

Голові
разової спеціалізованої вченої ради
Інституту математики НАН України
доктору фізико-математичних наук,
професору, академіку НАН України,
завідувачу відділу алгебри і топології
Інституту математики НАН України
Максименку Сергію Івановичу

ВІДГУК

офіційного опонента Радченка Вадима Миколайовича,
доктора фізико-математичних наук, професора,
на дисертаційну роботу

Слагіна Володимира Олексійовича на тему:

«Неперервні структурно фрактальні функції, означені в термінах Q_s -зображення
та нега- Q_s -зображення чисел»,
подану на здобуття ступеня доктора філософії
у галузі знань 11 Математика та статистика
за спеціальністю 111 Математика

Дана дисертаційна робота присвячена дослідженню деяких нових класів неперервних самоафінних і структурно фрактальних функцій, побудові аналогів ортогональних систем Радемахера-Уолша, а також вивченню ймовірнісних розподілів типу нескінченних згорток Бернуллі та марковських процесів, керованих нега-двійковими рядами.

Сучасний розвиток фрактального аналізу та теорії кодування дійсних чисел тісно пов'язаний із дослідженням математичних об'єктів зі складною локальною структурою, зокрема неперервних ніде не монотонних, ніде не диференційовних, сингулярних та самоафінних функцій. Конструктивні методи побудови таких

функцій традиційно ґрунтуються на використанні різноманітних систем кодування (представлення) дійсних чисел, серед яких ключову роль відіграють позиційні системи зі скінченним та нескінченним алфавітами, класичні s -кові розклади, ланцюгові дроби, а також їхні стохастичні та матричні узагальнення (зокрема, Q_s - та Q_s^* -зображення). Вивченню саме таких систем присвячено дану дисертаційну роботу, і зазначене підтверджує високу актуальність та теоретичну цінність обраного напрямку досліджень.

Робота складається з анотації українською і англійською мовами, переліку скорочень і умовних позначень, вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел (77 найменувань) і додатку, що містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації. Загальний обсяг дисертації — 129 сторінок.

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету, завдання, предмет і методи дослідження, висвітлено наукову новизну, практичне значення отриманих результатів, наведено відомості про особистий внесок здобувача, апробацію матеріалів дисертації та публікації.

Розділ 1 має оглядовий характер. У ньому здобувач систематизує базові відомості про системи кодування дійсних чисел засобами скінченного алфавіту, класичне Q_s -зображення, нега-двійкове зображення та відповідну геометрію циліндричних множин. Наведено необхідний апарат фрактального аналізу, відомості про показники Гельдера, хвостові множини, ортогональні системи Радемахера-Уолша та нескінченні згортки Бернуллі. Огляд написаний грамотно й формує ґрунтовну теоретичну основу для викладу власних результатів у наступних розділах.

Розділ 2 присвячено дослідженню самоафінних функцій, значення яких визначаються за цифровою структурою. Важливим науковим результатом є точне обчислення локальних показників Гельдера функції f у Q_s -унарних точках з існуючими асимптотичними частотами цифр, а також у Q_s -бінарних точках. Досліджено глобальні екстремуми функції f , доведено умови існування континуальних множин рівнів та встановлено, що множина точок максимуму за

відповідних умов має канторівську фрактальну структуру. Крім того, доведено неінваріантність міри Лебега, розмірності Гаусдорфа та топологічної категорії Бера відносно відображення f .

Розділ 3 присвячено вивченню операторів, що діють безпосередньо на цифрову структуру аргументу. Автором узагальнено оператори лівостороннього та правостороннього зсуву цифр і досліджено системи рівнянь для них. Центральним результатом розділу є доведення того, що множина усіх неперервних перетворень відрізка $[0; 1]$, які зберігають хвости нега-двійкового зображення чисел, відносно операції композиції утворює некомутативну континуальну групу, яка містить континуальну підгрупу зростаючих перетворень. Також у розділі побудовано аналоги функцій Радемахера та системи Уолша для нега-двійкового зображення та доведено їхню ортонормованість у просторі $L_2([0, 1])$.

Розділ 4 містить введення нега- Q_5 -зображення як знакозмінного узагальнення класичного Q_5 -кодування. Здобувач досліджує геометрію циліндрів нега- Q_5 -зображення, отримує формули для їхніх довжин і кінців, а також будує оператор перекодування. Введено інверсор цифр нега- Q_5 -зображення та доведено, що він є бієктивним, інволютивним і неперервним перетворенням $[0; 1]$, що зберігає структуру вкладеності циліндрів. Розглянуто кратні оператори зсуву та доведено, що група неперервних перетворень, які зберігають хвости нега- Q_5 -зображень, є нескінченною некомутативною групою.

Розділ 5 присвячено ймовірнісним застосуванням. Для випадкових величин, що представляються рядом з незалежними двійковими цифрами, встановлено повні критерії чисто дискретного, чисто абсолютно неперервного та чисто сингулярного розподілів. Отримано умови, за яких розподіл є рівномірним або експоненціальним. Знайдено явний вигляд характеристичної функції у формі нескінченного добутку та досліджено поведінку її модуля на нескінченності. Також повністю описано спектральні властивості розподілів для випадкових величин, цифри яких утворюють однорідний ланцюг Маркова.

У дисертаційній роботі отримано нові важливі результати. Їхні доведення строгі і достатньо аргументовані. Дослідження є завершеним і самостійним. В тексті є значна кількість прикладів, що ілюструють наведені твердження. Робота має переважно теоретичний характер, а отримані результати можуть бути корисні для подальшого вивчення математичних об'єктів з фрактальними властивостями.

Маю наступні **пропозиції і зауваження до дисертації**:

1. В роботі є кілька посилань на факти з робіт [67], [68], [70] без конкретних номерів тверджень або сторінок. Оскільки ці джерела є досить об'ємними монографіями, це ускладнює використання цих посилань. Варто було б давати їх точніше.

2. На стор. 88 в твердженні теореми 3.5 має бути $(-1)^{|a|+|b|}$ (з сумою потужностей множин a і b), а не $(-1)^{a+b}$.

3. На стор. 103 в останньому доданку аналітичного виразу для η^n має бути $(-1)^{n-1}$, а не $(-1)^n$.

4. На стор. 112 в означенні f_c має бути e^c замість e^x , в означенні φ – e^z замість e^x .

5. На стор. 117 рівняння для знаходження розмірності x записано з очевидною неточністю. При цьому знайдене значення розмірності – правильне.

Проте висловлені зауваження не ставлять під сумнів достовірність отриманих результатів, не впливають на загальну високу оцінку дисертаційної роботи.

Оформлення дисертації відповідає вимогам, затвердженим наказом Міністерства освіти і науки України від 12 січня 2017 р. № 40.

У дисертації та публікаціях, в яких оприлюднено результати дослідження В. О. Єлагіна, не виявлено порушень академічної доброчесності.

Основні результати дослідження достатньо повно висвітлено у 4 статтях у наукових виданнях, внесених до переліку наукових фахових видань України. З них 2 статті — у виданнях, що індексуються міжнародною наукометричною базою Scopus та належать до квартиля Q4 (згідно з класифікацією SCImago

Journal & Country Rank), 3 статті – одноосібні. Також вони пройшли належну апробацію на наукових семінарах і конференціях (8 публікацій у матеріалах українських і міжнародних конференцій).

Таким чином, враховуючи актуальність дослідження, наукову новизну і вагомість отриманих результатів, високий науковий рівень дисертації, якість висвітлення рівень висвітлення результатів дослідження в наукових публікаціях і апробацію на наукових конференціях, вважаю, що дисертація «Неперервні структурно фрактальні функції, означені в термінах Q_s -зображення та нега- Q_s -зображення чисел» відповідає спеціальності 111 Математика і вимогам «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 12 січня 2022 р. № 44, а її автор — Єлагін Володимир Олексійович — заслуговує на присудження ступеня доктора філософії.

Офіційний опонент:

професор кафедри математичного аналізу

Київського національного університету

імені Тараса Шевченка

доктор фізико-математичних наук, професор

Вадим РАДЧЕНКО