

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ



СТЕПАНЮК Тетяна Анатоліївна

УДК 517.5

**Дослідження апроксимативних
характеристик функціональних множин
та екстремальних властивостей
багатовимірних точкових конфігурацій**

01.01.01 — математичний аналіз

111 — математика

Реферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 2026

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано в Інституті математики НАН України.

Науковий консультант:

доктор фізико-математичних наук, професор

СЕРДЮК Анатолій Сергійович

Інститут математики НАН України,

провідний науковий співробітник відділу теорії функцій.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор

ДМИТРИШИН Роман Іванович,

Карпатський національний університет імені

Василя Стефаника, професор кафедри

математичного і функціонального аналізу;

доктор фізико-математичних наук, професор

ПАРФІНОВИЧ Наталія Вікторівна,

Дніпровський національний університет

імені Олеся Гончара, завідувач кафедри

математичного аналізу та оптимізації;

доктор фізико-математичних наук, професор

СКАСКІВ Олег Богданович,

Львівський національний університет

імені Івана Франка, завідувач кафедри

теорії функцій і функціонального аналізу.

Захист відбудеться « 22 » вересня 2026 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України та на офіційному сайті інституту за адресою: <https://www.imath.kiev.ua/zahyst/>.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради

 **А. Л. Шидліч**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню важливих екстремальних задач теорії наближень на класах диференційовних функцій однієї та багатьох змінних. В роботі встановлено асимптотичні оцінки низки важливих апроксимативних характеристик функціональних класів, асимптотично непокрашувані нерівності типу Лебега та інтерполяційні аналоги таких нерівностей на класах 2π -періодичних функцій, які задаються за допомогою поняття (ψ, β) -похідної. Також досліджено екстремальні властивості деяких важливих точкових множин на многовидах (d -вимірній сфері, багатовимірному торі, одиничному кубі в $\mathbb{R}^d$, проєктивних просторах) на класах диференційовних функцій багатьох змінних.

Обґрунтування вибору теми дослідження. Одне із основних завдань теорії наближень полягає у заміні заданої функції іншою, більш простою, чи більш зручною у використанні. І тут виникають питання: наскільки простою є нова функція та її побудова і наскільки великою є похибка наближення. Часто виникає потреба з якомога меншою похибкою обчислити наближене значення визначених інтегралів, коли аналітичне обчислення складне або неможливе. Ще у 20-х роках XIX-го століття К. Гаусс заклав основи теорії найкращого вибору точок (вузлів) інтегрування для максимальної поліноміальної точності (тепер її називають теорією гаусових квадратур). Замість рівновіддалених вузлів, як у методі трапецій чи Сімпсона, К. Гаусс запропонував використовувати вузли, які є коренями ортогональних поліномів, таких як поліноми Лежандра. Ці вузли мінімізують похибку для наближення інтегралів, що забезпечує високу точність.

З розвитком математичного аналізу та обчислювальних методів з'явилися нові постановки задач для характеристики оптимальності квадратурних формул. Зокрема, А.М. Колмогоров, запропонував інший підхід до оцінок похибок чисельних методів в задачі про квадратури, які базуються на основі ідей теорії апроксимації. Істотний розвиток цього підходу був розвинутий в роботах С.М. Нікольського, М.П. Корнейчука, В.П. Моторного, Т.Н. Бусарова, А.О. Лигуна, О.А. Женсикбаєва, К.І. Осколкова, В.Ф. Бабенка, С.В. Бородачова, Н.В. Парфінович, Д.С. Скороходова та багатьох інших. Зокрема, було доведено оптимальність формули з рівновіддаленими вузлами та рівними коефіцієнтами – формули прямокутників на класах Соболева періодичних функцій. Також розв'язувалась задача про опти-

мальність інтервального аналогу формули прямокутників на окремих класах періодичних функцій. А також згодом розповсюджено ці результати на більш широкі класи функцій.

В 40-х роках ХХ століття завдяки ідеям С. Улама та Дж. фон Неймана, певною альтернативою класичним методам побудови квадратурних формул, особливо в багатовимірному інтегруванні стали методи Монте-Карло (МС методи). Наближене обчислення інтегралів $\int_{\mathcal{M}} f(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x})$, по багатовимірним областях $\mathcal{M}$ виконується за допомо-

гою вагових сум $\sum_{k=1}^N \omega_k f(\mathbf{x}_k)$, одержаних на основі поточкових значень підінтегральної функції f .

В 50–60-х роках ХХ століття поряд з методом Монте-Карло набув популярності метод квазі-Монте-Карло (QМС метод), який базується на використанні детерміністичних чисел $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{N-1} \in [0, 1]^d$ з низькою розбіжністю (low-discrepancy point sets). QМС методи, в яких вдало вибрані вузли інтегрування, дають кращий (менший) порядок похибки інтегрування, ніж МС методи.

Широке прикладне застосування у фізиці, інженерії, медицині, фінансах, машинному навчанні, комп'ютерній графіці та інших областях, змотивувало та спонукало дослідників активно працювати над розробкою та вдосконаленням QМС методів. Значний внесок у розвиток даної проблематики внесли Г. Нідерайтер, М. Коробов, Х. Уанг, Ян Слоан, С. Смоляк, Х. Шваб, Г. Вожняковський, Х. Лем'є, П. Л'екюер, Ф. Хінкель, Й. Дік, Ф. Куо, Ф. Пілісхаммер, Р. Кулс, Д. Нуенс, П. Крітцер та ін. Тому ефективна побудова нових QМС методів та дослідження їх властивостей є надзвичайно важливою задачею.

Теорія апроксимації періодичних функцій тригонометричними многочленами була започаткована в роботах П.Л. Чебишова, К. Вейєрштраса, Д. Джексона, Ш. Валле-Пуссена та ін. Серед поліноміальних методів наближень періодичних функцій суми Фур'є за своєю універсальністю і простотою побудови займають особливе місце. В гільбертовому просторі вони забезпечують найкраще середньоквадратичне наближення серед всіх тригонометричних поліномів фіксованого порядку і навіть реалізують точні значення поперечників в цьому просторі класів згорток породжених твірними ядрами загального вигляду.

Дослідження апроксимативних властивостей частинних сум

Фур'є $S_n(f)$ в рівномірній метриці в залежності від диференціально-різницьових властивостей породжуючої функції f було започатковане А. Лебегом, який вперше виразив похибку рівномірних відхилень $\|f - S_n(f)\|_C$ сум Фур'є від заданої функції через найкращі наближення $E_n(f)$ тригонометричними поліномами порядку n (нерівності Лебега), та знайшов точні порядкові оцінки похибок наближень сумами Фур'є на класах диференційовних функцій. Подальший розвиток дана тематика набула завдяки роботам С.Н. Бернштейна, Д. Джексона, Л. Фейєра, В. Рогозинського, Ш. Валле Пуссена та ін. В 1935 році А.М. Колмогоров для класів диференційовних функцій W^r , $r \in \mathbb{N}$, встановив асимптотичні рівності при $n \rightarrow \infty$

$$\mathcal{E}_n(W_\infty^r)_C = \sup_{f \in W_\infty^r} \|f - S_n(f)\|_C = \frac{4}{\pi^2} \frac{\ln n}{n^r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^r}\right). \quad (1)$$

Згодом С.М. Нікольський одержав аналог формули (1) в інтегральній метриці, а також знайшов асимптотичні рівності для відхилень сум Фур'є на класах Ліпшиця та функціональних компактах, які задаються за допомогою модулів неперервності.

Пізніше ці результати розповсюджувалися на різноманітні лінійні методи наближення, нормовані простори та функціональні класи. Задачу відшукування асимптотичних рівностей відхилень лінійних методів наближення на тих чи інших функціональних класах в рівномірній та інтегральній метриках стали назвати задачею Колмогорова–Нікольського. Відзначимо істотний внесок у розвиток даного напрямку досліджень таких математиків як В.К. Дзядик, О.В. Єфімов, М.П. Корнейчук, Б. Надь, С.Б. Стечкін, С.А. Теляковський, О.П. Тіман, М.П. Тіман, О.І. Степанець, В.П. Моторний, В.Т. Гаврилюк, Р.М. Тригуб, В.Ф. Бабенко, С.Б. Вакарчук, В.М. Коновалов, П.В. Задерей, С.А. Пічугов, та ін.

Поряд з цим відбувалось дослідження властивостей тригонометричних сум, побудованих на основі дискретної інформації про досліджувану функцію. Найбільш природними серед таких сум є інтерполяційні тригонометричні поліноми Лагранжа $\tilde{S}_n(f)$ з рівномірним розподілом вузлів інтерполяції. Аналоги нерівностей Лебега для таких поліномів $\tilde{S}_n(f)$ були встановлені Бернштейном, а дослідженням апроксимативних властивостей на класах диференційовних функцій займались С.М. Нікольський, В.П. Моторний, Й.М. Гангзбург, В.Т. Гаврилюк, В.К. Дзядик, Г.П. Неваї, К.І. Осколков, І.І. Шарпудінов та ін.

На початку 80-х років О.І. Степанець запровадив поняття (ψ, β) -похідної, яка означається за допомогою фіксованої послідовності $\psi(k)$ і числового параметра (зсуву аргументу). З'явилися класи (ψ, β) -диференційовних функцій $L_\beta^\psi \mathfrak{N}$ та $C_\beta^\psi \mathfrak{N}$, які узагальнюють відомі класи Соболева та Вейля-Надя. Як виявилось, за допомогою (ψ, β) -похідних можна класифікувати весь спектр сумовних (неперервних) періодичних функцій і, водночас, розрізняти більш тонкі властивості функцій у порівнянні із звичайними похідними чи навіть похідними дробового порядку в розумінні Вейля чи Вейля-Надя.

Дослідження О.І. Степанця, його учнів та послідовників дозволили здійснити істотний просув у розв'язанні задач Колмогорова-Нікольського для лінійних методів наближення, які базуються на класичних методах підсумовування Фур'є чи тих чи інших інтерполяційних процесів на нових класах $L_\beta^\psi \mathfrak{N}$ та $C_\beta^\psi \mathfrak{N}$, а згодом і на їх узагальненнях $L^{\bar{\psi}} \mathfrak{N}$ та $C^{\bar{\psi}} \mathfrak{N}$. Відзначимо в цьому напрямку дослідження О.І. Степанця, С.О. Теляковського, О.К. Кушпеля, П.В. Задерея, В.І. Рукасова, А.С. Романюка, А.С. Сердюка, В.С. Романюка, В.В. Савчука, І.В. Соколенка, Ю.І. Харкевича, С.О. Чайченка, А.Л. Шидліча, В.А. Войтовича, Є.Ю. Овсія та ін.

Незважаючи на серйозний просув у даній тематиці, залишалася відкритою низка деяких дуже важливих питань, пов'язаних із знаходженням асимптотичних рівностей або ж точних порядкових оцінок для наближень сумами Фур'є, найкращих ортогональних тригонометричних наближень, найкращих наближень в рівномірній та інтегральній метриках на класах $C_{\beta,p}^\psi$ ($L_{\beta,p}^\psi$), зокрема у випадках, коли послідовності $\psi(k)$ спадають до нуля швидше за довільну степеневу функцію. Дослідженню цих питань присвячено розділи 2 та 3 дисертаційної роботи.

В багатьох розділах математики та інших наук (зокрема для моделювання фізичних процесів, мінімізації похибки наближень та ін.) виникає задача про розподіл великих скінченних точкових множин на многовидах якомога більш рівномірно в тому чи іншому сенсі. Зазвичай розглядають декілька показників "якості" точкових множин, які оцінюють ефективність розподіленості точкової конфігурації, а саме: похибка інтегрування, дискрепанс, розділення та пакування. Ще однією важливою властивістю, яку можна додати до цього списку, є гіперрівномірність.

Вперше поняття гіперрівномірності послідовностей точкових мно-

жин було представлено в 2003 р. в роботі С. Торкіато і Ф. Стілінгера в просторі $\mathbb{R}^d$, а на компактних просторах — в 2018 р. в роботі Й. Браухарта, П. Грабнера та В. Куснера, де в ролі компактного многовида була розглянута d -вимірна одинична сфера. В обох випадках гіперрівномірність була означена порівнянням поведінки дисперсії послідовності точкових конфігурацій з випадком незалежно однаково розподілених точок (independent and identically distributed або скорочено i.i.d. конфігурацій), тобто дисперсія гіперрівномірної точкової множини є меншою ніж дисперсія i.i.d. точкової конфігурації. Гіперрівномірність знайшла велику кількість різноманітних застосувань в різних сферах, вона дозволяє створити єдину основу для класифікації і структурної характеристики кристалів, квазікристалів і екзотичних неупорядкованих різновидів. Тому подальше дослідження гіперрівномірності точкових множин, зокрема на компактних многовидах, таких як d -вимірний тор, залишається перспективним і актуальним. Вивченню цих та деяких інших питань присвячено 5 розділ дисертації.

Проблеми відшукування оптимальних точкових конфігурацій на сфері в останні десятиліття набули особливо широкої популярності. У цьому напрямку активно працюють багато відомих математиків зі всього світу, зокрема Я. Слоан, Е. Сафф, Дж. Бек, В. Чен, Р. Вомерслей, Г. Вожняковський, Х. Мхаскар, К. Столярський та інші. Окремо відзначимо українських дослідників: М. В'язовську А. Бондаренка, Д. Радченка, які у 2013 році одержали вагомий результат, пов'язаний з проблемою про існування сферичних t -дизайнів на d -вимірній сфері. Сферичні t -дизайни є однією з найвідоміших точкових конфігурацій. Велика кількість прикладних задач можуть бути сформульовані як задача дискретної мінімальної s -енергії Рісса та дискретної логарифмічної енергії. Дискретна логарифмічна енергія означається як середнє значення деякої N -точкової конфігурації логарифмічного потенціалу, який також ще називають потенціалом Кулона, і який є одним з ключових понять теорії електричного поля. Тому актуальним є дослідження властивостей та знаходження оцінок похибок інтегрування, енергій для t -дизайнів та для інших точкових множин.

Поряд із d -вимірною сферою, іншими, не менш важливими компактними многовидами, є проєктивні простори. Зауважимо, що кожен з проєктивних просторів може бути вкладений в одиничну сферу достатньо великої розмірності, в цьому випадку хордальна відстань

стає евклідовою відстанню. В часткових випадках на комплексному та дійсному проєктивному просторі логарифмічна енергія та енергія Рісса досліджувались в роботах О. Алехайне, А. Асерди, Ф. Асілі, К. Бельтрана, У. Етайо. Мінімальна енергія Рісса на сфері досліджувалась в роботах Е. Саффа, Дж. Вагнера, Д. Хардіна, Й. Браухарта та ін. Виникла необхідність результати, які раніше були отримані для сфери, розповсюдити на проєктивні простори $\mathbb{RP}^{d-1}$ над полем дійсних чисел, комплексних чисел, кватерніонів та октоніонів. Розв'язанню цієї задачі присвячено розділ 4 дисертаційного дослідження.

Підсумовуючи сказане, робимо висновок, що дослідження, пов'язані з вивченням апроксимативних властивостей сум Фур'є, інтерполяційних поліномів, а також з вивченням екстремальних властивостей точкових множин на багатовимірних многовидах, є актуальними.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі теорії функцій Інституту математики НАН України згідно з науково-дослідними темами «Дослідження структурних та апроксимаційних властивостей функціональних множин» (номер держреєстрації 0121U100477), «Апроксимаційні характеристики та структурні властивості функціональних множин» (номер держреєстрації 0116U003102), «Розробка аналітичних та чисельно-аналітичних методів дослідження задач сучасного природознавства» (номер держреєстрації 0117U004077) та грантом НАН України дослідницьким лабораторіям/групам молодих вчених НАН України «Еволюційні крайові задачі й апроксимативні властивості функціональних множин та їх застосування» (номер держреєстрації 0118U005389).

Мета і завдання дослідження. Метою дисертації є знаходження асимптотичних оцінок низки важливих апроксимаційних характеристик функціональних множин (наближень сумами Фур'є, наближень інтерполяційними тригонометричними поліномами, найкращих наближень, найкращих ортогональних наближень, найгірших похибок чисельного інтегрування), знаходження асимптотичних оцінок для дискретних енергій та встановлення нових екстремальних властивостей та факту гіперрівномірності точкових конфігурацій (сферичних t -дизайнів, QMC-дизайнів, ймовірнісних точкових конфігурацій та ін.) на деяких ріманових многовидах.

Об'єктом дослідження є класи (ψ, β) -диференційовних в сенсі Степанця функцій та багатовимірні точкові конфігурації.

Предметом дослідження є асимптотична поведінка (в сенсі сильної або слабкої асимптотики) апроксимативних характеристик класів (ψ, β) -диференційовних функцій (похибок наближень сумами Фур'є $\mathcal{E}_n(F)_s$, наближень інтерполяційними тригонометричними поліномами $\tilde{\mathcal{E}}_n(F; x)$, найкращих наближень $E_n(F)_s$, найкращих ортогональних наближень $e_m^\perp(F)_s$); асимптотична поведінка дискретних енергій $E_K(\Omega, X_N)$, $\mathcal{E}_K(\Omega, N)$ на одиничній багатовимірній сфері та проєктивних просторах та найгірших похибок інтегрування $\text{wse}(Q[X_N]; X)$ на гільбертових просторах на сфері та на торі в просторі $\mathbb{R}^d$; властивості гіперрівномірності деяких визначених (детерміністичних) та ймовірнісних точкових множин.

Завдання дослідження:

- Знайти асимптотичні рівності для точних верхніх меж наближень сумами Фур'є в рівномірній метриці на класах 2π -періодичних функцій, які представляються у вигляді згорток функцій, які належать до одиничних куль просторів L_p , з узагальненими ядрами Пуассона.
- Знайти асимптотичні рівності для точних верхніх меж наближень сумами Фур'є в метриках просторів Лебега на класах узагальнених інтегралів Пуассона періодичних функцій, які належать одиничній кулі простору L_1 .
- Встановити нерівності типу Лебега, на множинах 2π -періодичних функцій f , котрі задаються (ψ, β) -інтегралами від функцій φ із L_1 , в яких рівномірні норми відхилень сум Фур'є виражаються через найкращі наближення в середньому тригонометричними поліномами функцій φ . Довести асимптотичну непокрашуваність одержаних оцінок за умови, коли послідовності $\psi(k)$ спадають до нуля швидше за довільну степеневу функцію.
- Встановити асимптотичні рівності для точних верхніх меж рівномірних наближень сумами Фур'є на класах (ψ, β) -інтегралів від функцій φ , що належать одиничній кулі з простору L_1 у випадку, коли послідовності $\psi(k)$ спадають швидше за довільну степеневу функцію і повільніше за геометричну прогресію.
- Встановити асимптотично непокрашувані нерівності типу Лебега для 2π -періодичних функцій f , які означаються узагальненими інтегралами Пуассона функцій φ з L_p , в яких рівномірні норми відхилень функцій від їх частинних сум Фур'є виражаються через найкращі наближення функцій φ в метриці простору L_p .
- Отримати точні порядкові оцінки для наближень сумами Фур'є, найкращих наближень та найкращих тригонометричних наближень

в інтегральних метриках класів 2π -періодичних функцій, чиї (ψ, β) -похідні належать до одиничної кулі простору L_∞ .

- Встановити асимптотично непокрашвані інтерполяційні аналоги нерівностей типу Лебега для узагальнених інтегралів Пуассона функцій φ з простору L_p , $1 \leq p \leq \infty$. В зазначених нерівностях модулі відхилень інтерполяційних поліномів Лагранжа при кожному $x \in \mathbb{R}$ виражаються через найкращі наближення $E_n(\varphi)_{L_p}$ функцій φ тригонометричними поліномами в L_p -метриках.

- Знайти асимптотичні рівності для точних верхніх меж поточкових наближень інтерполяційними тригонометричними поліномами Лагранжа на класах $C_{\beta,p}^{\alpha,r}$ узагальнених інтегралів Пуассона функцій, що належать одиничним кулям просторів L_p , $1 \leq p \leq \infty$.

- Встановити інтерполяційні аналоги нерівностей типу Лебега на множинах $C_\beta^\psi L_1$ 2π -періодичних функцій f , котрі задаються згортками твірного ядра $\Psi_\beta(t)$ з функціями φ із L_1 . Показати, що коли послідовності модулів коефіцієнтів Фур'є цього ядра спадають до нуля швидше за довільну степеневу функцію, отримані нерівності в ряді важливих випадків є асимптотично точними.

- Встановити асимптотичні рівності для точних верхніх меж поточкових наближень інтерполяційними тригонометричними поліномами на класах згорток твірного ядра Ψ_β із функціями φ , що належать одиничній кулі з простору L_1 , у випадку коли послідовності модулів коефіцієнтів Фур'є цього ядра спадають до нуля швидше за довільну степеневу функцію.

- Отримати оцінки знизу та зверху для найгіршої похибки інтегрування на одиничній сфері $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$, $d \geq 2$, на модифікованих класах типу Соболева $\mathbb{H}_{\frac{d}{2},\gamma}^{\frac{d}{2}}(\mathbb{S}^d)$, $\gamma > \frac{1}{2}$, з критичним показником $\frac{d}{2}$ та додатковим логарифмічним множником. Встановити оцінку зверху для найгіршої похибки інтегрування, для сферичних t -дизайнів, а також оцінку знизу найгіршої похибки інтегрування для довільної точкової множини.

- Знайти асимптотичні рівності для дискретних s -енергій Рісса та логарифмічної енергії для послідовностей добре розподілених t -дизайнів та так званих стратифікованих вибірок (jittered sampling) на одиничній сфері.

- Встановити двосторонні оцінки для мінімальних s -енергій, енергій Рісса, дискретної логарифмічної енергії та енергії Гріна на проєктивних просторах $\mathbb{F}\mathbb{P}^{d-1}$ над скалярними областями $\mathbb{F}$ дійсних чисел, комплексних чисел, кватерніонів чи октоніонів. Записати оцінки

в загальному вигляді для всіх чотирьох проєктивних просторів: дійсного, комплексного проєктивних просторів, проєктивного простору кватерніонів та простору Келі через їх параметри.

- Означити поняття гіперрівномірності послідовностей точкових множин на d -вимірному торі T_Λ для великих і малих куль та куль проміжного розміру. Встановити, чи гіперрівномірні точкові множини є рівномірно розподілені на d -вимірному торі. Дослідити на гіперрівномірність послідовності QMC-дизайнів класів Соболева $W^{\alpha,2}(T_\Lambda)$, ймовірнісні точкові процеси (відповідно до стратифікованих вибірок) і деякі детермінантові точкові процеси для великих і малих куль та куль проміжного розміру на d -вимірному торі.

Методи дослідження. У роботі застосовуються загальні методи математичного аналізу, теорії функцій, теорії ймовірностей, а також деякі методи чисельного аналізу та теорії потенціалу. Крім того, використано методи теорії екстремальних задач, методи теорії дискрепансу, теорії (t, m, s) -сіток, методи мінімізації потенціалів відповідним чином вдосконалені, розвинуті або модифіковані, у залежності від особливостей розв'язуваних задач.

Наукова новизна отриманих результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну, і виносяться на захист, такі:

- Отримано асимптотичні рівності для точних верхніх меж наближень сумами Фур'є в рівномірній метриці на класах 2π -періодичних функцій, які представляються у вигляді згорток функцій φ , які належать до одиничних куль просторів L_p , з узагальненими ядрами Пуассона.
- Знайдено асимптотичні рівності для точних верхніх меж наближень сумами Фур'є в метриках просторів Лебега на класах узагальнених інтегралів Пуассона періодичних функцій, які належать одиничній кулі простору L_1 .
- Встановлено нерівності типу Лебега, на множинах 2π -періодичних функцій f , котрі задаються (ψ, β) -інтегралами від функцій φ із L_1 , в яких рівномірні норми відхилень сум Фур'є виражаються через найкращі наближення в середньому тригонометричними поліномами функцій φ . Доведено асимптотичну непокрашуваність одержаних оцінок за умови, коли послідовності $\psi(k)$ спадають до нуля швидше за довільну степеневу функцію.
- Встановлено асимптотичні рівності для точних верхніх меж рівномірних наближень сумами Фур'є на класах (ψ, β) -інтегралів від функцій φ , що належать одиничній кулі з простору L_1 у випадку, ко-

ли послідовності спадають швидше за довільну степеневу функцію і повільніше за геометричну прогресію.

- Встановлено асимптотично непокрощувані нерівності типу Лебега для 2π -періодичних функцій f , які означаються узагальненими інтегралами Пуассона функцій φ з L_p , в яких рівномірні норми відхилень функцій від їх частинних сум Фур'є виражаються через найкращі наближення функцій φ в метриці простору L_p .

- Отримано точні порядкові оцінки для наближень сумами Фур'є, найкращих наближень та найкращих тригонометричних наближень в інтегральних метриках класів 2π -періодичних функцій, чиї (ψ, β) -похідні належать до одиничної кулі простору L_∞ .

- Встановлено асимптотично непокрощувані інтерполяційні аналоги нерівностей типу Лебега для узагальнених інтегралів Пуассона функцій φ з простору L_p , $1 \leq p \leq \infty$. В зазначених нерівностях модулі відхилень інтерполяційних поліномів Лагранжа при кожному $x \in \mathbb{R}$ виражаються через найкращі наближення $E_n(\varphi)_{L_p}$ функцій φ тригонометричними поліномами в L_p -метриках.

- Знайдено асимптотичні рівності для точних верхніх меж поточкових наближень інтерполяційними тригонометричними поліномами Лагранжа на класах $C_{\beta,p}^{\alpha,r}$ узагальнених інтегралів Пуассона функцій, що належать одиничним кулям просторів L_p , $1 \leq p \leq \infty$.

- Встановлено інтерполяційні аналоги нерівностей типу Лебега на множинах $C_\beta^\psi L_1$ 2π -періодичних функцій f , котрі задаються згортками твірного ядра $\Psi_\beta(t)$ з функціями φ із L_1 . Показано, що коли послідовності модулів коефіцієнтів Фур'є цього ядра спадають до нуля швидше за довільну степеневу функцію, отримані нерівності в ряді важливих випадків є асимптотично точними.

- Встановлено асимптотичні рівності для точних верхніх меж поточкових наближень інтерполяційними тригонометричними поліномами на класах згорток твірного ядра Ψ_β із функціями φ , що належать одиничній кулі з простору L_1 , у випадку коли послідовності модулів коефіцієнтів Фур'є цього ядра спадають до нуля швидше за довільну степеневу функцію.

- Отримано оцінки знизу та зверху для найгіршої похибки інтегрування на одиничній сфері $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$, $d \geq 2$, на модифікованих класах типу Соболева $\mathbb{H}^{\frac{d}{2}, \gamma}(\mathbb{S}^d)$, $\gamma > \frac{1}{2}$, з критичним показником $\frac{d}{2}$ та додатковим логарифмічним множником. Встановлено оцінку зверху для найгіршої похибки інтегрування, для сферичних t -дизайнів, а також оцінку знизу найгіршої похибки інтегрування для довільної

точкової множини.

- Знайдено асимптотичні рівності для дискретних s -енергій Рісса та логарифмічної енергій для послідовностей добре розподілених t -дизайнів та стратифікованих вибірок на одиничній сфері.
- Встановлено двосторонні оцінки для мінімальних s -енергій, енергій Рісса, дискретної логарифмічної енергії та енергії Гріна на проєктивних просторах $\mathbb{F}\mathbb{P}^{d-1}$ над скалярними областями $\mathbb{F}$ дійсних чисел, комплексних чисел, кватерніонів чи октоніонів. Записано оцінки в загальному вигляді для всіх чотирьох проєктивних просторів: дійсного, комплексного проєктивних просторів, проєктивного простору кватерніонів та простору Келі через їх параметри.
- Означено поняття гіперрівномірності послідовностей точкових множин на d -вимірному торі T_Λ для великих і малих куль та куль проміжного розміру. Встановлено, що гіперрівномірні точкові множини є рівномірно розподілені на d -вимірному торі. Досліджено на гіперрівномірність послідовності QMC-дизайнів класів Соболева $W^{\alpha,2}(T_\Lambda)$, ймовірнісні точкові процеси (відповідно до стратифікованих вибірок) і деякі детермінантові точкові процеси для великих і малих куль та куль проміжного розміру на d -вимірному торі.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить в основному теоретичний характер. Результати роботи і методика їх отримання можуть бути використані при дослідженні різноманітних питань математичного аналізу, теорії наближення функцій та обчислювальної математики. Результати, пов'язані з побудовою поліноміальних решіткових квадратурних формул (polynomial lattice rules), можуть мати застосування в страхуванні, зокрема при розрахунках вимог до необхідного капіталу для забезпечення платоспроможності (Solvency Capital Requirement).

Особистий внесок здобувача. Результати дисертаційної роботи опубліковано у 15-ти статтях, з яких дві одноосібні. Всі результати, які виносяться на захист, є власними результатами здобувачки.

Статті [1, 3, 4, 7, 9, 11, 14, 15] написано спільно з науковим консультантом А.С. Сердюком, якому належить визначення напрямів досліджень та деяких ідей щодо розв'язання поставлених задач. Внесок обох авторів зазначених робіт рівноцінний. Здобувачка незалежно і самостійно здійснювала доведення усіх результатів спільних робіт, наслідків з них, брала участь у формулюванні та перевірці робочих гіпотез досліджень.

У роботі [2] всі співавтори незалежно виконували обрахунки або

перевіряли їх, а також брали участь у їхньому обговоренні.

У статтях [5, 6] в доведенні основного результату та допоміжних тверджень внесок всіх співавторів рівноцінний, співавтори незалежно виконували обрахунки, обґрунтування результатів та їх перевірку, а також брали участь у їхньому обговоренні. Результати робіт [5, 6] включені О. Осіціогу (O. Osisiogu) у дисертацію на здобуття наукового ступеня доктора філософії “Quasi-Monte Carlo Methods: Component-by-Component Algorithms” (<https://epub.jku.at/obvulihs/content/titleinfo/7872975/full.pdf>)

У роботах [12, 13] внесок авторів рівноцінний. Дисертантка незалежно і самостійно здійснювала доведення усіх результатів спільних робіт, брала участь у формулюванні та перевірці робочих гіпотез досліджень.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи були представлені, доповідалися і обговорювалися на: international Conference “Constructive Functions 2025” in conjunction with the 37th Shanks Lecture Celebrating Ed Saff’s 80th birthday, Vanderbilt University, Nashville, Tennessee, USA, May 19-22, 2025; international Conference “Unexpected Phenomena in Energy Minimization and Polarization” (UP24), Sofia, Bulgaria, December 9-13, 2024; international Conference on Approximation and Potential Theory. September 22-24, 2023, Georgia, USA; workshop “From Modeling and Analysis to Approximation and Fast Algorithms” , September, 02-06, 2023, Hasenwinkel, Germany; international workshop entitled “Current Trends in Analysis and Approximation Theory July 18, 2023, Roma, Italy; міжнародній науковій конференції “Algebraic and geometric methods of analysis” , 29 травня- 1 червня 2023 р., Одеса; міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми механіки та математики — 2023”, 23–25 травня 2023 р., Львів, Україна; міжнародній науковій конференції “Прикладна математика та інформаційні технології”, 22-24 вересня 2022 р, Чернівці; the International online conference “Current trends in abstract and applied analysis”, May 12 – 15, 2022, Ivano-Frankivsk; international conference “Theory of approximation functions and its applications”, June 6–10, 2022 Lutsk; міжнародних семінарах (Hyper)Complex Seminar, Бедлево (Польща), 2016, 2017, 2018, 2021; 9th International Online Conference on “Mathematical Analysis, Differential Equation & Applications MADEA 9”, Kyrgyz-Turkish Manas University (Bishkek), June 21-25, 2021; online Seminar “From Modeling Analysis to Approximation”, University of Lübeck, Germany, April 23,

2021, Lübeck, Germany; 11th International Skorobahat'ko Conference, October 26- 30, 2020, Online talk, Lviv; conference in Monte Carlo & Quasi-Monte Carlo Methods in Scientific Computing, August 10-14, 2020, online talk, Oxford, UK; workshop "Analytical Modeling and Approximation Methods", March 4-8, 2020, Berlin; workshop Algorithms & Complexity in High Dimensions, September 30-October 4, 2019, Graz, Austria; 8th Workshop on High-Dimensional Approximation, September 9-13, 2019, ETH, Zurich, Switzerland; the 15th International Symposium on Orthogonal Polynomials, Special Functions and Applications (OPSFA) 22-25 July, 2019 Hagenberg, Austria; international congress on industrial and applied Mathematics, July 15-19, 2019, Valencia, Spain; the 12th International Conference on Monte Carlo Methods and Applications, July 8-12, 2019, Sydney, Australia; workshop "Approximation, sampling, and compression in high dimensional problems", Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, June 16-23, 2019, Cambridge, UK; Conference Optimal Point Configurations and Potential Theory, CIEM, Castro Urdiales, April 8th-11th, 2019, Cantabria, Spain; Final AMMODIT Conference "Mathematics for Life Sciences", March 18-22, 2019, Kyiv; RICAM Special Semester on Multivariate Algorithms and their Foundations in Number Theory, Workshop: Discrepancy, November 30, 2018, Linz, Austria; Midwestern Workshop on Asymptotic Analysis, October 6, 2018, Indiana University, Bloomington, USA; MCQMC conference, July 1-6; 2018, Rennes, France; conference "Harmonic Analysis and Applications", June 4-8, 2018, Strobl, Austria; ICERM Semester Program on "Point Configurations in Geometry, Physics and Computer Science", February 25- March 25, 2018, ICERM, Brown University, USA; international Conference in Approximation Theory, May 8-11, 2017, Savannah, USA; workshop Optimal Point Configurations and Orthogonal Polynomials 2017, April 19-22, 2017, Castro Urdiales, Spain; the 7th European Congress of Mathematics, July 18-22, 2016, Berlin; семінарах відділу теорії функцій (Інститут математики НАН України; керівник семінару: доктор фіз.-мат. наук, професор, А.С. Романюк); семінарах кафедри математичного аналізу та оптимізації Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, керівник семінару — доктор фіз.-мат. наук, проф. Н. В. Парфінович; семінарі "Сучасний аналіз" в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, керівники семінару — академік НАН України І.О. Шевчук, доктор фіз.-мат. наук, проф. О.О. Курченко, доктор фіз.- мат. наук, проф. В.М. Радченко; семінарі з теорії аналі-

тичних функцій Львівського національного університету імені Івана Франка, керівник семінару — доктор фіз.-мат. наук, проф. О.Б. Скасків; семінарах молодих вчених Інституту математики НАН України; семінарі кафедри теорії функцій та методики навчання математики, ВНУ імені Лесі Українки, Луцьк; seminar “From Modeling Analysis to Approximation”, University of Lübeck, Germany, керівник семінару — проф. Ю. Престін; Computational Analysis Seminar, Vanderbilt University, Nashville, USA, керівник семінару — проф. Ед. Сафф; колоквіумі інституту математики університету Любека, Німеччина, керівник семінару — проф. Ю. Престін; postdoc seminar, ICERM, Brown University, USA; SFB-Seminar інституту аналізу і теорії чисел Технічного університету в Граці, Австрія, керівник семінару — проф. П. Грабнер; Point Distributions Webinar — щотижневому онлайн семінарі, організованому в 2020–2022 рр., організатори вебінару — D. Ferizovic, M. Matrianni, R. Matzke, T. Stepaniuk, A. Vlasiuk. <https://vlasiuk.com/PDseminar/>

Публікації. Результати дисертації висвітлено у 51 науковій публікації, з них 15 — статті у наукових виданнях, внесених до переліку наукових фахових видань України, закордонних виданнях, а також 35 публікацій у тезах доповідей і матеріалах міжнародних та вітчизняних конференцій. Статті [2–14], проіндексовані у міжнародних наукометричних базах Scopus або Web of Science. Статті [2], [5], [6], [8], [9], [12]–[13] опубліковані у виданнях з квартиля Q1-Q2 відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, статті [3], [4], [11] і [14] у виданнях з квартиля Q3. Відповідно до п. 2 Наказу № 1220 МОН України від 23.09.2019 вказані 15 статей зараховуються як 33 наукові публікації. Результати дисертації додатково відображено у публікації [16]. Публікації [8], [10] одноосібні.

Структура й обсяг дисертації. Дисертація складається зі змісту, анотації, переліку умовних позначень, вступу, п’яти розділів, списку використаних джерел, що містить 251 найменування, і додатків. Загальний обсяг дисертації налічує 383 сторінках, із них список використаних джерел міститься на 22 сторінках, а додатки — на 35 сторінках.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, об’єкт, предмет, завдання й методи дослідження, зазначено наукову новизну отриманих результатів, їхнє практичне

значення, зв'язок роботи з науковими темами й особистий внесок здобувача, наведено перелік публікацій за темою дисертації.

У **першому** розділі наведено основні означення та огляд літератури. Зокрема в підрозділі 1.1 означено класи періодичних (ψ, β) -диференційовних функцій, класи (ψ, β) -інтегралів, інтерполяційних поліномів Лагранжа та таких апроксимативних характеристик класів функцій, як наближення сумами Фур'є, найкращі тригонометричні наближення, найкращі тригонометричні ортогональні наближення та поточкові наближення інтерполяційними поліномами Лагранжа. В підрозділі 1.2 зроблено огляд відомих результатів наближень сумами Фур'є в сенсі сильної та слабкої асимптотики, а в підрозділі 1.3 — огляд відомих результатів стосовно наближення інтерполяційними поліномами Лагранжа на класах 2π -періодичних, диференційовних функцій. В підрозділі 1.4 дано означення сферичних t -дизайнів, найгіршої похибки чисельного інтегрування, дискретних енергій на одиничній d -вимірній сфері та наведено коротку історичну довідку дослідження згаданих величин. Історичні відомості щодо встановлення оцінок дискретних енергій на проєктивних просторах подано в підрозділі 1.5. Поняття гіперрівномірності та характеристики гіперрівномірних точкових множин на скінченних багатовидах наведено в підрозділі 1.6. В підрозділі 1.7 сформульовано задачу найгіршої похибки чисельного інтегрування для точкових множин побудованих методом квазі-Монте Карло, а також зроблено огляд відомих результатів.

Другий розділ дисертації присвячено розв'язанню задачі Колмогорова-Нікольського для сум Фур'є на класах (ψ, β) -диференційовних функцій та деяким суміжним питанням.

Нехай L_p , $1 \leq p < \infty$, простір 2π -періодичних сумовних у p -му степені на $[0, 2\pi)$ функцій $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, з нормою $\|f\|_{L_p} = \|f\|_p := \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$; L_∞ — простір вимірних і суттєво обмежених 2π -періодичних функцій $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ з нормою $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_t |f(t)|$; C — простір неперервних 2π -періодичних функцій $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ з нормою $\|f\|_C = \max_t |f(t)|$.

Означення 1.1. Нехай f — функція із L_1 , $\psi(k)$ — довільна фіксована послідовність дійсних чисел і β — фіксоване дійсне число. Нехай далі $\psi(k)$ — довільна фіксована послідовність дійсних чисел і β —

фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k \cos \left(kx + \frac{\beta\pi}{2} \right) + b_k \sin \left(kx + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right),$$

де $a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt$, $b_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt$ — коефіцієнти Фур'є функції f , є рядом Фур'є деякої функції φ з L_1 , то цю функцію називають (ψ, β) -похідною функції f і позначають через $f_{\beta}^{\psi}(\cdot) = D_{\beta}^{\psi}(f, \cdot)$.

Множину всіх функцій f , для яких існує (ψ, β) -похідна, позначають через L_{β}^{ψ} . Якщо $f \in L_{\beta}^{\psi}$ і, крім того, $f_{\beta}^{\psi} \in \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \subset L_1$ то кажуть, що функція f належить класу $L_{\beta}^{\psi}\mathfrak{N}$. Якщо $f \in L_{\beta}^{\psi}$ і, крім того, $f_{\beta}^{\psi} \in B_p = \|\varphi\|_p \leq 1$, $1 \leq p \leq \infty$, то записують $f \in L_{\beta,p}^{\psi}$. Підмножини неперервних функцій із L_{β}^{ψ} та $L_{\beta}^{\psi}\mathfrak{N}$ позначають через C_{β}^{ψ} та $C_{\beta}^{\psi}\mathfrak{N}$ відповідно.

Якщо послідовність $\psi(k)$ і параметр β є такими, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos(kx - \frac{\beta\pi}{2})$ є рядом Фур'є сумовної функції $\Psi_{\beta}(x)$ (в цьому випадку записують, що $(\psi, \beta) \in F_0$), то елементи f з множини $L_{\beta}^{\psi}\mathfrak{N}$ при будь-якому $\beta \in \mathbb{R}$ і майже для всіх $x \in \mathbb{R}$ представляються за допомогою згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_{\beta}(x-t) \varphi(t) dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in \mathfrak{N}, \quad \varphi \perp 1. \quad (2)$$

Якщо функції f та φ пов'язані за допомогою співвідношення (2), то функцію f називають (ψ, β) -інтегралом функції φ . Множину всіх (ψ, β) -інтегралів функції $\varphi \in \mathfrak{N}$ позначають через $\overline{L}_{\beta}^{\psi}\mathfrak{N}$. При цьому покладають $\overline{C}_{\beta}^{\psi}\mathfrak{N} = C \cap \overline{L}_{\beta}^{\psi}\mathfrak{N}$. Якщо $(\psi, \beta) \in F_0$, $\psi(k) \neq 0$, то, як показав О.І. Степанець, має місце рівність $\overline{L}_{\beta}^{\psi}\mathfrak{N} = L_{\beta}^{\psi}\mathfrak{N}$.

Якщо $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, то майже скрізь $f_{\beta}^{\psi} = f_{\beta}^r$ і в цьому випадку класи $C_{\beta,p}^{\psi}$ є відомими класами Вейля-Надя $W_{\beta,p}^r$. У випадку, коли $\psi(k) = e^{-\alpha k^r}$, $\alpha > 0$, $r > 0$, класи $C_{\beta}^{\psi}\mathfrak{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$, позначають через $C_{\beta}^{\alpha,r}\mathfrak{N}$ і називають класами узагальнених інтегралів Пуасона.

Відхилення від функції $f \in L_p$ її частинної суми Фур'є $S_{n-1}(f; x)$ порядку $n-1$ будемо позначати через $\rho_n(f; x) = f(x) - S_{n-1}(f; x)$.

Для довільного класу $F \subset L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, розглянемо величини

$$\mathcal{E}_n(F)_{L_p} = \mathcal{E}_n(F)_p = \sup_{f \in F} \|\rho_n(f; \cdot)\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Вслід за О.І. Степанцем позначимо через $\mathfrak{M}$ множину додатних, неперервних, опуклих донизу функцій $\psi(t)$, $t \geq 1$, таких що $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$. При розгляді багатьох екстремальних задач буває достатнім обмежитись випадком, коли послідовності $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, що задають класи $L_{\beta}^{\psi}(\mathfrak{M})$, є звуженнями на множину натуральних чисел $\mathbb{N}$ функцій $\psi(t)$ неперервного аргументу $t \geq 1$ з множини $\mathfrak{M}$.

Для довільної функції ψ із $\mathfrak{M}$ розглядають характеристики: $\eta(t) = \eta(\psi; t) := \psi^{-1}(\psi(t)/2)$, $\mu(t) = \mu(\psi; t) := \frac{t}{\eta(t)-t}$, де ψ^{-1} — обернена до ψ функція.

За допомогою характеристики $\mu(\psi; t)$ з множини $\mathfrak{M}$ виділяють наступну підмножину: $\mathfrak{M}_{\infty}^{+} = \{\psi \in \mathfrak{M} : \mu(\psi; t) \uparrow \infty\}$.

У підрозділі 2.1 знайдено асимптотичні рівності для точних верхніх меж рівномірних наближень сумами Фур'є на класах $C_{\beta, p}^{\alpha, r}$ узагальнених інтегралів Пуассона функцій, що належать одиничним кулям просторів L_p .

Для всіх $\alpha > 0$, $r \in (0, 1)$ і $1 \leq p \leq \infty$ позначимо через $n_0 = n_0(\alpha, r, p)$ найменше натуральне число n таке, що

$$\frac{1}{\alpha r} \frac{1}{n^r} + \frac{\alpha r \chi(p)}{n^{1-r}} \leq \begin{cases} 1/14, & p = 1, \\ \frac{1}{(3\pi)^3} \cdot \frac{p-1}{p}, & 1 < p < \infty, \\ 1/(3\pi)^3, & p = \infty, \end{cases}$$

де $\chi(p) = p$ при $1 \leq p < \infty$ і $\chi(p) = 1$ при $p = \infty$.

Основним результатом підрозділу 2.1 є наступне твердження:

Теорема 2.3. *Нехай $0 < r < 1$, $1 \leq p < \infty$, $\alpha > 0$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді при $1 < p < \infty$ і $n \geq n_0(\alpha, r, p)$ справедлива оцінка*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n(C_{\beta, p}^{\alpha, r})_C &= e^{-\alpha n^r} n^{\frac{1-r}{p}} \left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}} (\alpha r)^{\frac{1}{p}}} F^{\frac{1}{p'}} \left(\frac{1}{2}, \frac{3-p'}{2}; \frac{3}{2}; 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \gamma_{n, p}^{(2)} \left(\left(1 + \frac{(\alpha r)^{\frac{p'-1}{p}}}{p' - 1} \right) \frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}} + \frac{(p)^{\frac{1}{p'}}}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}}} \frac{1}{n^r} \right) \right), \end{aligned}$$

при $p = 1$ і $n \geq n_0(\alpha, r, 1)$ має місце оцінка

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta, 1}^{\alpha, r})_C = e^{-\alpha n^r} n^{1-r} \left(\frac{1}{\pi \alpha r} + \gamma_{n, 1}^{(2)} \left(\frac{1}{(\alpha r)^2} \frac{1}{n^r} + \frac{1}{n^{1-r}} \right) \right),$$

де $F(a, b; c; d)$ — гіпергеометрична функція Гаусса, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, і величина $\gamma_{n,p}^{(2)} = \gamma_{n,p}^{(2)}(\alpha, r, \beta)$ така, що $|\gamma_{n,p}^{(2)}| \leq (14\pi)^2$.

В підрозділі 2.2 отримано сильну асимптотику для точних верхніх меж наближень сумами Фур'є в метриках просторів L_s на класах $C_{\beta,1}^{\alpha,r}$. При цьому виявилось, що величини $\mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^{\alpha,r})_C$ та $\mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^{\alpha,r})_{p'}$ пов'язані за допомогою співвідношення $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^{\alpha,r})_C}{\mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^{\alpha,r})_{p'}} = 1$.

Найкращим наближенням функції f в метриці простору L_p , означають величину вигляду

$$E_n(f)_{L_p} = E_n(f)_p = \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad n \in \mathbb{N},$$

де $\mathcal{T}_{2n-1}$ — підпростір усіх тригонометричних поліномів t_{n-1} порядку не вищого за $n - 1$.

В підрозділі 2.3 встановлено нерівності типу Лебега для множин $f \in C_{\beta}^{\alpha,r}C$, в яких рівномірні норми відхилень функцій від їх частинних сум Фур'є виражені через найкращі наближення $E_n(f_{\beta}^{\alpha,r})_{L_p}$ функцій $f_{\beta}^{\alpha,r}$ тригонометричними поліномами в метриці простору L_p , $1 \leq p \leq \infty$.

Зокрема, має місце теорема.

Теорема 2.9. *Нехай $0 < r < 1$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$. Тоді, при $1 < p < \infty$, для довільної функції $f \in C_{\beta}^{\alpha,r}L_p$ і $n \geq n_0(\alpha, r, p)$, має місце нерівність*

$$\begin{aligned} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f; \cdot)\|_C &\leq e^{-\alpha n^r} n^{\frac{1-r}{p}} \left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{\frac{1}{1+\frac{1}{p'}}}(\alpha r)^{\frac{1}{p}}} F^{\frac{1}{p'}} \left(\frac{1}{2}, \frac{3-p'}{2}; \frac{3}{2}; 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \gamma_{n,p} \left(\left(1 + \frac{(\alpha r)^{\frac{p'-1}{p}}}{p' - 1} \right) \frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}} + \frac{(p)^{\frac{1}{p'}}}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}}} \frac{1}{n^r} \right) \right) E_n(f_{\beta}^{\alpha,r})_{L_p}, \end{aligned} \quad (3)$$

де $F(a, b; c; d)$ — гіпергеометрична функція Гаусса, а $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Крім того, для довільної функції $f \in C_{\beta}^{\alpha,r}L_p$ можна знайти функцію $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(f; n; x)$, таку, що $E_n(\mathcal{F}_{\beta}^{\alpha,r})_{L_p} = E_n(f_{\beta}^{\alpha,r})_{L_p}$ і для $n \geq n_0(\alpha, r, p)$ виконується наступна рівність

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(\cdot) - S_{n-1}(\mathcal{F}; \cdot)\|_C &= e^{-\alpha n^r} n^{\frac{1-r}{p}} \left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{\frac{1}{1+\frac{1}{p'}}}(\alpha r)^{\frac{1}{p}}} F^{\frac{1}{p'}} \left(\frac{1}{2}, \frac{3-p'}{2}; \frac{3}{2}; 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \gamma_{n,p} \left(\left(1 + \frac{(\alpha r)^{\frac{p'-1}{p}}}{p' - 1} \right) \frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}} + \frac{(p)^{\frac{1}{p'}}}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}}} \frac{1}{n^r} \right) \right) E_n(f_{\beta}^{\alpha,r})_{L_p}. \end{aligned} \quad (4)$$

В (3) і (4) величина $\gamma_{n,p} = \gamma_{n,p}(\alpha, r, \beta)$ така, що $|\gamma_{n,p}| \leq (14\pi)^2$.

Крім того, в підрозділі 2.3 асимптотично непокрашувані нерівності Лебега встановлені і для будь-якої $f \in C_{\beta}^{\alpha,r} L_1$ та $f \in C_{\beta}^{\alpha,r}$, $r \in (0, 1)$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$.

В підрозділі 2.4 на класах (ψ, β) -диференційовних функцій встановлено нерівності типу Лебега, в яких рівномірні норми відхилень сум Фур'є виражаються через найкращі наближення в середньому тригонометричними поліномами їх (ψ, β) -похідних.

Теорема 2.11. Нехай $\sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k) < \infty$, $\psi(k) > 0$, $k = 1, 2, \dots$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$. Тоді для довільної функції $f \in C_{\beta}^{\psi} L_1$ має місце нерівність

$$\|f(\cdot) - S_{n-1}(f; \cdot)\|_C \leq \frac{1}{\pi} \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) E_n(f_{\beta}^{\psi})_{L_1}.$$

Крім того, для довільної функції $f \in C_{\beta}^{\psi} L_1$ можна знайти функцію $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(f; n, x)$ з множини $C_{\beta}^{\psi} L_1$ таку, що $E_n(\mathcal{F}_{\beta}^{\psi})_{L_1} = E_n(f_{\beta}^{\psi})_{L_1}$ і має місце рівність

$$\|\mathcal{F}(\cdot) - S_{n-1}(\mathcal{F}; \cdot)\|_C = \left(\frac{1}{\pi} \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) + \frac{\xi}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k+n) \right) E_n(f_{\beta}^{\psi})_{L_1}. \quad (5)$$

В (5) величина $\xi = \xi(f; n; \psi; \beta)$ є такою, що $-2 \leq \xi \leq 0$.

Крім того, в підрозділі 2.4 в рівномірній метриці в ряді важливих випадків розв'язано задачу Колмогорова-Нікольського для величин $\mathcal{E}_n(C_{\beta,1}^{\psi})_C$. Зокрема, для послідовностей $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty}^{+}$ доведено таке твердження.

Теорема 2.15. Нехай $\beta \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathfrak{M}$ і характеристики $\alpha(t) = \alpha(\psi; t) := \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}$, $\psi'(t) := \psi'(t+0)$, і $\lambda(t) = \lambda(\psi; t) := \frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|}$ задовольняють умови $\alpha(t) \downarrow 0$ і $\lambda(t) \uparrow \infty$, $t \rightarrow \infty$.

Тоді для всіх $n \in \mathbb{N}$ таких, що $\alpha(n) \leq 1/4$, виконується оцінка

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,1}^{\psi})_C = \psi(n)\lambda(n) \left(\frac{1}{\pi} + \frac{\xi_1}{\lambda(n)} + \xi_2 \alpha(n) \right),$$

де $-1 \leq \xi_1 \leq 1 + \frac{1}{\pi}$ та $-4 \leq \xi_2 \leq \frac{4}{3} \left(1 + \frac{1}{\pi} \right)$.

Наслідок 2.8. Нехай $\psi(k) = (k+2)^{-\ln \ln(k+2)}$, $k = 1, 2, \dots$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$. Тоді при $n \rightarrow \infty$ виконується асимптотична рівність

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,1}^\psi)_C = \frac{1}{\pi} \psi(n) \frac{n}{\ln \ln(n+2)} + \mathcal{O}(1) \psi(n) \frac{n}{(\ln \ln(n+2))^2}.$$

Наслідок 2.9. Нехай $\psi(k) = e^{-\ln^2(k+1)}$, $k = 1, 2, \dots$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$. Тоді при $n \rightarrow \infty$ має місце асимптотична рівність

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,1}^\psi)_C = \frac{1}{2\pi} \psi(n) \frac{n}{\ln(n+1)} + \mathcal{O}(1) \psi(n) \frac{n}{\ln^2(n+1)}.$$

Наслідок 2.10. Нехай $\psi(k) = e^{-\frac{k+2}{\ln(k+2)}}$, $k = 1, 2, \dots$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$. Тоді при $n \rightarrow \infty$ має місце асимптотична рівність

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,1}^\psi)_C = \frac{1}{\pi} \psi(n) \ln(n+2) + \mathcal{O}(1) \psi(n).$$

Підрозділ 2.5 присвячено знаходженню точних порядкових оцінок для наближень сумами Фур'є, найкращих наближень та найкращих ортогональних тригонометричних наближень в метриках просторів L_p , $1 \leq p < \infty$, класів 2π -періодичних функцій, (ψ, β) -похідні яких належать до одиничної кулі простору L_∞ . А саме, розглянуто випадок, коли послідовність $\psi(k)$ належить множині всіх додатніх, майже спадних послідовностей.

Нехай $\tilde{L}_p$, простір 2π -періодичних функцій $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, сумовних в степені p на $[0, 2\pi)$, в якому норма задається формулою $\|f\|_{\tilde{L}_p} = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$; $\tilde{L}_\infty$ — простір 2π -періодичних, сумовних і суттєво обмежених функцій $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ з нормою $\|f\|_{\tilde{L}_\infty} = \operatorname{ess\,sup}_t |f(t)|$.

Для довільного класу $F \subset \tilde{L}_p$, $1 \leq p \leq \infty$, розглянемо величини

$$e_m^\perp(F)_{\tilde{L}_p} = \sup_{f \in F} \inf_{\gamma_m} \|f(x) - S_{\gamma_m}(f; x)\|_{\tilde{L}_p}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (6)$$

де γ_m — довільні набори з m цілих чисел, а $S_{\gamma_m}(f; x) = \sum_{k \in \gamma_m} \hat{f}(k) e^{ikx}$,

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt,$$

В підрозділі 2.6 встановлено точні порядкові оцінки для величин $e_n^\perp(L_{\beta,p}^\psi)_{\tilde{L}_\infty}$ у випадку, коли послідовність $\psi(k)$ прямує до нуля

швидше за довільну степеневу функцію, але повільніше ніж геометрична прогресія. Аналогічні оцінки також одержані в $\tilde{L}_p$ -метриці, $1 < p \leq \infty$ для величин $e_n^\perp(L_{\beta,1}^\psi)_{\tilde{L}_p}$.

Третій розділ присвячено дослідженню питань наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами на класах 2π -періодичних функцій, які задаються за допомогою згорток з фіксованими твірними ядрами.

В підрозділі 3.1 встановлено асимптотично непокрещувані інтерполяційні аналоги нерівностей типу Лебега для 2π -періодичних функцій f , які представляються узагальненими інтегралами Пуассона функцій φ з простору L_p , $1 \leq p \leq \infty$.

При довільних фіксованих $\alpha > 0$, $r \in (0, 1)$ і $1 \leq p \leq \infty$ позначимо через $n_* = n_*(\alpha, r, p)$ найменший з номерів n такий, що

$$\frac{\ln \pi n}{\alpha r n^r} + \frac{\alpha r \chi(p)}{n^{1-r}} \leq \begin{cases} \frac{1}{14}, & p = 1, \\ \frac{1}{(3\pi)^3} \cdot \frac{p-1}{p}, & 1 < p < \infty, \\ \frac{1}{(3\pi)^3}, & p = \infty, \end{cases}$$

де $\chi(p) = p$ при $1 \leq p < \infty$ і $\chi(p) = 1$ при $p = \infty$.

Для будь-якої $f(x)$ із C через $\tilde{S}_{n-1}(f; x)$ будемо позначати тригонометричний поліном порядку $n-1$, що інтерполює $f(x)$ у вузлах $x_k^{(n-1)} = \frac{2k\pi}{2n-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, тобто такий, що

$$\tilde{S}_{n-1}(f; x_k^{(n-1)}) = f(x_k^{(n-1)}), \quad k = 0, 1, \dots, 2n-2. \quad (7)$$

Позначимо через $\tilde{\rho}_n(f; \cdot)$ відхилення від функції $f \in C$ її інтерполяційного полінома Лагранжа $\tilde{S}_{n-1}(f; \cdot)$, тобто $\tilde{\rho}_n(f; x) = f(x) - \tilde{S}_{n-1}(f; x)$.

Теорема 3.1. *Нехай $0 < r < 1$, $\alpha > 0$, $1 < p < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$. Тоді, для всіх $x \in \mathbb{R}$ і довільної функції $f \in C_{\beta}^{\alpha, r} L_p$ при $n \geq n_*(\alpha, r, p)$ має місце нерівність*

$$\begin{aligned} |\tilde{\rho}_n(f; x)| &\leq 2e^{-\alpha n^r} n^{\frac{1-r}{p}} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}} (\alpha r)^{\frac{1}{p}}} F^{\frac{1}{p'}} \left(\frac{1}{2}, \frac{3-p'}{2}; \frac{3}{2}; 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \gamma_{n,p}^* \left(\left(1 + \frac{(\alpha r)^{\frac{p'-1}{p}}}{p'-1} \right) \frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}} + \frac{p^{\frac{1}{p'}}}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}} n^r} \right) \right) E_n(f_{\beta}^{\alpha, r})_{L_p}. \end{aligned} \quad (8)$$

Крім того, для довільної функції $f \in C_{\beta}^{\alpha, r} L_p$ можна вказати функцію $\mathcal{F}(\cdot) = \mathcal{F}(f; n; x, \cdot)$, таку, що $E_n(\mathcal{F}_{\beta}^{\alpha, r})_{L_p} = E_n(f_{\beta}^{\alpha, r})_{L_p}$ і для

$n \geq n_*(\alpha, r, p)$ виконується наступна рівність:

$$|\tilde{\rho}_n(\mathcal{F}; x)| = 2e^{-\alpha n^r} n^{\frac{1-r}{p}} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}} (\alpha r)^{\frac{1}{p}}} F^{\frac{1}{p'}} \left(\frac{1}{2}, \frac{3-p'}{2}; \frac{3}{2}; 1 \right) \right. \\ \left. + \gamma_{n,p}^* \left(\left(1 + \frac{(\alpha r)^{\frac{p'-1}{p}}}{p'-1} \right) \frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}} + \frac{p^{\frac{1}{p'}}}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}} n^r} \right) \right) E_n(f_{\beta}^{\alpha, r})_{L_p}. \quad (9)$$

В (8) і (9) $F(a, b; c; d)$ — гіпергеометрична функція Гаусса, а величини $\gamma_{n,p}^* = \gamma_{n,p}^*(\alpha, r, \beta, f, x)$ такі, що $|\gamma_{n,p}^*| < 20\pi^4$.

В підрозділі 3.1 аналогічна теорема встановлена і для множин $C_{\beta}^{\alpha, r} L_1$. В цьому ж підрозділі також знайдено асимптотичні рівності для точних верхніх меж поточкових наближень інтерполяційними тригонометричними поліномами на класах $C_{\beta, p}^{\alpha, r}$ узагальнених інтегралів Пуассона функцій, що належать одиничним кулям просторів L_p , $1 \leq p \leq \infty$.

В підрозділі 3.2 одержано інтерполяційні аналоги нерівностей типу Лебега на множинах $C_{\beta}^{\psi} L_1$ 2π -періодичних функцій f , котрі задаються згортками твірного ядра Ψ_{β} , $\beta \in \mathbb{R}$, з функціями φ із L_1 . Показано, що коли послідовності $\psi(k)$ спадають до нуля швидше за довільну степеневу функцію, отримані нерівності в ряді важливих випадків є асимптотично точними. В цих випадках також встановлено асимптотичні рівності для точних верхніх меж поточкових наближень інтерполяційними тригонометричними поліномами на класах згорток твірного ядра Ψ_{β} із функціями φ , що належать одиничній кулі з простору L_1 .

Теорема 3.5. Нехай $\sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k) < \infty$, $\psi(k) > 0$, $k = 1, 2, \dots$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$. Тоді, для всіх $x \in \mathbb{R}$ і довільної функції $f \in C_{\beta}^{\psi} L_1$ має місце нерівність

$$|\tilde{\rho}_n(f; x)| \leq \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} \psi(\nu) \right) E_n(f_{\beta}^{\psi})_{L_1}.$$

Крім того, для довільної функції $f \in C_{\beta}^{\psi} L_1$ можна вказати функцію $\mathcal{F}(\cdot) = \mathcal{F}(f; n; x, \cdot)$ таку, що $E_n(\mathcal{F}_{\beta}^{\psi})_{L_1} = E_n(f_{\beta}^{\psi})_{L_1}$ і для якої виконується наступна рівність:

$$|\tilde{\rho}_n(\mathcal{F}; x)| = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) + \frac{\xi}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k+n) \right) E_n(f_{\beta}^{\psi})_{L_1}. \quad (10)$$

B (10) величина $\xi = \xi(f; n; \psi; \beta; x)$ є такою, що $-(1 + 2\pi) \leq \xi \leq 1$.

В підрозділі 3.2 також знайдено оцінки точних верхніх меж точкових наближень інтерполяційними тригонометричними поліномами на класах $C_{\beta,1}^\psi$ і вказані конкретні важливі ситуації, коли зазначені оцінки перетворюються в асимптотичні рівності.

Теорема 3.7. Нехай $\sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k) < \infty$, $\psi(k) > 0$, $k = 1, 2, \dots$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$. Тоді, для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^\psi; x) = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) + \frac{\Theta}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k+n) \right). \quad (11)$$

B (11) величина $\Theta = \Theta(n; \psi; \beta; x)$ є такою, що $-(1 + \pi) \leq \Theta \leq 1$.

Четвертий розділ присвячено знаходженню оцінок похибки чисельного інтегрування та дискретних енергій на проєктивних просторах.

В підрозділі 4.1 отримано двосторонні оцінки для найгіршої похибки інтегрування на одиничній сфері $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$, $d \geq 2$, на класах $\mathbb{H}^{\frac{d}{2}, \gamma}(\mathbb{S}^d)$, $\gamma > \frac{1}{2}$, з додатковим логарифмічним множником.

Нехай $\mathbb{S}^d = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{d+1} : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2 = 1\}$, де $d \geq 2$, — одинична сфера в евклідовому просторі $\mathbb{R}^{d+1}$, з мірою Лебега σ_d , нормалізованою за допомогою співвідношення $\sigma_d(\mathbb{S}^d) = 1$.

Означення 3.8. Сферичний t -дизайн — це скінченна множина X_N , $X_N \subset \mathbb{S}^d$ з характеристичною властивістю, що рівновагове правило інтегрування з вузлами з X_N інтегрує всі сферичні поліноми p порядку $\leq t$ точно, тобто,

$$\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{x} \in X_N} p(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{S}^d} p(\mathbf{x}) d\sigma_d(\mathbf{x}), \quad \deg(p) \leq t.$$

Тут N — кількість точок (потужність) сферичного дизайну.

Означення 3.9. Послідовність N -точкових множин $X_N = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$, називається *добре розподіленою*, якщо існує додатня константа c така, що $\min_{i \neq j} |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| > \frac{c}{N^{\frac{1}{d}}}$.

Означення 3.10. Найгірша похибка чисельного інтегрування методу $Q[X_N, \omega]$ (квадратурна похибка) в банаховому просторі B функцій на $\mathbb{S}^d$ з нормою $\|\cdot\|_B$ означається за допомогою формули

$$\text{wce}(Q[X_N, \omega]; B) := \sup_{f \in B, \|f\|_B \leq 1} |Q[X_N, \omega](f) - I(f)|,$$

де $I(f) := \int_{\mathbb{S}^d} f(\mathbf{x}) d\sigma_d(\mathbf{x})$, а $Q[X_N, \omega](f) := \sum_{i=1}^N \omega_i f(\mathbf{x}_i)$ з заданими вагами $\omega_1, \dots, \omega_N \in \mathbb{R}$, що задовольняють співвідношення $\sum_{i=1}^N \omega_i = 1$. Через $Q[X_N](f)$ позначають рівноваговий метод чисельного інтегрування.

Означимо простір $\mathbb{H}^{(\frac{d}{2}, \gamma)}(\mathbb{S}^d)$ для $\gamma > \frac{1}{2}$ як множину всіх функцій $f \in L_2(\mathbb{S}^d)$ чий коефіцієнти Фур'є-Лапласа $\hat{f}_{\ell, k}$ задовольняють умову

$$\|f\|_{\mathbb{H}^{(\frac{d}{2}, \gamma)}}^2 := \sum_{\ell=0}^{\infty} (1 + \lambda_{\ell})^{\frac{d}{2}} (\ln(3 + \lambda_{\ell}))^{2\gamma} \sum_{k=1}^{Z(d, \ell)} |\hat{f}_{\ell, k}|^2 < \infty,$$

де $Z(d, \ell)$ — розмірність простору сферичних гармонік порядку $\ell \in \mathbb{N}_0$ на $\mathbb{S}^d$.

Наступне твердження містить порядкові оцінки для найгіршої похибки інтегрування для добре розподілених сферичних t -дизайнів.

Теорема 4.1. *Нехай $d \geq 2$, $\gamma > \frac{1}{2}$ — фіксоване число, $i \{X_N\}$ — послідовність N точкових добре розподілених сферичних t -дизайнів, t і N задовольняють співвідношення $N = N(t) \asymp t^d$. Тоді, існують додатні сталі $C_{d, \gamma}^{(1)}$ і $C_{d, \gamma}^{(2)}$, такі, що*

$$\frac{C_{d, \gamma}^{(1)}}{N^{\frac{1}{2}} (\ln N)^{\gamma - \frac{1}{2}}} \leq \text{wce}(Q[X_N]; \mathbb{H}^{(\frac{d}{2}, \gamma)}(\mathbb{S}^d)) \leq \frac{C_{d, \gamma}^{(2)}}{N^{\frac{1}{2}} (\ln N)^{\gamma - \frac{1}{2}}}.$$

Наступне твердження містить оцінку зверху найгіршої похибки інтегрування для довільних сферичних t -дизайнів.

Теорема 4.3. *Нехай $d \geq 2$, $\gamma > \frac{1}{2}$ фіксовані числа і послідовність $\{X_N\}$ — послідовність N точкових сферичних t -дизайнів. Тоді існує додатня стала $C_{d, \gamma}$ така що*

$$\text{wce}(Q[X_N]; \mathbb{H}^{(\frac{d}{2}, \gamma)}(\mathbb{S}^d)) \leq C_{d, \gamma} t^{-\frac{d}{2}} (\ln t)^{-\gamma + \frac{1}{2}},$$

де константа $C_{d, \gamma}$ залежить лише від d і γ .

Теорема 4.4. *Нехай $d \geq 2$, $\gamma > \frac{1}{2}$ і $Q[X_N, \omega]$ — довільний N -точковий квадратурний метод. Тоді, існує додатня стала $C_{d, \gamma}$, така, що*

$$\text{wce}(Q[X_N, \omega]; \mathbb{H}^{(\frac{d}{2}, \gamma)}(\mathbb{S}^d)) \geq C_{d, \gamma} N^{-\frac{1}{2}} (\ln N)^{-\gamma},$$

де константа $C_{d, \gamma}$ залежить від d і γ , і не залежить ні від методу $Q[X_N, \omega]$, ні від кількості вузлів N .

В цьому підрозділі також встановлені деякі властивості послідовності QMC-дизайнів для класів $\mathbb{H}^{(\frac{d}{2}, \gamma)}(\mathbb{S}^d)$, для всіх $\gamma > \frac{1}{2}$.

В підрозділі 4.2 знайдено асимптотичні рівності для дискретної s -енергії Рісса послідовностей добре розподілених t -дизайнів на одиничній сфері $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$, $d \geq 2$. Показано, що такі детерміністичні конструкції як сферичні t -дизайни є не менш вдалими у порівнянні зі стохастичними.

Нехай K_d — додатньо визначена функція

$$K_d(t) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(d)}(t), \quad a_n \geq 0.$$

де $P_n^{(d)}$ — n -й узагальнений поліном Лежандра.

Через $E_{K_d}(X_N) := \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N K_d(\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle)$ позначають дискретну енергію функції K_d для N -точкової множини X_N точок на $\mathbb{S}^d$. Серед дискретних енергій важливе значення відіграють, зокрема, дискретна s -енергія Рісса та логарифмічна енергія.

Означення 4.5. Для заданого $s > 0$ *дискретна s -енергія Рісса* множини N точок X_N на $\mathbb{S}^d$ означається наступним чином:

$$E_d^{(s)}(X_N) := \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^N |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^{-s}, \quad (12)$$

де $|\mathbf{x}|$ — евклідова норма в $\mathbb{R}^{d+1}$ вектора $\mathbf{x}$.

У випадку $s = d - 1$ енергію (12) називають енергією Ньютона (а при $d = 2$ — енергією Кулона).

Означення 4.6. *Логарифмічною енергією* множини N різних точок (N -точкової множини) $X_N := \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$ на сфері $\mathbb{S}^d$ називають величину

$$E_{\log}^{(d)}(X_N) := \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^N \log \frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}.$$

Теорема 4.9. *Нехай $d \geq 2$ — фіксоване ціле число, і $\{X_{N(t)}\}$ — послідовність добре розподілених сферичних t -дизайнів на $\mathbb{S}^d$, t і*

$N(t)$ задовольняють умову $N \asymp t^d$. Тоді для s -енергії Рісса $E_d^{(s)}(X_N)$ вигляду (12), виконується наступна асимптотична рівність

$$E_d^{(s)}(X_N) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(d-s)}{\Gamma(d-s+1)\Gamma(d-\frac{s}{2})} N^2 + \mathcal{O}\left(N^{1+\frac{s}{d}}\right).$$

Розглянемо розбиття сфери на області A_i з однаковою площею і невеликими діаметрами: $\text{diam}(A_i) \leq CN^{-\frac{1}{d}}$ при $i = 1, \dots, N$, де C — константа, яка не залежить від N . Нехай σ_j^* — звуження міри $N\sigma$ до A_i : $\sigma_i^*(\cdot) = \sigma(A_i \cap \cdot)N$. Тоді кожна σ_j^* є ймовірнісною мірою. Нагадаємо, що якщо точки вибрані випадковим чином в кожній області, то таку вибірку називають стратифікованою.

В теоремах 4.10 та 4.11 дисертаційного дослідження знайдено оцінки зверху для інтегралів енергій

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N^2} \int_{A_1} \dots \int_{A_N} \sum_{i,j=1}^N K_d(\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle) d\sigma_1^*(\mathbf{x}_1) \dots d\sigma_N^*(\mathbf{x}_N), \\ & \frac{1}{N^2} \int_{A_1} \dots \int_{A_N} \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^N K_d(\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle) d\sigma_1^*(\mathbf{x}_1) \dots d\sigma_N^*(\mathbf{x}_N) \end{aligned}$$

відповідно до ймовірнісної моделі стратифікованих вибірок.

В підрозділі 4.3 знайдено асимптотичні рівності для дискретної логарифмічної енергії для добре розподілених сферичних t -дизайнів на одиничній сфері $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$. Також одержано точні порядкові оцінки для дискретної s -енергії Рісса, в сингулярному випадку $s \geq d$, послідовностей добре розподілених сферичних t -дизайнів.

Основними результатами підрозділу 4.3 є наступна теорема.

Теорема 4.12. *Нехай $d \geq 2$ фіксоване число, $\{X_{N(t)}\}$ — послідовність добре розподілених t -дизайнів на сфері $\mathbb{S}^d$ з $N(t) \asymp t^d$. Тоді, для логарифмічної енергії $E_{\log}^{(d)}(X_N)$ виконується оцінка*

$$E_{\log}^{(d)}(X_N) = N^2 \int_{\mathbb{S}^d} \int_{\mathbb{S}^d} \log \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\sigma_d(\mathbf{x}) d\sigma_d(\mathbf{y}) - \frac{1}{d} N \log N + \mathcal{O}(N).$$

В цьому ж підрозділі також знайдені оцінки зверху величин $E_s^{(d)}(X_N)$ при $s \geq d$.

В підрозділі 4.4 встановлено двосторонні оцінки для мінімальних s -енергій Рісса, дискретної логарифмічної енергії та енергії Гріна на проєктивних просторах $\mathbb{F}\mathbb{P}^{d-1}$ над скалярними областями $\mathbb{F}$ (дійсні або комплексні числа, кватерніони чи октоніони). Показано, що детермінантові точкові конфігурації для кожного з цих просторів забезпечують оцінки зверху для згаданих енергій.

На цих проєктивних просторах енергії $E_K(\omega_N) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N K(x_i, x_j)$ задаються за допомогою так званих *хордальних s -ядер Рісса*

$$K_s(x, y) = \frac{1}{\rho(x, y)^s} = \frac{1}{\sin(\theta(x, y))^s} \quad \text{для } s > 0,$$

або хордального логарифмічного ядра

$$K_0(x, y) = -\log(\rho(x, y)) = -\log \sin(\theta(x, y)),$$

де ρ і ϑ — хордальні та геодезичні метрики, відповідно.

Позначимо

$$\mathcal{E}_{J_s}(\Omega, N) = \min_{\omega_N \subset \Omega} E_{J_s}(\omega_N)$$

Для кожного двоточкового однорідного простору Ω з базовою скалярною площиною $\mathbb{F}$, поставимо у відповідність параметри

$$\alpha = (d-1) \frac{\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{F})}{2} - 1, \quad \beta = \begin{cases} \alpha, & \text{якщо } \Omega = \mathbb{S}^{d-1}; \\ \frac{\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{F})}{2} - 1, & \text{якщо } \Omega = \mathbb{F}\mathbb{P}^{d-1}. \end{cases}$$

Далі, через $D = \dim(\Omega) = 2\alpha + 2$ позначимо розмірність простору Ω як дійсного многовиду.

В підрозділі 4.4 одержано оцінки зверху енергій Рісса та логарифмічної енергій для стратифікованих вибірок, а також оцінки зверху для математичних сподівань величин E_{K_s} і E_G для детермінантного точкового процесу, який прийнято називати гармонічним ансамблем. Зокрема, для енергії Рісса має місце твердження.

Теорема 4.17. *Для математичного сподівання енергії Рісса при $0 < s < D$ справедлива асимптотична при $n \rightarrow \infty$ рівність*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathcal{X}_N} [E_{K_s}] &= I_{K_s}(\sigma) \mathcal{K}_n^{(\alpha, \beta)}(1)^2 \\ &\quad - \frac{\Gamma(s+1) \Gamma(\alpha+1-\frac{s}{2}) \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)^2 \Gamma(\alpha+2+\frac{s}{2}) \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\alpha+\beta+2)} n^{s+D} + \mathcal{O}(n^{s+D-1}). \end{aligned}$$

Крім того, в термінах кількості точок N детермінантного точкового процесу мають місце співвідношення

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{K_s}(N) &\leq \mathbb{E}_{\mathcal{X}_N}[E_{K_s}] = I_{K_s}(\sigma)N^2 - \frac{\Gamma(s+1)\Gamma(\alpha+1-\frac{s}{2})\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)^2\Gamma(\alpha+2+\frac{s}{2})\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta+2)} \\ &\quad \times \left(\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\beta+1)} \right)^{\frac{2\alpha+s+2}{2\alpha+2}} N^{1+\frac{s}{D}} + \mathcal{O}(N^{1+\frac{s-1}{D}}). \end{aligned}$$

Наступне твердження містить оцінку знизу для мінімальної енергії Гріна.

Теорема 4.23. *Для енергії Гріна $E_G(\omega_N)$ для будь-якого набору різних точок $\omega_N = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \Omega$ при $\alpha = 1/2$ (тобто $\Omega = \mathbb{RP}^3$), виконується оцінка*

$$E_G(\omega_N) \geq -\frac{3}{4}\pi^{\frac{1}{3}}N^{2-2/3} + \mathcal{O}(N \log(N)).$$

При $\alpha > 1/2$ (тобто, для довільних проєктивних просторів $\Omega = \mathbb{FP}^{d-1}$, за винятком $\mathbb{RP}^2$ і $\mathbb{RP}^3$), має місце нерівність

$$E_G(\omega_N) \geq -\frac{1+\alpha}{4\alpha} \left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} N^{2-\frac{2}{D}} + \mathcal{O}(N^{2-\frac{3}{D}}).$$

Для мінімальних дискретних енергій Рісса, Гріна та логарифмічної енергії на проєктивних просторах має місце твердження.

Теорема 4.24. *Для кожного проєктивного простору $\mathbb{FP}^{d-1}$ і $0 < s < \dim(\mathbb{FP}^{d-1})$ існують додатні сталі $C_s, C'_s, C_0, C'_0, C_G, C'_G$ такі, що для $N \geq 2$*

$$-C_s N^{1+\frac{s}{\dim(\mathbb{FP}^{d-1})}} \leq \mathcal{E}_{K_s}(\mathbb{FP}^{d-1}, N) - I_{K_s}(\sigma)N^2 \leq -C'_s N^{1+\frac{s}{\dim(\mathbb{FP}^{d-1})}},$$

$$-C_0 N \log(N) \leq \mathcal{E}_{K_0}(\mathbb{FP}^{d-1}, N) - I_{K_0}(\sigma)N^2 \leq -C'_0 N \log(N).$$

$$-C_G N^{2-\frac{2}{\dim(\mathbb{FP}^{d-1})}} \leq \mathcal{E}_G(\mathbb{FP}^{d-1}, N) \leq -C'_G N^{2-\frac{2}{\dim(\mathbb{FP}^{d-1})}},$$

у випадку $\mathbb{FP}^{d-1} = \mathbb{RP}^2$

$$-C_G N \log(N) \leq \mathcal{E}_G(\mathbb{FP}^{d-1}, N) \leq -C'_G N \log(N),$$

$$\partial_e I_K(\mu) = \iint_{\Omega \times \Omega} K(x, y) d\mu(x) d\mu(y).$$

У п'ятому розділі досліджуються властивості точкових множин на d -вимірному торі та на одиничному кубі в просторі $\mathbb{R}^d$ з точки зору задачі про найгіршу похибку інтегрування.

В підрозділі 5.1 запропоновано означення і досліджено деякі властивості поняття гіперрівномірності на d -вимірному торі $\mathbb{T}_\Lambda$.

Нехай $\Lambda = \mathbb{A}\mathbb{Z}^d$ — ґратка в $\mathbb{R}^d$, утворена деякою несингулярною квадратною матрицею $A = [v_1, \dots, v_d]$. Далі, позначимо через $\Omega_\Lambda := \left\{ w : w = \sum_{j=1}^d \alpha_j v_j, \alpha_j \in [0, 1), j = 1, 2, \dots, d \right\}$ фундаментальну множину фактор-простору $\mathbb{T}_\Lambda = \mathbb{R}^d / \Lambda$, тобто, набору множин вигляду $\{\Omega_\Lambda + v, v \in \Lambda\}$.

Через $B(\mathbf{x}, R)$ позначимо Евклідову кулю радіусом R і з центром $\mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$.

Означення 5.1. Послідовність точкових множин $(X_N)_{N \in \mathbb{A}}$ називають рівномірно розподіленою на Ω_Λ , якщо для всіх куль $B(\mathbf{x}, R)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $R \in [0, \frac{1}{2} \text{diam}(\mathbb{T}_\Lambda)]$ виконується співвідношення

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{1}_{B(\mathbf{x}, R)}(\mathbf{x}_j) = \text{Vol}(B(\mathbf{x}, R)). \text{ Тут } \text{diam}(\mathbb{T}_\Lambda) := \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega_\Lambda} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Варто зазначити, що дисперсія ймовірнісного точкового процесу для відкритих куль радіуса R визначається за допомогою формули

$$V(X_N, R) := \mathbb{E} \left(\int_{\Omega_\Lambda} \left(\sum_{j=1}^N \mathbb{1}_{B(\mathbf{x}, R)}(\mathbf{x}_j) - N \text{Vol}(B(\mathbf{x}, R)) \right)^2 d\mu(\mathbf{x}) \right).$$

Аналогічно до означення гіперрівномірності послідовностей точкових множин на одиничній сфері, означимо гіперрівномірність послідовностей точкових множин на d -вимірному торі у трьох режимах.

Означення 5.3. (Гіперрівномірність). Нехай $(X_N)_{N \in \mathbb{N}}$ — послідовність точкових множин на Ω_Λ . Цю послідовність називають

- гіперрівномірною для великих куль, якщо

$$V(X_N, R) = o(N) \quad N \rightarrow \infty$$

для всіх $R \in (0, \frac{1}{2} \text{diam}(\mathbb{T}_\Lambda))$;

- гіперрівномірною для малих куль, якщо

$$V(X_N, R_N) = o(N \text{Vol}(B(\mathbf{x}, R_N))) \quad \text{при } N \rightarrow \infty$$

і послідовність $(R_N)_{N \in \mathbb{N}}$ така, що

$$(1) \lim_{N \rightarrow \infty} R_N = 0 \quad (2) \lim_{N \rightarrow \infty} N \text{Vol}(B(\mathbf{x}, R_N)) = \infty, \text{ (ця умова еквівалентна до умови } R_N N^{\frac{1}{d}} \rightarrow \infty);$$

- гіперрівномірною для куль проміжного розміру, якщо

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} V(X_N, tN^{-\frac{1}{d}}) = \mathcal{O}(t^{d-1}) \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

В підрозділі 5.1 встановлено, що гіперрівномірні точкові множини є рівномірно розподілені на d -вимірному торі у випадку великих куль, малих куль та куль проміжного розміру відповідно. Доведено, що послідовності QMC-дизайнів для класів Соболева є гіперрівномірними. Також доведено наступні теореми:

Теорема 5.5. *Точковий процес стратифікованих вибірок є гіперрівномірним у всіх трьох режимах.*

Теорема 5.6. *Детермінантовий точковий процес є гіперрівномірний для великих куль і малих куль. Для куль проміжного розміру має місце слабша (у порівнянні з гіперрівномірністю) властивість*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} V(X_N, tN^{-\frac{1}{d}}) = \mathcal{O}(t^{d-1} \ln t).$$

В підрозділі 5.2 побудовано поліноміальні решіткові кубатурні формули, які вписуються в концепцію так званих методів квазі Монте-Карло (QMC методів), за допомогою методу, що збирає твірний вектор поліномів $\mathbf{g} \in (\mathbb{F}_b[x])^d$ покомпонентно-поцифровим, так званим CBC-DBD (component by component, digit by digit) способом.

Нехай $\gamma = (\gamma_j)_{j \geq 1}$ — незростаюча послідовність додатних дійсних чисел. Для підмножини $\mathbf{u} \subseteq \{1:d\} := \{1, \dots, d\}$ покладемо $\gamma_{\mathbf{u}} := \prod_{j \in \mathbf{u}} \gamma_j$ і, крім того, будемо вважати, що $\gamma_{\emptyset} = 1$, де $\emptyset$ — порожня множина. З очевидних причин ваги $\gamma_{\mathbf{u}}$ називають вагами добутку.

Для простої основи $b \geq 2$ і заданого параметра гладкості $\alpha \geq 1$, покладемо $\psi_b(k) := \lfloor \log_b(k) \rfloor$ для $k \in \mathbb{N}$ і для $d \in \mathbb{N}$, цілочисельного вектора $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{N}_0^d$ і послідовності ваг $\gamma = (\gamma_j)_{j \geq 1}$, означимо вагові спадні функції $r_{\alpha, \gamma}(\mathbf{k}) = \gamma_{\text{supp}(\mathbf{k})}^{-1} \prod_{j \in \text{supp}(\mathbf{k})} b^{\alpha \psi_b(k_j)}$ з $\text{supp}(\mathbf{k}) := \{j \in \{1:d\} : k_j \neq 0\}$.

Для дійсного $\alpha > 1$ і послідовності строго додатніх ваг $\gamma = (\gamma_j)_{j \geq 1}$, ваговий простір Уолша означають наступним чином:

$$W_{d, \gamma}^{\alpha} := \{f \in L_2([0, 1]^d) : \|f\|_{W_{d, \gamma}^{\alpha}} := \sup_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} |\hat{f}(\mathbf{k})| r_{\alpha, \gamma}(\mathbf{k}) < \infty\},$$

де $\hat{f}(\mathbf{k}) := \int_{[0,1]^d} f(\mathbf{x}) \overline{\text{wal}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})} d\mathbf{x}$ — $\mathbf{k}$ -ті коефіцієнти Уолша функції f , а $\text{wal}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$ — $\mathbf{k}$ -та функція Уолша за основою b .

Щоб оцінити якість QMC методів у вагових просторах Уолша використовують найгіршу похибку інтегрування $\text{wse}(Q_{b^m,d}[P]; W_{d,\gamma}^\alpha)$, де $P = P(\mathbf{g}, p)$ — поліноміальна решітка b^m точок $\mathbf{x}_n \in [0,1]^d$, породжена твірним вектором $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_d) \in (\mathbb{F}_b[x])^d$.

Підрозділ 5.2 містить CBC-DBD алгоритм побудови твірних векторів поліноміальних решіткових точкових множин, який складається з двох циклів. Зовнішній цикл, в якому будуються різні компоненти, і внутрішній, в якому будуються коефіцієнти (цифри) кожної компоненти.

Для точок, отриманих за допомогою CBC-DBD алгоритму знайдено оцінку зверху для найгіршої похибки інтегрування. Зокрема, в теоремі 5.13 підрозділу 5.2 було показано, що для простого числа b , $m, d \in \mathbb{N}$ з $m \geq 4$, $N = b^m$, і ваг добутку $\gamma = (\gamma_u)_{u \subseteq \{1:d\}}$, де $\gamma_u = \prod_{j \in u} \gamma_j$, $\gamma_j > 0$, для яких виконується оцінка $\sum_{j \geq 1} \gamma_j < \infty$, для довільних $\delta > 0$, $\alpha > 1$ і твірного вектора $\mathbf{g}$, отриманого за допомогою зазначеного вище алгоритму, який застосований до вагової послідовності $\boldsymbol{\eta} = \gamma = (\gamma_j)_{j \geq 1}$, має місце оцінка

$$\text{wse}(Q_{b^m,d}[\mathbf{g}]; W_{d,\gamma}^\alpha) \leq \frac{1}{N^\alpha} (C(\gamma^\alpha) + \bar{C}(\gamma, \delta) N^{\alpha\delta}),$$

з додатними константами $C(\gamma^\alpha)$ і $\bar{C}(\gamma, \delta)$, які не залежать від d і N .

В підрозділі 5.3 розглянуто альтернативний спосіб покомпонентної побудови кубатурних формул, який не залежить від гладкісного параметра α класів $W_{d,\gamma}^\alpha$. На відміну від CBC-DBD алгоритму, цей алгоритм містить лише один цикл.

Для точок, отриманих за допомогою CBC алгоритму вказано оцінку зверху для найгіршої похибки інтегрування.

Хоча результати підрозділів 5.2–5.3 не містять положень, які вносяться на захист, вони наведені з метою більш повного висвітлення високої ефективності поліноміальних решіткових кубатурних формул QMC-методів, у створенні яких здобувачка брала безпосередню участь. Ці результати можуть знайти широке застосування при вирішенні багатьох прикладних проблем.

Наприкінці дисертації наведено висновки.

У додатках А–К наведені таблиці, допоміжні відомості, доведення лем 2.1–2.2, твердження 2.2, наслідків 2.4–2.6. Список наукових

праць, де опубліковано результати дисертації, й інформацію щодо їхньої апробації наведено у додатку Л.

ВИСНОВКИ

Основні результати дисертації можна сформулювати таким чином:

— Знайдено асимптотичні рівності для точних верхніх меж наближень сумами Фур'є в рівномірній метриці на класах 2π -періодичних функцій, які представляються у вигляді згорток функцій, які належать до одиничних куль просторів L_p , з узагальненими ядрами Пуассона.

— Знайдено асимптотичні рівності для точних верхніх меж наближень сумами Фур'є в метриках просторів Лебега на класах узагальнених інтегралів Пуассона періодичних функцій, які належать одиничній кулі простору L_1 .

— Встановлено нерівності типу Лебега, на множинах 2π -періодичних функцій f , котрі задаються (ψ, β) -інтегралами від функцій φ із L_1 , в яких рівномірні норми відхилень сум Фур'є виражаються через найкращі наближення в середньому тригонометричними поліномами функцій φ . Доведено асимптотичну непокращуваність одержаних оцінок за умови, коли послідовності $\psi(k)$ спадають до нуля швидше за довільну степеневу функцію.

— Встановлено асимптотичні рівності для точних верхніх меж рівномірних наближень сумами Фур'є на класах (ψ, β) -інтегралів від функцій φ , що належать одиничній кулі з простору L_1 у випадку, коли послідовності спадають швидше за довільну степеневу функцію і повільніше за геометричну прогресію.

— Встановлено асимптотично непокращувані нерівності типу Лебега для 2π -періодичних функцій f , які означаються узагальненими інтегралами Пуассона функцій φ з L_p , в яких рівномірні норми відхилень функцій від їх частинних сум Фур'є виражаються через найкращі наближення функцій φ в метриці простору L_p .

— Отримано точні порядкові оцінки для наближень сумами Фур'є, найкращих наближень та найкращих тригонометричних наближень в інтегральних метриках класів 2π -періодичних функцій, чий (ψ, β) -похідні належать до одиничної кулі простору L_∞ .

— Встановлено асимптотично непокращувані інтерполяційні аналоги нерівностей типу Лебега для узагальнених інтегралів Пуассона функцій φ з простору L_p , $1 \leq p \leq \infty$. В зазначених нерівностях мо-

дулі відхиленя інтерполяційних поліномів Лагранжа при кожному $x \in \mathbb{R}$ виражаються через найкращі наближення $E_n(\varphi)_{L_p}$ функцій φ тригонометричними поліномами в L_p -метриках.

— Знайдено асимптотичні рівності для точних верхніх меж поточкових наближень інтерполяційними тригонометричними поліномами Лагранжа на класах $C_{\beta,p}^{\alpha,r}$ узагальнених інтегралів Пуассона функцій, що належать одиничним кулям просторів L_p , $1 \leq p \leq \infty$.

— Встановлено інтерполяційні аналоги нерівностей типу Лебега на множинах $C_{\beta}^{\psi} L_1$ 2π -періодичних функцій f , котрі задаються згортками твірного ядра $\Psi_{\beta}(t)$ з функціями φ із L_1 . Показано, що коли послідовності модулів коефіцієнтів Фур'є цього ядра спадають до нуля швидше за довільну степеневу функцію, отримані нерівності в ряді важливих випадків є асимптотично точними.

— Встановлено асимптотичні рівності для точних верхніх меж поточкових наближень інтерполяційними тригонометричними поліномами на класах згорток твірного ядра Ψ_{β} із функціями φ , що належать одиничній кулі з простору L_1 , у випадку коли послідовності модулів коефіцієнтів Фур'є цього ядра спадають до нуля швидше за довільну степеневу функцію.

— Отримано оцінки знизу та зверху для найгіршої похибки інтегрування на одиничній сфері $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$, $d \geq 2$, на модифікованих класах типу Соболева $\mathbb{H}^{\frac{d}{2},\gamma}(\mathbb{S}^d)$, $\gamma > \frac{1}{2}$, з критичним показником $\frac{d}{2}$ та додатковим логарифмічним множником. Встановлено оцінку зверху для найгіршої похибки інтегрування, для сферичних t -дизайнів, а також оцінку знизу найгіршої похибки інтегрування для довільної точкової множини.

— Знайдено асимптотичні рівності для дискретних s -енергій Рісса та логарифмічної енергії для послідовностей добре розподілених t -дизайнів та стратифікованих вибірок на одиничній сфері.

— Встановлено двосторонні оцінки для мінімальних s -енергій, енергій Рісса, дискретної логарифмічної енергії та енергії Гріна на проєктивних просторах $\mathbb{FP}^{d-1}$ над скалярними областями $\mathbb{F}$ дійсних чисел, комплексних чисел, кватерніонів чи октоніонів. Записано оцінки в загальному вигляді для всіх чотирьох проєктивних просторів: дійсного, комплексного проєктивних просторів, проєктивного простору кватерніонів та простору Келі через їх параметри.

— Означено поняття гіперрівномірності послідовностей точкових множин на d -вимірному торі $\mathbb{T}_d$ для великих і малих куль та куль проміжного розміру. Встановлено, що гіперрівномірні точкові мно-

жини є рівномірно розподілені на d -вимірному торі. Досліджено на гіперрівномірність послідовності QMC-дизайнів класів Соболева $W^{\alpha,2}(\mathbb{T}_\Lambda)$, ймовірнісні точкові процеси (відповідно до стратифікованих вибірок) і деякі детермінантові точкові процеси для великих і малих куль та куль проміжного розміру на d -вимірному торі.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк. Оцінки наближень інтерполяційними тригонометричними поліномами на класах згортки періодичних функцій високої гладкості. Нелінійні коливання, **27** (1), 117–140. <http://doi.org/10.3842/nosc.v27i1.1448>
2. A. Anderson, M. Dostert, P. J. Grabner, R. W. Matzke, T. A. Stepaniuk. Riesz and Green energy on projective spaces. Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B 10, 2023, 1039–1076. <https://doi.org/10.1090/btran/161> (SJR — **Q1**)
3. A. S. Serdyuk, T. A. Stepanyuk. Approximation of generalized Poisson integrals by interpolating trigonometric polynomials. Ukrainian Math. J., **75** (7), 2023, 1081–1107. <https://doi.org/10.1007/s11253-023-02248-w>, translation of Ukrain. Mat. Zh., **75** (7), 2023, 946–969. (SJR — **Q3**)
4. A. S. Serdyuk, T. A. Stepanyuk. Uniform approximations by Fourier sums on the sets of convolutions of periodic functions of high smoothness. Ukrainian Math. J., **75** (4), 2023, 621–651. <https://doi.org/10.1007/s11253-023-02220-8>, translation of Ukrain. Mat. Zh., **75** (4), 2023, 542–567. (SJR — **Q3**)
5. A. Ebert, P. Kritzer, O. Osisiogu, T. Stepaniuk. Component-by-component digit-by-digit construction of good polynomial lattice rules in weighted Walsh spaces. Constr Approx., **56**, 2022, 75–119. <https://doi.org/10.1007/s00365-021-09554-1> (SJR — **Q1**)
6. A. Ebert, P. Kritzer, O. Osisiogu, T. Stepaniuk. Construction of good polynomial lattice rules in weighted Walsh spaces by an alternative component-by-component construction. Mathematics and Computers in Simulation, **192**, 2022, 399–419. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2021.09.007> (SJR — **Q2**)
7. A. S. Serdyuk, T. A. Stepanyuk. About Lebesgue inequalities on the classes of generalized Poisson integrals. Jaen J. Approx., **12**, 2021, 25–40. (SJR — **Q4**)

8. T.A. Stepanyuk. Hyperuniform point sets on flat tori: deterministic and probabilistic aspects. *Constr Approx.*, **52**, 2020, 313–339. <https://doi.org/10.1007/s00365-020-09512-3> (SJR — **Q2**)
9. A.S. Serdyuk, T.A. Stepanyuk. Asymptotically best possible Lebesgue-type inequalities for the Fourier sums on sets of generalized Poisson integrals, *FILOMAT*, **35** (14) , 2020, 4697–4707. <https://doi.org/10.2298/FIL2014697S> (SJR — **Q2**)
10. T.A. Stepanyuk. Estimates for logarithmic and Riesz energies for spherical t-designs. In: Tuffin B., L’Ecuyer P. (eds) *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods. MCQMC 2018. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, **324**. Springer, Cham., 2020. DOI: 10.1007/978-3-030-43465-6_23
11. A.S. Serdyuk, T.A. Stepanyuk. Uniform approximations by Fourier sums on classes of generalized Poisson integrals. *Analysis Mathematica*, 2019, **45** (1), 201–236. <https://doi.org/10.1007/s10476-018-0310-1> (SJR — **Q3**)
12. P.J. Grabner, T.A. Stepanyuk. Upper and lower estimates for numerical integration errors on spheres of arbitrary dimension. *Journal of Complexity*, 2019, **53**, 113–132. <https://doi.org/10.1016/j.jco.2018.11.002> (SJR — **Q2**)
13. P.J. Grabner, T.A. Stepanyuk. Comparison of probabilistic and deterministic point sets on the sphere. *Journal of Approximation Theory*, **239**, 2019, 128–143. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2018.12.001> (SJR — **Q2**)
14. A.S. Serdyuk, T.A. Stepanyuk. Approximations by Fourier sums of classes of generalized Poisson integrals in metrics of spaces L_s . *Ukrainian Math. J.*, **69** (5), 2017, 811–822. <https://doi.org/10.1007/s11253-017-1397-4>, translation of *Ukrain. Mat. Zh.*, **69** (5), 2017, 695–704. (SJR — **Q3**)
15. A.S. Serdyuk, T.A. Stepanyuk. Estimates for approximations by Fourier sums, best approximations and best orthogonal trigonometric approximations of the classes of (ψ, β) -differentiable functions. *Bulletin of the Łódź Society of Sciences and Arts, Series: Researches on Deformations*, **66** (2), 2016, 35–43.
16. T.A. Stepanyuk. Order estimates of best orthogonal trigonometric approximations of classes of infinitely differentiable functions, 14

- pages. arxiv.org/abs/1812.06475
17. A. S. Serdyuk, T. A. Stepanyuk. Approximation by interpolation trigonometric polynomials on the sets of convolutions. The International conference, devoted to 145th birthday of Hans Hann, September 23-27, 2024, Chernivtsi, Ukraine: Abstracts, P. 170-171.
 18. A. S. Serdyuk, T. A. Stepanyuk. Approximation by interpolation trigonometric polynomials on the sets of infinitely differentiable functions. The international conference “Algebraic and geometric methods of analysis”, May 27-30, 2024, Odessa, Ukraine: Abstracts, P. 106-108.
 19. A. S. Serdyuk, T. A. Stepanyuk. Estimates of approximations by interpolation trigonometric polynomials of functions on the classes of convolutions. The International Workshop “Current Trends in Analysis and Approximation Theory”, July 18, 2023, Roma, Italy: Abstracts, P. 71-72.
 20. А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк. Рівномірні наближення сумами Фур’є на класах згорток періодичних функцій високої гладкості. Збірник тез міжнар. наук. конф. “Сучасні проблеми механіки та математики – 2023”, 23-25 травня 2023 р., Львів, Україна, С. 309-310.
 21. А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк. Розв’язок задачі Колмогорова-Нікольського для інтерполяційних поліномів Лагранжа на класах узагальнених інтегралів Пуассона. Збірник тез міжнародної наукової конференції “Algebraic and geometric methods of analysis”, 29 травня – 1 червня 2023 р., Одеса, Україна, С. 139-140.
 22. A. S. Serdyuk, T. A. Stepanyuk. Lebesgue type inequalities on the sets of (ψ, β) -differentiable functions. Proceedings of the conference “Modern Problems of Mathematics and Mechanics”, April 26-28, 2023, Baku, Azerbaijan, P. 367-368.
 23. А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк. Рівномірні наближення сумами Фур’є на множинах згорток періодичних функцій високої гладкості. Збірник тез міжнар. наук. конф. “Прикладна математика та інформаційні технології”, Чернівці, 22-24 вересня 2022 року: Збірник матеріалів конференції, С. 236-237.
 24. A. S. Serdyuk, T. A. Stepanyuk. Approximation of generalized Poisson integrals by interpolation trigonometric polynomials. International conference “Theory of approximation functions and its applicati-

- ons", June 6–10, 2022, Lutsk, Ukraine: Abstracts, P. 24–25.
25. A. S. Serdyuk, T. A. Stepanyuk. Approximation of generalized Poisson integrals by trigonometric polynomials. The International Online conference "Current trends in abstract and applied analysis", May 12 – 15, 2022, Ivano-Frankivsk, Ukraine: Abstracts, P. 75–76.
 26. A. S. Serdyuk, T. A. Stepaniuk. Asymptotically best possible Lebesgue-type inequalities for the Fourier sums on the sets $C_{\beta}^{\alpha, r} L_p$. (Hyper)Complex Seminar 2021 in memoriam of Prof. Julian Lawrynowicz, November 11-14, Program and abstracts, P. 53.
 27. A. S. Serdyuk, T. A. Stepanyuk. Uniform approximations by Fourier sums on classes (ψ, β) -differentiable functions. 9th International online conference on "Mathematical Analysis, Differential Equation & Applications MADEA 9", Conference Abstracts. Kyrgyz-Turkish Manas University (Bishkek), June 21-25, 2021, P. 75
 28. A. S. Serdyuk, T. A. Stepanyuk. Asymptotically best possible Lebesgue-type inequalities on the sets $C_{\beta}^{\alpha, r} C$, International Online Workshop on Approximation Theory, March 19-21, 2021, Ivano-Frankivsk, Ukraine, Book of abstracts, P. 35-36.
 29. A. S. Serdyuk, T. A. Stepanyuk. Lebesgue inequalities on the classes of generalized Poisson integrals in the uniform metric. XI International Skorobahatko mathematical conference, October 26-30, 2020, Lviv, Abstracts, P. 104
 30. A. Ebert, P. Kritzer, O. Osisiogu, T. Stepaniuk. Construction algorithm for polynomial lattice Rules in weighted Walsh spaces. 14th International Conference in Monte Carlo & Quasi-Monte Carlo Methods in Scientific Computing, August 10-14, Abstracts, 2020, Oxford, Online, P. 81.
 31. A. S. Serdyuk, T. A. Stepaniuk. Asymptotically best possible Lebesgue inequalities on the classes of generalized Poisson integrals. International scientific online conference "Algebraic and Geometric Methods of Analysis", May 26 – 30, 2020, Odesa, Ukraine. Book of abstracts, P. 63-64.
 32. A. S. Serdyuk, T. A. Stepaniuk. Uniform approximations by Fourier sums on classes of convolutions of periodic functions. Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 26 лютого – 1 березня, 2020

- року). Тези доповідей. — Івано-Франківськ: ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”, 2020, С. 72–73.
33. A.S. Serdyuk, T.A. Stepaniuk. Asymptotically best possible Lebesgue-type inequalities for the Fourier sums in uniform metric. Всеукраїнська наукова конференція “Теорія наближень та її застосування”, 3-5 жовтня 2019, Дніпро, Україна. Тези доповідей. Дніпро, 2019, P. 20.
 34. T. Stepaniuk. Deterministic and probabilistic point sets on the unit sphere, Book of abstracts, Seminar for Applied Mathematics, ETH September 9-13, 2019, Zurich, Switzerland, P. 30.
 35. T. Stepaniuk. Hyperuniformity on flat tori. The 15th international symposium on orthogonal polynomials, Special Functions and Applications (OPSFA) 22-25 July, 2019 Hagenberg, Austria, Abstracts, P. 69.
 36. T. Stepaniuk. Hyperuniformity on flat tori. International Congress on industrial and applied Mathematics, July 15-19, 2019, Valencia, Spain, Abstracts, P. 77.
 37. T. Stepaniuk. Hyperuniform point sets on flat tori. The 12th International Conference on Monte Carlo Methods and Applications, July 8-12, 2019, Sydney, Australia, Abstracts, P. 111.
 38. A.S. Serdyuk, T.A. Stepaniuk. Asymptotically best possible Lebesgue-type inequalities for the Fourier sums. International Conference “Functional Methods in Approximation Theory, Differential Equations and Numerical Mathematics IV”, Svityaz’ village, Volyn’ region, Ukraine, June 20 – 26, 2019, Book of abstracts, P. 27-28.
 39. A.S. Serdyuk, T.A. Stepaniuk. Lebesgue-type inequalities for the Fourier sums on the sets of generalized Poisson integrals. Final AMMODIT Conference “Mathematics for Life Sciences”, March 18-22, 2019, Kyiv, Ukraine, Book of abstracts, P. 47-48.
 40. T. Stepaniuk. Hyperuniform point sets on flat tori. Final AMMODIT Conference “Mathematics for Life Sciences“, March 18-22, 2019, Kyiv, Ukraine, Book of abstracts, P. 50.
 41. A.S. Serdyuk, T.A. Stepaniuk. About asymptotically best possible Lebesgue-type inequalities for the Fourier sums on sets of generali-

- zed Poisson integrals. Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 25 лютого –1 березня, 2019 року). Тези доповідей. — Івано-Франківськ: ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”, 2019, Р. 81–82.
42. T. Stepaniuk. Numerical integration errors, probabilistic and deterministic point sets on sphere. RICAM Special Semester on Multivariate Algorithms and their Foundations in Number Theory, Workshop: Discrepancy, Linz, Austria, November 30, 2018, Abstracts, P. 6.
 43. P. Grabner, T. Stepaniuk. Estimates for numerical integration errors on unit spheres of arbitrary dimension. 13th international conference in Monte Carlo & Quasi-Monte Carlo methods in scientific computing, Rennes, France, July 1-6, 2018, Abstracts, P. 70.
 44. A. S. Serdyuk, T. A. Stepaniuk. Lebesgue-type inequalities for the Fourier sums on classes of generalized Poisson integrals. International Conference “Mathematical Analysis, Differential Equation & Applications – MADEA 8”, Cholpon-Ata (Issyk-Kul), KYRGYZ REPUBLIC, June 17–23, 2018, Abstracts. Bishkek: KTMU, 2018, P. 112.
 45. A. S. Serdyuk, T. A. Stepaniuk. Lebesgue-type inequalities on classes of generalized Poisson integrals approximation by Fourier sums of generalized Poisson integrals in integral metric. Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: Всеукраїнська наукова конференція, Ворохта, 27 лютого–2 березня 2018 р. Тези доповідей. — Івано-Франківськ: ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”, 2018, С. 81–82.
 46. A. S. Serdyuk, T. A. Stepaniuk. Approximation by Fourier sums of generalized Poisson integrals in integral metric. Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: всеукраїнська наукова конференція, Ворохта, 22–25 лютого 2017 р. Тези доповідей. — Івано-Франківськ: ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”, 2017, С. 120–121.
 47. A. S. Serdyuk, T. A. Stepaniuk. Asymptotic estimates of approximations by Fourier sums of generalized Poisson integrals in integral metrics поліномами. XII літня школа “Алгебра, топологія, аналіз”, 10–23 липня 2017 р., село Колочава, Закарпатська обл., Україна:

- Тези доповідей. Київ : Ін-т математики НАН України, 2017, С. 50.
48. A. S. Serdyuk, T. A. Stepaniuk. Approximations of generalized Poisson integrals by Fourier sums. International conference “Theory of approximations of functions and its applications”, May, 28–June 3, 2017, Slovyansk, Ukraine, Abstracts, P. 34.
 49. А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк. Наближення сумами Фур’є на класах узагальнених інтегралів Пуассона в рівномірній метриці. XI літня школа “Алгебра, топологія, аналіз”, 1–14 серпня 2016 р., Одеса, Україна. Тези доповідей, Київ: Ін-т математики НАН України, 2016, С. 111–112.
 50. A. S. Serdyuk, T. A. Stepaniuk. Approximation by Fourier sums on the classes of generalized Poisson integrals in uniform metric. 7th European Congress of Mathematics, Berlin, July 18–22, 2016, Abstracts, P. 403.
 51. A. S. Serdyuk, T. A. Stepaniuk. Estimates for approximations by Fourier sums and best approximations of the classes of (ψ, β) -differentiable functions. “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”: всеукраїнська наукова конференція, Ворохта, 24–27 лютого 2016 р. Тези доповідей. — Івано-Франківськ: ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”, 2016, С. 134–135.

АНОТАЦІЇ

Степанюк Т. А. Дослідження апроксимативних характеристик функціональних множин та екстремальних властивостей багатовимірних точкових конфігурацій. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 “математичний аналіз” (111 — математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2025.

В дисертаційній роботі на класах 2π -періодичних функцій високої гладкості, які задаються за допомогою поняття (ψ, β) -похідної, встановлено асимптотичні рівності для похибок наближень частинними сумами Фур’є, а також інтерполяційними тригонометричними поліномами Лагранжа. Встановлено асимптотично непокрашувані нерівності типу Лебега для сум Фур’є, а також для інтерполяційних тригонометричних поліномів на множинах періодичних функцій високої гладкості, (ψ, β) -похідні яких належать просторам L_p .

На одиничній сфері встановлено двосторонні оцінки для найгіршої похибки інтегрування для певних класів неперервних функцій та оцінки дискретних енергій для добре розподілених t -дизайнів. Вивчено питання гіперрівномірності точкових множин на d -вимірному торі. Також досліджено властивості точкових множин (зокрема QMC-дизайнів, детермінантних точкових процесів) в контексті мінімізації найгіршої похибки інтегрування та мінімізації дискретних енергій на одиничному d -вимірному кубі та двоточкових однорідних просторах.

В дисертації означено поняття гіперрівномірності послідовностей точкових множин на d -вимірному торі $\mathbb{T}_\Lambda$ та досліджено на гіперрівномірність послідовності QMC-дизайнів класів Соболева $W^{\alpha,2}(\mathbb{T}_\Lambda)$ при всіх $\alpha > \frac{d}{2}$, ймовірнісні точкові процеси на основі стратифікованих вибірок і деякі детермінантові точкові процеси.

Ключові слова: сума Фур’є, узагальнені інтеграли Пуассона, (ψ, β) -похідна, нерівності типу Лебега, інтерполяційні тригонометричні поліноми Лагранжа, задача Колмогорова-Нікольського, найкраще тригонометричне наближення, дискретна енергія, сферичний t -дизайн, детермінантні точкові процеси, найгірша похибка інтегрування, гіперрівномірність, методи квазі-Монте-Карло, проєктивні простори, простори Уолша.

Stepaniuk T. A. Investigation of approximation characteristics of functional and extremal properties of multivariate point configurations. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.01 “Mathematical Analysis” (111 – Mathematics). — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2025.

In the dissertation, asymptotic equalities are established for approximation errors by partial Fourier sums and by Lagrange trigonometric interpolation polynomials on classes of 2π -periodic functions of high smoothness defined via the concept of the (ψ, β) -derivative. Asymptotically unimprovable Lebesgue-type inequalities are obtained for Fourier sums as well as for interpolation trigonometric polynomials on sets of periodic functions of high smoothness whose (ψ, β) -derivatives belong to the spaces L_p .

On the unit sphere, two-sided estimates are obtained for the worst-case integration error for certain classes of continuous functions, as well as estimates of discrete energies for well-distributed t -designs. The problem of hyperuniformity of point sets on the d -dimensional torus is investigated. Furthermore, the properties of point sets (in particular, QMC designs and determinantal point processes) are studied in the context of minimizing the worst-case integration error and minimizing discrete energies on the unit d -dimensional cube and on two-point homogeneous spaces.

The dissertation introduces the concept of hyperuniformity of the sequence of point sets on the d -dimensional torus $\mathbb{T}_\Lambda$ and investigates the hyperuniformity of QMC-designs of the Sobolev classes $W^{\alpha,2}(\mathbb{T}_\Lambda)$ for all $\alpha > \frac{d}{2}$, probabilistic point processes based on jittered samplings, and some determinantal point processes.

Key words: Fourier sum, generalized Poisson integrals, (ψ, β) -derivative, Lebesgue-type inequalities, Lagrange interpolation trigonometric polynomials, Kolmogorov-Nikolsky problem, best trigonometric approximation, discrete energy, spherical t -design, determinantal point processes, worst case integration error, hyperuniformity, quasi-Monte Carlo methods, projective spaces, Walsh spaces.