

Голові

разової спеціалізованої вченої ради
Інституту математики НАН України
доктору фізико-математичних наук,
професору, академіку НАН України,
завідувачу відділу алгебри і топології
Інституту математики НАН України
Максименку Сергію Івановичу

РЕЦЕНЗІЯ

на дисертаційну роботу **Єлагіна Володимира Олексійовича** на тему:
“Неперервні структурно фрактальні функції, означені
в термінах Q_s -зображення та негa- Q_s -зображення чисел”,
подану на здобуття ступеня доктора філософії
у галузі знань 11 Математика та статистика
за спеціальністю 111 Математика

Дисертаційна робота Єлагіна В.О. присвячена неперервним та майже скрізь неперервним функціям, які в кожному як завгодно малому інтервалі області визначення мають всюди щільну множину різного роду особливостей (зокрема диференціального характеру), а також неперервним перетворенням одиничного відрізка, що зберігають хвости зображення чисел у поліосновній системі числення (негa- Q_s -зображення, зокрема негa-двійкове зображення чисел). Функції, що вивчаються, є сингулярними або ніде не монотонними. Спосіб задання функцій по суті є проєктуванням зображення аргументу в зображення значення функцій.

У дисертаційній роботі Єлагіна Володимира Олексійовича представлено широке коло результатів, пов'язаних з різними класами фрактальних функцій, визначених з використанням Q_s -зображення чисел та його знакозмінної модифікації – негa- Q_s -зображення чисел. Це дослідження тісно пов'язане з теорією кодування дійсних чисел засобами скінченного алфавіту, геометрією числових рядів, теорією неперервних функцій зі складною локальною структурою, теорією сингулярних функцій та теорією сингулярних розподілів ймовірностей. Разом з цим центральним об'єктом вивчення є функція.

У першому розділі «**Концептуальні засади дослідження та огляд літератури**», який носить вступний характер, наведено формулювання означень ключових понять, здійснено огляд основних об'єктів вивчення та відомих результатів, на

які спирається автор у своєму дослідженні. Детально розглянуто поняття зображення чисел, зокрема Q_s - та нега- Q_s -зображення чисел, та описано їх геометрію (геометричний зміст цифр зображення, властивості циліндричних множин, метричні співвідношення). Також у цьому розділі висвітлено ключові аспекти, пов'язані із застосуванням таких зображень до конструювання та дослідження фрактальних функцій.

Другий розділ **«Клас неперервних ніде не монотонних функцій, означених в термінах Q_s - зображення чисел»** присвячено двом важливим задачам теорії фрактальних інтерполяційних функцій, що є підкласом самоафінних функцій: обчислення локальних показників Гельдера та вивчення фрактальної структури множин рівнів, зокрема множин точок максимуму та мінімуму. Традиційно фрактальні інтерполяційні функції означаються за допомогою системи афінних перетворень площини або як розв'язки спеціальних систем функціональних рівнянь. Використання в дисертаційному дослідженні Q_s -зображення чисел для означення та вивчення таких функцій (що було запропоновано раніше у роботах Працьовитого М.В., Калашнікова А.В., Панасенка О.Б, Василенко Н.А., Свинчук О.В. та інших) дозволило одержати більш загальні результати стосовно локальних показників Гельдера фрактальних інтерполяційних функцій. З попередніх досліджень було відомо лише про глобальний показник Гельдера таких функцій та їхні локальні показники Гельдера в точках, що мають типові частоти Q_s -цифр (які однакові для майже всіх точок з $[0,1]$ в розумінні міри Лебега). У свою чергу, дисертанту вдалося знайти локальні показники Гельдера фрактальних інтерполяційних функцій в Q_s -бінарних точках та в Q_s -унарних точках, що мають частоти Q_s -цифр, відмінні від типових. Також у розділі представлено результати стосовно геометричної структури множин рівнів, зокрема знайдено достатні умови, за яких множина рівнів є континуальною та містить фрактальну підмножину канторівського типу. Для одного з підкласів фрактальних інтерполяційних функцій вичерпно описано геометричну структуру множин глобальних максимумів та мінімумів, а відповідні умови, за яких ці множини мають ту чи іншу структуру, є необхідними та достатніми.

У третьому розділі **«Функції, визначені в термінах нега-двійкового зображення чисел»** розглянуто нега-двійкове зображення чисел та деякі функції, що важливі для вивчення його геометрії: оператор лівостороннього зсуву цифр, неперервні перетворення відрізка $[0,1]$, що зберігають хвости зображення, а також аналоги функцій Радемахера та рядів Уолша. Окремо варто відзначити доведення континуальності групи неперервних перетворень, що зберігають хвости нега-двійкового зображення.

Четвертий розділ **«Нега- Q_s -зображення чисел та його властивості»** присвячено геометрії нега- Q_s -зображення чисел та спеціальним функціям, визначеним у термінах цього зображення: оператори зсуву цифр, інверсор цифр, перетворення,

що зберігають хвости зображення. Зокрема, встановлено зв'язок між Q_s - та нега- Q_s -зображеннями числа.

П'ятий розділ «**Нескінченні згортки Бернуллі, керовані нега-двійковим рядом**» присвячено застосуванню нега-двійкового зображення чисел в теорії ймовірностей. Для нескінченної згортки Бернуллі, керованої нега-двійковим рядом, доведено, що вона завжди має чистий розподіл, зокрема встановлено критерії, за яких вона має чисто дискретний, чисто абсолютно неперервний або чисто сингулярний розподіл. Також знайдено аналітичний вираз характеристичної функції цієї згортки.

Результати, що представлені в даному дисертаційному дослідженні, є новими. Їх опубліковано в чотирьох статтях в українських фахових наукових виданнях, серед яких одна стаття у виданні, що індексується наукометричною базою Scopus (Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Фізико-математичні науки). Це цілком відповідає вимогам щодо присудження ступеня доктора філософії. За матеріалами дисертації Володимиром Єлагіним було зроблено п'ять доповідей на міжнародних конференціях, три доповіді на всеукраїнських конференціях та на двох семінарах в Інституті математики НАН України.

Суттєвих недоліків у роботі не виявлено, істотних зауважень до формулювань тверджень та їх доведень немає. Наведемо декілька незначних зауважень до оформлення роботи, які, тим не менш, не знижують загального позитивного враження від дисертаційної роботи та її високого наукового рівня.

1. У роботі зустрічається чимало одруківок, граматичних та пунктуаційних помилок, невдалих формулювань. Наприклад: на стор. 33 у формулюванні теореми 1.4 (пункт 2) пропущено частку «не»; на стор. 96 набір додатних дійсних чисел названий цифрами; замість «проектор» слід писати «проектор» (стор.19, 43); на стор. 96, 105 замість «взаємно однозначним» треба писати «взаємно-однозначним» та ін.
2. На с.19 у пункті “Обґрунтування вибору теми дослідження” при згадці математиків, які займалися цією тематикою, в одному переліку деякі прізвища наведено з ініціалами, а інші - без них.
3. Для позначення одиничного відрізка автор використовує одночасно два позначення: $[0,1]$ та $[0; 1]$ (див стор. 18, 28, 29, 31 і т. д.). Тут варто було б дотримуватися єдиного способу позначення.
4. В огляді літератури автору доцільно було б згадати Вітторіо Грюнвальда (Vittorio Grünwald), який вперше увів до розгляду нега-позиційні системи числення (зокрема і нега-двійкову систему з основою -2). Також в першому розділі дисертації наведено деякі твердження (наприклад, лема 1.1), які не знайшли використання у роботі.
5. Хоча дисертаційна робота загалом вдало структурована, разом з цим, на мою думку, третій, четвертий та п'ятий розділи можна було б об'єднати в один

розділ, що присвячений функціям, визначеним у термінах нега- Q_s -зображення чисел та нега-двійкового зображення як його особливого випадку. Також було б доречно закцентувати увагу на принципово нових ефектах, які виникають для нега- Q_s -зображення у порівнянні з Q_s -зображенням чисел.

Вважаю, що дисертаційна робота є завершеним самостійним науковим дослідженням, що оформлено відповідно до вимог, що висуваються до кваліфікаційних робіт на здобуття ступеня доктора філософії. Порушень академічної доброчесності у дисертації та наукових працях В.О. Єлагіна не виявлено.

Дисертація Володимира Олексійовича Єлагіна та пов'язані з нею наукові публікації за актуальністю, науковою новизною та оформленням відповідають спеціальності 111 Математика та задовольняють вимоги постанови № 44 Кабінету Міністрів України від 12 січня 2022 р. «Про затвердження Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», а їх автор заслуговує на присудження ступеня доктора філософії у галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика.

Рецензент:

Провідний науковий співробітник
Інституту математики НАН України,
доктор фізико-математичних наук,
професор

Анатолій СЕРДЮК

19.08.2026 р.