

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу

Степанюк Тетяни Анатоліївни

“Дослідження апроксимативних характеристик функціональних множин та екстремальних властивостей багатовимірних точкових конфігурацій”,

подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук
зі спеціальності 01.01.01 – математичний аналіз

1. Актуальність теми.

Однією з основних задач теорії наближення функцій є відшукування асимптотичних рівностей для точних верхніх меж наближень заданого фіксованого класу періодичних функцій за допомогою тригонометричних поліномів, породжених певними лінійними методами підсумовування рядів Фур'є. Ця задача має багату історію, пов'язану з іменами видатних математиків, таких як А. М. Колмогоров, С. М. Нікольський, Б. Надь, В. К. Дзядик, М. П. Корнейчук, О. П. Тіман, В. П. Моторний, О. І. Степанець С. О та ін. До початку 80-х років минулого століття найбільш загальними класами, на яких досліджувалися такі задачі, були класи, що визначалися похідними в сенсі Вейля–Надя. Вагомим етапом розвитку цього напрямку став запропонований О. І. Степанцем у 80–90-х роках підхід до класифікації періодичних функцій на основі поняття (ψ, β) -похідної, що дав змогу охопити весь спектр сумовних (неперервних) функцій і врахувати більш тонкі властивості конкретних об'єктів, виявивши низку нових ефектів, не помітних у межах раніше відомих шкал.

Паралельно в останні десятиліття особливої популярності набула теорія наближень на сфері та проблеми відшукування оптимальних точкових конфігурацій, які мають важливе значення для вирішення багатьох прикладних задач. У цьому напрямі активно працюють провідні світові математики (I. N. Sloan, E. B. Saff, J. Beck, W. Chen, R. S. Womersley, H. Woźniakowski, H. N. Mhaskar, K. B. Stolarsky та ін.), а також українські дослідники М. В'язовська, А. Бондаренко та Д. Радченко, чії результати 2013 року щодо існування сферичних t -дизайнів на d -вимірній сфері здобули світове визнання.

Незважаючи на значну кількість опублікованих робіт, у зазначених напрямках залишається низка нез'ясованих питань. Відповідно, постає задача вдосконалення наявних і розробки нових методів дослідження апроксимативних характеристик, а також встановлення точних оцінок відповідних величин, зокрема, на класах 2π -періодичних (ψ, β) -диференційовних функцій. Це

дозволяє суттєво доповнити відомі результати новими оцінками для поліноміальних наближень, а також похибок найгіршого інтегрування та енергій на одиничній сфері. З огляду на це, проведені дослідження є актуальними та мають важливе теоретичне й прикладне значення.

2. Зміст дисертації. Дисертація складається зі змісту, анотації, переліку умовних позначень, вступу, п'яти розділів, списку використаних джерел, що містить 251 найменування, і додатків. Загальний обсяг дисертації налічує 383 сторінок, із них список використаних джерел міститься на 22 сторінках, а додатки – на 35 сторінках.

Перший розділ дисертаційної роботи є допоміжним. Він містить огляд відомих результатів за темою дисертації, відкриті питання, основні означення та позначення.

Другий розділ присвячено встановленню асимптотично непокращуваних нерівностей типу Лебега для сум Фур'є на множинах (ψ, β) -диференційовних функцій, а також розв'язанню задачі Колмогорова-Нікольського для сум Фур'є, встановленню порядкових оцінок для сум Фур'є, найкращих наближень та найкращих ортогональних тригонометричних наближень на класах періодичних функцій, що задаються за допомогою (ψ, β) -похідних.

Знайдено асимптотичні рівності для точних верхніх меж наближень сумми Фур'є 2π -періодичних функцій у різних метриках: у рівномірній метриці — для згорток функцій з одиничних куль просторів L_p із узагальненими ядрами Пуассона, а у метриці Лебега — для класів узагальнених інтегралів Пуассона функцій з одиничної кулі L_1 . Крім того, для функцій, що задаються (ψ, β) -інтегралами від $\varphi \in L_1$, отримано асимптотичні рівності у випадку, коли послідовності $\psi(k)$ спадають швидше за довільну степеневу функцію, але повільніше за геометричну прогресію.

Також встановлено асимптотично непокращувані нерівності типу Лебега на множинах 2π -періодичних функцій f , де рівномірні норми відхилень від часткових сум Фур'є виражаються через найкращі наближення функцій φ : у середньому тригонометричними поліномами для (ψ, β) -інтегралів від $\varphi \in L_1$ (за умови швидшого за будь-яку степеневу функцію спадання $\psi(k)$ до нуля), а також у метриці простору L_p — для узагальнених інтегралів Пуассона функцій $\varphi \in L_p$.

Третій розділ присвячено встановленню асимптотично непокращуваних нерівностей типу Лебега для інтерполяційних тригонометричних поліномів на множинх (ψ, β) -диференційовних функцій, а також розв'язанню задачі Колмогорова-Нікольського для інтерполяційних тригонометричними поліномів, на класах періодичних функцій, що задаються за допомогою (ψ, β) -

похідних.

Установлено асимптотично непокресувані інтерполяційні аналоги нерівностей типу Лебега для узагальнених інтегралів Пуассона функцій $\varphi \in L_p$ ($1 \leq p \leq \infty$), у яких модулі відхилень інтерполяційних поліномів Лагранжа при кожному $x \in \mathbb{R}$ зображуються через найкращі наближення $E_n(\varphi)_{L_p}$ тригонометричними поліномами. Також аналоги нерівностей типу Лебега отримано на множинах $C_\beta^\psi L_1$ 2π -періодичних функцій, які задаються згортками твірного ядра $\Psi_\beta(t)$ з функціями $\varphi \in L_1$, та доведено їх асимптотичну точність у випадку, коли послідовності $\psi(k)$ спадають до нуля швидше за довільну степеневу функцію.

Крім того, знайдено асимптотичні рівності для точних верхніх меж поточкових наближень інтерполяційними тригонометричними поліномами Лагранжа на класах $C_{\beta,p}^{\alpha,r}$ узагальнених інтегралів Пуассона функцій з одиничних куль просторів L_p ($1 \leq p \leq \infty$), а також на класах згорток твірного ядра Ψ_β з функціями з одиничної кулі простору L_1 за умови швидшого за будь-яку степеневу функцію спадання послідовностей $\psi(k)$.

У четвертому розділі досліджено оцінки похибки чисельного інтегрування та дискретних енергій на проєктивних просторах. Зокрема, для найгіршої похибки інтегрування на одиничній сфері $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ ($d \geq 2$) на класах $\mathbb{H}^{\frac{d}{2},\gamma}(\mathbb{S}^d)$ ($\gamma > \frac{1}{2}$) отримано двосторонні оцінки з додатковим логарифмічним множником, а також встановлено оцінку зверху для сферичних t -дизайнів і оцінку знизу для довільної точкової множини. Крім того, знайдено асимптотичні рівності для дискретних s -енергій Рісса та логарифмічної енергії для послідовностей добре розподілених t -дизайнів і стратифікованих вибірок на одиничній сфері.

Також установлено двосторонні оцінки для мінімальних s -енергій, енергій Рісса, дискретної логарифмічної енергії та енергії Гріна на проєктивних просторах $\mathbb{FP}^{d-1}$ над скалярними областями $\mathbb{F}$ дійсних, комплексних чисел, кватерніонів чи октоніонів. Ці оцінки записано в загальному вигляді через відповідні параметри для всіх чотирьох проєктивних просторів (дійсному, комплексному, кватерніонному та просторі Келі).

У п'ятому розділі досліджено властивості точкових множин на d -вимірному торі $\mathbb{T}_\Lambda$ та одиничному кубі в $\mathbb{R}^d$. Означено поняття гіперрівномірності для куль великого, малого та проміжного розмірів і доведено, що такі точкові множини є рівномірно розподіленими. На гіперрівномірність досліджено послідовності QMC-дизайнів класів Соболева $W^{\alpha,2}(\mathbb{T}_\Lambda)$ ($\alpha > \frac{d}{2}$), ймовірнісні точкові процеси (що відповідають стратифікованим вибіркам) та деякі детермінантові точкові процеси на d -вимірному торі.

Крім того, здійснюється ефективна побудова поліноміальних решіткових кубатурних формул (різновиду методів квазі Монте-Карло, QMC) за допомогою збирання твірного вектора поліномів $\mathbf{g} \in (\mathbb{F}_b[\mathbf{x}])^d$ покомпонентно-поцифровим (CBC-DBD) та альтернативним покомпонентним (CBC) методами. Для точкових множин, побудованих цими методами, встановлено оцінку зверху найгіршої похибки інтегрування на вагових просторах Уолша.

3. Обґрунтованість та достовірність результатів дисертації. Дисертаційна робота Т. А. Степанюк виконана на високому науковому рівні. Результати роботи супроводжуються правильними і повними доведеннями, отже, є достовірними і строго обґрунтованими. Викладення положень дисертації виконано логічно і послідовно з дотриманням всіх стандартів сучасної наукової літератури.

Реферат правильно відображає зміст дисертаційної роботи.

4. Новизна і значення результатів. Дисертаційна робота Т. А. Степанюк є завершеною науковою працею, в якій отримано нові, науково обґрунтовані результати теоретичного характеру. Результати дисертаційної роботи та розроблені методики можуть бути використані при дослідженні фундаментальних задач математичного аналізу, теорії наближення функцій та обчислювальної математики. Крім того, результати щодо побудови поліноміальних решіткових кубатурних формул (polynomial lattice rules) мають безпосереднє прикладне застосування в актуарній математиці та страхуванні, зокрема для обчислення вимог до необхідного капіталу забезпечення платоспроможності (Solvency Capital Requirement, SCR).

5. Публікації та апробація результатів. Результати дисертаційної роботи представлено у 15 статтях, що опубліковані у виданнях, внесених до переліку фахових видань України, та у закордонних виданнях, 13 із них надруковані у виданнях, внесених до міжнародних наукометричних баз Web of Science, Scopus, із них 7 – у виданнях квартиля Q1-Q2 відповідно до класифікації SCI mago Journal and Country Rank, 4 – у виданнях квартиля Q3 і одна – у виданні квартиля Q4. Відповідно до п. 2 Наказу МОН України від 23.09.2019 вказані 15 статей зараховуються як 33 наукові публікації. Результати дисертації неодноразово доповідались на фахових наукових семінарах у провідних наукових центрах України та за її межами, а також пройшли апробацію на багатьох вітчизняних та закордонних конференціях (наявні 35 публікацій у тезах доповідей конференцій).

6. Академічна доброчесність. Представлені в роботі результати, що виносяться на захист, були одержані особисто автором, а також пройшли належне рецензування та апробацію. Щодо статей, опублікованих у співав-

торстві, в дисертації зазначено власний внесок здобувача, а також наведено посилання на джерела, де використана частина результатів, що належить співавторам. На всі цитовані в дисертаційній роботі результати інших авторів також наявні необхідні посилання. Повноту та унікальність тексту дисертаційного дослідження підтверджено офіційною перевіркою на наявність текстових запозичень за допомогою ліцензованого програмного забезпечення StrikePlagiarism.com у Дніпровському національному університеті імені Олеся Гончара. Отже, фактів академічного плагіату, самоплагіату, фабрикацій та фальсифікацій опонентом не виявлено.

7. Зауваження та побажання.

Оцінюючи позитивно науковий рівень, обсяг та цінність отриманих результатів, вважаю за необхідне висловити такі зауваження та дискусійні положення:

1. Висновки до розділів 2 і 3, а також загальні висновки до дисертації надмірно деталізовані та подрібнені. Для кращого сприйняття роботи їх варто було б викласти більш лаконічно, з чіткішим акцентом на ключових ідеях та науковій новизні здобутих результатів.
2. Праця [16], наведена у переліку основних публікацій за темою дисертації, не є публікацією у рецензованому науковому виданні, тому її включення до цього списку є недоцільним.
3. На підставі праць [5, 6] з переліку основних публікацій за темою дисертації співавтору Osisiogu вже було присуджено науковий ступінь доктора філософії. У зв'язку з цим включення джерел [5, 6] до списку основних праць за темою даної дисертації є небажаним та вимагає більш чіткого розмежування результатів.
4. У висновках до розділу 5 зазначено, що він базується, зокрема, на результатах праці авторки [235], однак у безпосередньому тексті матеріалів цього розділу посилання на дану публікацію відсутні.
5. Змістове наповнення розділу 5 здебільшого охоплено згаданими працями [5, 6]. З огляду на наведені вище зауваження, великий загальний обсяг дисертації, високий науковий рівень та завершеність результатів перших чотирьох розділів, відображених у достатній кількості публікацій належного рівня, вважаю, що матеріали п'ятого розділу не варто було включати до основного змісту дисертаційної роботи.

Висловлені зауваження мають переважно дискусійний характер і не при-
меншують високого наукового рівня та теоретичного значення отриманих ав-
тором результатів.

8. Висновки. Вважаю, що дисертаційна робота “Дослідження апрокси-
мативних характеристик функціональних множин та екстремальних власти-
востей багатовимірних точкових конфігурацій” є завершеним науковим до-
слідженням та за своїм науково-теоретичним рівнем, актуальністю, обсягом
виконаних досліджень, новизною отриманих результатів, обґрунтованістю
основних положень і висновків цілком відповідає вимогам “Порядку прису-
дження та позбавлення наукового ступеня доктора наук”, затвердженого по-
становою Кабінета Міністрів України від 17 листопада 2021 року № 1197 щодо
докторських дисертацій, а її авторка, Степанюк Тетяна Анатоліївна, заслуго-
вує на присудження їй наукового ступеня доктора фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Завідувач кафедри математичного аналізу
та оптимізації

Дніпровського національного університету
імені Олеся Гончара,
доктор фіз.-мат. наук, професор

Наталія ПАРФІНОВИЧ

*Проректор
наукової роботи*



Марія О.М.

*Надійшов до спеціалізованої вченої ради 22.06.2026
07.09.2026р.*

*Учений секретар
Інституту математики
НАН України*



Лар Соколенко