

ВІДГУК

**офіційного опонента на дисертаційну роботу
Степанюк Тетяни Анатоліївни**

**“Дослідження апроксимативних характеристик функціональних множин та екстремальних властивостей багатовимірних точкових конфігурацій”,
подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук
зі спеціальності 01.01.01 – математичний аналіз**

1. Актуальність теми дослідження. Теорія наближень періодичних функцій належить до традиційних, глибоко розроблених і водночас найбільш динамічних напрямів сучасного математичного аналізу. Історично витоки цього напрямку пов’язані з класичними працями П. Л. Чебишова, К. Вейерштрасса, Д. Джексона, С. Н. Берштейна та Ш. Ж. де ла Валле Пуссена, які заклали базові принципи заміни складних функціональних залежностей простішими математичними об’єктами – тригонометричними чи алгебраїчними поліномами. У сучасному науковому дискурсі ця проблема трансформувалася у фундаментальну задачу оптимізації обчислювальних ресурсів: як мінімізувати похибку наближення при фіксованому обсязі дискретної інформації про об’єкт.

Проривним етапом у розвитку конструктивної теорії функцій у XX столітті став підхід, запропонований А. М. Колмогоровим та розвинутий С. М. Нікольським. Вони перенесли акцент із дослідження апроксимаційних властивостей окремих функцій на вивчення граничних характеристик цілих функціональних класів. Сформульована ними задача, яку зараз прийнято називати задачею Колмогорова–Нікольського (знаходження точних асимптотичних рівностей для верхніх меж відхилень лінійних методів наближення на заданих компактах), стала концептуальним ядром гармонічного аналізу. Вагомий внесок у розв’язання цих задач для диференційовних функцій внесли провідні представники української математичної школи, зокрема О. І. Степанець, який на початку 1980-х років запровадив узагальнене поняття (ψ, β) -похідної. Це дало змогу не лише класифікувати весь спектр сумовних періодичних функцій, а й розрізняти тонкі аналітичні властивості об’єктів (наприклад, нескінченно диференційовних, аналітичних чи цілих функцій), які не вловлювалися класичними похідними дробового порядку в сенсі Вейля–Надя.

Актуальність досліджень Т. А. Степанюк у цьому контексті зумовлена наявністю низки принципових, тривалий час нерозв’язаних теоретичних проблем. Зокрема, залишалися відкритими питання побудови сильної асимптотики для відхилень сум Фур’є та інтерполяційних тригонометричних поліномів Лагранжа на класах узагальнених інтегралів Пуассона у випадках *високої гладкості*, коли послідовність мультиплікаторів Фур’є спадає до нуля швидше за будь-яку степеневу функцію, але повільніше за геометричну прогресію. Встановлення асимптотично точних нерівностей типу Лебега в рівномірній та інтегральних метриках просторів L_p для таких ультрагладких класів є

критично важливим, оскільки вони задають еталонні межі точності та збіжності для будь-яких прикладних обчислювальних процедур.

Другий фундаментальний вектор дисертаційного дослідження Т. А. Степанюк пов'язаний із вивченням оптимального розподілу великих скінченних множин точок на багатовимірних многовидах. Проблема знаходження рівномірного розподілу точок на сферах, торах чи проєктивних просторах має глибокі корені, що сягають праць К. Ф. Гаусса з теорії квадратур. Сьогодні ці задачі набули особливої гостроти через математичні виклики у галузях аналізу великих даних, машинного навчання, комп'ютерної графіки, статистичної фізики, криптографії та квантової інформатики, де виникає потреба оперувати об'єктами у просторах високих розмірностей.

Одним із головних критеріїв оптимальності точкових систем є мінімізація дискретних енергій потенціалу. Математичне моделювання таких конфігурацій безпосередньо відтворює фундаментальні фізичні процеси. Зокрема, взаємодію у вільному (необмеженому) просторі, де немає стінок чи заземлених меж, описують логарифмічна енергія та s -енергія Рісса. Натомість процеси, пов'язані зі статичними полями та явищами переносу всередині обмежених просторів, стінки яких впливають на систему, відтворює енергія Гріна. Визначення точних нижніх і верхніх меж для мінімальних дискретних енергій Рісса в сингулярних випадках, а також аналіз детерміністичних точкових конфігурацій (таких як сферичні t -дизайни) є однією з найскладніших проблем геометричної теорії потенціалу.

Актуальність запропонованих у дисертації розширень полягає в перенесенні результатів, раніше отриманих для звичайної сфери S^d , на складніші геометричні структури: проєктивні простори $\mathbb{RP}^{d-1}$ над полями дійсних, комплексних чисел, кватерніонів та октоніонів. Застосування цих просторів у квантовій механіці робить двосторонні оцінки мінімальних енергій новим інструментом для оптимізації квантових станів.

Особливу актуальність дисертації підкреслює дослідження явища гіперрівномірності. Це поняття, вперше запропоноване у 2003 році С. Торкватто та Ф. Стілінгером для простору $\mathbb{R}^d$, характеризує особливий стан речовини, який за своєю структурою займає проміжне положення між ідеальними кристалічними ґратками та повністю хаотичними рідинами чи газами. Дисперсія кількості точок у фіксованому об'ємі для гіперрівномірної системи зростає повільніше, ніж сам об'єм, що кардинально відрізняє її від стандартних пуассонівських (випадкових) процесів.

Гіперрівномірні матеріали мають унікальні оптичні, електромагнітні та транспортні властивості, що робить їх затребуваними в нанотехнологіях, фотоніці та матеріалознавстві (створення лазерів нового типу, фотонних кристалів тощо). Проте математичний апарат для опису гіперрівномірності на компактних многовидах досі перебуває на стадії формування. Запровадження Т. А. Степанюк математичного формулювання гіперрівномірності точкових множин на d -вимірному торі для куль великого, малого та проміжного радіусів, а також доведення гіперрівномірності для детерміністичних квазі-Монте-Карло дизайнів та стохастичних процесів на основі стратифікованих вибірок, створює фундаментальну базу для теоретичної фізики.

З огляду на це, актуальність теми дисертації Т. А. Степанюк визначається орга-

нічним поєднанням класичних фундаментальних проблем гармонічного аналізу з новітніми запитами сучасної обчислювальної математики й математичної фізики. Робота успішно долає розрив між абстрактною теорією наближень та її практичними багатовимірними застосуваннями, пропонуючи суворі аналітичні інструменти для розв'язання екстремальних задач на многовидах, що робить її своєчасною, важливою та значущою для розвитку математичної науки в Україні та світі.

2. Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалася у відділі теорії функцій Інституту математики НАН України у межах науково-дослідних тем “Дослідження структурних та апроксимаційних властивостей функціональних множин” (номер держреєстрації 0121U100477), “Апроксимаційні характеристики та структурні властивості функціональних множин” (номер держреєстрації 0116U003102), “Розробка аналітичних та чисельно-аналітичних методів дослідження задач сучасного природознавства” (номер держреєстрації 0117U004077) та грантом НАН України дослідницьким лабораторіям/групам молодих вчених НАН України “Еволюційні крайові задачі й апроксимативні властивості функціональних множин та їх застосування” (номер держреєстрації 0118U005389).

3. Наукова новизна результатів дисертаційної роботи. Дисертаційне дослідження Т. А. Степанюк є фундаментальною науковою працею, у якій розв'язано комплекс великих, тривалий час відкритих теоретичних проблем математичного аналізу. Наукова новизна отриманих результатів має визначальне значення для конструктивної теорії функцій, геометричної теорії потенціалу та теорії чисельного інтегрування.

У *першому розділі* наведено математичний інструментарій, термінологію та окреслено історичний контекст досліджуваних задач, на основі яких будуються наступні розділи роботи.

Наукова новизна результатів другого розділу полягає у суттєвому просуванні та отриманні остаточних рішень у класичній задачі Колмогорова–Нікольського для класів нескінченно-диференційованих функцій, що визначаються в термінах (ψ, β) -похідних у сенсі О. І. Степанця.

Авторкою знайдено асимптотичні рівності для точних верхніх меж рівномірних наближень частинними сумами Фур'є на класах $C_{\beta, p}^{\alpha, r}$ узагальнених інтегралів Пуассона для $0 < r < 1$. Отримано аналогічні асимптотичні результати для точних верхніх меж наближень сумами Фур'є в метриках просторів Лебега на класах $C_{\beta, 1}^{\alpha, r}$. Встановлено асимптотично непокрашувані нерівності типу Лебега для 2π -періодичних функцій, що задаються узагальненими інтегралами Пуассона, де рівномірні норми відхилень функцій від їх сум Фур'є виражені через найкращі наближення тригонометричними поліномами в метриці L_p ($1 \leq p \leq \infty$). Для випадків, коли послідовності $\psi(k)$ спадають до нуля швидше за будь-яку степеневу функцію, але повільніше за геометричну прогресію, розв'язано задачу Колмогорова–Нікольського для сум Фур'є на класах (ψ, β) -інтегралів від функцій з одиничної кулі простору L_1 . Одночасно з цим у розділі отримано нові точні порядкові оцінки для найкращих тригонометричних наближень у випадку додатно майже спадних послідовностей (мала гладкість).

Новизна результатів третього розділу пов'язана зі встановленням точних апроксимаційних характеристик для методів, що базуються на дискретній інформації про функцію, а саме – для інтерполяційних тригонометричних поліномів Лагранжа з рівновіддаленими вузлами.

Дисертанткою встановлено асимптотично непокрещувані інтерполяційні аналоги нерівностей типу Лебега на множинах узагальнених інтегралів Пуассона від функцій з просторів L_p ($1 \leq p \leq \infty$). Модулі поточкових відхилень інтерполяційних поліномів конструктивно виражені через найкращі поліноміальні наближення ядер у метриці L_p . Отримано точні асимптотичні рівності для точних верхніх меж поточкових наближень інтерполяційними поліномами на класах згорток періодичних функцій високої гладкості $C_{\beta,p}^{\alpha,r}$. Досліджено інтерполяційні аналоги нерівностей Лебега на множинах $C_{\beta}^{\psi} L_1$, які задаються згортками твірного ядра Ψ_{β} . Доведено: якщо послідовність модулів коефіцієнтів Фур'є цього ядра спадає до нуля швидше за будь-яку степеневу функцію, то отримані нерівності у багатьох важливих випадках є асимптотично точними, що дає змогу повністю розв'язати задачу Колмогорова–Нікольського для інтерполяційних процесів на цих класах.

Четвертий розділ демонструє результати на стику багатовимірного гармонічного аналізу та геометричної теорії потенціалу, розширюючи класичні сферичні оцінки на складніші многовиди.

Знайдено двосторонні оцінки для найгіршої похибки інтегрування на одиничній сфері $S^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ ($d \geq 2$) на модифікованих класах типу Соболева $H^{d/2,\gamma}(S^d)$ з критичним показником $d/2$ та додатковим логарифмічним множником. На основі сферичних t -дизайнів встановлено оцінку зверху для найгіршої похибки, а також загальну оцінку знизу для абсолютно довільної точкової конфігурації. Знайдено точні асимптотичні рівності для дискретної s -енергії Рісса та дискретної логарифмічної енергії послідовностей добре розподілених t -дизайнів на одиничній сфері. Доведено, що такі детерміністичні конструкції є асимптотично не менш ефективними, ніж стохастичні конфігурації частинок. Отримано двосторонні оцінки для мінімальних s -енергій Рісса, дискретної логарифмічної енергії та енергії Гріна на проєктивних просторах над скалярними областями $\mathbb{F}$ дійсних, комплексних чисел, кватерніонів та октоніонів. Доведено, що детерміністичні точкові конфігурації забезпечують точні оцінки зверху для згаданих енергій, а двосторонні оцінки для енергії Гріна виписано в явному вигляді через абсолютні сталі.

Наукова новизна результатів п'ятого розділу, що виносяться на захист як особистий внесок здобувачки, зосереджена на започаткуванні нового фундаментального напрямку – математичної теорії гіперрівномірності на компактних многовидах.

Авторкою запроваджено, концептуально формалізовано та вивчено поняття гіперрівномірності точкових множин на d -вимірному торі T_d . Встановлено, що гіперрівномірні точкові множини для великих, малих та куль проміжного розміру на d -вимірному торі є рівномірно розподіленими. Досліджено на гіперрівномірність послідовності квазі-Монте-Карло дизайнів класів Соболева $W^{\alpha,2}(T_A)$, ймовірнісних процесів на основі стратифікованих вибірок та детермінантних точкових процесів.

Результати підрозділів 5.2 та 5.3, що стосуються алгоритмів покомпонентно-по-

цифрової побудови кубатурних формул у вагових просторах Уолша та умов подолання прокляття розмірності, отримані у співавторстві. Ці результати не містять положень, які виносяться на захист; вони мають у дисертації допоміжний характер і слугують для демонстрації практичного застосування розробленої авторкою фундаментальної концепції гіперрівномірності.

4. Обґрунтованість і достовірність наукових положень. Усі математичні результати дисертації є суворо доведеними. Авторка ефективно застосовує сучасний інструментарій математичного аналізу, теорії функцій, теорії ймовірностей та обчислювальних методів. Достовірність висновків підтверджується бездоганною логікою побудови доведень, а також їхньою повною узгодженістю з відомими класичними положеннями відповідних теорій. Роботу написано чіткою науковою мовою, а її виклад є послідовним і переконливим.

5. Апробація результатів і публікації. Основні наукові та практичні результати дисертаційного дослідження повністю й адекватно відображено в опублікованих працях здобувача. Понад 10 наукових статей опубліковано у виданнях, що індексуються престижними міжнародними наукометричними базами даних Scopus та/або Web of Science Core Collection, а проміжні результати, апробація методології та окремі випадки досліджуваних задач представлені у понад 30 тезах доповідей у збірниках матеріалів всеукраїнських та міжнародних наукових конференцій. Загальна кількість опублікованих праць, зарахованих за темою дисертації, повністю відповідає нормативним вимогам Міністерства освіти і науки України, що висуваються до дисертацій на здобуття наукового ступеня доктора наук.

6. Практичне значення результатів. Дисертація переважно має теоретичний характер. Її результати можуть застосовуватися в обчислювальній математиці та математичному моделюванні, а також бути інтегрованими до навчального процесу закладів вищої освіти під час розроблення лекційних курсів і спецкурсів із теорії наближень, функціонального аналізу та чисельних методів.

7. Дискусійні положення та зауваження. Попри високий науковий рівень дисертаційного дослідження, до тексту роботи можна висловити такі побажання та зауваження:

1. У підрозділах 2.1–2.2 при знаходженні асимптотичних рівностей для точних верхніх меж рівномірних наближень сумами Фур'є на класах узагальнених інтегралів Пуассона $S_{\beta, r}^{\alpha, r}$ оцінки для залишкового члена виражено в явному вигляді. Водночас у роботі не наведено порівняльного аналізу швидкості спадання цього залишкового члена залежно від критичного зростання параметрів гладкості α та r . Було б доцільно дослідити, як змінюється структура та величина похибки, коли значення зазначених параметрів наближаються до своїх граничних меж (зокрема, при $\alpha \rightarrow 0$ або $r \rightarrow 0$).

2. У підрозділі 2.3 встановлено нерівності типу Лебега для узагальнених інтегралів Пуассона мають місце для всіх номерів n , які більші за певне порогове значення $n_0 = n_0(\alpha, r, p)$. З огляду на це, відкритим залишається питання: наскільки сильно зростає цей поріг n_0 , коли параметр сумовності p наближається до своїх граничних значень ($p \rightarrow 1$ або $p \rightarrow \infty$)? Чи не створює таке зростання суттєвих обмежень для використання запропонованого методу на практиці, зокрема у випадках, коли наближення здійснюється за допомогою малої кількості гармонік?
3. У підрозділах 2.4–2.6 дисертаційного дослідження успішно розв’язано задачу Колмогорова–Нікольського в просторі L_1 для важливого випадку, коли послідовність мультиплікаторів Фур’є спадає до нуля субгеометрично (швидше за будь-яку степеневу функцію, але повільніше за геометричну прогресію). З огляду на це, у роботі варто було б навести ширше теоретичне обґрунтування вибору саме таких проміжних швидкостей спадання. Також доцільно було б уточнити, які саме прикладні чи фізичні процеси (наприклад, у механіці суцільних середовищ чи теорії диференціальних рівнянь) описуються функціональними класами з такою специфічною наданалітичною гладкістю.
4. У підрозділі 3.2 для інтерполяційних тригонометричних поліномів Лагранжа на множинах $C^\psi_\beta L_1$ доведено асимптотичну точність нерівностей за умови швидкого спадання коефіцієнтів Фур’є ядра. Проте в роботі розглядається виключно класична рівномірна сітка вузлів. У дослідженні варто було б уточнити, чи збережеться структура залишкових членів та порядок отриманих оцінок за умов незначних стохастичних збурень інтерполяційної сітки (наприклад, при виконанні умови Кадеца). Також поза увагою залишилося питання про те, як саме надшвидке спадання коефіцієнтів ядра $\Psi_\beta(t)$ компенсує похибки, викликані порушенням рівномірності розподілу вузлів.
5. У підрозділі 4.1 при отриманні двосторонніх оцінок найгіршої похибки інтегрування на одиничній сфері $\mathbb{S}^d$ для класів $H^{d/2, \gamma}(\mathbb{S}^d)$ виникає додатковий логарифмічний множник, зумовлений критичним показником $d/2$. Проте в роботі бракує роз’яснення щодо природи цього ефекту. Зокрема, варто було б чітко окреслити, чи є цей логарифмічний множник виключно аналітичним наслідком граничного вкладення простору функцій, чи він відображає внутрішню геометричну сингулярність розподілу сферичних t -дизайнів у критичній розмірності.
6. У підрозділах 4.2–4.3 обґрунтовано, що детерміновані конфігурації (добре розподілені сферичні t -дизайни) є *не менш вдалими* з погляду мінімізації s -енергії Рісса та логарифмічної енергії, ніж стохастичні моделі. Проте робота значно виграла б у наочності за наявності чисельного або графічного моделювання (наприклад, для малих розмірностей $d = 3, 4$), яке дозволило б візуалізувати реальну швидкість виходу детерміністичних структур на асимптотичний режим порівняно зі стохастичними аналогами.
7. У підрозділі 4.4 встановлено двосторонні оцінки мінімальних енергій (Рісса, Гріна,

логарифмічної) на проєктивних просторах $\mathbb{RP}^{d-1}$. Проте оцінки для енергії Гріна наведено через абстрактні абсолютні сталі. У дослідженні варто було б окреслити конструктивні підходи до явного обчислення або алгоритмічного звуження меж цих сталих для найскладнішого випадку — октоніонного простору Келі (площини Келі $\mathbb{OP}^2$).

8. У підрозділі 5.1 при запровадженні концепції гіперрівномірності точкових множин на d -вимірному торі розглянуто три випадки тестових об'ємів: кулі великого, малого та проміжного розмірів, а також доведено рівномірність розподілу відповідних послідовностей. Водночас у роботі поза увагою залишено питання про те, чи існують специфічні типи точкових конфігурацій, які є гіперрівномірними для куль малого радіуса, але втрачають цю властивість у разі переходу до куль великого радіуса на торі. Наявність такого аналізу дозволила б чіткіше окреслити межі універсальності досліджуваних систем.
9. Як зазначено в рефераті та в дисертації, результати підрозділів 5.2 та 5.3, які стосуються покомпонентно-поцифрової побудови кубатурних формул та подолання *прокляття розмірності*, отримані у співавторстві й раніше були захищені О. Осісіюгу в її дисертаційному дослідженні на здобуття ступеня доктора філософії. З огляду на це, у роботі варто було б чіткіше розмежувати особистий внесок здобувачки, зокрема деталізувати, які саме елементи аналітичних доведень у зазначених підрозділах належать особисто Т. А. Степанюк, а також розкрити, як використання цих допоміжних результатів допомогло глибше обґрунтувати її власну концепцію гіперрівномірності точкових множин на торі.

Наведені зауваження не є суттєвими і не впливають на загальну високу оцінку дисертаційної роботи.

8. Висновки. Дисертаційна робота Степанюк Тетяни Анатоліївни “Дослідження апроксимативних характеристик функціональних множин та екстремальних властивостей багатовимірних точкових конфігурацій” є завершеною, самостійно виконаною науковою працею, що становить собою вагоме досягнення у сфері сучасного математичного аналізу та розв’язує важливу фундаментальну проблему теорії наближень і геометричної теорії потенціалу.

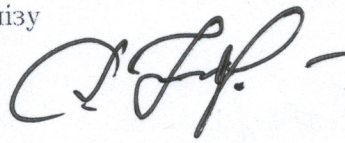
Наявність у п'ятому розділі (підрозділи 5.2 та 5.3) допоміжних результатів, отриманих у співавторстві та раніше захищених у дисертації доктора філософії іншої особи, жодним чином не зменшує наукової цінності роботи. Результати перевірки дисертації, аналізу публікацій здобувачки, тексту дослідження та використання джерел свідчать про дотримання академічної доброчесності й відсутність академічного плагіату, фабрикації чи фальсифікації.

Основне теоретичне ядро дисертації, що охоплює аналіз узагальнених інтегралів Пуассона, задачі Колмогорова–Нікольського, нерівності Лебега, енергетичні оцінки на проєктивних просторах та концептуалізацію гіперрівномірності на торі, є виключно особистим здобутком Т. А. Степанюк. Ці самостійні результати повністю опубліковані

у провідних фахових виданнях світового рівня і є цілком достатніми для докторського дослідження.

За актуальністю теми, глибиною методологічного інструментарію, науковою новизною, обґрунтованістю й достовірністю положень, а також повнотою викладу в друкованих працях, дисертація повністю відповідає вимогам "Порядку присудження і позбавлення наукових ступенів", затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 17.11.2021 р, №1197, що висувають до докторських дисертацій, а її авторка, Степанюк Тетяна Анатоліївна, заслуговує на присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Офіційний опонент,
доктор фізико-математичних наук,
професор, професор кафедри
математичного і функціонального аналізу
Карпатського національного
університету імені Василя Стефаника



Роман ДМИТРИШИН



Надійшов до спеціалізованої вченої ради
026.206.01 04.09.2026р.

Учений секретар
Інституту математики
НАН України



Голова комісії
Ігор СОКОЛЕНКО