

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу

Раєвської Марини Юріївни

“Локальні майже-кілець з деякими обмеженнями
на мультиплікативні групи та підгрупи необоротних елементів”,

і пов’язані з ними структури,

представлену на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук за спеціальністю

01.01.06 – алгебра та теорія чисел

Актуальність теми дисертації.

Теорія майже-кілець є одним із важливих і перспективних розділів сучасної алгебри, що активно розвивається протягом останніх десятиліть. Майже-кілець є широкими узагальненнями асоціативних кілець, в означенні яких адитивна група не обов’язково абелева, а додавання та множення пов’язані хоча б одним, лівим або правим, дистрибутивним законом. Теорія майже-кілець тісно пов’язана з теорією груп, комбінаторикою, геометрією, теорією груп, теорією автоматів та обчислювальною алгеброю. Через послаблення дистрибутивних властивостей майже-кілець мають істотно складнішу структуру, ніж класичні кілець, що породжує численні відкриті задачі структурного та класифікаційного характеру.

Особливий інтерес становлять локальні майже-кілець, які можна розглядати як аналог локальних кілець у ширшому, недистрибутивному алгебраїчному середовищі. Їхнє вивчення дає змогу краще зрозуміти фундаментальні механізми взаємодії між адитивною та мультиплікативною структурами, а також виявити, яким чином групові властивості впливають на будову відповідного майже-кілець.

У центрі уваги дисертації Раєвської М. Ю. перебуває дослідження локальних майже-кілець із певними обмеженнями на мультиплікативні групи та підгрупи необоротних елементів. Такий підхід є надзвичайно

продуктивним, оскільки саме взаємозв'язок між групою оборотних елементів, підгрупою необоротних елементів і адитивною групою майже-кільця часто визначає можливість класифікації відповідних алгебраїчних систем.

Кожне асоціативне кільце є майже-кільцем, і кожна група є адитивною групою майже-кільця, але не обов'язково майже-кільця з одиницею. Питання, яка група може бути адитивною групою майже-кільця з одиницею, є відкритим.

Проблема знаходження груп, які можуть бути адитивними групами майже-кільця з одиницею, вивчається з кінця 1960-х років. Один з перших результатів у цьому напрямку був отриманий у статті Клея та Малоне (1966 р.), де було показано, що існує єдине майже-кільце з одиницею, адитивна група якого є циклічною, і, що насправді, це майже-кільце є комутативним кільцем.

Проблема знаходження груп, які можуть бути адитивними або мультиплікативними групами майже-кільця з одиницею, є однією з перших природних важливих проблем теорії майже-кільця. Однак, наразі ця проблема вивчена досить мало. З цієї причини розробка нових методів теорії майже-кільця (зокрема, локальних у випадку, коли множина необоротних елементів є адитивною підгрупою) видається важливою та сприяє їх класифікації. Ця проблема є досить складною і потребує поєднання глибоких теоретичних методів і комп'ютерних підходів.

Отже, дисертаційна робота є актуальним, добре вмотивованим дослідженням і має істотне значення для подальшого розвитку теорії майже-кільця.

Структура та зміст дисертаційної роботи.

Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел.

У другому розділі вивчаються скінчені групи, які є адитивними або мультиплікативними групами локальних майже-кілець. Зокрема, описані p -групи з циклічною підгрупою індексу p як адитивні групи та мультиплікативні групи локальних майже-кілець і отримано класифікацію відповідних майже-кілець. Класифіковано локальні майже-кільця, які не є полями та мультиплікативна група яких є групою Шмідта. Отримано локальні майже-кільця з бібліотеки пакету SONATA системи комп'ютерної алгебри GAP.

У третьому розділі вивчаються скінченні локальні майже-кільця з розщепленою метациклічною адитивною групою, та дано опис їх адитивних груп. Також проаналізовано скінченні неабелеві 2-породженні p -групи з циклічним комутантом, які можуть бути адитивними групами майже-кілець. Отримано необхідні і достатні умови існування локальних майже-кілець на групах типу (A.1) та (B.1).

У четвертому розділі введено та досліджено напівдистрибутивні майже-кільця з одиницею. Також вивчено напівгрупу необоротних елементів локальних майже-кілець, адитивна група якого ізоморфна абелевій групі типу $(2^m, 2^n)$ з $m \geq n > 1$.

У п'ятому розділі використовуючи пакет YangBaxter, надано класифікації p -брейсів (до порядку 32) та косих p -брейсів (до порядку 16) відповідно до адитивних або мультиплікативних груп, які є p -групами Міллера–Морено. Крім того, надано деяку інформацію щодо майже-кільцевих брейсів, що стосуються, пакету LocalNR.

У шостому розділі наведено алгоритм побудови скінченних локальних майже-кілець, функції для локальних майже-кілець (TheAdditiveGroupsOfLibraryOfLNROfOrder, TheLibraryOfLNROnGroup, LocalNearRing, AllLocalNearRings, IsAdditiveGroupOfLibraryOfLNRs, InfoLocalNearRing) та груп (IsMinimalNonAbelianGroup, IsMetacyclicPGroup, EndoOrbitsOfGroup, IsEndoCyclicGroup) для пакету LocalNR з прикладами їх використання.

В останньому розділі наведено класифікація локальних майже-кілець малих порядків. Також вивчаються ендоеиклічні групи та локальні майже-кілець. Класифіковано локальні майже-кілець на 2-породжених групах порядків 64 та 243. Вивчено локальні майже-кілець та ендоеиклічні 2-породжені групи порядків 64 та 256.

Теоретичне та практичне значення роботи.

Дисертаційна робота носить теоретичний характер. В роботі простежується природний зв'язок між властивостями мультиплікативної групи, підгрупи необоротних елементів та адитивною структурою майже-кілець. Такий підхід дає змогу формулювати нові класифікаційні критерії та будувати більш повну картину теорії локальних майже-кілець.

Отримані результати істотно розширюють наші представлення про структуру майже-кілець та локальних майже-кілець. Результати роботи, а також методика їх отримання, можуть бути використані для подальшого розвитку теорії майже-кілець, теорії груп, теорії брейсів та системи комп'ютерної алгебри GAP.

Практичне значення дисертації зумовлене насамперед її обчислювальною складовою. Розроблені алгоритми, програмні реалізації та бази даних можуть використовуватися іншими дослідниками для побудови, класифікації та порівняння локальних майже-кілець.

Особливу цінність має пакет LocalNR, а також використання пакетів GAP і SONATA. Ці інструменти забезпечують можливість конструктивного дослідження майже-кілець, перевірки гіпотез, побудови прикладів і виконання класифікаційних обчислень.

Результати роботи можуть бути використані при створенні комп'ютерних каталогів майже-кілець, у наукових дослідженнях з обчислювальної алгебри, а також у викладанні спеціальних курсів з алгебри, теорії груп, теорії кілець і майже-кілець.

Новизна отриманих результатів.

Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають у наступному:

- Встановлено зв'язок між нільпотентною мультиплікативною групою та адитивною групою в локальному майже-кільці.
- Класифіковано локальні майже-кільця, які не є полями та мультиплікативна група яких є групою Шмідта.
- Знайдені адитивні групи локальних майже-кілець порядку 32 та 128 з мультиплікативними групами Міллера–Морено.
- Вивчені скінченні p -групи з циклічною підгрупою індексу p як адитивні групи локальних майже-кілець.
- Отримано локальні майже-кільця з бібліотеки пакету SONATA системи комп'ютерної алгебри GAP.
- Проаналізовано скінченні неабелеві 2-породженні p -групи з циклічним комутантом.
- Показано, що не існує майже-кілець з одиницею, адитивна група якого ізоморфна групі $G(p^m, p^n)$ з $p > 2$ і $2 \leq m \leq n$.
- Вивчено скінченні локальні майже-кільця з розщепленою метациклічною адитивною групою.
- Отримано необхідні і достатні умови існування локальних майже-кілець на групах типу (B.1). Доведено, що індекс підгрупи всіх необоротних елементів таких майже-кілець в адитивній групі дорівнює p . А також, показано, що кожна група типу (B.1) є адитивною групою майже-кільця з одиницею.
- Введено та досліджено напівдистрибутивні майже-кільця з одиницею.
- Вивчено напівгрупу необоротних елементів локальних майже-кілець, адитивна група якого ізоморфна абелевій групі типу $(2^m, 2^n)$ з $m \geq n > 1$.

- Використовуючи пакет YangBaxter, надано класифікації брейсів (до порядку 32) та косих брейсів (до порядку 16) відповідно до адитивних або мультиплікативних груп, які є р-групами Міллера–Морено.
- Наведено деяку інформацію щодо майже-кільцевих брейсів, що стосуються, пакету LocalNR.
- Отримано алгоритм побудови скінченних локальних майже-кілець.
- Класифіковано локальні майже-кільця на 2-породжених групах порядків 64 та 243.
- Наведено класифікацію локальних майже-кілець порядків 81 та 1331.
- Вивчено локальні майже-кільця та ендоеиклічні 2-породжені групи порядків 64 та 256.

Обґрунтованість результатів дисертації.

Результати дисертації є строго математично обґрунтованими. Вони були отримані математично строгими методами, коректним використанням відомих результатів теорії груп і теорії майже-кілець, а також узгодженістю отриманих тверджень із сучасним станом досліджень у цій галузі. Формулювання теорем, лем і наслідків є чіткими, а наведені доведення свідчать про високий рівень математичної культури авторки. Важливо, що частина результатів підтверджується конструктивними обчисленнями у системі GAP. Поєднання теоретичних доведень і комп'ютерних перевірок підсилює надійність отриманих класифікаційних результатів.

Повнота викладу результатів дисертації в наукових публікаціях.

Основний зміст дисертації викладено у 14 статтях в наукових журналах, з яких 7 публікацій в наукових журналах проіндексовані в наукометричних базах даних Scopus та Web of Science. Наукові журнали, в яких опубліковано результати дисертації, відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank відносяться до другого квартилю (Q2) – 1 стаття, до третього (Q3) – 6.

До опублікованих праць, які додатково відображають наукові результати дисертації та є свідченням апробації роботи, відноситься 21 теза доповідей на міжнародних та всеукраїнських наукових конференціях, які наведені в дисертації у списку праць, опублікованих за темою дисертації та рефераті.

Відомості про дотримання академічної доброчесності.

Під час аналізу дисертаційної роботи “Локальні майже-кільця з деякими обмеженнями на мультиплікативні групи та підгрупи необоротних елементів, і пов’язані з ними структури” та наукових публікацій Раєвської Марини Юріївни, що відображають основний зміст роботи ознак плагіату, фальсифікації результатів або інших порушень академічної доброчесності, які могли б поставити під сумнів самостійний характер виконання роботи та/чи достовірність результатів, виявлено не було.

Зауваження до дисертаційної роботи.

Попри безумовно високий рівень дисертаційного дослідження, до роботи можна висловити окремі побажання і зауваження рекомендаційного характеру.

У ряді розділів бракує ширшого узагальненого обговорення можливих геометричних або комбінаторних інтерпретацій отриманих результатів.

Окремі комп’ютерні результати могли б супроводжуватися більш детальним аналізом обчислювальної складності реалізованих алгоритмів.

Перспективним виглядало б ширше висвітлення можливих зв’язків між отриманими результатами та сучасними дослідженнями розв’язків рівняння Янга–Бакстера.

На мій погляд використання назви мультиплікативної групи для назви всього брейсу не є вдалим. Наприклад, це стосується назв циклічний брейс чи брейс Міллера-Морено. Краще писати брейс, мультиплікативна група якого є групою Міллера-Морено. Це не буде викликати ніяких непорозумінь.

Термін p -косий брейс теж не є вдалим, «косий» означає, що адитивна група не є абелевою, більш логічним є термін косий p -брейс.

Зазначені зауваження не впливають на загальну високу оцінку дисертації та мають переважно рекомендаційний характер.

Реферат правильно і повно відображає зміст дисертації.

Висновок.

Вважаю, що дисертаційна робота Раєвської Марини Юріївни “Локальні майже-кільця з деякими обмеженнями на мультиплікативні групи та підгрупи необоротних елементів, і пов’язані з ними структури” є завершеним та оригінальним науковим дослідженням, яке за актуальністю, науковою новизною, достовірністю, важливістю, теоретичною та практичною цінністю одержаних результатів відповідає усім вимогам щодо докторських дисертацій – п.п. 7 та 9 “Порядку присудження та позбавлення ступеня доктора наук”, затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України № 1197 від 17.11.2021 р., а її автор, Раєвська Марина Юріївна, заслуговує на присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел.

Офіційний опонент:

доктор фізико-математичних наук,
заслужений діяч науки і техніки України,
професор кафедри геометрії та алгебри
Дніпровського національного університету
імені Олеся Гончара,
професор



Леонід КУРДАЧЕНКО

Проректор з наукової роботи, професор

Олег МАРЕНКОВ

Надійшло до секретаріату
вченої ради 26.06.2026
Учений секретар Т. Соколенко
27.07.2026р.

