

ВІДГУК

офіційного опонента про дисертаційну роботу **СТЕПАНЮК Тетяни Анатоліївни**
“Дослідження апроксимативних характеристик функціональних множин та екстремальних властивостей багатовимірних точкових конфігурацій”,
поданої до захисту на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.01–математичний аналіз

1. Актуальність дослідження і його мета. Конструктивна теорія функцій (теорії апроксимації), основи якої як прийнято вважати започатковано дослідженнями П.Л.Чебишова та теоремами К.Веєрштраса (1885) і К.Рунге (1885) про найкраще рівномірне наближення поліномами функції, відповідно, неперервної на дійсному відрізку і аналітичної на замкненому компактi зі зв'язним доповненням, вкладає в руки як “чистого” математика, так і фахівців, які мають потребу в обчислювальних методах, чудові робочі інструменти. Навіть початкові теореми, які лежать в основі теорії апроксимації, виявляють досить глибокі її зв'язки з іншими розділами сучасної математики. Так, добре відомо, що з апроксимаційної теореми Веєрштраса про можливість рівномірного наближення поліномами неперервних дійсних функцій на відрізку $[a, b]$ алгебраїчними поліномами, зокрема, негайно випливає сепарабельність простору $C[a, b]$, а отже, з огляду на його гаусдорфовість, і його рівнопотужність з множиною дійсних чисел. При цьому, не можна не сказати про безумовну користь конструктивних побудов апроксимуючих агрегатів з точки зору потреб обчислювальної математики, а отже, й з точки зору практичних потреб в обчислювальних інструментах в найбільш різноманітних розділах сучасної експериментальної науки. Різноманітні підтвердження цьому знаходимо, як протягом ХХ ст., так і вже у ХХІ ст. В цьому зв'язку не можна обійти мовчанням методи чисельного інтегрування типу відомого методу Монте-Карло. Власне, як зазвичай буває, нові теоретичні досягнення ведуть до більш результативних практичних застосувань, а потреба таких застосувань викликає нові постановки суто теоретичних проблем. До останніх варто віднести відродження на початку 70-их інтересу до дослідження суто класичних проблем, що стосуються кратних рядів: степеневих, Фур'є і т.п., – наприклад, результативність апроксимацій Паде при чисельному розв'язуванні задач фізики високих енергій методом кратних степеневих рядів з невизначеними коефіцієнтами, природньо приводить до потреби дослідження властивостей таких рядів, а суто практична результативність чисельного моделювання за допомогою жадібних апроксимант (pure greedy approximation) призвела до появи наприкінці 90-их активного інтересу до суто теоретичних постановок проблем для таких об'єктів, потреба дослідження об'єктів однієї “форми” (наприклад, монотонності, опуклості) призвело до появи і активного розвитку такого відносно нового напрямку, як формозберігаючі наближення (опуклі функції наближаються опуклими поліномами, монотонні – монотонними). У цьому ж ряду, інспіроване потребами моделювання різноманітних природніх сигналів (наприклад, частотно-часового аналізу геоакустичних сигналів) виникнення значного інтересу до дослідження розрідженої апроксимації (sparse approximation). Зазначимо також, що розвинута у дослідженнях Чебишова і його школи теорія найкращого наближення функцій на початку ХХ ст. переросла в конструктивну теорію функцій. При цьому після появи статей Д. Джексона (1911) і С.Н. Бернштейна (1912) акценти перемістились від задач наближення індивідуальних (окремих) функцій до дослідження поведінки похибок наближення многочленами при прямуванні до нескінченності їхніх степенів, що не відмінило актуальність знаходження “індивідуальних” оцінок апроксимацій функцій з різноманітних класів, різноманітними апроксимуючими агрегатами (поліномами за всеможливими ортонормованими системами, наприклад, тригонометричними) у термінах найрізноманітніших норм. У подальшому, після появи у 30-40-их роках поняття поперечника Колмогорова, значну кількість досліджень було виконано у цьому контексті. У тому числі в дуже абстрактних функціонально-топологічних постановках проблем.

Перелік прізвищ математиків, що присвятили свої роботи даній тематиці є надзвичайно великим, тому доповнимо його лише прізвищами тих, чиї дослідження в значній мірі визначили напрямки подальшого розвитку теорії апроксимації. Це дослідження Ш. Ла Валле-Пуссена, А.Лебега Н.І.Ахієзера, А.Зігмунда, Ж.Фавара, С.М.Нікольського, С.Б.Стєчкіна, О.П.Тімана, П.Л.Ульянова, В.К.Дзядика, М.П.Корнійчука, М.П.Тімана, Е.В. Saff. Серед сучасних досліджень варто виділити дослідження, виконані R.A. De Vore, А.А. Гончаром, О.І. Степанцем, І.О. Шевчуком, В.Н. Темляковим та їхніми учнями, а також дуже великою кількістю більш чи менш знайомих математиків у наукових центрах у всьому світі. Різноманітні зв'язки, які існують між структурними та конструктивними властивостями функцій, в першу чергу швидкістю прямування до нуля їх найкращих поліноміальних наближень, були і є метою пошуку у таких дослідженнях. Серед задач,

які при цьому розглядаються одне з центральних місць займає, так звана задача Нікольського–Колмогорова про встановлення умов, за яких для найкращого наближення у тій чи іншій метриці, можна знайти головний член асимптотичної формули. Проблема пошуку точних сталих в обернених теоремах теорії наближень, які поряд з прямими теоремами займають основне місце в даній теорії, тривалий час у більшості випадків була далекою від свого вирішення. У цьому зв'язку варто відзначити роботи, виконані у 1972–1976 р.р. М.Д. Стерліним, який вперше в доволі загальних постановках успішно справився з цією проблемою. При цьому він вперше дослідив з точки зору наближень простори $S^{p,\mu}$, взяті пізніше О.І. Степанцем, у вигляді основи для структурування властивостей просторів періодичних функцій. Серед досягнень у цьому напрямку останніх років відзначимо дослідження, виконані А.С. Романюком, В.В. Савчуком, А.С. Сердюком, О.С. Чайченком, В.С. Романюком, С.А. Стасюком, С.Я. Янченком. І у даний час ці проблеми займають одне з центральних місць в конструктивній теорії функцій дійсної та комплексної змінних, позаяк встановлення нових фактів дуже часто приводить до виникнення нових постановок питань, важливих як з точки зору розвитку самої теорії, так і її застосувань. Майже відразу, поряд з дослідженням апроксимаційних властивостей послідовностей алгебраїчних поліномів, виник і досі активно розвивається такий напрямок дослідження, як наближення поліномами Фур'є (тригонометричними і т.п.), а більш загально, лінійними агрегатами, побудованими за ортонормованими системами функцій чи ортогональними поліномами. Ці два напрямки досліджень активно впливають один на одного, і успіхи в одному з них призводять до появи нових ідей і постановок задач в іншому з них. Власне, наприклад, виявлення нових тонких шкал при вивченні просторів Хермандера і Соболева у дослідженнях В.А. Михайлеца і А.А. Мурача, негайно робить актуальною проблему систематизації теорії наближень у просторах Лебега зі змінним показником, чи, більш загально, просторах Орлича на основі поняття ψ -похідної (інтеграла).

З огляду на сказане вище, а також на описану вище результативність досліджень на основі поняття ψ -похідної (інтеграла), є непоганою мотивацією для проведення подальших подібних досліджень, що стосуються класичних проблем теорії апроксимації, характерних для київської школи, заснованої В.К. Дзядиком та розвиненої О.І. Степанцем. Зокрема, проведені в дисертації Т.А. Степанюк дослідження асимптотичних рівностей для похибок апроксимації частинних сум Фур'є та тригонометричних інтерполяційних поліномів Лагранжа на класах 2π -періодичних функцій, визначених через поняття (ψ, β) -похідної, безумовно мають всі ознаки актуальності і новизни для розвитку теорії наближень. Крім цього, проведені у дисертації дослідження апроксимативних характеристик функціональних класів, асимптотично непокресувані нерівності типу Лебега та інтерполяційні аналоги таких нерівностей на класах 2π -періодичних функцій, які задаються за допомогою поняття (ψ, β) -похідної, а також екстремальних властивостей точкових множин на d -вимірній сфері, багатовимірному торі, одиничному кубі в $\mathbb{R}^d$, проєктивних просторах на класах диференційовних функцій від багатьох змінних, демонструють чудову близькість результатів дисертаційного дослідження до суто практичних потреб чисельного моделювання і аналізу.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню цілого ряду актуальних екстремальних проблем теорії наближень на класах диференційовних функцій. Результати дисертації стосуються кількох різних математичних тем. Зокрема, вона вивчає властивості точкових конфігурацій. Ця тема містить в собі оцінки дискретних енергій, включаючи s -енергію Рісса та логарифмічну енергію на одиничній d -вимірній сфері, а також проєктивні простори; дослідження гіпероднорідності дискретних систем точок, дослідження оцінок найгірших помилок інтегрування для певних просторів неперервних функцій, що включають випадки логарифмічної ваги на сфері, а також класів функцій Уолша на одиничному d -вимірному кубі. Позаяк ці теми мають численні та важливі застосування в задачах чисельних моделювання та аналізу (наприклад, поняття гіпероднорідності має широкий спектр застосувань, оскільки кількісна характеристика флуктуацій густини в багаточастинкових системах є фундаментальним питанням у фізичних, математичних та біологічних науках), тому не повинно виникати жодного сумніву в актуальності даного дисертаційного дослідження Т.А. Степанюк.

Викладене вище та аналіз літератури, яка стосується теми дисертації, демонструють актуальність обраної теми досліджень та її вагоме теоретичне значення для розвитку конструктивної теорії функцій дійсної змінної, а в актуальності цих, розглянутих у дисертації Т. А. Степанюк, проблем не повинно виникнути сумніву.

2. Наукова новизна результатів дисертаційної роботи. Основний зміст дисертаційної роботи міститься у розділах 2–4. У першому розділі наведено основні означення та огляд літератури. Зокрема в підрозділі 1.1 означено класи періодичних (ψ, β) -диференційовних функцій, класи (ψ, β) -інтегралів, інтер-

поляційних поліномів Лагранжа та таких апроксимативних характеристик класів функцій, як наближення сумами Фур'є, найкращі тригонометричні наближення, найкращі тригонометричні ортогональні наближення та поточкові наближення інтерполяційними поліномами Лагранжа; наведено огляд відомих результатів наближень сумами Фур'є в сенсі сильної та слабкої асимптотики, та результатів про наближення інтерполяційними поліномами Лагранжа на класах 2π -періодичних диференційовних функцій. Крім цього, наведено означення сферичних t -дизайнів, найгіршої похибки чисельного інтегрування, дискретних енергій на одиничній d -вимірній сфері та зроблено огляд дослідження цих величин, а також огляд досліджень оцінок дискретних енергій на проєктивних просторах, введено поняття гіперрівномірності та характеристики гіперрівномірних точкових множин на скінченних многовидах, сформульовано задачу про найгіршу похибку чисельного інтегрування для сімей точкових множин побудованих методом квазі-Монте-Карло.

Зазначимо, що навіть з цього переліку проглядається, що спектр проблем, які розглядаються в дисертації, є дуже широкий. В цілому після ознайомлення зі змістом дисертації і описом її результатів у вступній частині також в автора даного відгуку склалися чітке враження стосовно занадто великого обсягу тексту дисертації і перевантаженості в певному сенсі дуже різномірними за своєю постановкою результатами. На це ж вказує і доволі значний обсяг підпункту **Наукова новизна одержаних результатів** – 14 виділених позицій, окремі з яких містять в собі принаймні ще по 2 позиції (в п.п. 3, 9, 10, 11, 13).

Це спонукало автора відгуку подивитися на результати з тексту дисертації з точки зору доцільності їхньої присутності в дисертації Т.А. Степанюк. До цього ж спонукає і доволі двозначна ситуація з включеними в дисертацію (Розділ 5) результатами з двох публікацій, виконаних у співавторстві, які вже були включені в PhD - дисертацію (O.Osisiogu, 2022).

Отже, на наш погляд найбільш важливі результати дисертаційної роботи, що демонструють силу і потужність методів дисертаційної роботи, а також нетривіальний аналітичний хист автора дисертаційної роботи, зосереджені в розділах 2 і 3, обсяг яких складає 110 сторінок. Ці розділи безпосередньо стосуються традиційної для школи Дзядика-Степанця тематики і, зокрема, є близькими до досліджень, які проводив як в своїй докторській дисертації, так і в подальші роки, науковий консультант Т.А. Степанюк. Дуже пристойне враження справляє також розділ 4, обсягом 60 сторінок, серцевину якого складають оцінки енергії Рісса та логарифмічної енергії для послідовностей сферичних t -дизайнів, а також оцінки мінімальних енергій Рісса і Гріна на проєктивних просторах. Я вдаюся до цих елементарних і чисто формальних міркувань, щоб переконатися в достатності загального обсягу наукового матеріалу в цих розділах для того, щоб в сукупності цей матеріал міг би претендувати на відповідність формальним вимогам до докторських дисертацій, позаяк основні результати в цих розділах є результатами докторського рівня. На нашу думку, саме так і є – ця частина дисертації (без розділу 5) по-суті і є в сукупності тим науковим дослідженням, за яке потрібно присуджувати автору ступінь доктора наук. При цьому варто додати, що публікації, які залишаються після вилучення двох згаданих вище публікацій, виконаних у співавторстві, як кількісно, так і якісно повністю відповідають вимогам до публікацій результатів докторських дисертацій.

Другий і третій розділи дисертації присвячено розв'язанню аналогу так званої проблеми Колмогорова-Нікольського для сум Фур'є на класах (ψ, β) -диференційовних функцій та деяким суміжним питанням. Центральними результатами розділу 2, на нашу думку, є теореми 2.2 та 2.5, які містять точні значення сталих Колмогорова-Нікольського для рівномірних наближень сумами Фур'є класів $C_{\beta, p}^{\alpha, r}$ для значень параметрів $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $p \in [1, +\infty)$, $r \in (0, 1)$ (теорема 2.2), а також сталих Колмогорова-Нікольського для L_s -наближень сумами Фур'є класів $C_{\beta, 1}^{\alpha, r}$ $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $r \in (0, 1)$ (теорема 2.5). В теоремах 3.1 і 3.2 з розділу 3 точні значення сталих Колмогорова-Нікольського для поточкових наближень інтерполяційними поліномами на класах $C_{\beta, p}^{\alpha, r}$ отримано для значень параметрів $p \in (1, +\infty)$, $r \in (0, 1)$ (теорема 3.1), а для значень параметрів $p = 1$, $r \in (0, 1)$ (теорема 3.2). Ці результати істотно заповнюють в описаних щойно випадках прогалини між результатами таких видатних попередників, як С.М. Нікольський, Б.С. Стечкін, О.С. Степанець, а також науковий консультант дисертантки А.С. Сердюк. Ці обставини вдало проілюстровані в трьох таблицях, розміщених наприкінці дисертації в Додатку А.

В розділі 2 доведено також цілий ряд нерівностей типу Лебега для множин $f \in C_{\beta, p}^{\alpha, r} C$, 2π -періодичних функцій f , які означаються узагальненими інтегралами Пуассона функцій φ з L_p , $1 \leq p \leq \infty$, в яких рівномірні норми відхилень функцій від їх частинних сум Фур'є $\|f - S_{n-1}\|_C$ виражені через найкращі наближення $E_n(\varphi)_{L_p}$ функцій φ тригонометричними поліномами в метриці простору L_p , $1 \leq p \leq \infty$ (див., наприклад, теорема 2.9). В теоремі 2.11 на класах (ψ, β) -диференційовних функцій встановлено нерівності типу Лебега, в яких рівномірні норми відхилень сум Фур'є виражаються через найкращі наближення в середньому тригонометричними поліномами їх (ψ, β) -похідних. В цілому ряді важливих для теорії випадків доведено

асимптотичну непокрашуваність одержаних оцінок, зокрема, за умови, коли послідовності $\psi(k)$ спадають до нуля швидше за довільну степеневу функцію. Крім цього, в розділі 2 асимптотично непокрашувані нерівності Лебега встановлені і для будь-якої функції $f \in C_{\beta}^{\alpha, r} L_1$ та $f \in C_{\beta}^{\alpha, r}$, $r \in (0, 1)$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. Варто також згадати, що в підрозділі 2.5 встановлюються точні порядкові оцінки для наближень сумами Фур'є, найкращих наближень та найкращих ортогональних тригонометричних наближень в метриках просторів L_s , $1 \leq s < \infty$, класів 2π -періодичних функцій, (ψ, β) -похідні яких належать до одиничної кулі простору L_{∞} . А саме, розглянуто випадок, коли послідовність $\psi(k)$ належить до сім'ї всіх додатних, майже спадних послідовностей $(\psi(k))_{k \geq 1}$. В підрозділі 2.6 встановлено точні порядкові оцінки для величин $e_n^{\perp}(L_{\beta, p}^{\psi})_{\tilde{L}_{\infty}}$ найкращих рівномірних тригонометричних наближень класів 2π -періодичних функцій, (ψ, β) -похідні яких належать до одиничних куль просторів L_p , $1 \leq p < \infty$, у випадку, коли послідовність $\psi(k)$ прямує до нуля швидше за довільну степеневу функцію, але повільніше ніж геометрична прогресія. Аналогічні оцінки також одержані в $\tilde{L}_s$ -метриці, $1 < s \leq \infty$ для величин $e_n^{\perp}(L_{\beta, 1}^{\psi})_{\tilde{L}_s}$ класів диференційовних функцій, (ψ, β) -похідні яких належать до одиничної кулі простору L_1 .

Третій розділ присвячено дослідженню питань наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами на класах 2π -періодичних функцій, які задаються за допомогою згорток з фіксованими твірними ядрами. Зокрема, встановлено асимптотично непокрашувані інтерполяційні аналоги нерівностей типу Лебега для 2π -періодичних функцій f , які представляються узагальненими інтегралами Пуассона функцій φ з простору L_p , $1 \leq p \leq \infty$. Про теореми 3.1 і 3.2 з цього розділу вже було згадано вище. Крім цього, в підрозділі 3.2 одержано інтерполяційні аналоги нерівностей типу Лебега на множинах $C_{\beta}^{\psi} L_1$ 2π -періодичних функцій f , які задані згортками твірного ядра Ψ_{β} , $\beta \in \mathbb{R}$, з функціями φ із L_1 . Доведено, що у випадку коли послідовність $(\psi(k))$ спадає до нуля швидше за довільну степеневу функцію, отримані нерівності в ряді важливих випадків є асимптотично точними. В цих випадках також встановлено асимптотичні рівності для точних верхніх меж поточкових наближень інтерполяційними тригонометричними поліномами на класах згорток твірного ядра Ψ_{β} з функціями φ , що належать до одиничної кулі з простору L_1 . В підрозділі 3.2 також знайдено оцінки точних верхніх меж поточкових наближень інтерполяційними тригонометричними поліномами на класах $C_{\beta, 1}^{\psi}$ і виділено конкретні випадки, коли зазначені оцінки перетворюються в асимптотичні рівності, тобто, дають розв'язок аналогу задачі Колмогорова-Нікольського для інтерполяційних поліномів на вказаних класах.

Четвертий розділ дисертації присвячено знаходженню оцінок похибки чисельного інтегрування та дискретних енергій на проективних просторах.

В підрозділі 4.1 отримано двосторонні оцінки для найгіршої похибки інтегрування на одиничній сфері $S^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$, $d \geq 2$, на класах $H^{\frac{d}{2}, \gamma}(S^d)$, $\gamma > \frac{1}{2}$, з додатковим логарифмічним множником. Для сферичних t -дизайнів встановлено оцінку зверху для найгіршої похибки інтегрування. Також знайдено оцінку знизу вказаних похибок для довільної точкової конфігурації. Теорема 4.1 містить порядкові оцінки для найгіршої похибки інтегрування для добре розподілених сферичних t -дизайнів. Теорема 4.3 містить оцінку зверху найгіршої похибки інтегрування для довільних сферичних t -дизайнів, а теорема 4.4 містить оцінку знизу для найгіршої похибки у випадку довільного N -точкового квадратурного методу. В підрозділі 4.2 знайдено асимптотичні рівності для дискретної s -енергії Рісса послідовностей добре розподілених t -дизайнів на одиничній сфері $S^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$, $d \geq 2$. Показано, що детерміновані сферичні t -дизайни, в схемах наближеного інтегрування є принаймні в розглянутих тут випадках не менш вдалим у порівнянні з стохастичними схемами.

В підрозділі 4.2 знайдено асимптотичні рівності для дискретної s -енергії Рісса послідовностей добре розподілених t -дизайнів на одиничній сфері $S^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$, $d \geq 2$. Теорема 4.9 містить точну асимптотичну рівність для s -енергії Рісса у випадку послідовності добре розподілених сферичних t -дизайнів на одиничній сфері S^d . В теоремах 4.10 та 4.11 дисертаційного дослідження знайдено оцінки зверху для інтегралів енергій вигляду $\frac{1}{N^2} \int_{A_1} \dots \int_{A_N} \sum_{i, j=1}^N K_d(\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle) d\sigma_1^*(\mathbf{x}_1) \dots d\sigma_N^*(\mathbf{x}_N)$, відповідно до ймовірнісної моделі стратифікованих вибірок, тобто, якщо точки вибрані випадковим чином.

В підрозділі 4.3 знайдено асимптотичні рівності для дискретної логарифмічної енергії для добре розподілених сферичних t -дизайнів на одиничній сфері $S^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$. Також одержано точні порядкові оцінки для дискретної s -енергії Рісса, в сингулярному випадку $s \geq d$, послідовностей добре розподілених сферичних t -дизайнів. Основний результат підрозділу 4.3 міститься в теоремі 4.12.

В підрозділі 4.4 встановлено двохсторонні оцінки для мінімальних s -енергій Рісса, дискретної логарифмічної енергії (інфімум по всіх можливих N -точкових конфігураціях середнього значення логарифмічного потенціалу, який також ще називають електричним потенціалом Кулона) та енергії Гріна на проективних просторах $\mathbb{P}^{d-1}$ над скалярними областями $\mathbb{F}$ (дійсні або комплексні числа, кватерніони чи октоніони). По-

казано, що детермінантові точкові конфігурації для кожного з цих просторів забезпечують оцінки зверху для згаданих енергій. В підрозділі 4.4 також одержано оцінки зверху енергій Рісса та логарифмічної енергій для стратифікованих вибірок, а також оцінки зверху для математичних сподівань величин E_{K_s} і E_G для детермінантного точкового процесу, який прийнято називати гармонічним ансамблем. Зокрема, теорему 4.17 доведено для енергії Рісса, а теорема 4.23 містить оцінку знизу для мінімальної енергії Гріна. Теорема 4.24 є цікавою тим, що в ній встановлені двохсторонні оцінки для мінімальних дискретних енергій Рісса, Гріна та логарифмічної енергії на проєктивних просторах.

У п'ятому розділі досліджуються властивості точкових множин на d -вимірному торі та на одиничному кубі в просторі $\mathbb{R}^d$ з точки зору задачі про найгіршу похибку інтегрування. Цей розділ (підрозділ 5.2) містить цікаві з точки зору побудови методів чисельного інтегрування типу поліноміальних ґраткових кубатурних формул, які вписуються в концепцію так званих методів квазі-Монте-Карло (QMC методів) і містить нові результати, сформульовані у вигляді теорем. Згадані кубатурні формули утворюються за допомогою методу, що збирає твірний вектор поліномів $g \in (\mathbb{F}_b[x])^d$ покомпонентно-поцифровим, так званим CBC-DBD (component by component, digit by digit) способом. Встановлено оцінку зверху найгіршої похибки інтегрування для множини точок, побудованих CBC-DBD методом на вагових просторах Уолша $W_{d,\gamma}^a$. В цілому, результати даного розділу програють в певному сенсі в теоретичній якості отриманих в ньому результатів. Якщо знову згадати про PhD-дисертацію (O.Osisiogu, 2022), то основним змістом тієї дисертації, по-суті, були числові експерименти на основі як схем інших авторів, так і власних схем, які описуються, зокрема, в даному розділі 5. При цьому результати ілюструються багаточисельними таблицями і графіками, в яких порівнюються числові результати, отримані на основі різних схем. Те ж саме стосується і певних розділів двох, опублікованих в співавторстві, зокрема з O.Osisiogu, статей.

Точні формулювання теорем не наводимо через ускладненість їхніх формулювань. Позначення, що є традиційним моментом в даній тематиці, пістять багат о різних параметрів, що при читанні тексту складає іноді нетривіальну проблему з розумінням написаного.

Доведення основних тверджень з розділів 2 і 3, на мій погляд, є найскладнішими у дисертації, а отримані там нетривіальні результати демонструють потужність й силу застосованих у них підходів. Зазначимо, що ми зосередили увагу тільки на якісному описанні результатів, які утворюють ядро дисертаційної роботи і в достатній мірі характеризують новизну і силу дисертації. Зі сказаного вище у цьому пункті, а також в актуальності, впливає, що всі основні результати дисертаційної роботи Т.А. Степанюк є новими і мають важливе значення, як для розвитку теорії апроксимації в цілому, так і для можливих застосувань.

У підрозділі "Особистий внесок здобувача де йдеться про статті, написані з співавторами, доволі зрозуміло сказано про вклад автора дисертації. Проте присутні там фрази "всі співавтори незалежно виконували обрахунки або перевіряли їх", "співавтори незалежно виконували обрахунки, обґрунтування результатів та їх перевірку", "Дисертантка незалежно і самостійно здійснювала доведення усіх результатів спільних робіт", залишають присмак недосказаності, адже важливо було пояснити такі моменти в спільних публікаціях: кому належить постановка проблеми, яка розглядається; хто і які етапи при написанні роботи виконував (або придумав перше доведення, або спростив доведення, або виконав лише перевірку доведення, здійснив огляд досліджень попередників - зрештою, аспектів і нюансів в спільній співпраці є багато, а вимагалось лише чітко сказати, кому належить той чи інший результат).

3. Обґрунтованість і достовірність результатів дисертації. Доведення всіх основних результатів дисертаційної роботи Т.А. Степанюк приведені з достатньою повнотою, на прийнятому в сучасній математичній літературі рівні строгості і тому в їх обґрунтованості і достовірності не виникає сумніву. Дисертація написана чіткою і зрозумілою мовою, виклад логічний і послідовний.

4. Зауваження.

1) Актуальність дослідження, проведеного у дисертації, у вступній частині написана автором дисертації дуже переконливо. Автором зроблено дуже детальний аналіз і співставлення багаточисельних результатів попередників. Співставлення основних результатів розділів 2 і 3 з результатами попередників взагалі виглядає ідеально. Проте система позначень годиться лише для того, щоб вузьким фахівцям в даній тематиці або ж представникам київської школи теорії наближень було нескладно його читати. Для автора даного відгуку при кожному черговому прочитанні таких текстів дисертацій розуміння написаного складає значні труднощі.

2) Список умовних позначень є доволі повним і зручним у використанні. Проте він розташований на с.27-29 і, зважаючи на те, що зміст дисертації є на с.21, його пошук (як і самого змісту) створює певні незручності.

сті. Для автора цього відгуку відсутність можливості негайного відшукання того, де написано відповідне означення, створювало певні непорозуміння і труднощі при читанні роботи, а також істотно гальмувало це прочитання.

3) Вище я вже непрямо про це згадав, але ще раз акцентую свою думку: у дисертаційній роботі немає принципово нових методів дослідження, а є лише вдосконалення глибоке або не дуже глибоке, відомих методів з теорії наближень. Принаймні про принципові труднощі при розв'язанні розглянутих проблем, в тексті не йдеться.

Про це опосередковано свідчить також велике різноманіття тверджень, віднесених автором до основних результатів дисертації. На мій погляд, цей перелік потрібно було істотно скоротити і залишити в ньому описання результатів справді докторського рівня, якщо такі в тексті є. На мій погляд у дисертації такі результати докторського рівня, що характеризують високий рівень наукової компетентності і майстерності аналітика, у тексті дисертаційної роботи є. І я про це на мій погляд доволі переконливо написав вище.

4) Стосовно п. **Особистий внесок здобувача**. Як я вже відзначав вище, основні теореми і допоміжні твердження, присутні як в даній дисертації, так і в дисертації (O.Osisiogu, 2022), що на думку автора даного відгуку є порушенням норм академічної доброчесності, попри письмову згоду від O.Osisiogu на використання результатів з двох їхніх спільних публікацій в дисертації Т.А. Степанюк. Наявність спільних статей полегшує ситуацію для автора дисертації, бо не йдеться про пряме запозичення без посилання на джерело (плагіат), але використання одних і тих самих результатів у двох дисертаціях все одно є порушенням, якщо не дотримано суворих правил академічного розмежування. Оскільки автори є співавторами публікацій, мова йде не про крадіжку чужого (плагіат), а про потенційне неправомірне дублювання наукових результатів або приписування чужого внеску (власне, в згаданому листі так і написано, що немає заперечень проти використання спільних результатів). Проте, в академічній дисертаційній системі діє правило: один науковий результат (наукове положення, захищений патент, виявлена закономірність) може бути винесений на захист лише один раз і лише одним здобувачем.

Мені знову ж не під силу розібратися у цьому хитросплетінні, хоча на мій погляд, на етапі оформлення дисертації Т.А. Степанюк, ці результати (з розділу 5) не слід було включати до своєї дисертації, а тим паче відносити до основних результатів. У цілковитій відповідності до **Положення ...**, самі спільні публікації, в яких опубліковані результати розділу 5, варто було написати у **Переліку публікацій автора даної дисертації що додатково відображають результати дисертаційного дослідження** або навіть віднести їх до основного списку, бо це цілком відповідає тому факту, що це є публікація автора за науковою тематикою дисертації. Проте на мій погляд, і цього не потрібно було робити, а просто навести їх в загальному списку всіх публікацій, бо і щодо кількісних показників публікацій автора і стосовно якості частини дисертації без цих спільних результатів, можна сказати, що вони повністю відповідали би вимогам до докторських дисертацій (див. вище у даному відгуку). Для повноти картини, можна би було обмежитися лише формулюваннями цих результатів. В даній ситуації маємо певну правову колізію, яку автор відгуку з певністю не спроможний вирішити. Адже, якщо в останньому варіанті **Положення про порядок присудження ...**, нема чіткої згадки про те, що одні і ті ж результати не можуть виноситися на захист в дисертаціях різних авторів, проте, чітко написано про дотримання правил доброчесності. Стосовно дотримання правил строгої доброчесності – я зробив спробу вище знайти відповідь.

5) Хоча доведення всіх тверджень є правильними і математично строгими, проте окремі місця в них вимагають набагато більшої детальності у викладках. Адже фразу, подібну на таку: використовуюти нерівність (2.09), а також цю нерівність, а ще нерівність (2.16), – декодувати іноді не дуже просто. Знову ж скажу проте, що для того, щоб викласти доведення істотно детальніше, після видалення розділу 5 залишалося би ще достатньо місця.

6) Описки. У дисертаційній роботі і авторефераті є ряд стилістичних і граматичних помилок, зустрічається неправильне вживання відмінків. Проте з контексту завжди зрозуміло про що йдеться і зміст при цьому не спотворюється. Тому не наводимо список цих неточностей. На оправдання як автора дисертації, так і задля вибачення за свої допущені у цьому відгуку неточності, скажу лише, що як у першому варіанті тексту, так і навіть після внесення виправлень виявлених описок, ймовірно такі в тексті ще залишаються. На разі редактори комп'ютерні не є настільки досконалими, щоб виявляти всі промахи написання в тексті.

Підсумовуючи цей перелік зауважень, зазначу, що виявлені огріхи не спотворюють змісту і сприйняття тексту дисертації, доведення якої, хоча й написані іноді занадто конспективно, проте є зрозумілими, а сумнівів у правильності основних положень дисертації у автора відгуку не виникає.

6. Публікації і апробація результатів роботи. Основні результати дисертаційної роботи з достатньою повнотою відображені у 51 науковій публікації, з них 15 — статті у наукових виданнях, внесених до переліку наукових фахових видань України та закордонних виданнях, а також решта публікацій в препринтах і у тезах доповідей і матеріалах міжнародних та вітчизняних конференцій. Відповідно до п. 2 Наказу № 1220 МОН України від 23.09.2019 вказані 15 статей зараховуються як 33 наукові публікації.

Результати дисертаційної роботи доповідались на численних міжнародних наукових конференціях, як в Україні, так і за кордоном (Австрія, Іспанія, Італія, Німеччина, Польща, Швейцарія, Азербайджан, Киргизія), а також на наукових семінарах Національного університету ім. Т.Г.Шевченка, Інституту математики НАНУ, Львівського національного університету ім. І.Франка, у Дніпропетровському національному університеті ім. О. Гончара, в Одеському національному університеті ім. І.І.Мечнікова та у ряді інших наукових інститутів і університетів, а отже, пройшли належну апробацію.

7. Практичне значення результатів роботи. Дисертаційна робота є теоретичним дослідженням і її результати можуть знайти застосування в тих розділах математики (насамперед математичного аналізу і диференціальних рівнянь), в яких традиційно знаходять застосування результати теорії апроксимації. Результати дисертаційної роботи можуть бути рекомендовані до використання при читанні спеціальних курсів, а також у наукових дослідженнях в наступних наукових і навчальних закладах, в яких проводяться дослідження з математичного аналізу в широкому розумінні цього слова: Київському, Харківському, Одеському, Дніпропетровському, Карпатському та Львівському національних університетах, Інституті математики НАНУ, Фізико-технічному інституті низьких температур (м.Харків), Інституті прикладної математики і механіки (м.Слов'янськ), НПУ ім.М.П.Драгоманова.

8. Висновки. Дисертаційна робота Т.А. Степанюк має теоретичний характер, а її результати мають вагоме теоретичне значення для розвитку теорії наближень. Дисертація Т.А. Степанюк є самостійною, завершеною науковою працею, має логічну будову, характеризується науковим стилем, викладені висновки і рекомендації є в основному результатом власних досліджень автора. Основні результати роботи, які виносяться на захист характеризуються науковою новизною. Структура і обсяг роботи відповідають встановленим вимогам. Дисертаційне дослідження відповідає паспорту спеціальності 01.01.01 — математичний аналіз. В ній піддається систематичному аналізу проблема знаходження найкращих наближень різноманітних об'єктів аналізу на основі дослідження асимптотичних властивостей різноманітних апроксимаційних характеристик. Вона виконана на сучасному науковому рівні. Перелічені вище зауваження до роботи не применшують хорошого враження від роботи в цілому. Аналізуючи дисертаційну роботу, слід відзначити її ідейну цілісність, вона містить остаточний розв'язок цілого ряду перелічених вище важливих для теорії наближень задач. Результати роботи належно опубліковані. Автореферат в цілому правильно і повно відображає зміст дисертації. З огляду на сказане вище, вважаю, що за змістом і оформленням, новизною наукових положень, теоретичним і практичним значенням дисертаційна робота Т.А. Степанюк відповідає вимогам "Порядку присудження та позбавлення наукового ступеня доктора наук", затвердженого постановою Кабінету Міністрів України № 1197 від 17 листопада 2021 року щодо докторських дисертацій на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз, а її авторка **СТЕПАНЮК Тетяни Анатоліївни** заслуговує присудження їй наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01. — математичний аналіз.

Офіційний опонент

доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри теорії функцій
і функціонального аналізу Львівського
національного університету
імені Івана Франка

Олег Скасків

Підпис професора Олега Скасківа засвідчую
Вчений секретар Львівського національного
університету імені Івана Франка

Ольга Грабовецька

02. 09. 2026 р.

Надійшов до спеціального
Вчений секретар
Інституту математики
НАН України



226.206.01 07.09.2026р.

Гор СОКОЛЕНКО