

ЗАТВЕРДЖУЮ



Директор Інституту математики
Національної академії наук України
академік НАН України

Олександр ТИМОХА

10 березня 2026 р.

В И С Н О В О К

про наукову новизну, теоретичне й практичне значення результатів
дисертаційної роботи СТЕПАНЮК Тетяни Анатоліївни

**“Дослідження апроксимативних характеристик
функціональних множин та екстремальних властивостей
багатовимірних точкових конфігурацій”,**

підготовленої на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук
зі спеціальності 01.01.01 — математичний аналіз та 111 — математика
(фізико-математичні науки)

Призначені рішенням Вченої ради Інституту математики НАН України від 16 грудня 2025 року, протокол №15, рецензенти:

– Працьовитий Микола Вікторович — доктор фізико-математичних наук (01.01.05 — “теорія ймовірностей і математична статистика”), професор, завідувач відділу динамічних систем та фрактального аналізу Інституту математики НАН України;

– Романюк Анатолій Сергійович — доктор фізико-математичних наук (01.01.01 — “математичний аналіз”), професор, завідувач відділу теорії функцій Інституту математики НАН України;

– Шидліч Андрій Любомирович — доктор фізико-математичних наук (01.01.01 — “математичний аналіз”), старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник відділу теорії функцій Інституту математики НАН України;

за результатами попередньої експертизи докторської дисертації Степанюк Тетяни Анатоліївни на тему “Дослідження апроксимативних характеристик функціональних множин та екстремальних властивостей багатовимірних точкових конфігурацій” (тема дисертації затверджена на засіданні Вченої ради Інституту математики НАН України 21 грудня 2021 року, протокол № 19, у період з 01.09.2021 р. по 31.08.2023 р. здобувачка навчалася на денній формі навчання у докторантурі Інституту математики НАН України за спеціальністю 111 — математика, наказ про зарахування до докторантури № 13а від 25 серпня 2021 р.), а також розглянувши наукові публікації, в яких висвітлені основні наукові результати, і за результатами фахового семінару (витяг з протоколу № 2 від 27 лютого 2026 р., розширеного засідання семінару відділу теорії функцій Інституту математики НАН України), ухвалили прийняти такий висновок:

1. Актуальність теми дослідження.

Дисертаційну роботу Т. А. Степанюк присвячено розв’язанню широкого кола важливих екстремальних задач теорії наближень на класах диференційовних функцій однієї та багатьох змінних. Зокрема, в ній отримуються асимптотично непокращувані оцінки для низки апроксимативних характеристик функціональних класів, доводяться нерівності типу Лебега для сум Фур’є та інтерполяційних тригонометричних поліномів, встановлено нові екстремальні властивості деяких важливих точкових множин на різних

многовидах (d -вимірній сфері, багатовимірному торі, одиничному кубі в $\mathbb{R}^d$, проєктивних просторах).

Напрямок досліджень, пов'язаний з наближенням періодичних функцій тригонометричними многочленами був започаткований в роботах П. Л. Чебишова, К. Вейерштраса, Д. Джексона, Ш. Валле-Пуссена та ін. Дана тематика активно розвивалася в роботах В. К. Дзядика, О. В. Єфімова, М. П. Корнейчука, С. М. Нікольського, С. А. Теляковського, О. І. Степанця та ін.

Проблеми відшукування оптимальних точкових конфігурацій на сфері в останні десятиліття набули особливо широкої популярності. У цьому напрямку активно працюють багато відомих математиків, зокрема, Я. Слоан, Е. Сафф, Дж. Бек, Г. Вожняковський, М. В'язовська, А. Бондаренко, Д. Радченко та ін. Широке прикладне застосування у фізиці, інженерії, медицині, фінансах, машинному навчанні, комп'ютерній графіці та інших областях, змотивувало та спонукало дослідників активно працювати над дослідженням властивостей точкових конфігурацій. Зазначимо, що розв'язання такого типу задач у не досліджених ситуаціях потребує створення нових методів і підходів, що відіграє важливу роль для розвитку теорії функцій, зокрема, теорії наближення, а також у практичних застосуваннях. З огляду на вище сказане, тематика дослідження є актуальною.

2. Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертацію виконано у відділі теорії функцій Інституту математики НАН України згідно з науково-дослідними темами “Дослідження структурних та апроксимаційних властивостей функціональних множин” (номер держреєстрації 0121U100477), “Апроксимаційні характеристики та структурні властивості функціональних множин” (номер держреєстрації 0116U003102), “Розробка аналітичних та чисельно-аналітичних методів дослідження задач сучасного природознавства” (номер держреєстрації 0117U004077) та грантом НАН України дослідницьким лабораторіям/групам молодих вчених НАН України “Еволюційні крайові задачі й апроксимативні властивості функціональних множин та їх застосування” (номер держреєстрації 0118U005389).

3. Наукова новизна отриманих результатів. Основні результати, які виносяться на захист, є новими. До них, на нашу думку, слід віднести такі:

- Знайдено асимптотичні рівності для точних верхніх меж наближень сумами Фур'є в рівномірній метриці на класах 2π -періодичних функцій, які зображуються у вигляді згортки функцій, що належать до одиничних куль просторів L_p , з узагальненими ядрами Пуассона.
- Знайдено асимптотичні рівності для точних верхніх меж наближень сумами Фур'є в метриках просторів Лебега на класах узагальнених інтегралів Пуассона періодичних функцій, які належать одиничній кулі простору L_1 .
- Встановлено нерівності типу Лебега, на множинах 2π -періодичних функцій, котрі задаються (ψ, β) -інтегралами від функцій φ із L_1 , в яких рівномірні норми відхилень сум Фур'є виражаються через найкращі наближення в середньому тригонометричними поліномами функцій φ . Доведено асимптотичну непокрещуваність одержаних оцінок за умови, коли послідовності $\psi(k)$ спадають до нуля швидше за довільну степеневу функцію.

- Встановлено асимптотичні рівності для точних верхніх меж рівномірних наближень сумами Фур'є на класах (ψ, β) -інтегралів від функцій, що належать одиничній кулі з простору L_1 у випадку, коли послідовності спадають швидше за довільну степеневу функцію і повільніше за геометричну прогресію.
- Встановлено асимптотично непокресувані нерівності типу Лебега для 2π -періодичних функцій, які означаються узагальненими інтегралами Пуассона функцій φ з L_p , в яких рівномірні норми відхилень функцій від їхніх частинних сум Фур'є виражаються через найкращі наближення функцій φ в метриці простору L_p .
- Отримано точні порядкові оцінки для наближень сумами Фур'є, найкращих наближень та найкращих тригонометричних наближень в інтегральних метриках класів 2π -періодичних функцій, чий (ψ, β) -похідні належать до одиничної кулі простору L_1 .
- Встановлено асимптотично непокресувані інтерполяційні аналоги нерівностей типу Лебега для узагальнених інтегралів Пуассона функцій φ з простору L_p . В зазначених нерівностях модулі відхилень інтерполяційних поліномів Лагранжа при кожному $x \in \mathbb{R}$ виражаються через найкращі наближення $E_n(\varphi)_{L_p}$ функцій φ тригонометричними поліномами в L_p -метриках.
- Знайдено асимптотичні рівності для точних верхніх меж поточкових наближень інтерполяційними тригонометричними поліномами Лагранжа на класах узагальнених інтегралів Пуассона функцій, що належать одиничним кулям просторів L_p .
- Встановлено інтерполяційні аналоги нерівностей типу Лебега на множинах 2π -періодичних функцій, котрі задаються згортками твірного ядра Ψ_β з функціями з простору L_1 . Показано, що коли послідовності модулів коефіцієнтів Фур'є цього ядра спадають до нуля швидше за довільну степеневу функцію, отримані нерівності в ряді важливих випадків є асимптотично точними.
- Встановлено асимптотичні рівності для точних верхніх меж поточкових наближень інтерполяційними тригонометричними поліномами на класах згорток твірного ядра Ψ_β із функціями, що належать одиничній кулі з простору L_1 , у випадку коли послідовності модулів коефіцієнтів Фур'є цього ядра спадають до нуля швидше за довільну степеневу функцію.
- Отримано оцінки знизу та зверху для найгіршої похибки інтегрування на одиничній сфері $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$, $d \geq 2$, на модифікованих класах типу Соболева $\mathbb{H}_{\frac{d}{2}, \gamma}^d(\mathbb{S}^d)$, Встановлено оцінку зверху для найгіршої похибки інтегрування, сферичних t -дизайнів, а також оцінку знизу для найгіршої похибки інтегрування довільної точкової множини.
- Знайдено асимптотичні рівності для дискретних s -енергій Рісса та логарифмічної енергії для послідовностей добре розподілених t -дизайнів та так званих стратифікованих вибірок (jittered sampling) на одиничній сфері.
- Встановлено двосторонні оцінки для мінімальних s -енергій, енергій Рісса, дискретної логарифмічної енергії та енергії Гріна на проєктивних просторах $\mathbb{FP}^{d-1}$

над скалярними областями $\mathbb{F}$ дійсних чисел, комплексних чисел, кватерніонів чи октоніонів.

- Означено поняття гіперрівномірності на d -вимірному торі T_Λ . Досліджено на гіперрівномірність послідовності QMC-дизайнів класів Соболева $W^{\alpha,2}(T_\Lambda)$, ймовірнісні точкові процеси (відповідно до стратифікованих вибірок) і деякі детермінантові точкові процеси.

4. Ступінь обґрунтованості і достовірності наукових положень та висновків, сформульованих у дисертаційній роботі. У дисертаційній роботі використано строгі математичні означення усіх досліджуваних об'єктів, які наводяться з усіма відповідними посиланнями. Отримані результати мають чіткі і детально обґрунтовані математичні доведення, які проведені з використанням сучасних методів математичного аналізу, теорії функцій, теорії ймовірностей, чисельного аналізу та теорії потенціалу. Крім того, використано методи теорії екстремальних задач, методи теорії дискрепансу, теорії (t, m, s) -сіток методи мінімізації потенціалів відповідним чином вдосконалені, розвинуті або модифіковані здобувачем, у залежності від особливостей розв'язуваних задач.

5. Теоретичне та практичне значення результатів роботи. Дисертаційна робота Т. А. Степанюк носить в основному теоретичний характер. Результати роботи і методика їхнього отримання можуть бути використані при дослідженні різноманітних питань математичного аналізу, теорії наближення функцій та обчислювальної математики. Результати, пов'язані з побудовою поліноміальних решіткових квадратурних формул (polynomial lattice rules), можуть мати застосування в страхуванні, зокрема, при розрахунках вимог до необхідного капіталу для забезпечення платоспроможності (Solvency Capital Requirement).

6. Оцінка змісту дисертації. Дисертацію виконано фаховою українською мовою. В роботі наявні незначні орфографічні та пунктуаційні помилки. Стиль подання матеріалу відповідає прийнятим у науково-дослідній літературі нормам. Дисертація є логічно завершеною науковою працею. Назва дисертації відповідає її змісту.

7. Апробація результатів дисертації. Основні результати роботи пройшли достатню апробацію, доповідалися і обговорювалися на багатьох міжнародних конференціях в Україні та за її межами. Серед них, зокрема:

- International Conference “Constructive Functions 2025” in conjunction with the 37th Shanks Lecture Celebrating Ed Saff’s 80th birthday, Vanderbilt University, Nashville, Tennessee, USA, May 19–22, 2025;
- International Conference “Unexpected Phenomena in Energy Minimization and Polarization” (UP24), Sofia, Bulgaria, December 9–13, 2024;
- International Conference on Approximation and Potential Theory, September 22–24, 2023, Georgia, USA;
- Workshop “From Modeling and Analysis to Approximation and Fast Algorithms”, September, 02–06, 2023, Hasenwinkel, Germany;
- International workshop “Current Trends in Analysis and Approximation Theory”, July 18, 2023, Roma, Italy;
- Міжнародна наукова конференція “Algebraic and geometric methods of analysis”, 29 травня – 1 червня 2023 р., Одеса, Україна;

- Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми механіки та математики — 2023”, 23–25 травня 2023 р., Львів, Україна;
- Міжнародна наукова конференція “Прикладна математика та інформаційні технології”, 22–24 вересня 2022 р, Чернівці, Україна;
- International Online conference “Current trends in abstract and applied analysis”, May 12–15, 2022, Ivano-Frankivsk, Ukraine;
- International conference “Theory of approximation functions and its applications”, June 6–10, 2022 Lutsk, Ukraine;
- Міжнародна наукова конференція “Прикладна математика та інформаційні технології”, 22–24 вересня 2022 р, Чернівці, Україна;
- Міжнародні семінари (Hyper)Complex Seminar, Бедлево (Польща), 2016, 2017, 2018, 2021;
- 9th International Online Conference on “Mathematical Analysis, Differential Equation & Applications – MADEA 9”, Kyrgyz-Turkish Manas University (Bishkek), June 21–25, 2021;
- Online Seminar “From Modeling Analysis to Approximation”, University of Lübeck, Germany, April 23, 2021, Lübeck, Germany;
- Combinatorial and geometrical discrepancy workshop, September 30 – October 2, 2020, online talk, Bannf, Canada;
- 11th International Skorobahat’ko Conference, October 26–30, 2020, Online talk, Lviv, Ukraine;
- Conference in Monte Carlo & Quasi-Monte Carlo Methods in Scientific Computing, August 10–14, 2020, online talk, Oxford, UK;
- Workshop “Analytical Modeling and Approximation Methods”, March 4–8, 2020, Berlin, Germany;
- Workshop Algorithms & Complexity in High Dimensions, September 30 – October 4, 2019, Graz, Austria;
- 8th Workshop on High-Dimensional Approximation, September 9–13, 2019, ETH, Zurich, Switzerland;
- the 15th International Symposium on Orthogonal Polynomials, Special Functions and Applications (OPSFA) 22–25 July, 2019 Hagenberg, Austria;
- International congress on industrial and applied Mathematics, July 15–19, 2019, Valencia, Spain;
- the 12th International Conference on Monte Carlo Methods and Applications, July 8–12, 2019, Sydney, Australia;
- Workshop “Approximation, sampling, and compression in high dimensional problems”, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, June 16–23, 2019, Cambridge, UK;
- Conference Optimal Point Configurations and Potential Theory, CIEM, Castro Urdiales, April 8th–11th, 2019, Cantabria, Spain;
- Final AMMODIT Conference “Mathematics for Life Sciences”, March 18–22, 2019, Kyiv, Ukraine;
- RICAM Special Semester on Multivariate Algorithms and their Foundations in Number Theory, Workshop: Discrepancy, November 30, 2018, Linz, Austria;
- Midwestern Workshop on Asymptotic Analysis, October 6, 2018, Indiana University, Bloomington, USA;
- MCQMC conference, July 1–6; 2018, Rennes, France;
- Conference “Harmonic Analysis and Applications”, June 4–8, 2018, Strobl, Austria;

- ICERM Semester Program on “Point Configurations in Geometry, Physics and Computer Science”, February 25 – March 25, 2018, ICERM, Brown University, USA;
- International Conference in Approximation Theory, May 8–11, 2017, Savannah, USA;
- Workshop Optimal Point Configurations and Orthogonal Polynomials 2017, April 19–22, 2017, Castro Urdiales, Spain;
- the 7th European Congress of Mathematics, July 18–22, 2016, Berlin;
- Семінари відділу теорії функцій (Інститут математики НАН України; керівник семінару – доктор фіз.-мат. наук, професор, А. С. Романюк);
- Семінари кафедри математичного аналізу та оптимізації Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, керівник семінару – доктор фіз.-мат. наук, професор, Н. В. Парфінович;
- Семінар “Сучасний аналіз” в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, керівники семінару – академік НАН України І. О. Шевчук, доктор фіз.-мат. наук, професор, О. О. Курченко, доктор фіз.-мат. наук, професор, В. М. Радченко;
- Семінар з теорії аналітичних функцій Львівського національного університету імені Івана Франка, керівник семінару – доктор фіз.-мат. наук, професор, О. Б. Скасків;
- Семінари молодих вчених Інституту математики НАН України;
- Семінар кафедри теорії функцій та методики навчання математики, Волинського національного університету імені Лесі Українки, Луцьк;
- Seminar “From Modeling Analysis to Approximation”, University of Lübeck, Germany;
- Computational Analysis Seminar, Vanderbilt University, Nashville, USA;
- Колоквіум Інституту математики Університету Любека, Німеччина;
- Postdoc seminar, ICERM, Brown University, USA;
- SFB-Seminar Інституту аналізу і теорії чисел Технічного університету в Граці, Австрія.

8. Повнота викладу матеріалів дисертації в публікаціях та особистий внесок автора.

Результати дисертації опубліковано в 51 роботі, з них 15 — статті у наукових виданнях, внесених до переліку наукових фахових видань України та закордонних виданнях, а також 35 публікацій у тезах доповідей і матеріалах міжнародних та вітчизняних конференцій. Серед публікацій 14 статей проіндексовано у міжнародних наукометричних базах Scopus або Web of Science, зокрема, 7 статей опубліковано у виданнях з квартилів Q1 і Q2 відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, 4 статті — у виданнях з квартиля Q3, 1 стаття — у виданні Нелінійні коливання, яке індексується у міжнародній базі MathSciNet і включене до категорії «А» Реєстру наукових фахових видань України. Дві статті одноосібні.

У дисертаційній роботі зазначено, що всі результати, які виносяться на захист, є власними результатами здобувачки, а також вказано про внесок здобувача у роботи, опубліковані разом з іншими авторами. Зокрема, у роботах з науковим консультантом А. С. Сердюком особистий внесок здобувачки полягає у незалежному і самостійному доведенні усіх результатів спільних робіт, наслідків з них, участь у формулюванні та перевірці робочих гіпотез досліджень. У спільних роботах [2, 12, 13] (див. перелік робіт дисертантки) внесок авторів рівноцінний. У статтях [5, 6] в доведенні основного результату та допоміжних тверджень внесок всіх співавторів рівноцінний, співавтори незалежно виконували обрахунки, обґрунтування результатів та їх перевірку, а також брали участь у їхньому обговоренні. У дисертаційній роботі також зазначено, що ре-

зультати робіт [5, 6] включені О. Ociciory (O. Osisiogu) у дисертацію на здобуття наукового ступеня доктора філософії “Quasi-Monte Carlo Methods: Component-by-Component Algorithms” та наведено відповідне посилання на інтернет-ресурс, де розміщено текст цієї роботи.

Відповідно до п. 2 Наказу № 1220 МОН України від 23.09.2019 “Про опублікування результатів дисертації на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук” (зі змінами) вказані 15 статей зараховуються як 33 наукові публікації.

9. Дотримання принципів академічної доброчесності. За результатами вивчення дисертаційної роботи та наукових публікацій Степанюк Т. А. не виявлено елементів фальсифікації та плагіату.

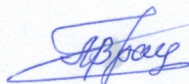
ЗАГАЛЬНИЙ ВИСНОВОК

Дисертаційна робота СТЕПАНЮК Тетяни Анатоліївни на тему “Дослідження апроксимативних характеристик функціональних множин та екстремальних властивостей багатовимірних точкових конфігурацій”, що представлена на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук, є кваліфікаційною науковою працею, виконаною здобувачем самостійно. Робота має важливе значення для розвитку теорії функцій, а також суміжних галузей науки і техніки, містить обґрунтовані й достовірні висновки, характеризується єдністю змісту, за своїм науковим рівнем, практичною та теоретичною цінністю повністю відповідає спеціальності 01.01.01 — математичний аналіз та вимогам п. 7 та 9 “Порядку присудження та позбавлення наукового ступеня доктора наук”, затвердженого постановою Кабінету міністрів України від 17 листопада 2021 р., № 1197 “Деякі питання присудження (позбавлення) наукових ступенів” (зі змінами), та вимогам до оформлення дисертації, затвердженими наказом Міністерства освіти і науки України від 12.01.2017 № 40 (зі змінами).

Рекомендувати дисертаційну роботу “Дослідження апроксимативних характеристик функціональних множин та екстремальних властивостей багатовимірних точкових конфігурацій”, підготовлену Тетяною Анатоліївною СТЕПАНЮК на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук, до захисту на спеціалізованій вченій раді за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз.

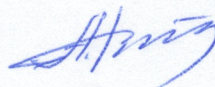
Рецензенти:

доктор фіз.-мат. наук, професор,
завідувач відділу динамічних систем
та фрактального аналізу
Інституту математики НАН України



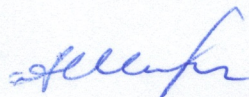
Микола ПРАЦЬОВИТИЙ

доктор фіз.-мат. наук, професор,
завідувач відділу теорії функцій
Інституту математики НАН України



Анатолій РОМАНЮК

доктор фіз.-мат. наук,
старший науковий співробітник,
провідний науковий співробітник
Інституту математики НАН України



Андрій ШИДЛІЧ