розглядається проблема про максимум добутку внутрішніх радіусів областей з полюсами на дійсній прямій, де один з внутрішніх радіусів береться в деякому додатному степені γ . Для отримання оцінок в даній проблемі знадобилася наступна теорема, де отримано оцінки в задачі, де всі точки a_k належать одиничному колу, але внутрішній радіус області, яка містить точку $a_1 = 1$, підноситься до деякого степеня γ .

Теорема 6.4.1. [187] *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, γ — деяке додатне дійсне число, причому $\gamma \neq 1$, a_k , $k = \overline{1, n}$, — деякий набір точок одиничного кола $|z| = 1$, причому $a_1 = 1$. Тоді для довільного набору однозв'язних областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k$,*

$k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, причому $\infty \notin B_n \cup B_1 \cup B_2$, правильна нерівність:

$$r^\gamma(B_1, 1) \prod_{k=2}^n (r(B_k, a_k)) \leq \frac{2^{2n+3\gamma-1} \gamma^\gamma (\gamma+1)^{\gamma+1}}{|\gamma-1|^{1+\gamma} (\gamma+n-1)^{\gamma+n-1}} \left| \frac{\sqrt{\gamma}-1}{\sqrt{\gamma}+1} \right|^{2\sqrt{\gamma}}. \quad (6.4.1)$$

Доведення теореми 6.4.1. Відзначимо, що випадок $\gamma = 1$ був розглянутий в роботі [64].

Припустимо для конкретності, що

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \dots < \arg a_n < 2\pi.$$

Далі, означимо числа α_k таким чином:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &:= (\arg a_2 - \arg a_1); & \alpha_2 &:= (\arg a_3 - \arg a_2); \dots; \\ \alpha_n &:= (2\pi - \arg a_n). \end{aligned}$$

Нехай

$$P_k := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\},$$

$k = \overline{1, n}$, $\arg a_{n+1} := 2\pi$, $P_0 := P_n$, $P_{n+1} := P_1$. Очевидно, що $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 2\pi$.

При кожному $k = \overline{1, n}$ позначимо через $z_k(w)$ ту гілку багатозначної аналітичної функції $z = -i(e^{-i \arg a_k} w)^{\frac{\pi}{\alpha_k}}$, $z_0 := z_n$, $z_{n+1} := z_1$, яка конформно і однолисто відображає області P_k , $k = \overline{1, n}$ на праву півплощину $\operatorname{Re} z > 0$.

Тоді для областей B_k , $k = \overline{1, n}$, заданих в умові теореми 6.4.1, позначимо через $D_k^{(1)}$ об'єднання зв'язної компоненти множини $z_k(B_k \cap \overline{P_k})$, що містить точку $z_k(a_k)$ з її відображенням відносно уявної осі, а через $D_{k-1}^{(2)}$ — об'єднання зв'язної компоненти множини $z_{k-1}(B_k \cap \overline{P_{k-1}})$, що містить точку $z_{k-1}(a_k)$ з її відображенням відносно уявної осі. Сім'ю двох симетричних відносно уявної осі областей $\{D_k^{(1)}; D_{k-1}^{(2)}\}$, будемо називати результатом розділяючого перетворення області B_k .

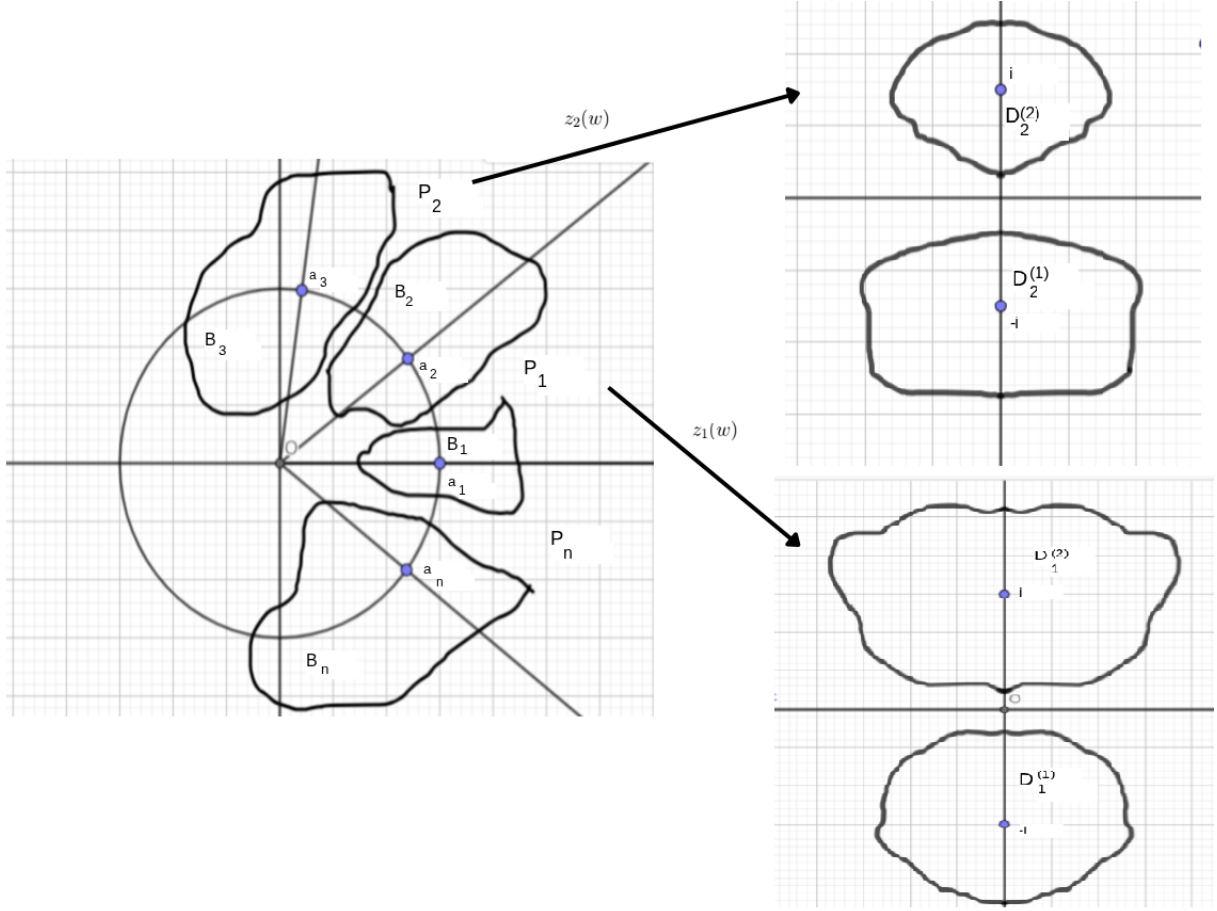


Рис. 6.1: Розділяюче перетворення областей в теоремі 6.4.1.

Згідно з теоремою 3 роботи [64], для кожного $k = \overline{2, n}$ правильна нерівність:

$$r(B_k, a_k) \leq \frac{1}{\pi} \sqrt{\alpha_{k-1} \alpha_k \left(r(D_k^{(1)}, -i) r(D_{k-1}^{(2)}, i) \right)} \quad (6.4.2)$$

Також отримаємо нерівність

$$r^\gamma(B_1, 1) \leq \frac{1}{\pi^\gamma} \left(\sqrt{\alpha_1 \alpha_n \left(r(D_1^{(1)}, -i) r(D_n^{(2)}, i) \right)} \right)^\gamma. \quad (6.4.3)$$

Використовуючи нерівності (6.4.2) і (6.4.3), отримаємо:

$$r^\gamma(B_1, 1) \prod_{k=2}^n (r(B_k, a_k)) \leq \frac{1}{\pi^{n-1+\gamma}} L_1 L_2 L_3, \quad (6.4.4)$$

де

$$L_1 := (\alpha_1 \alpha_n)^{\frac{\gamma+1}{2}} \prod_{k=2}^{n-1} \alpha_k;$$

$$L_2 := \sqrt{r(D_1^{(2)}, i) r^\gamma(D_1^{(1)}, -i)} \sqrt{r^\gamma(D_n^{(2)}, i) r(D_n^{(1)}, -i)};$$

$$L_3 := \prod_{k=2}^{n-1} \sqrt{r(D_k^{(1)}, -i) r(D_k^{(2)}, i)}.$$

Оцінимо тепер кожен з виразів L_p , де $p = \overline{1, 3}$.

Для оцінки виразу L_1 зауважимо, що $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 2\pi$, а тому, дослідивши добуток $(\alpha_1 \alpha_n)^{\frac{\gamma+1}{2}} \prod_{k=2}^{n-1} \alpha_k$ на умовний екстремум, отримаємо, що

$$L_1 \leq 2^{n-2} (\gamma + 1)^{\gamma+1} \left(\frac{\pi}{\gamma + n - 1} \right)^{\gamma+n-1}. \quad (6.4.5)$$

Оцінимо вираз L_2 . Оскільки всі області, внутрішні радіуси яких входять в даний вираз, є однозв'язними і не містять нескінченно віддаленої точки, то для них справджуються всі умови теореми Л.І. Колбіної [111], а отже правильна нерівність

$$r(D_1^{(2)}, i) r^\gamma(D_1^{(1)}, -i) \leq \frac{4^{1+\gamma} \gamma^\gamma}{|\gamma - 1|^{1+\gamma}} \left| \frac{\sqrt{\gamma} - 1}{\sqrt{\gamma} + 1} \right|^{2\sqrt{\gamma}} 2^{1+\gamma}.$$

Аналогічну нерівність отримаємо також для добутку $r^\gamma(D_n^{(2)}, i) r(D_n^{(1)}, -i)$. Звідси отримаємо

$$L_2 \leq \frac{8^{1+\gamma} \gamma^\gamma}{|\gamma - 1|^{1+\gamma}} \left| \frac{\sqrt{\gamma} - 1}{\sqrt{\gamma} + 1} \right|^{2\sqrt{\gamma}}. \quad (6.4.6)$$

Оцінимо тепер вираз L_3 . Для кожного $k = \overline{2, n-1}$ за теоремою М.О. Лаврентьева [129] правильна нерівність

$$r(D_k^{(1)}, -i) r(D_k^{(2)}, i) \leq |i - (-i)|^2 = 4,$$

а тому

$$L_3 \leq 2^{n-2}. \quad (6.4.7)$$

Підставимо тепер нерівності (6.4.5)-(6.4.7) у вираз (6.4.4). Отримаємо

$$r^\gamma(B_1, 1) \prod_{k=2}^n (r(B_k, a_k)) \leq \frac{1}{\pi^{n-1+\gamma}} \cdot 2^{n-2} (\gamma+1)^{\gamma+1} \left(\frac{\pi}{\gamma+n-1} \right)^{\gamma+n-1} \cdot \frac{8^{1+\gamma} \gamma^\gamma}{|\gamma-1|^{1+\gamma}} \left| \frac{\sqrt{\gamma}-1}{\sqrt{\gamma}+1} \right|^{2\sqrt{\gamma}} 2^{n-2} = \frac{2^{2n+3\gamma-1} \gamma^\gamma (\gamma+1)^{\gamma+1}}{|\gamma-1|^{1+\gamma} (\gamma+n-1)^{\gamma+n-1}} \left| \frac{\sqrt{\gamma}-1}{\sqrt{\gamma}+1} \right|^{2\sqrt{\gamma}},$$

що й доводить нерівність (6.4.1).

Теорему 6.4.1 доведено.

Випадок, коли $a_1 \neq 1$, зводиться до теореми 6.4.1 відповідним поворотом, тому формула (6.4.1) залишається правильною.

Теорему 6.4.1 можна використати для оцінки добутку внутрішніх радіусів областей, які містять точки дійсної прямої, де радіус однієї з областей підноситься до деякого степеня γ . Зокрема, правильна теорема.

Теорема 6.4.2. [187] *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, γ — деяке додатне дійсне число, причому $\gamma \neq 1$, $a_1 = \infty$, a_k , $k = \overline{2, n}$ — деякий набір фіксованих точок дійсної осі $\text{Im } z = 0$. Тоді для довільного набору однозв'язних областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, причому $-i \notin B_n \cup B_1 \cup B_2$, правильна нерівність:*

$$r^\gamma(B_1, \infty) \prod_{k=2}^n (r(B_k, a_k)) \leq \frac{2^{n+2\gamma} \gamma^\gamma (\gamma+1)^{\gamma+1}}{|\gamma-1|^{1+\gamma} (\gamma+n-1)^{\gamma+n-1}} \left| \frac{\sqrt{\gamma}-1}{\sqrt{\gamma}+1} \right|^{2\sqrt{\gamma}} \prod_{k=2}^n (a_k^2 + 1). \quad (6.4.8)$$

Доведення теореми 6.4.2. Нехай B_k^* , a_k^* , $k = \overline{1, n}$ — образи відно областей B_k і точок a_k при відображенні

$$w = \frac{z-i}{z+i}.$$

Зрозуміло, що $a_1^* = 1$ і $|a_k^*| = 1$ для $k = \overline{2, n}$. Також, використовуючи

формули (6.3.3) і (6.3.7), отримаємо, що

$$r^\gamma(B_1, \infty) \prod_{k=2}^n (r(B_k, a_k)) = \frac{\prod_{k=2}^n (a_k^2 + 1)}{2^{\gamma+n-1}} r^\gamma(B_1^*, 1) \prod_{k=2}^n (r(B_k^*, a_k^*)). \quad (6.4.9)$$

Для областей B_k^* і точок a_k^* , $k = \overline{1, n}$, справджуються всі умови теореми 6.4.1, а тому, підставивши нерівність (6.4.1) в рівність (6.4.9), і отримаємо нерівність (6.4.8).

Теорему 6.4.2 доведено.

Зауважимо, що теорема 6.4.2 дає дещо іншу оцінку, відмінну від отриманої в теоремі 6.2.5, а також суттєво доповнює результат роботи [35].

Випадки, коли точка a_1 є скінченною, розглядається аналогічно. Для цього випадку правильні наступні оцінки.

Теорема 6.4.3. *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, γ — деяке додатне дійсне число, причому $\gamma \neq 1$, a_k , $k = \overline{1, n}$ — деякий набір фіксованих скінченних точок дійсної осі $\text{Im } z = 0$. Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, $-i \notin B_n \cup B_1 \cup B_2$, правильна нерівність:*

$$r^\gamma(B_1, a_1) \prod_{k=2}^n (r(B_k, a_k)) \leq \frac{2^{n+2\gamma} \gamma^\gamma (\gamma + 1)^{\gamma+1} (a_1^2 + 1)^\gamma}{|\gamma - 1|^{1+\gamma} (\gamma + n - 1)^{\gamma+n-1}} \left| \frac{\sqrt{\gamma} - 1}{\sqrt{\gamma} + 1} \right|^{2\sqrt{\gamma}} \prod_{k=2}^n (a_k^2 + 1).$$

Теорема 6.4.4. *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, γ — деяке додатне дійсне число, причому $\gamma \neq 1$, a_k , $k = \overline{1, n-1}$, — деякий набір фіксованих скінченних точок дійсної осі $\text{Im } z = 0$ і $a_n = \infty$. Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k$,*

$k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, $-i \notin B_n \cup B_1 \cup B_2$, *правильна нерівність:*

$$r^\gamma(B_1, a_1) \prod_{k=2}^n (r(B_k, a_k)) \leq \frac{2^{n+2\gamma} \gamma^\gamma (\gamma+1)^{\gamma+1} (a_1^2+1)^\gamma}{|\gamma-1|^{1+\gamma} (\gamma+n-1)^{\gamma+n-1}} \left| \frac{\sqrt{\gamma}-1}{\sqrt{\gamma}+1} \right|^{2\sqrt{\gamma}} \prod_{k=2}^{n-1} (a_k^2+1).$$

Висновки до розділу 6

В шостому розділі дисертаційної роботи розглядається задача про максимум добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей з полюсами на деякій прямій, а також різні її модифікації та суміжні задачі. Також розглядається випадок, коли всі точки, відносно яких беруться внутрішні радіуси областей, лежать на відрізку $[-1; 1]$ дійсної осі.

Зокрема, в даному розділі було отримано оцінку добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей, які містять точки довільної прямої; $n + 1$ неперетинних областей, які містять точки деякої прямої, яка проходить через точку 0 ; $n + 1$ неперетинних областей, які містять точки деякої прямої, де один з полюсів — нескінченно віддалена точка. Також отримано оцінки для аналогічних випадків, де внутрішні радіуси областей, які містять точки 0 чи ∞ , підносяться до деякого дійсного степеня.

Також розглядалася задача, де n точок a_k лежать на деякій прямій, а одна з точок поза даною прямою, і для цього випадку були отримані точні оцінки. У проблемі про максимум добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей для випадку, коли всі точки, відносно яких беруться внутрішні радіуси областей, лежать на відрізку $[-1; 1]$ дійсної осі, знайдено як верхню, так і нижню оцінку даного максимуму.

Також було отримано оцінку добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей, які містять точки одиничного кола, причому внутрішній радіус області, яка містить точку $a_1 = 1$, підноситься до деякого степеня. За допомогою цього результату було отримано аналогічні оцінки для неперетинних областей з полюсами на дійсній прямій, де внутрішній радіус області, яка містить нескінченно віддалену точку, підноситься до степеня γ .

Результати розділу опубліковано в роботах [61, 187, 198].

Висновки

Дисертаційна робота присвячена дослідженню відкритих проблем про екстремальне розбиття комплексної площини за допомогою розробки нових і вдосконалення наявних методів геометричної теорії функцій комплексної змінної. За допомогою як вдосконалення класичних, так і використання нещодавно розроблених методів теорії функцій та теорії відображень вдалося отримати ряд нових результатів у складних відкритих проблемах, більшість з яких поставлено вже достатньо давно і над якими працюють математики в багатьох країнах світу. Також в роботі наведено деякі можливі застосування отриманих результатів в інших задачах теорії функцій. Дослідження проведено на найвищому світовому рівні. Результати досліджень опубліковано у 24 вітчизняних та закордонних математичних виданнях, а також доповідались на 14 міжнародних наукових конференціях. Отримані в дисертаційній роботі результати та розвинені методи мають наукову перспективу і можуть бути використані як при подальшому дослідженні наведених проблем, так і в суміжних галузях математики.

Зокрема, в роботі для багатьох частинних випадків розв'язано відкрити проблему про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів n областей відносно точок одиничного кола на степінь γ внутрішнього радіуса області відносно точки нуль за умови, що всі наведені області попарно не перетинаються, причому точні оцінки згаданого добутку отримано як у загальному випадку, так і за умови, що області, внутрішні радіуси яких беруться в точках одиничного кола, симетричні відносно

даного кола. Також одержано оцінки зверху для добутку деяких степенів внутрішніх радіусів системи неперетинних областей з полюсами в заданих n фіксованих точках як у випадку, коли всі степені дорівнюють одиниці, так і у загальному випадку, а також наведено достатню умову на степені, за якої наведений функціонал обмежений при довільній конфігурації точок. За допомогою наведених оцінок було отримано багатоточкові теореми спотворення для функцій, однолистих у відкритому одиничному крузі. Було одержано оцінки зверху добутків внутрішніх радіусів областей, що взаємно не перетинаються, у випадках, коли полюси відповідних квадратичних диференціалів розміщені на довільній прямій, деякому еліпсі чи деякій гіперболі, а також у задачі про екстремальне розбиття обмеженої області.

В дисертаційній роботі значно узагальнені й посилені відомі результати В.М. Дубініна, Г.В. Кузьміної, М.А. Лебедева, Л.В. Ковальова, О.К. Бахтіна, І.В. Денегі.

Отримані в дисертаційній роботі результати й розвинені в ній методи можуть бути корисними в подальших дослідженнях комплексного і гіперкомплексного аналізів та їх застосуваннях.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Aharonov D., Kirwan W.E. A method of symmetrization and applications. I, II. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1972. Vol. 163, No. 1. P. 369–377; Vol. 169, No 7. P. 279 – 291.
2. Ahlfors L.V. Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen. *Acta. Soc. Sci. Fenn.* 1930. No. 9. P. 1–40.
3. Ahlfors L.V., Berling A. Conformal invariants and functiontheoretic null-sets. *Acta. Math.* 1950. Vol. 83, No. 1–2. P. 101–129.
4. Aleksandrov, I. A. Methods of the geometric theory of analytic functions. Tomsk State University. 2001. In Russian.
5. Aleksandrov A.I., Aleksandrov I.A., Kopaneva L.S., Yuferova G.A. Bieberbach’s conjecture and Milin’s conjecture. *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i Mekhanika.* 2009. No. 4(8). P. 7–30. In Russian.
6. Ahlfors, L. V., Bers, L. (1960). Riemann’s mapping theorem for variable metrics. *Annals of Mathematics.* 1960. Vol. 72, No. 2. P. 385–404.

7. Baernstein A. Integral means, univalent functions and circular symmetrization. *Acta. Math.* 1974. Vol. 133, No. 3–4. P. 138–169.
8. Bakhtin A.K., Bakhtina G.P. On extremal problems for symmetric disjoint domains. *Ukr. Math. J.* 1997. Vol. 49, No. 2. P. 197–203.
9. Bakhtin A.K. On the product of internal radii of symmetric nonoverlapping domains. *Ukr. Math. J.* 1997. Vol. 49, No. 11. P. 1632–1643.
10. Bakhtin A.K. Some problems in the theory of nonoverlapping domains. *Ukr. Math. J.* 1999. Vol. 51, No. 6. P. 803–812.
11. Bakhtin A.K. On classes of functions without common values. Extremal problems of the theory of univalent functions. *Preprint 2002.6, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine*. Kyiv, 2002. P. 3–9. In Russian.
12. Bakhtin A.K. Extremal problems of non-overlapping domains with free poles on a circle. *Preprint 2003.6, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine*. Kyiv, 2003. 45 p. In Russian.
13. Bakhtin A.K. Extremal problems on nonoverlapping domains with free poles on a circle. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr.* 2004. No. 8. P. 7–15. In Russian.
14. Bakhtin A.K. Piecewise separating transformation and extremal problems with free poles on rays. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr.* 2004. No. 12. P. 7–13. In Russian.
15. Bakhtin A.K., Targonskii A.L. Some extremal problems in the class of non-overlapping domains. *Proc. Inst. Math. NAS Ukraine*. 2004. Vol. 1, No. 3. P. 244–253. In Russian.

16. Bakhtin A.K., Bakhtina G.P. Extremal problems of non-overlapping domains and quadratic differentials. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr.* 2005. No. 8. P. 13–15. In Russian.
17. Bakhtin A.K. Estimates of functionals for open sets. *Nonlinear Oscillations*. 2005. Vol. 8, No. 2. P. 147–153. In Russian.
18. Bakhtin A.K., Targonskii A.L. Extremal problems and quadratic differentials. *Nonlinear Oscillations*. 2005. Vol. 8, No. 3. P. 296–301.
19. Bakhtin A.K., Bakhtina G.P. Separating transformations and problems on non-overlapping domains. *Proc. Inst. Math. NAS Ukraine*. 2006. Vol. 3, No. 3. P. 273–284. In Russian.
20. Bakhtin A.K. Extremal problems for nonoverlapping domains with free poles on a circle. *Ukr. Math. J.* 2006. Vol. 58, No. 7. P. 981–1000.
21. Bakhtin A.K. On some extremal problems of the geometric theory of functions of a complex variable. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr.* 2006. No. 9. P. 7–11. In Russian.
22. Bakhtin A.K. Inequalities for internal radii of non-overlapping domains and open sets. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr.* 2006. No. 10. P. 7–13. In Russian.
23. Bakhtin A.K. Extremal problems and quadratic differentials in the geometric theory of functions of a complex variable. *Thesis for D.Sc. degree in Physics and Mathematics*. Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2007. In Russian.
24. Bakhtin A.K., Bakhtina G.P., Zelinskii Yu.B. Topological-algebraic structures and geometric methods in complex analysis. *Proc. Inst. Math. NAS Ukraine*. 2008. Vol. 73. 308 p. In Russian.

25. Bakhtin A.K., Denega I.V. On a problem of V.N. Dubinin. *Proc. Inst. Math. NAS Ukraine*. 2013. Vol. 10, No. 4-5. P. 401–411. In Russian.
26. Bakhtin A.K., Zabolotnyi Ya.V. On a special case of a well-known problem of V.N. Dubinin. *Proc. Inst. Appl. Math. Mech. NAS Ukraine*. 2015. Vol. 29. P. 17–22.
27. Bakhtin A., Dvorak I., Denega I. Separating transformation and extremal decomposition of the complex plane. *Bulletin de la societe des sciences et des lettres de Lodz, Recherches sur les deformations*. 2016. Vol. 66, No. 2. P. 13–20.
28. Bakhtin A.K., Zabolotnyi Ya.V. Estimates for the product of inner radii of nonoverlapping domains. *J. Math. Sci.* 2017. Vol. 221, No. 5. P. 623–629.
29. Bakhtin A.K. Estimates of internal radii for mutually non-intersecting domains. *Proc. Inst. Math. NAS Ukraine*. 2017. Vol. 14, No. 1. P. 25–33. In Russian.
30. Bakhtin O.K., Zabolotnyi Ya.V., Dvorak I.Ya. Estimates for the product of inner radii of five mutually nonoverlapping domains. *Ukr. Math. J.* 2017. Vol. 69, No. 2. P. 304–311.
31. Bakhtin A.K. Separating transformation and extremal problems on nonoverlapping simply connected domains. *J. Math. Sci.* 2018. Vol. 232. P. 1–13.
32. Bakhtin A., Vyhivska L. Estimates of inner radii of symmetric non-overlapping domains. *J. Math. Sci.* 2019. Vol. 241, No. 1. P. 1–18.
33. Bakhtin A.K., Denega I.V. Inequalities for the inner radii of nonoverlapping domains. *Ukr. Math. J.* 2019. Vol. 71, No. 7. P. 1138–1145.

34. Bakhtin A.K., Vygovskaya L.V., Denega I.V. Inequalities for the inner radii of symmetric disjoint domains. *Ukr. Math. J.* 2019. Vol. 70, No. 9. P. 1477–1483.
35. Bakhtin A.K., Denega I.V. Extremal decomposition of the complex plane with free poles. *J. Math. Sci.* 2020. Vol. 246, No. 1. P. 1–17.
36. Bakhtin A.K., Denega I.V. Extremal decomposition of the complex plane with free poles II. *J. Math. Sci.* 2020. Vol. 246, No. 5, P. 602–616.
37. Bakhtin A.K., Zabolotnii Ya.V. Estimates of the products of the inner radii of multiconnected domains. *International conference Complex Analysis and Related Topics dedicated to the 90-th anniversary of A.A. Goldberg (1930-2008)*. Abstracts. Lviv, June 28 — July 1, 2021, Ivan Franko National University of Lviv, 2021. P. 6.
38. Bakhtin A.K., Zabolotnii Ya.V. Estimates of the products of the inner radii of multiconnected domains. *The International Conference in Complex and Functional Analysis dedicated to the memory of Bohdan Vynnytskyi*. Збірник тез. Drohobych 13 — 16 September, 2021, Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University, 2021. P. 6.
39. Bakhtin A.K., Denega I.V. Generalized M.A. Lavrentiev’s inequality. *J. Math. Sci.* 2022. Vol. 262, No. 2. P. 138–153.
40. Bakhtina G.P. An extremal problem of conformal mapping of the unit disk onto nonoverlapping domains. *Ukr. Math. J.* 1974. Vol. 26, No. 5. P. 646–648. In Russian.
41. Bakhtina G.P. Variational methods and quadratic differentials in problems on non-overlapping domains. *Abstract of Thesis for Ph.D. degree*. Kyiv: Institute of Mathematics of AS UkrSSR, 1975. In Russian.

42. Bakhtina G.P. On conformal radii of symmetric non-overlapping domains. *Modern Problems of Real and Complex Analysis*. Kyiv: Institute of Mathematics of AS UkrSSR, 1984. P. 21–27.
43. Bieberbach L. Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln. *S.B.Preuss. Acad. Wiss.* 1916. Vol. 138. P. 940–955.
44. De Branges L. A proof Bieberbach conjecture. *Acta. Math.* 1985. Vol. 154. P. 137–152.
45. Caratheodory C. Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete. *Math. Ann.* 1913. Vol. 73. P. 323–370.
46. Courant R. *Dirichlet's Principle, Conformal Mapping, and Minimal Surfaces*. New York: Interscience Publishers, 1950. 330 p.
47. Dvorak I.Ya. Estimates of the products of inner radii for partially nonoverlapping domains of the complex plane. *J. Math. Sci.* 2019. Vol. 241. P. 36-46.
48. Denega I.V. Quadratic differentials and separating transformation in extremal problems on non-overlapping domains. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr.* 2012. No. 4. P. 15–19. In Russian.
49. Denega I.V., Zabolotnii Ya.V. Estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2017. Vol. 62, No. 11. P. 1611–1618.
50. Denega I., Zabolotnij Ja. On the problem of extremal decomposition of the complex plane. *Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: Всеукраїнська наукова конференція, тези доповідей*. Ворохта, 22-25 лютого 2017 р. – Івано-Франківськ:

ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника», 2017. с. 73–75.

51. Denega I.V., Klishchuk B.A. To the problem of extremal partition of the complex plane. *J. Math. Sci.* 2019. Vol. 234, No. 1, P. 14–20.
52. Denega I. Estimates of the inner radii of non-overlapping domains. *J. Math. Sci.* 2019. Vol. 242, No. 6. P. 787–795.
53. Denega I., Zabolotnyi Ja. O.K. Bakhtin. Scientific legacy. *Proceedings of the International Geometry Center.* 2023. Vol. 16, No. 1. P. 1–16.
54. Denega I.V., Zabolotnyi Ya.V. Application of upper estimates for products of inner radii to distortion theorems for univalent functions. *Matematychni Studii.* 2023. Vol. 60, No. 2. P. 138–144.
55. Denega I., Zabolotnyi Ja. Extremal problem on domains containing ellipse points. *Конференція молодих вчених "Підстрипацькі читання"*. Львів, 27-29 травня 2024 р. <http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2024/abstracts/Denega.pdf>
56. Denega I.V., Zabolotnyi Ya.V. Some extremal problems on the Riemannian sphere. *Carpathian Mathematical Publications.* 2024. Vol. 16, No. 2. P. 593–605.
57. Denega I., Zabolotnyi Ja. Extremal problem on three non-overlapping domains containing ellipse points. *Науковий пошук молодих дослідників: збірник наукових праць студентів, магістрантів та викладачів / за заг. ред. Постової Світлани, Вербівського Дмитрія, Карплюк Світлани, Єремеевої Віри.* – Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2024. Вип. 17. с. 31–33.
58. Denega I.V., Zabolotnyi Ya.V. Inequalities for the Inner Radii of Domains Containing an Arbitrary Ellipse Points and Infinity. In: Ebert,

- M.R., Kähler, U., Sabadini, I., Toft, J. (eds) *New Tools in Mathematical Analysis and Applications. ISAAC 2023. Trends in Mathematics.* Birkhäuser, Cham., 2025. P. 65–76.
59. Denega I., Zabolotnyi Y. Using conformal radii of the open unit disk sectors in distortion theorems for univalent functions. *Complex Anal Synerg.* 2025. Vol. 11, 8.
 60. Denega I., Zabolotnyi Y., Estimates of the functional with fixed points on a hyperbola branches. *Proceedings of the International Geometry Center.* 2025. Vol. 18, No. 2, P. 207–219.
 61. Denega I., Zabolotnyi Y. Estimates for sums of logarithmic potentials associated with the Green function. *Researches in Mathematics.* 2025. Vol. 33, No. 3. P. 14–22.
 62. Dubinin V.N. On the product of internal radii of "partially non-overlapping" domains. *Questions of the Metric Theory of Mappings and Its Application.* Kyiv: Naukova Dumka, 1978. P. 24–31. In Russian.
 63. Dubinin V.N. Symmetrization method in problems on nonoverlapping domains. *Math. USSR-Sb.* 1987. Vol. 56, No. 1. P. 107–119.
 64. Dubinin V.N. A separating transformation of domains, and problems on extremal decomposition. *J. Sov. Math.* 1991. Vol. 53, No. 3. P. 252–263.
 65. Dubinin V.N. Symmetrization in the geometric theory of functions of a complex variable. *Russian Math. Surveys.* 1994. Vol. 49, No. 1. P. 1–79.
 66. Dubinin V.N. Capacities of condensers, generalizations of Grötzsch Lemmas, and symmetrization. *J. Math. Sci.* 2007. Vol. 143, No. 3. P. 3053–3068.

67. Dubinin, V.N., Kim, V.Y. Distortion theorems for functions regular and bounded in the disk. *J Math Sci.* 2008. Vol. 150. P. 2018–2026.
68. Dubinin V.N., Kirillova D.A. Some applications of extremal partitions in the geometric theory of functions. *Far East. Math. J.* 2010. Vol. 10, No. 2. P. 130–152. In Russian.
69. Dubinin V.N. Methods of geometric function theory in classical and modern problems for polynomials. *Russian Math. Surveys.* 2012. Vol. 67, No. 4. P. 599–684.
70. Dubinin, V.N. Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory. Birkhäuser/Springer, Basel. 2014. 344 p.
71. Duren P.L., Schiffer M. A variation method for function schlicht in annulus. *Arch. Ration. Mech. and Anal.* 1962. Vol. 9. P. 260–272.
72. Duren P.L. Arcs omitted by support points of Univalent functions. *Comment. Math. Helveciti.* 1981. Vol. 56, No 3. P. 352–365.
73. Duren P.L. Univalent functions. N.Y.: Springer–Verlag. 1983. 383 p.
74. Duren P.L., Schiffer M. Conformal mappings onto non-overlapping regions. *Complex analysis.* Basel: Birkhauser Verlag. 1988. P. 27–39.
75. Elin M., Shoikhet D. Linearization Models for Complex Dynamical Systems. Topics in univalent functions, functions equations and semi-group theory. Birkhäuser Basel. 2010.
76. Elin M., Shoikhet D., Yacobzon F. A distortion theorem for functions convex in one direction. *Complex Anal. Oper. Theory.* 2011. Vol. 5. P. 751–758.
77. Emel’yanov E.G. On a connection between two problems on extremal decompositions. *J. Sov. Math.* 1990. Vol. 52, No. 2. P. 3063–3068.

78. Emel'yanov E.G. On the problem on maximizing the product of powers of conformal radii of nonoverlapping domains. *J. Math. Sci.* 2004. Vol. 122, No. 6. P. 3641–3641.
79. Fedorov S.I. Maximum of a conformal invariant in the problem of nonoverlapping domains. *J. Sov. Math.* 1984. Vol. 25, No. 2. P. 1093–1101.
80. Fekete M. Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten. *Math Z.* 1923. Vol. 17. P. 228–249.
81. Firat, A.H. Bootstrapping closed string field theory. *J. High Energ. Phys.* 2023. 186.
82. Gardiner F.P. Teichmüller theory and quadratic differentials. Wiley-Interscience., 1987. 256 p.
83. Goluzin G.M. Geometric theory of functions of a complex variable. Providence: AMS, 1969. 676 p.
84. Goryainov V.V., Gutlyanskii V.Ya. On the geometric properties of conformal mapping. *Metric Questions of the Theory of Functions and Mappings*. Kyiv, 1975. Vol. 6. P. 24–40. In Russian.
85. Goodman A.W. Univalent Functions. Mariner, Tampa, 1983. 246 p.
86. Graham I., Kohr G. Geometric Function Theory in One and Higher Dimensions. Marcel Dekker Inc., New York-Basel. 2003. 526 p.
87. Gromova L.L. Some applications of the area principle. *Vestnik Leningrad Univ.* 1968. No. 7. P. 31–40. In Russian.
88. Gronwall T.H. Some Remarks on Conformal Representation. *Annals of Mathematics, Second Series*. 1914 – 1915. Vol. 16, No. 1/4. P. 72–76.

89. Grötzsch H. Über einige Extremalprobleme der konformen Abbildung. I, II. *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys.* 1928. Vol. 80, No. 6. P. 367–376, 497–502.
90. Grötzsch H. Über ein Variationsprobleme der konformen Abbildung. *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys.* 1930. Vol. 82, No. 4. P. 251–263.
91. Gutlyanskii V.Ya. Parametric representation of univalent functions. *Soviet Math. Dokl.* 1970. Vol. 11. P. 750–753. In Russian.
92. Gutlyanskii V.Ya. On the product of conformal radii of non-overlapping domains. *Some Questions of Modern Theory of Functions*. Novosibirsk, 1976. P. 46–53. In Russian.
93. Gutlyanskii V.Ya., Ryazanov V.I. On boundary correspondence under quasiconformal mappings. *Ann. Acad. Sci. Fenn.* 1996. Vol. 21. P. 167–178.
94. Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Ryazanov V.I., Vuorinen M. On convergence theorems for space quasiregular mappings. *Forum Math.* 1998. Vol. 10. P. 353–375.
95. Gutlyanskii V.Ya., Ryazanov V.I., Martio O., Vuorinen M. On the asymptotic behavior of quasiconformal mapping in space. *Quasiconformal Mappings and Analysis*. New York: Springer. 1998. P. 159–180.
96. Gutlyanskii V.Ya., Ryazanov V.I., Martio O., Vuorinen M. Infinitesimal geometry of quasiregular mappings. *Ann. Acad. Sci. Fenn.* 2000. Vol. 25, No. 1. P. 101–130.
97. Hayman W.K. Multivalent Functions. Cambridge: Cambridge University Press, 1958. 151 p.

98. Hayman W.K. Multivalent functions. Cambridge Univ. Press. 1994. 263 p.
99. Hernandez R., Venegas O. Distortion theorems associated with schwarzian derivative for harmonic mappings. *Complex Anal. Oper. Theory*. 2019. Vol. 13, P. 1783–1793.
100. Hurwitz A., Courant R. Geometrische funktionentheorie. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York. 1964. 706 p.
101. Jenkins J.A. Some uniqueness results in the theory of symmetrization. *Ann. Math.* 1955. Vol. 61, No. 1. P. 106–115.
102. Jenkins, J. A. Univalent Functions and Conformal Mapping. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, New Series*. 1958. Vol. 18. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag. VIII, 169 p.
103. Jenkins J.A. Some uniqueness results in the theory of symmetrization II. *Ibid.* 1962. Vol. 75, No. 2. P. 223–230.
104. Jenkins J.A. The method of extremal metric, The Bieberbach Conjecture (West Lafayette, Ind., 1985). *Math. Surveys Monographs*, Vol. 21. Amer. Math. Soc, Providence, RI. 1986. P. 95–104.
105. Jenkins J.A. On two-point distortion theorems for bounded univalent regular functions. *Kodai. Math. J.* 2001. Vol. 24, No. 3. P. 329–338.
106. Kim Seong-A., Minda D. Two-point distortion theorems for univalent functions. *Pacific J. Math.* 1994. Vol. 163, No 1. P. 137–157.
107. Kirillova D.A. On the maximum of the Möbius invariant in the problem of four nonoverlapping domains. *Far East. Math. J.* 2010. Vol. 10, No. 1. P. 41–49. In Russian.

108. Kirillova D.A. Univalent functions without common values. *Russian Math. (Iz. VUZ)*. 2010. Vol. 54, No. 9. P. 74–76.
109. Koebe P. Über die uniformisierung beliebiger analytischen kurven. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys.* 1907. Vol. 1, No. 2. P. 191–210.
110. Koebe P. Abhandlungen zur theorie der konformen abbildung, IV. *Acta math.* 1918. Vol. 41. P. 305–344.
111. Kolbina L.I. Some extremal problems in conformal mapping. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1952. Vol. 84, No. 5. P. 865–868. In Russian.
112. Kolbina L.I. Conformal mapping of the unit disk onto non-overlapping domains. *Vestnik Leningrad. Univ.* 1955. Vol. 5. P. 37–43. In Russian.
113. Kostyuchenko E.V. Solution of a problem of extremal partition. *Far East. Math. J.* 2001. Vol. 2, No. 1. P. 3–15. In Russian.
114. Kovalev L.V. On the problem of extremal partition with free poles on a circle. *Far East. Math. Coll.* 1996. Vol. 2. P. 96–98. In Russian.
115. Kovalev L.V. On three nonoverlapping domains. *Far East. Math. J.* 2000. Vol. 1, No. 1. P. 3–7. In Russian.
116. Kovalev L.V. On the inner radii of symmetric nonoverlapping domains. *Russian Math. (Iz. VUZ)*. 2000. Vol. 44, No. 6. P. 77–78.
117. Kraus D., Roth O. Weighted distortion in conformal mapping in euclidean, hyperbolic and elliptic geometry. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 2006. Vol. 31, P. 111–130.
118. Kubo T. Hyperbolic transfinite diameter and some theorems on analytic functions in an annulus. *J. Math. Soc. Japan*. 1958. Vol. 10. P. 348–364.

119. Kufarev P.P. On the question of conformal mappings of complementary domains. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1950. Vol. 73, No. 5. P. 881–884. In Russian.
120. Kufarev P.P., Fales A.E. On an extremal problem for complementary domains. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1951. Vol. 81, No. 6. P. 995–998. In Russian.
121. Kuz'mina G.V. On the problem of the maximum of the conform radius's product of non-overlapping domains. *J. Sov. Math.* 1982. Vol. 19. P. 1715–1726.
122. Kuz'mina G.V. Moduli of families of curves and quadratic differentials. *Proc. Steklov Inst. Math.* 1982. Vol. 139. P. 1–231.
123. Kuz'mina G.V. Methods of the geometric theory of functions. I, II. *St. Petersburg Math. J.* 1998. Vol. 9, No. 3. P. 455–507; No. 5. P. 889–930.
124. Kuz'mina G.V. On connection of different problems on extremal decomposition. *J. Math. Sci.* 2001. Vol. 105, No. 4. P. 2197–2209.
125. Kuz'mina G.V. Problems of extremal decomposition of the Riemann sphere. *J. Math. Sci.* 2003. Vol. 118, No. 1. P. 4880–4894.
126. Kuz'mina G.V. Problems of extremal decomposition of the Riemann sphere. *J. Math. Sci.* 2004. Vol. 122, No. 6. P. 3654–3666.
127. Kuz'mina G.V. The method of extremal metric in extremal decomposition problems with free parameters. *J. Math. Sci.* 2003. Vol. 129, No. 3. P. 3843–3851.
128. Landkof N.S. Foundations of modern potential theory. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1972. 426 p.

129. Lavrent'ev M.A. On the theory of conformal mappings. *Tr. Fiz.-Mat. Inst. Steklova*. 1934. Vol. 5. P. 159–245. In Russian.
130. Lavrent'ev M.A. *Conformal Mappings with Applications to Some Problems of Mechanics*. Moscow: OGIZ, 1946. 157 p. In Russian.
131. Lebedev N.A. On the theory of conformal transformations of a disk into non-overlapping domains. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1955. Vol. 103, No. 4. P. 553–555. In Russian.
132. Lebedev N.A. *The Area Principle in the Theory of Univalent Functions*. Moscow: Nauka, 1975. 336 p. In Russian.
133. Lomako T., Gutlyanskii V. and Ryazanov V. To the theory of variational method for Beltrami equations. *J. Math. Sci.* 2012. Vol. 182, No. 1. P. 37–54.
134. Mergelyan S.N. Uniform approximations of functions of a complex variable. *Amer. Math. Soc. Transl.* 1954.
135. Mityuk I.P. The principle of symmetrization for multiply connected domains. *Soviet Math. Dokl.* 1964. Vol. 157, № 2. P. 268–270. In Russian.
136. Mityuk I.P. The symmetrization principle for multiply connected domains and some of its applications. *Ukrainian Math. J.* 1965. Vol. 17, No. 4. P. 46–54.
137. Milovanovic G.V., Mitrinovic D.S., and Rassias Th.M. *Topic in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros*, World Scientific, Singapore-New Jersey-London-Hong Kong, 1994. 836 p.
138. Min G. Inequalities for rational functions with prescribed poles. *Can. J. Math.* 1998. Vol. 50, No. 1. P. 152–166.

139. Nehari Z. Some inequalities in the theory of functions. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1953. Vol. 75, No. 2. P. 256–286.
140. Ogol P., Aminer T., Okelo B. On Analysis of Growth and Distortion Criteria for Certain Univalent Functions on the Unit Disk. *Int. J. Open Problems Compt. Math.* 2025. Vol. 18, No. 3. P. 113–132.
141. Pick G. Über die konforme Abbildung eines Kreises auf ein schlichtes und zugleich beschränktes Gebiet. *Sitzungsber Akad. Wiss., Wien.* 1917. P. 247–263.
142. Plaksa S.A., Shpakivskyi V.S. Integral theorems for monogenic functions in an infinite-dimensional space with a commutative multiplication. *Bulletin de la Societe des Sciences et des Lettres de Lodz.* 2018. Vol. 68, No. 2. P. 25-36.
143. Plaksa S.A. A functionally-analytic method for modelling axial-symmetric flows of ideal fluid. *Demonstratio Mathematica.* Vol. 52, No. 1. P. 213-224.
144. Plaksa S.A., Shpakivskyi V.S. Monogenic functions in spaces with commutative multiplication and applications. *Frontiers in Mathematics*, Birkhäuser Cham. 2023. 550 p.
145. Pólya G., Szegő G. Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics. Princeton: Princeton University Press, 1951. 279 p.
146. Pommerenke Ch. Univalent functions. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. 1975. 376 p.
147. Rahman Q.I., Schmeisser G. Analytic Theory of Polynomials. Oxford University Press, Oxford. 2002. 742 p.
148. Ransford T. Potential theory in the complex plane. Cambridge Univ. Press, Cambridge. 1995. 232 p.

149. Roth O.A. distortion theorem for bounded univalent functions. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 2002. Vol. 27. P. 257–272.
150. Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. BMO – quasiconformal mappings. *J. d'Anal. Math.* 2001. Vol. 83. P. 1–20.
151. Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Degenerate Beltrami equation and radial Q – homeomorphisms. *Reports of Dept. Math. Univ. Helsinki.* 2003. Vol. 369. P. 1–34.
152. Ryazanov V., Sevostyanov E. On normal families of Q – homeomorphisms. *Proc. of Inst. Appl. Math. and Mech.* 2004. Vol. 9. P. 161–176.
153. Ryazanov V., Sevost'yanov E. Toward the theory of rings Q -homeomorphisms. *Israel J. Math.* 2008. Vol. 168. P. 101–118.
154. Salimov R., Sevost'yanov E. Analogs of the Ikoma–Schwartz lemma and Liouville theorem for mappings with unbounded characteristic. *Ukr. Math. J.* 2012. Vol. 63, No. 10. P. 1551–1565.
155. Salimov R.R., Klishchuk B.A. Extremal problem for the area of the image of a disk. *J. Math. Sci.* 2018. Vol. 234, No. 3. P. 373–380.
156. Salimov R.R., Klishchuk B.A. An extremal problem for the volume functional. *Matematychni Studii.* 2018. Vol. 50, No. 1. P. 36–43.
157. Schaeffer A.C., Spencer D.C. Coefficient regions for schlicht functions. New York: Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 1950. Vol. 35. 311 p.
158. Schiffer M. A method of variation within the family of simple functions. *Proc. Lond. Math. Soc.* 1938. Vol. 44. P. 432–449.
159. Schiffer M. On the coefficients of simple functions. *Proc. Lond. Math. Soc.* 1938. Vol. 44. P. 450–452.

160. Schiffer M. Variation of the Green functions and the theory of p -valent functions. *Amer. J. Math.* 1943. Vol. 65, No. 2. P. 341–360.
161. Shabat B.V. *Introduction to Complex Analysis. Part II.* Moscow: Nauka, 1976. 400 p. In Russian.
162. Shevchuk I.A. *Polynomial Approximation and Traces of Functions Continuous on an Interval.* Kyiv: Naukova Dumka, 1992. 255 p. In Russian.
163. Schiffer M., Spencer D.C. *Functionals on Finite Riemann Surfaces.* Princeton: Princeton University Press, 1954. 461 p.
164. Solynin A.Yu. The continuous symmetrization of a sets. *J. Sov. Math.* 1992. Vol. 59, No. 6. P. 1214–1221.
165. Solynin A.Yu. The modules of doubly connected domains and conformal invariant metrics. *J. Math. Sci.* 1994. Vol. 70, No. 6. P. 2140–2146.
166. Stoilow S. Teoria functiilor de o variabila complexa. Vol. 2: Functii armonice. Suprafete riemanniene. Bucuresti: Editura Academiei Republicii Populare Romine, 1958. 378 p.
167. Strebel K. Quadratic Differentials. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 1984. 184 p.
168. Tamrazov P.M. Theorems on the covering of lines under conformal mapping. *Math. USSR-Sb.* 1965. Vol. 66, No. 4. P. 502–524. In Russian.
169. Tamrazov P.M. Some extremal problems in the theory of univalent conformal mappings. *Math. USSR-Sb.* 1965. Vol. 67, No. 3. P. 329–337. In Russian.

170. Tamrazov P.M. On a general coefficient theorem. *Math. USSR-Sb.* 1967. Vol. 1, No. 1. P. 49–59.
171. Tamrazov P.M. Extremal conformal mappings and poles of quadratic differentials. *Math. USSR-Izv.* 1968. Vol. 2, No. 5. P. 987–996.
172. Tamrazov P.M. On the change in moduli under circular symmetrization. *Math. Notes.* 1971. Vol. 10, No. 5. P. 740–742.
173. Tamrazov P.M. Conformally invariant moduli and circular symmetrization. *Metric Questions of the Theory of Functions and Mappings.* Kyiv: Naukova Dumka, 1974. P. 127–146. In Russian.
174. Tamrazov P.M. Capacities of condensers. The method of mixing signed measures. *Math. USSR-Sb.* 1982. Vol. 43, No. 1. P. 33–62.
175. Tamrazov P.M. Tchebotaröv's extremal problem. *Cent. Eur. J. Math.* 2005. Vol. 3, No. 4. P. 591–605.
176. Targonskii A.L. Estimates of some functionals on the classes of non-overlapping domains. *Complex Analysis and Flows with Free Boundaries: Proc. Inst. Math. NAS Ukraine.* 2004. Vol. 1, No. 3. P. 235–243. In Russian.
177. Targonskii A.L. An extremal problem for the nonoverlapping domains. *Journal of Mathematical Sciences.* 2017. Vol. 227, No. 1. P. 98–104.
178. Targonskii A.L., Targonskaya I.I. Extreme problem for partially nonoverlapping domains on a Riemann sphere. *Journal of Mathematical Sciences.* 2018. Vol. 235, No. 1. P. 74–80.
179. Targonskii A.L. About One Extremal Problem for the Projections of Points on a Unit Circle. *Journal of Mathematical Sciences.* 2019. Vol. 241, No. 1. P. 90–100.

180. Teichmüller O. Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung. *Deutsche Math.* 1938. Vol. 3. P. 621–678.
181. Teichmüller O. Collected papers. Berlin etc.: Springer, 1982.
182. Tsuji M. Potential theory in modern function theory. Tokyo. 1959. 590 p.
183. Vygovskaya L.V. On the problem of V.N. Dubinin for symmetric multiply connected domains. *J. Math. Sci.* 2018. Vol. 229, No. 1. P. 108–113.
184. Wali S.L., Shah W.M. Some applications of Dubinin’s lemma to rational functions with prescribed poles. *J. Math. Anal. Appl.* 2017. Vol. 450, No. 1. P. 769–779.
185. Zabolotnyi Ya.V., Vygovskaya L.V. On the product of inner radii of symmetric multiply connected domains. *J. Math. Sci.* 2018. Vol. 231, No. 3. P. 101–109.
186. Zabolotnii Ya.V., Denega I.V. An extremal problem on non-overlapping domains containing ellipse points. *Eurasian Math. J.* 2021. Vol. 12, No. 4. P. 82–91.
187. Zabolotnyi, Y., Denega, I. On products of inner radii of non-overlapping domains containing certain segment points. *Complex Variables and Elliptic Equations.* 2025. Vol. 70, No. 9. P. 1584–1597.
188. Zabolotnyi, Y., Denega, I. A note on conformal mappings onto mutually non-overlapping domains. *An. St. Univ. Ovidius Constanta.* 2025. Vol. 33, No. 3. P. 215–228.
189. Zabolotnyi Yaroslav. Estimates of products of some powers of inner radii for multiconnected domains. *(Hyper)Complex Seminar 2021 in memoriam of prof. Julian Lawrynowicz.* November 11-14, 2021. Bedlewo, Poland. P. 71.

190. Zabolotnyi Ya. V. Some estimates of the products of some powers of the inner radii of multiconnected domains. *14 ISAAC Congress 2023 Ribeirão Preto – São Paulo* (Brazil) 17–21 July 2023.: Book of abstracts. <https://dcm.ffclrp.usp.br/isaac/abstracts.pdf>. p. 53.
191. Zabolotnyi Yaroslav. Application of upper estimates for products of inner radii to distortion theorems. *(Hyper)Complex Seminar 2024 in memoriam of prof. Julian Lawrynowicz*, September 14-18, 2024. Poland. P. 80.
192. Бахтін О.К., Заболотний Я.В. Оцінки добутку внутрішніх радіусів трьох неперетинних областей. *Доп. Нац. Акад. наук України*. 2013. № 10. С. 7–10.
193. Бахтін О.К., Заболотний Я.В. Оцінки добутку внутрішніх радіусів чотирьох неперетинних областей. <http://arxiv.org/pdf/1509.02496.pdf>, 2015.
194. Бахтін О.К., Заболотний Я.В. Задача про добуток внутрішніх радіусів чотирьох неперетинних областей, деякі з яких симетричні відносно одиничного кола. *Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України*. 2019. **33**. С. 27–32.
195. Бахтін О.К., Заболотний Я.В. Оцінки добутків внутрішніх радіусів багатозв'язних областей. *Український математичний журнал*. 2021. **73**, № 1. С. 9–22. (переклад: Bakhtin A.K., Zabolotnii Y. Estimates of the Products on Inner Radii for Multiconnected Domains. *Ukr. Math. J.*, 2021, Vol. 73, No. 1. P. 6–21.)
196. Бахтін О.К., Заболотний Я.В. Оцінки добутків деяких степенів внутрішніх радіусів багатозв'язних областей. *Український математичний журнал*. 2021. **73**, № 9. С. 1155–1169. (переклад: Bakhtin A.K., Zabolotnii Y. Estimation of the Products of Some

Powers of Inner Radii for Multiconnected Domains. *Ukr. Math. J.*, 2022, Vol. 73, No. 9. P. 1341–1358.)

197. В'юн В.Є. Розділяюче перетворення і квадратичні диференціали в геометричній теорії функцій комплексної змінної: автореф. дис. канд. физ.-мат. наук: спец. 01.01.01 – математичний аналіз. Київ, 2007. 20 с.
198. Денега І.В., Заболотний Я.В. Про добутки внутрішніх радіусів областей, що містять точки деякої прямої. *Український математичний вісник*. 2024. **21**, № 2. С. 1–20. (переклад: Denega I.V., Zabolotnyi Ya.V. On products of the inner radii of the domains containing points of some straight line. *Journal of Mathematical Sciences.*, 2024, Vol. 284, No. 3. P. 299–314.)
199. Денега І.В., Заболотний Я.В. Екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами на одиничному колі. *Актуальні проблеми сучасної математики: методи, моделі та застосування*. Зб. праць Ін-ту мат. НАН України, К.: Ін-т мат. НАН України. 2024. **21**, № 1. С. 71–81.
200. Денега І.В., Заболотний Я.В. Про добутки внутрішніх радіусів областей, що задовольняють умову часткового перетину. *Український математичний вісник*. 2025. **22**, № 3. С. 301–322. (переклад: Denega I.V., Zabolotnyi Ya.V. On the products of inner radii of domains satisfying the partial-intersection condition. *Journal of Mathematical Sciences*. 2025. Vol. 294, No. 5, P. 651–668.)
201. Заболотний Я.В. Застосування розділяючого перетворення в одній задачі про неперетинні області. *Доп. Нац. Акад. наук України*. 2011. № 9. С. 11–14.
202. Заболотний Я.В. Деякі екстремальні задачі геометричної теорії

- функцій. Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. К.: Ін-т матем. НАН України, 2011. **8**, № 1. С. 88–96.
203. Заболотний Я.В. Про одну екстремальну задачу В.М. Дубініна. *Укр. мат. журн.* 2012. **64**, № 1. С. 24–31.
204. Заболотний Я.В. Задача про обчислення максимуму добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей на комплексній площині. *Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування: збірник праць Ін-ту матем. НАН України. К.: Ін-т матем. НАН України, 2013. 10*, № 4-5. С. 557–564.
205. Заболотний Я.В. Знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей. *Доп. Нац. Акад. наук України.* 2016. № 3. С. 7–13.
206. Заболотний Я.В. Оцінки добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей в C . Зб. праць Ін-ту мат. НАН України. К.: Ін-т мат. НАН України, 2017. **14**, № 1. С. 156–162.
207. Заболотний Я.В. Проблема В. М. Дубініна для симетричних багатозв'язних областей. *Український математичний журнал.* 2020. **72**, № 11. С. 1502–1509. (переклад: Zabolotnii Y.V. The Problem of V. N. Dubinin for Symmetric Multiconnected Domains. *Ukr. Math. J.* 2021. Vol. 72, No. 9. P. 1733–1741.)
208. Заболотний Я.В. Задача про добуток внутрішніх радіусів неперетинних областей, деякі з яких симетричні відносно одиничного кола. *Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: Всеукраїнська наукова конференція, тези доповідей. Ворохта, 25 лютого – 1 березня 2020 р. – Івано-Франківськ: ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника», 2020. – С. 45–46.*

209. Заболотний Я.В. Оцінки добутків деяких степенів внутрішніх радіусів неперетинних багатозв'язних областей. *Конференція молодих вчених "Підстригачівські читання"*. Львів, 25-27 травня 2022р. <http://iapmm.lviv.ua/chyt2022/abstracts/Zabolotnyi.pdf>
210. Заболотний Я.В. Оцінки добутків деяких функціоналів на класах функцій без спільних значень. *Комплексний аналіз і та його застосування*: Зб. праць Ін-ту мат. НАН України. К.: Ін-т мат. НАН України, 2022. **19**, № 1. С. 135–152.
211. Заболотний Я.В. Оцінки деяких функціоналів на класах функцій без спільних значень. *Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики - 2023"*. 23–25 травня 2023 р., Львів: Тези доповідей. — Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2023. С. 311–312.
212. Заболотний Я.В. Оцінки деяких функціоналів на класах функцій без спільних значень. *International Conference of Young Mathematicians*. Kyiv (Ukraine) 1–3 June 2023.: https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2023/Abstracts_2023/TFFA/Zabolotnyi.pdf
213. Заболотний Я.В. Задача про максимум добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей, деякі з яких симетричні відносно одиничного кола. *Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України*. 2024. **38**, № 2. С. 67–78.
214. Заболотний Я.В. Оцінки еволюційного типу для добутків деяких степенів внутрішніх радіусів багатозв'язних областей. *Український математичний журнал*. 2025. **77**, № 5. С. 314–323. (переклад: Zabolotnyi Y. Evolutionary-Type Estimates for the Products of Some

Powers of the Inner Radii of Multiply Connected Domains. *Ukr. Math. J.* 2025. Vol. 77, No. 5. P. 721–730.)

215. Тамразов П.М. Теорема про лінійні інтеграли для екстремальної довжини. *Доповіді АН УРСР*. 1966. № 1. С. 51–54.

ДОДАТКИ

Цей додаток містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Zabolotnyi, Y., Denega, I. On products of inner radii of non-overlapping domains containing certain segment points // Complex Variables and Elliptic Equations. 2025. Vol. 70, No. 9, P. 1584–1597. <https://doi.org/10.1080/17476933.2024.2416413> (**SJR — Q2**).

2. Denega, I., Zabolotnyi, Y. Using conformal radii of the open unit disk sectors in distortion theorems for univalent functions // Complex Anal Synerg. 2025. Vol. 11, 8. <https://doi.org/10.1007/s40627-025-00157-1> (**SJR — Q3**).

3. Заболотний Я.В. Оцінки еволюційного типу для добутків деяких степенів внутрішніх радіусів багатозв'язних областей // Український математичний журнал, 2025, Т. 77, № 5, С. 314–323. <https://doi.org/10.3842/umzh.v77i5.8919> (переклад: Zabolotnyi Y. Evolutionary-Type Estimates for the Products of Some Powers of the Inner Radii of Multiply Connected Domains // Ukr. Math. J., 2025, Vol. 77, No. 5, P. 721–730. <https://doi.org/10.1007/s11253-025-02485-1>)(**SJR — Q3**).

4. Denega I., Zabolotnyi Y., Estimates of the functional with fixed points on a hyperbola branches // Proceedings of the International Geometry Center, 2025, Vol. 18, No. 2, P. 207–219. <https://doi.org/10.15673/pigc.v18i2.3082> (**SJR — Q3**).

5. Zabolotnyi, Y., Denega, I. A note on conformal mappings onto mutually non-overlapping domains // An. St. Univ. Ovidius Constanta. 2025. Vol. 33, No. 3, P. 215–228. <https://doi.org/10.2478/auom-2025-0035> (**SJR — Q3**).

6. Денег І.В., Заболотний Я.В. Про добутки внутрішніх радіусів областей, що задовольняють умову часткового перетину // Український

математичний вісник. 2025. Т. 22, № 3. С. 301–322. (переклад: Iryna Denega, Yaroslav Zabolotnyi. On the products of inner radii of domains satisfying the partial-intersection condition // Journal of Mathematical Sciences, 2025, Vol. 294, No. 5, P. 651–668. <https://doi.org/10.1007/s10958-025-08124-1>) (**SJR — Q3**).

7. Denega I., Zabolotnyi Y. Estimates for sums of logarithmic potentials associated with the Green function // Researches in Mathematics. 2025. Vol. 33, No. 3. P. 14–22. <https://doi.org/10.15421/242524> (**SJR — Q2**)

8. Denega I.V., Zabolotnyi Ya.V. Some extremal problems on the Riemannian sphere // Carpathian Mathematical Publications, 2024, Vol. 16, No. 2, P. 593–605. <https://doi.org/10.15330/cmp.16.2.593-605> (**SJR — Q1**).

9. Денег І.В., Заболотний Я.В. Про добутки внутрішніх радіусів областей, що містять точки деякої прямої // Український математичний вісник, 2024, Т. 21, № 2, С. 1–20. (переклад: Denega I.V., Zabolotnyi Ya.V. On products of the inner radii of the domains containing points of some straight line // Journal of Mathematical Sciences, 2024, Vol. 284, No. 3, P. 299–314. <https://doi.org/10.1007/s10958-024-07351-2>) (**SJR — Q3**).

10. Заболотний Я.В. Задача про максимум добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей, деякі з яких симетричні відносно одиничного кола // Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України. 2024. Т. 38, № 2, С. 67–78. <https://doi.org/10.37069/1683-4720-2024-38-7> (Категорія "Б")

11. Denega I.V., Zabolotnyi Ya.V., Application of upper estimates for products of inner radii to distortion theorems for univalent functions // Matematychni Studii, 2023, Vol. 60, No. 2, P. 138–144. <https://doi.org/10.30970/ms.60.2.138-144> (**SJR — Q3**).

12. Бахтін О.К., Заболотний Я.В. Оцінки добутків деяких степенів внутрішніх радіусів багатозв'язних областей // Український математичний журнал, 2021, Т. 73, № 9, С. 1155–1169. <https://doi.org/10.37863/umzh.v73i9.6682> (переклад: Bakhtin A.K.,

Zabolotnii Y. Estimation of the Products of Some Powers of Inner Radii for Multiconnected Domains // Ukr. Math. J., 2022, Vol. 73, P. 1341–1358. <https://doi.org/10.1007/s11253-022-01998-3> (**SJR — Q3**).

13. Заболотний Я.В. Проблема В.М. Дубініна для симетричних багатозв'язних областей // Український математичний журнал, 2020, Т. 72, № 11, С. 1502–1509. <https://doi.org/10.37863/umzh.v72i11.6064> (переклад: Zabolotnii Y.V. The Problem of V. N. Dubinin for Symmetric Multiconnected Domains // Ukr. Math. J., 2021, Vol. 72, P. 1733–1741. <https://doi.org/10.1007/s11253-021-01884-4>) (**SJR — Q2**).

14. Бахтін О.К., Заболотний Я.В. Оцінки добутків внутрішніх радіусів багатозв'язних областей // Український математичний журнал, 2021, Т. 73, № 1, С. 9–22. <http://doi.org/10.37863/umzh.v73i1.6200> (переклад: Bakhtin A.K., Zabolotnii Y. Estimates of the Products on Inner Radii for Multiconnected Domains // Ukr. Math. J., 2021, Vol. 73, P. 6–21. <https://doi.org/10.1007/s11253-021-01904-3>) (**SJR — Q2**).

15. Zabolotnii Ya.V., Denega I.V. An extremal problem on nonoverlapping domains containing ellipse points // Eurasian Math. J., 2021, Vol. 12, No. 4, P. 82–91. <https://doi.org/10.32523/2077-9879-2021-12-4-82-91> (**SJR — Q3**).

16. Бахтін О.К., Заболотний Я.В. Задача про добуток внутрішніх радіусів чотирьох неперетинних областей, деякі з яких симетричні відносно одиничного кола // Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України, 2019, Т. 33, С. 27–32. <http://doi.org/10.37069/1683-4720-2019-33-2> (Категорія "Б")

17. Бахтин А.К., Заболотный Я.В. Оценки произведения внутренних радиусов неналегающих областей // Український математичний вісник, 2016, Т. 13, № 2, С. 148–156. (переклад: Bahtin A.K., Zabolotnii Ya.V. Estimates of a product of the inner radii of nonoverlapping domains // Journal of Mathematical Sciences, 2017, Vol. 221, No. 5, P. 623–629. <https://doi.org/10.1007/s10958-017-3255-1>) (**SJR — Q3**).

ДОДАТКОВІ ПУБЛІКАЦІЇ

18. Денега І.В., Заболотний Я.В. Екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами на одиничному колі // Актуальні проблеми сучасної математики: методи, моделі та застосування / Зб. праць Ін-ту мат. НАН України, К.: Ін-т мат. НАН України, 2024, Т. 21, № 1, С. 71–81. <https://doi.org/10.3842/trim.v21n1.541>

19. Denega I.V., Zabolotnyi Ya.V., O.K. Bakhtin. Scientific legacy // Proceedings of the International Geometry Center, 2023, Vol. 16, No. 1, P. 1–16. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v16i1.2387>.

20. Заболотний Я.В. Оцінки добутків деяких функціоналів на класах функцій без спільних значень // Комплексний аналіз і та його застосування / Зб. праць Ін-ту мат. НАН України, К.: Ін-т мат. НАН України, 2022, Т. 19, № 1, С. 135–152.

21. Заболотний Я.В. Оцінки добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей в $\mathbb{C}$ // Зб. праць Ін-ту мат. НАН України. – К.: Ін-т мат. НАН України, 2017, Т. 14, № 1, С. 156–162.

22. Заболотний Я.В. Знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей // Доп. Нац. Акад. наук України, 2016, № 3, С. 7–13. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2016.03.007>

23. Бахтин А.К., Заболотный Я.В. Об одном частном случае известной проблемы В.Н. Дубинина // Праці інституту прикладної математики і механіки НАН України. 2015, Т. 29, С. 17–22.

24. Бахтін О.К., Заболотний Я.В. Оцінки добутку внутрішніх радіусів чотирьох неперетинних областей. <http://arxiv.org/pdf/1509.02496.pdf>, 2015.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. Iryna Denega, Yaroslav Zabolotnyi. On products of the inner radii of the domains containing points of some straight line. // International

conference "Complex and hypercomplex analysis and their applications". Ukraine, Zhytomyr, August 6 — 10, 2025.: Book of abstracts. — p. 8-9.

2. Zabolotnyi Ya.V. Application of upper estimates for products of inner radii to distortion theorems // 15 ISAAC Congress 2025. Astana, Nazarbayev University (Kazakhstan) 21 – 25 July 2025.: Book of abstracts. — p. 62-63.

3. Деніга І.В., Заболотний Я.В. Про добутки конформних радіусів областей відносно точок деякої прямої. International Conference of Young Mathematicians. June 4–6, 2025, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine (online), Kyiv, Ukraine. <https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2025/abstracts/Denega-Zabolotnyi.pdf>

4. Заболотний Я.В. Застосування оцінок добутку конформних радіусів неперетинних областей до теорем спотворення. Конференція молодих вчених "Підстригачівські читання". Львів, 27-29 травня 2025р.

5. Denega I., Zabolotnyi Ya. Extremal Problem on Three Non-Overlapping Domains Containing Ellipse Points. 1st Ukrainian scientific and practical conference with international participation «Modern Problems of Mathematics: Applied aspects», May 30, 2024, Zhytomyr, Ukraine.

6. Iryna Denega and Yaroslav Zabolotnyi. Extremal problem on domains containing ellipse points. Конференція молодих вчених "Підстригачівські читання". Львів, 27-29 травня 2024р. <http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2024/abstracts/Denega.pdf>

7. Zabolotnyi Ya.V. Some estimates of the products of some powers of the inner radii of multiconnected domains // 14 ISAAC Congress 2023. *Ribeirão Preto – São Paulo* (Brazil) 17 – 21 July 2023.: Book of abstracts. — <https://dcm.ffclrp.usp.br/isaac/abstracts.pdf>. — p. 53.

8. Заболотний Я.В. Оцінки деяких функціоналів на класах функцій без спільних значень // International Conference of Young Mathematicians. Kyiv (Ukraine) 1 – 3 June 2023.: https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2023/Abstracts_2023/

TFFA/Zabolotnyi.pdf

9. Заболотний Я.В. Оцінки деяких функціоналів на класах функцій без спільних значень // Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики - 2023". 23–25 травня 2023 р., Львів: Тези доповідей. — Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2023. — С. 311 — 312.

10. Заболотний Я.В. Оцінки добутків деяких степенів внутрішніх радіусів неперетинних багатозв'язних областей. Конференція молодих вчених "Підстригачівські читання". Львів, 25-27 травня 2022р. <http://iapmm.lviv.ua/chyt2022/abstracts/Zabolotnyi.pdf>

11. A.K. Bakhtin, Ya.V. Zabolotnii. Estimates of the products of the inner radii of multiconnected domains. The International Conference in Complex and Functional Analysis dedicated to the memory of Bohdan Vynnytskyi. Збірник тез. Drohobych 13 — 16 September, 2021, Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University, 2021, - p. 6.

12. A.K. Bakhtin, Ya.V. Zabolotnii. Estimates of the products of the inner radii of multiconnected domains. International conference Complex Analysis and Related Topics dedicated to the 90-th anniversary of A. A. Goldberg (1930-2008) Abstracts. Lviv, June 28 — July 1, 2021, Ivan Franko National University of Lviv, 2021, - p. 6.

13. Заболотний Я.В. Задача про добуток внутрішніх радіусів неперетинних областей, деякі з яких симетричні відносно одиничного кола. // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: Всеукраїнська наукова конференція, тези доповідей. Ворохта, 25 лютого — 1 березня 2020 р. — Івано-Франківськ: ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника», 2020. — с. 45-46.

14. Denega I., Zabolotnij Ja. On the problem of extremal decomposition of the complex plane // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: Всеукраїнська наукова конференція, тези доповідей. Ворохта, 22-25 лютого 2017 р. — Івано-Франківськ: ДВНЗ «Прикарпатський

національний університет імені Василя Стефаника», 2017. – с. 73-75.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

— International Workshop within the framework of the HORIZON-2020 project SOMPATY, May 12-16, 2025, Kyiv, Ukraine (SOMPATY-2025);

—(Hyper)Complex Seminar 2024 in memoriam of prof. Julian Lawryniewicz, Poland, September 14-18, 2024;

—(Hyper)Complex Seminar 2021 in memoriam of prof. Julian Lawryniewicz, Bedlewo, Poland, November 11-14, 2021;

— Семінарах відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор С.А. Плакса);

— Науковому семінарі "Теорія відображень і алгебр Лі"(керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор Є.О. Севостьянов);

— Львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор О.Б. Скасків);

— Семінарі відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор А.С. Романюк);

— Семінарі "Сучасний аналіз"в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка (керівники: академік НАН України І.О. Шевчук, доктори фіз.-мат. наук О.О. Курченко, В.М. Радченко, А.В. Чайковський).