



Prof. Dr. Anatolii Zhuchok
Karl-Liebknecht-Str. 24/25
14476 Potsdam
Germany
E-mail: anatolii.zhuchok.1@uni-potsdam.de

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу
Раєвської Марини Юріївни
“Локальні майже-кілець з деякими обмеженнями
на мультиплікативні групи та підгрупи необоротних елементів,
і пов’язані з ними структури”,
представлену на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук за спеціальністю
01.01.06 – алгебра та теорія чисел

Актуальність теми дисертації.

Дисертаційна робота М. Ю. Раєвської присвячена актуальному напрямку сучасної алгебри — теорії майже-кілець. Майже-кілець та модулі над ними є природним нелінійним узагальненням класичних кілець і кільцевих модулів. Універсальним прикладом майже-кілець є множина всіх функцій на довільній групі відносно операцій додавання та суперпозиції функцій. Історія цієї теорії бере початок з 1905 року від фундаментальної праці Л. Діксона. Важливість дослідження структур такого типу зумовлена їхнім глибоким зв’язком із теорією многовидів груп, що вперше було показано у працях Г. Нейман. Теорія дистрибутивно-породжених майже-кілець отримала значний поштовх після публікації А. Фрьоліхом серії праць у 1958–1962 роках. Загальній теорії майже-кілець присвячені монографії Пільца, Мелдрума, Клея, К. Ферреро та Г. Ферреро, Локхарта. До проблематики теорії майже-кілець звертались Курош, Плоткін та їх учні. Пізніше з’явилися роботи представників київської алгебраїчної школи, пов’язані з вивченням групових відображень та майже-кілець перетворень (Калужнін, Суцанський, Кириченко, Усенко та інші). Теорія майже-кілець сформувалася як самостійний напрям сучасної алгебри, що має численні зв’язки з теорією груп, теорією кілець, геометрією, теорією розв’язків

рівнянь Янга–Бакстера та комп'ютерною алгеброю. Однією з центральних проблем цієї теорії є опис локальних майже-кілець із заданими властивостями мультиплікативних та адитивних груп, а також класифікація таких структур та дослідження їх груп. Незважаючи на значний розвиток теорії майже-полів і майже-кілець, багато класифікаційних задач у цьому напрямі залишаються відкритими.

Дисертацію М. Ю. Раєвської присвячено вивченню локальних майже-кілець з деякими обмеженнями на мультиплікативні групи та підгрупи необоротних елементів, класифікації локальних майже-кілець та дослідженню їх адитивних груп. Отримані авторкою результати є своєчасними та актуальними, оскільки вони спрямовані на розв'язання важливих задач теорії майже-кілець.

Структура та зміст дисертаційної роботи.

Дисертація має традиційну структуру та включає перелік умовних позначень, вступ, сім розділів основного тексту, висновки, список використаних джерел (121 найменування) і додаток А зі списком публікацій автора та відомостями про апробацію результатів. Загальний обсяг роботи — 318 сторінок друкованого тексту, з яких 14 сторінок відведено під список використаних джерел і ще 14 — під додаток.

Розглянемо детальніше зміст кожного з семи розділів дисертації.

Розділ 1. Наведено огляд літератури за темою дисертації. На основі проведеного огляду автор обґрунтовує, що вплив мультиплікативної групи та підгрупи необоротних елементів на будову локального майже-кілеця досліджено недостатньо, а класифікаційні задачі для окремих класів майже-кілець залишаються актуальними.

Розділ 2. Встановлено взаємозв'язок між нільпотентністю мультиплікативної групи локального майже-кілеця та його адитивною групою. Класифіковано локальні майже-кілеця (крім полів) з мультиплікативною групою Шмідта. Знайдено адитивні групи локальних майже-кілець порядків 32 і 128 з мультиплікативними групами Міллера–Морено, а також досліджено скінченні p -групи з циклічною підгрупою індексу p як адитивні групи локальних майже-кілець. Отримано локальні майже-кілеця, що містяться в бібліотеці пакету SONATA (GAP).

Розділ 3. Проведено аналіз скінченних неабелевих 2-породжених p -груп із циклічним комутантом. Доведено відсутність майже-кілець з одиницею з

адитивною групою $G(p^m, p^n)$ з $p > 2$ і $2 \leq m \leq n$. Досліджено локальні майже-кільця з розщепленою метациклічною адитивною групою, а також отримано критерій існування локальних майже-кілець на групах типу (B.1). Показано, що індекс підгрупи необоротних елементів останніх майже-кілець в адитивній групі дорівнює p .

Розділ 4. Введено поняття напівдистрибутивних майже-кілець з одиницею та досліджено їхні властивості. Охарактеризовано напівгрупу необоротних елементів локальних майже-кілець з адитивною абелевою групою типу $(2^m, 2^n)$ з $m \geq n > 1$.

Розділ 5. За допомогою пакету YangBaxter отримано класифікацію брейсів (до порядку 32) та косих брейсів (до порядку 16) відповідно до адитивних або мультиплікативних груп, які є p -групами Міллера–Морено. Наведено додаткові дані про майже-кільцеві брейси в контексті пакету LocalNR.

Розділ 6. Розроблено алгоритм побудови скінченних локальних майже-кілець та реалізовано низку функцій для локальних майже-кілець з пакета LocalNR, а також функцій для груп з пакета LocalNR.

Розділ 7. Отримано класифікацію локальних майже-кілець на 2-породжених групах порядків 64 і 243, а також порядків 81 і 1331. Досліджено ендотичні 2-породжені групи порядків 64 та 256.

Теоретичне та практичне значення роботи.

Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи, а також методика їх отримання, можуть бути використані для подальшого розвитку теорії майже-кілець, теорії груп, теорії брейсів та системи комп'ютерної алгебри GAP.

Новизна отриманих результатів.

Наукова новизна одержаних результатів, які виносяться на захист, полягає в наступному:

- Встановлено зв'язок між нільпотентною мультиплікативною групою та адитивною групою в локальному майже-кільці.
- Класифіковано локальні майже-кільця, які не є полями та мультиплікативна група яких є групою Шмідта.

- Знайдено адитивні групи локальних майже-кілець порядку 32 та 128 з мультиплікативними групами Міллера–Морено.
- Вивчено скінченні p -групи з циклічною підгрупою індексу p як адитивні групи локальних майже-кілець.
- Отримано локальні майже-кілець з бібліотеки пакету SONATA системи комп'ютерної алгебри GAP.
- Проаналізовано скінченні неабелеві 2-породженні p -групи з циклічним комутантом.
- Показано, що не існує майже-кілець з одиницею, адитивна група яких ізоморфна групі $G(p^m, p^n)$ з $p > 2$ і $2 \leq m \leq n$.
- Вивчено скінченні локальні майже-кілець з розщепленою метациклічною адитивною групою.
- Отримано необхідні і достатні умови існування локальних майже-кілець на групах типу (B.1). Доведено, що індекс підгрупи всіх необоротних елементів таких майже-кілець в адитивній групі дорівнює p . А також показано, що кожна група типу (B.1) є адитивною групою майже-кілець з одиницею.
- Введено та досліджено напівдистрибутивні майже-кілець з одиницею.
- Вивчено напівгрупу необоротних елементів локальних майже-кілець, адитивна група яких ізоморфна абелевій групі типу $(2^m, 2^n)$ з $m \geq n+1$.
- Використовуючи пакет YangBaxter, надано класифікації брейсів (до порядку 32) та косих брейсів (до порядку 16) відповідно до адитивних або мультиплікативних груп, які є p -групами Міллера–Морено.
- Наведено деяку інформацію щодо майже-кілецевих брейсів, що стосуються пакету LocalNR.
- Отримано алгоритм побудови скінченних локальних майже-кілець.
- Наведено функції для локальних майже-кілець з пакету LocalNR, а саме:
 - TheAdditiveGroupsOfLibraryOfLNRsOfOrder;
 - TheLibraryOfLNRsOnGroup;
 - LocalNearRing, AllLocalNearRings;
 - IsAdditiveGroupOfLibraryOfLNRs;
 - InfoLocalNearRing.
- Наведено функції для груп з пакету LocalNR, а саме:
 - IsMinimalNonAbelianGroup;
 - IsMetacyclicPGroup;
 - EndoOrbitsOfGroup;

- IsEndoCyclicGroup.
- Класифіковано локальні майже-кілець на 2-породжених групах порядків 64 та 243.
- Наведено класифікацію локальних майже-кілець порядків 81 та 1331.
- Вивчено локальні майже-кілець та ендосиклічні 2-породжені групи порядків 64 та 256.

Обґрунтованість результатів дисертації.

Результати дисертації отримано математично строгими методами теорії груп і майже-кілець, а окремі класифікаційні результати — за допомогою системи комп'ютерної алгебри GAP (пакети SONATA, YangBaxter, LocalNR), що є визнаним методом у цій галузі. Вважаю результати дисертації достатньо обґрунтованими.

Повнота викладу результатів дисертації в наукових публікаціях.

Основний зміст дисертації викладено у 14 статтях в наукових журналах, з яких 7 публікацій в наукових журналах проіндексовані в наукометричних базах даних Scopus та Web of Science. Наукові журнали, в яких опубліковано результати дисертації, відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank відносяться до другого квартилю (Q2) – 1 стаття, до третього (Q3) – 6. До опублікованих праць, які додатково відображають наукові результати дисертації та є свідченням апробації роботи, відноситься 21 теза доповідей на міжнародних та всеукраїнських наукових конференціях, які наведені в дисертації у списку праць, опублікованих за темою дисертації, та рефераті.

Відомості про дотримання академічної доброчесності.

Під час аналізу дисертаційної роботи “Локальні майже-кілець з деякими обмеженнями на мультиплікативні групи та підгрупи необоротних елементів, і пов’язані з ними структури” та наукових публікацій Раєвської Марини Юріївни, що відображають основний зміст роботи ознак плагіату, фальсифікації результатів або інших порушень академічної доброчесності, які могли б поставити під сумнів самостійний характер виконання роботи та/чи достовірність результатів, виявлено не було.

Зауваження до дисертаційної роботи.

1. Деякі з основних результатів роботи (класифікація майже-кілець на групах порядків 64, 81, 243, 1331; класифікація брейсів до порядку 32) отримані шляхом комп'ютерного перебору і представлені в тексті дисертації без математичного доведення в класичному сенсі. Хоча для задач такого типу комп'ютерна класифікація є прийнятим і визнаним методом у даній галузі, для окремих тверджень, наприклад, Твердження 5.7, с. 209, автору варто було б навести хоча б короткий опис методу перевірки отриманих результатів.

2. У роботі йдеться про внесок українських математиків у теорію майже-кілець, проте в списку використаних джерел не наведено деякі важливі роботи цього напрямку. Зокрема, доцільно було б додати до бібліографії докторську дисертацію професора В. М. Усенка «Напівгрупи та майже-кіля перетворень» (Київ, 1999).

3. Назва розділу 6 містить формулювання «недистрибутивні алгебраїчні структури» у множині, проте фактично в розділі йдеться лише про один такий об'єкт — локальні майже-кіля. Підрозділ 6.3 присвячений функціям для груп, які не є недистрибутивними алгебраїчними структурами. Доцільніше було б уточнити назву розділу.

4. У доведенні Лема 3.5 на с. 124 (посилаючись на лему 3.2) стверджується, що $|L| = p^m$ для деякого $1 \leq m < n$, де $n \geq 1$. Проте при $n = 1$ умова « $1 \leq m < n$ » не може виконуватися для жодного цілого m . У цьому випадку мала б бути умова $n \geq 2$.

5. В анотації (як українською, с. 6, так і англійською мовою с. 11) при переліку порядків, для яких отримано класифікацію локальних майже-кілець, число «343» помилково продубльовано двічі («343 7.1.4 та 343 7.1.4») замість того, щоб згадати підрозділ 7.1.5, присвячений класифікації локальних майже-кілець порядку 1331 (відповідно до змісту, с. 264). На с. 182, у переліку тез конференцій до розділу 3, номери 37 та 74 зі списку публікацій продубльовано двічі («[31, 37, 36, 37]», відповідно «[3], [74], [104], [74]»).

Наведені зауваження мають переважно рекомендаційний характер і жодним чином не знижують високого наукового рівня дисертації.

Реферат правильно і повно відображає зміст дисертації.

Висновок.

Вважаю, що дисертаційна робота Раєвської Марини Юріївни “Локальні майже-кільця з деякими обмеженнями на мультиплікативні групи та підгрупи необоротних елементів, і пов’язані з ними структури” є завершеним та оригінальним науковим дослідженням, яке за актуальністю, науковою новизною, достовірністю, важливістю, теоретичною та практичною цінністю одержаних результатів відповідає усім вимогам щодо докторських дисертацій – п.п. 7 та 9 “Порядку присудження та позбавлення ступеня доктора наук”, затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України № 1197 від 17.11.2021 р., а її автор, Раєвська Марина Юріївна, заслуговує на присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел.

Офіційний опонент:

доктор фізико-математичних наук, професор,
заслужений діяч науки і техніки України,
науковий співробітник Інституту математики
Потсдамського університету (Німеччина)



Анатолій ЖУЧОК

I certify the signature of
Zhuchok Anatolii

Winnie Enders - Assistant at the
Institute of Mathematics

Potsdam, 27.07.2026

Enders

22.06.23

Universität Potsdam
Institut für Mathematik
Karl-Liebknecht-Str. 24/25
14476 Potsdam OT Golm

ДВОРНИК/



Надійшов до секретаря
04.08.2026р.
В.О. ученою секретаря