

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ



РАЄВСЬКА Марина Юріївна

УДК 512.6

**Локальні майже-кільця з деякими
обмеженнями на мультиплікативні групи
та підгрупи необоротних елементів, і
пов'язані з ними структури**

01.01.06 — алгебра та теорія чисел

Реферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 2026

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано в Інституті математики НАН України.

Науковий консультант:

доктор фізико-математичних наук, професор
СИСАК Ярослав Прокопович
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу алгебри і топології

Офіційні опоненти:

заслужений діяч науки і техніки України,
професор, доктор фізико-математичних наук
ЖУЧОК Анатолій Володимирович
Потсдамський університет, Німеччина,
науковий співробітник;

заслужений діяч науки і техніки України,
професор, доктор фізико-математичних наук
КУРДАЧЕНКО Леонід Андрійович
Дніпровський національний університет
імені Олеся Гончара, професор кафедри
геометрії та алгебри;

професор, доктор фізико-математичних наук
ОЛІЙНИК Андрій Степанович
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, професор кафедри
алгебри і комп'ютерної математики.

Захист відбудеться «25» серпня 2026 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.03 Інституту математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України та на офіційному сайті інституту за адресою:
<https://www.imath.kiev.ua/zahyst/>.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради



Андріяна ПЛАКОШ

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Дисертаційна робота Дисертацію присвячено вивченню локальних майже-кілець з деякими обмеженнями на мультиплікативні групи та підгрупи необоротних елементів, класифікації локальних майже-кілець та дослідженню їх адитивних груп.

Обґрунтування вибору теми дослідження. Перші дослідження майже-кілець були зроблені Діксоном. Було показано, що існують “поля з одним дистрибутивним законом” та наведено приклади, які показують, що такі системи — названі Цассенхаузом майже-полями — можуть бути недистрибутивними. Цассенхауз довів, що приклади Діксона охоплюють усі, крім сімох скінченних майже-полів, які не є тілами. Більшість результатів про майже-поля містяться в монографії Виглінга.

Майже-кілець є широкими узагальненнями асоціативних кілець, в означенні яких адитивна група не обов’язково абелева, а додавання та множення пов’язані хоча б одним, лівим або правим, дистрибутивним законом. У цьому сенсі локальні майже-кілець є узагальненням локальних кілець.

Універсальним прикладом майже-кілець є множина всіх функцій на довільній групі відносно операцій додавання та суперпозиції функцій. Майже-кілець виникають природним чином при вивченні систем нелінійних відображень і вивчаються вже багато десятиліть. Оскільки асоціативні кілець є по суті кільцями лінійних функцій на абелевих групах, то перехід від кілець до майже-кілець характеризується переходом від лінійних методів досліджень до нелінійних, а тому вивчення майже-кілець та розробка теоретико-групових методів їх досліджень є важливою та актуальною задачею.

Добре відомо, що кожне кільце вкладається в кільце $End(A)$ усіх ендоморфізмів абелевої групи A . Аналогічно, кожне майже-кілець можна вкладати в $Map(G)$ для деякої групи G . З цієї точки зору теорія кілець описує «лінійні» відображення на групах, тоді як майже-кілець обробляють загальний нелінійний випадок.

Майже-кілець R — це непорожня множина з двома бінарними операціями, додаванням “+” і множенням “·”, яка відрізняється від кілець тим, що комутативність першої операції та один із дистрибутивних законів (у нашому випадку, правий) не обов’язково виконуються.

Основні визначення та багато результатів, що стосуються майже-

кілець, можна знайти, наприклад, у книзі Пільца.

Очевидно, що кожне асоціативне кільце є майже-кільцем, і кожна група є адитивною групою майже-кільця, але не обов'язково майже-кільця з одиницею. Питання, яка група може бути адитивною групою майже-кільця з одиницею, є відкритим.

Проблема знаходження груп, які можуть бути адитивними групами майже-кілець з одиницею, вивчається з кінця 1960-х років. Один з перших результатів у цьому напрямку був отриманий Клеєм та Малоне, де було показано, що існує єдине майже-кільце з одиницею, адитивна група якого є циклічною, і, що насправді, це майже-кільце є комутативним кільцем.

Класифікація всіх майже-кілець до певних порядків є відкритою проблемою, вирішення якої вимагає значних обчислень, і найбільш підходящою платформою для їх реалізації є система комп'ютерної алгебри GAP.

Локальні майже-кільця, мультиплікативна група яких є абелевою і які не є кільцями, вивчались Городником. Ним, зокрема, доведено, що множина всіх необоротних елементів такого майже-кільця утворює абелеву підгрупу індексу 2 в його адитивній групі та повністю описані локальні майже-кільця з циклічною мультиплікативною групою. Наступним природним кроком є дослідження локальних майже-кілець, мультиплікативна група яких є групою Міллера-Морено, тобто мінімальною неабелевою. Випадок, коли адитивна група такого майже-кільця є p -групою з $p \neq 2$ розглядався М. Раєвською. В дисертаційній роботі продовжено дослідження та класифікація мультиплікативних груп скінченних локальних майже-кілець.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалася в Інституті математики НАН України у відділі алгебри і топології згідно із загальним планом досліджень у рамках науково-дослідних тем “Теорія зображень та її застосування в алгебрі, геометрії й топології” (номер державної реєстрації 0111U002096, 2011–2015 рр.), “Розробка й застосування нових методів у теорії зображень, абстрактній алгебрі та алгебраїчній геометрії” (номер державної реєстрації 0116U003125, 2016–2020 рр.), “Дослідження динамічних систем та еволюційних задач топологічними, стохастичними та алгебричними методами” (номер державної реєстрації 0117U004091, 2017–2021 рр.) та “Категорні, комбінаторні та аналітичні методи дослідження проблем теорії зображень, алгебраїчної геометрії, алгебраїчної та диференціальної топології” (номер

державної реєстрації 0121U100395, 2021–2025 рр.), “Сучасні методи алгебри і топології та їх застосування” (номер державної реєстрації 0126U000346, 2026–2030 рр.).

Мета і завдання дослідження. Розвиток теорії локальних майже-кілець та пов'язаних з ними структури.

Об'єктом дослідження є скінченні локальні майже-кілеця.

Предметом дослідження є мультиплікативні групи та групи необоротних елементів скінченних локальних майже-кілець.

Завдання дослідження:

- Встановити зв'язок між нільпотентною мультиплікативною групою та адитивною групою в локальному майже-кілці.
- Класифікувати локальні майже-кілеця, які не є полями та мультиплікативна група яких є групою Шмідта.
- Знайти адитивні групи локальних майже-кілець порядку 32 та 128 з мультиплікативними групами Міллера–Морено.
- Вивчити скінченні p -групи з циклічною підгрупою індексу p як адитивні групи локальних майже-кілець.
- Отримати локальні майже-кілеця з бібліотеки пакету SONATA системи комп'ютерної алгебри GAP.
- Проаналізувати скінченні неабелеві 2-породженні p -групи з циклічним комутантом.
- Показати, що не існує майже-кілець з одиницею, адитивна група якого ізоморфна групі $G(p^m, p^n)$ з $p > 2$ і $2 \leq m \leq n$.
- Вивчити скінченні локальні майже-кілеця з розщепленою метациклічною адитивною групою.
- Отримати необхідні і достатні умови існування локальних майже-кілець на групах типу (B.1). Довести, що індекс підгрупи всіх необоротних елементів таких майже-кілець в адитивній групі дорівнює p . А також, показати, що кожна група типу (B.1) є адитивною групою майже-кілець з одиницею.
- Ввести та дослідити напівдистрибутивні майже-кілеця з одиницею.
- Вивчити напівгрупу необоротних елементів локальних майже-кілець, адитивна група якого ізоморфна абелевій групі типу $(2^m, 2^n)$ з $m \geq n > 1$.
- Використовуючи пакет YangBaxter, надати класифікації брейсів (до порядку 32) та косих брейсів (до порядку 16) відповідно до адитивних або мультиплікативних груп, які є p -групами Міллера–Морено.

- Навести деяку інформацію щодо майже-кільцевих брейсів, що стосуються, пакету LocalNR.
- Отримати алгоритм побудови скінченних локальних майже-кільців.
- Навести функції для локальних майже-кільців з пакету LocalNR, а саме: TheAdditiveGroupsOfLibraryOfLNRsOfOrder, TheLibraryOfLNRsOnGroup, LocalNearRing, AllLocalNearRings, IsAdditiveGroupOfLibraryOfLNRs, InfoLocalNearRing.
- Навести функції для груп з пакету LocalNR, а саме: IsMinimalNonAbelianGroup, IsMetacyclicPGroup, EndoOrbitsOfGroup, IsEndoCyclicGroup.
- Класифікувати локальні майже-кільця на 2-породжених групах порядків 64 та 243.
- Навести класифікацію локальних майже-кільців порядків 81 та 1331.
- Вивчити локальні майже-кільця та ендоециклічні 2-породжені групи порядків 64 та 256.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи теорії груп, теорії майже-кільців та теорії брейсів. Для побудови прикладів локальних майже-кільців були написані алгоритми та програми на мові GAP, які було реалізовано на кластерах та суперкомп'ютерах:

- CIRCA (м. Сент Андрюс, Шотландія, Велика Британія);
- CIRUS (м. Единбург, Шотландія, Велика Британія);
- Інституту математики Польської Академії Наук (м. Варшава, Польща);
- Інституту математики НАН України (м. Київ, Україна);
- Інституту кібернетики НАН України (м. Київ, Україна);
- Київського політехнічного інституту імені Ігоря Сікорського (м. Київ, Україна).

Наукова новизна отриманих результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, є новими і полягають у такому:

- Встановлено зв'язок між нільпотентною мультиплікативною групою та адитивною групою в локальному майже-кільці.
- Класифіковано локальні майже-кільця, які не є полями та мультиплікативна група яких є групою Шмідта.
- Знайдені адитивні групи локальних майже-кільців порядку 32 та 128 з мультиплікативними групами Міллера–Морено.

- Вивчені скінченні p -групи з циклічною підгрупою індексу p як адитивні групи локальних майже-кілець.
- Отримано локальні майже-кілець з бібліотеки пакету SONATA системи комп'ютерної алгебри GAP.
- Проаналізовано скінченні неабелеві 2-породженні p -групи з циклічним комутантом.
- Показано, що не існує майже-кілець з одиницею, адитивна група якого ізоморфна групі $G(p^m, p^n)$ з $p > 2$ і $2 \leq m \leq n$.
- Вивчено скінченні локальні майже-кілець з розщепленою метациклічною адитивною групою.
- Отримано необхідні і достатні умови існування локальних майже-кілець на групах типу $(B.1)$. Доведено, що індекс підгрупи всіх необоротних елементів таких майже-кілець в адитивній групі дорівнює p . А також, показано, що кожна група типу $(B.1)$ є адитивною групою майже-кілець з одиницею.
- Введено та досліджено напівдистрибутивні майже-кілець з одиницею.
- Вивчено напівгрупу необоротних елементів локальних майже-кілець, адитивна група якого ізоморфна абелевій групі типу $(2^m, 2^n)$ з $m \geq n > 1$.
- Використовуючи пакет YangBaxter, надано класифікації брейсів (до порядку 32) та косих брейсів (до порядку 16) відповідно до адитивних або мультиплікативних груп, які є p -групами Міллера–Морено.
- Наведено деяку інформацію щодо майже-кілецевих брейсів, що стосуються, пакету LocalNR.
- Отримано алгоритм побудови скінченних локальних майже-кілець.
- Наведено функції для локальних майже-кілець з пакету LocalNR, а саме: TheAdditiveGroupsOfLibraryOfLNRsOfOrder, TheLibraryOfLNRsOnGroup, LocalNearRing, AllLocalNearRings, IsAdditiveGroupOfLibraryOfLNRs, InfoLocalNearRing.
- Наведено функції для груп з пакету LocalNR, а саме: IsMinimalNonAbelianGroup, IsMetacyclicPGroup, EndoOrbitsOfGroup, IsEndoCyclicGroup.
- Класифіковано локальні майже-кілець на 2-породжених групах порядків 64 та 243.
- Наведено класифікацію локальних майже-кілець порядків 81 та 1331.

- Вивчено локальні майже-кілець та ендоциклічні 2-породжені групи порядків 64 та 256.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи, а також методика їх отримання, можуть бути використані для подальшого розвитку теорії майже-кілець, теорії груп, теорії брейсів та системи комп'ютерної алгебри GAP.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертації, які виносяться на захист, отримані автором особисто. Визначення напрямку досліджень, постановка задач, ідеї відносно вибору методик розв'язування належать науковому консультанту. Три статті опубліковано без співавторів. У спільних з науковим консультантом та І. Ю. Раєвською публікаціях за темою дисертації розподіл особистих внесків такий:

- у роботах [1, 3, 9, 15, 16, 17, 18, 19] — визначення напрямку досліджень, побудова алгоритму, брав участь у написанні функцій, побудові локальних майже-кілець, обговорення результатів, контроль якості викладення результатів належить науковому консультанту Я. П. Сисаку.
- у статті [3] — в дисертацію включено теорему 2. Здобувачка брала участь у написанні алгоритму та функцій для пакету LocalNR: TheAdditiveGroupsOfLibraryOfLNRsOfOrder, TheLibraryOfLNRsOnGroup, LocalNearRing, AllLocalNearRings, IsAdditiveGroupOfLibraryOfLNRs, InfoLocalNearRing.
- у статті [1] — в дисертацію включено зауваження 1, теорему 1. Здобувачка брала участь у написанні функцій для груп: IsMinimalNonAbelianGroup, IsMetacyclicPGroup, EndoOrbitsOfGroup, IsEndoCyclicGroup.
- у статті [2] — внесок авторів рівноцінний. В дисертацію включено лему 3.
- у статті [4] — внесок авторів рівноцінний. В дисертацію включено лему 3, теорему 3.
- у статтях [5, 9, 12, 14, 15, 16, 17, 18] — співавторка І. Ю. Раєвська перевіряла результати та брала участь обговорення результатів, постановці гіпотез та фінальному оформленню результатів.
- у статті [7] — внесок авторів рівноцінний. В дисертацію включено лему 6, теорему 8, теорему 9, теорему 10, теорему 25.
- у статті [11] — внесок авторів рівноцінний. В дисертацію включено теорему 5.

- у статті [13] — внесок авторів рівноцінний. В дисертацію включено наслідок 1.
- у пакеті [19] — здобувачка та І. Ю. Раєвська брали участь у написанні функцій, побудові локальних майже-кілець, оформленні та перевірці.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи були представлені, доповідалися і обговорювалися на: Воркшоп, присвячений 70-річчю Юрія Вікторовича Боднарчука, 23 грудня 2025 року, Національний університет “Києво-Могилянська академія”, Київ, Україна; Ukraine Mathematics Conference “At the End of the Year 2025”, December 18–19, 2025, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine; 15th Ukraine Algebra Conference, July 8–12, 2025, Lviv, Ukraine; The conference of young scientists “Pidstryhach Readings — 2025”, May 27–29, 2025, Lviv, Ukraine; Конференція молодих учених “Підстригачівські читання – 2024”, 27–29 травня 2024 року, Львів, Україна; GAP Days Spring 2024, March 11–15, 2024, University of Kaiserslautern-Landau, Kaiserslautern, Germany; The 14th International Algebraic Conference in Ukraine (online), July 3–7, 2023, Sumy, Ukraine; Online Twinning Conference (online), March 27–30, 2023, Digital Theme UK-Ukraine Twinning Initiative, Great Britain; International conference-workshop “GAP Days Summer 2022”, October 17–21, 2022, RWTH Aachen University, Aachen, Germany; International Conference “On the Trail of Women in Mathematics “Contemporary Women in Mathematics”, September 15–17, 2022, Gdansk, Poland; International Algebraic Conference “At the End of the Year 2021” (online), December 27–28, 2021, Kyiv, Ukraine; 3rd TA visitors meeting (TAM) (online), November 3–4, 2021, Amsterdam, Netherlands; The 13th International Algebraic Conference in Ukraine, July 6–9, 2021, Kyiv, Ukraine; Міжнародна конференція молодих математиків (online), 3–5 червня 2021 року, Київ, Україна; The conference dedicated to the 60th anniversary of the algebra department of Kyiv University, July 14–17, 2020, Kyiv, Ukraine; GAP-Singular-Meeting as part of the OpenDreamKit project, August 15–23, 2019, PfalzAkademie, Lambrecht, Germany; XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky, July 02–06, 2019, Vinnytsia, Ukraine; 4th Conference of Mathematical Society of Moldova CMSM4’2017, June 28 – July 2, 2017, Chisinau, Republic of Moldova; International mathematical conference “Groups and Actions: Geometry and Dynamics, dedicated to the memory of professor Vitaly Sushchanskyy”, December

19–22, 2016, Kyiv, Ukraine; XI Літня школа “Алгебра, Топологія, Аналіз”, 1–14 серпня 2016 року, Одеса, Україна; Summer School on Algebra, Statistics and Combinatorics, June 27 – July 2, 2016, Espoo, Finland; XVII Міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 19–20 травня 2016 року, Київ, Україна; X Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні присвячена 70-річчю Ю. А. Дрозда, 20–27 серпня 2015 року, Одеса, Україна; X Літня школа “Алгебра, Топологія, Аналіз”, 3–15 серпня 2015 року, Одеса, Україна; Наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К. М. Фішмана та М. К. Фарє, 1–4 липня 2015 року, Чернівці, Україна; Conference “Groups and their actions”, June 22–26, 2015, Bedlewo (near Poznan), Poland; Міжнародна конференція молодих математиків, 3–6 червня 2015 року, Київ, Україна; AAA89: Workshop on General Algebra, February 26 – March 01, 2015, Dresden, Germany; IX-а Літня школа “Алгебра, топологія і аналіз”, 7–18 липня 2014 року, Поляниця, Україна; Humboldt Kolleg “Education and Science and their Role in Social and Industrial Progress of Society”, June 12–15, 2014, Kyiv, Ukraine; 9th International Algebraic Conference in Ukraine, July 08–13, 2013, Lviv, Ukraine; засіданнях Вченої ради Інституту математики НАН України; лабораторії топології (Топологічний семінар) Інституту математики НАН України, Київ, Україна, керівник – чл.-кор. С. І. Максименко; “Алгебра” Варшавського університету, Варшава, Польща, керівник – проф. Ян Окнінський; “Secant group” в ІМ ПАН, Варшава, Польща, керівник – проф. Ярослав Бучинський; “Algebra and Discrete Mathematics” в Університеті міста Лінц, Лінц, Австрія, керівник – проф. Мануель Кауерс; Алгебраїчний семінар Інституту математики НАН України, Київ, Україна, керівники – чл.-кор. Ю. А. Дрозд, чл.-кор. С. І. Максименко; розширене засідання “Під кінець року” Алгебраїчного семінару Київського національного університету імені Тараса Шевченка, керівник – проф. А. П. Петравчук; Семінар молодих вчених Інституту математики НАН України, Київ, Україна, організатор – Рада молодих вчених ІМ НАНУ; Scientific Seminar “Geometry, Topology, Applications”, Львів, Україна, керівник – проф. Т. О. Банах.

Публікації. Результати дисертації висвітлено у 40 наукових публікаціях, з них 14 — статті у наукових виданнях, внесених до переліку наукових фахових видань України та закордонних виданнях, а також 21 публікації у тезах доповідей і матеріалах міжнародних та вітчизняних конференцій. Статті [1, 3, 5, 7, 9, 11, 12, 16] проін-

дексовані у міжнародних наукометричних базах Scopus або Web of Science. Статтю [12] опубліковано у виданні з квартиля Q2 відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, статті [1, 3, 5, 7, 9, 11] у виданнях з квартиля Q3, статтю [16] у виданні з квартиля Q4. Відповідно до п. 2 Наказу № 1220 МОН України від 23.09.2019 вказані 14 статей зараховуються як 22 наукові публікації. Роботи [1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13] проіндексовано у базі Zentrablatt Math, а роботи [3, 7, 9, 11, 12, 13, 16] проіндексовано у базі MathSciNet. Статті [6, 8, 10] одноосібні.

Структура й обсяг дисертації. Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 121 найменувань та додатку зі списком публікацій і апробацією результатів. Повний обсяг роботи становить 318 сторінок друкованого тексту із них список використаних джерел міститься на 14 сторінках, а додаток — на 14 сторінках.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету, завдання дослідження та наукову новизну одержаних результатів.

У розділі 1 наведено огляд літератури за темою дисертації.

У розділі 2 наведено основні означення та результати, що стосуються локальних майже-кілець. У підрозділі 2.1 наведено результати про нільпотентні групи, групи Шмідта, які буде використано в подальших дослідженнях.

Вивчення локальних майже-кілець було започатковано Мексоном¹, який встановив, зокрема, що адитивна група скінченного локального майже-кілля повинна бути p -групою.

Означення 2.1. *Майже-кіллець R з одиницею називається локальним, якщо множина $L = R \setminus R^*$ всіх необоротних елементів із $(R, \cdot)$ утворює адитивну підгрупу в R^+ , та майже-полем, коли $L = 0$.*

Наведемо означення нільпотентної групи (див., наприклад, Курош²).

Нехай G — група. Нормальний ряд

$$\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_n = G,$$

¹Maxson C. J. On local near-rings, *Math. Z.*, **106** (1968), 197–205.

²Kurosh A. G. Course of higher algebra. Moscow: Nauka, 1967 [in Russian].

групи G називається *центральним*, якщо при $i = 0, 1, \dots, n-1$ фактор-група G_{i+1}/G_i міститься в центрі фактор-групи G/G_i . Група G , що має хоча б один центральний ряд, називається *нільпотентною*.

Групою Шмідта або мінімальною нільпотентною групою називається скінченна нільпотентна група, будь-яка власна підгрупа якої нільпотентна. Вивчення таких груп було започатковано О. Ю. Шмідтом³.

Підрозділ 2.2 присвячено вивченню локальних майже-кілець з нільпотентною мультиплікативною групою.

В наступній теоремі встановлений зв'язок між нільпотентною мультиплікативною групою та адитивною групою в локальному майже-кілці.

Теорема 2.9. *Нехай R — локальне майже-кілець порядку p^n з нільпотентною мультиплікативною групою R^* . Якщо $p > 2$ або $p = 2$ та $-i \in Z(R^*)$, то мають місце такі твердження:*

1. Адитивна група R^+ — абелева.
2. L — абелева та має індекс 2 в R^+ .

Зокрема, R/L є поле.

Підрозділ 2.3 присвячено вивченню локальних майже-кілець з мультиплікативними групами Шмідта.

Розглянемо локальні майже-кілця, підгрупи необоротних елементів яких є нетривіальними.

Нагадаємо, що просте число виду $p = 2^{2^s} + 1$ з цілим числом $s \geq 0$ називається *простим числом Ферма*.

Теорема 2.10. *Нехай R — локальне майже-кілець порядку p^n , яке не є майже-полем та мультиплікативна група R^* якого є групою Шмідта. Тоді мають місце наступні твердження:*

- 1) якщо $p > 2$, то $|R| = p^2$ для деякого простого числа Ферма p , адитивна група R^+ є елементарною абелевою та існує такий необоротний елемент a із R , що

$$R^+ = \langle i \rangle + \langle a \rangle,$$

³Shmidt O. Yu. Groups, all subgroups of which are special. *Math. col.*, **31** 1924, 366–372 [in Russian].

де i — одиниця в R , $a^2 = 0$ та $(ik)a = -ak$ для довільного первісного кореня k за модулем p . Зокрема, для кожного простого числа Ферма p існує єдине локальне майже-кільце порядку p^2 , мультиплікативна група якого є групою Міллера–Морено;

- 2) якщо $p = 2$, то $|R| = 2^n$ з $n = 2t$, де t — просте число, для якого $2^m - 1$ є простим числом Мерсенна, та R^* є групою Міллера–Морено.

У підрозділі 2.5 досліджено локальні майже-кільця на скінченних p -групах з циклічними підгрупами індексу p .

В теоремі 12.5.1⁴ доведено, що існує сім типів p -груп з циклічною підгрупою індексу p .

Теорема 2.17. *Групи порядку p^n , які містять циклічну підгрупу з індексом p , мають такі типи: абелеві,*

$n \geq 1$, *циклічні:*

1) $a^{p^n} = 1$;

$n \geq 2$:

2) $a^{p^{n-1}} = 1$, $b^p = 1$, $ba = ab$;

неабелеві,

p — непарне, $n \geq 3$:

3) $a^{p^{n-1}} = 1$, $b^p = 1$, $ba = a^{1+p^{n-2}}b$;

$p = 2$, $n \geq 3$:

4) *узагальнена групи кватерніонів:*

$a^{2^{n-1}} = 1$, $b^2 = a^{2^{n-2}}$, $ba = a^{-1}b$;

$p = 2$, $n \geq 3$:

5) *група діедра:*

$a^{2^{n-1}} = 1$, $b^2 = 1$, $ba = a^{-1}b$;

$p = 2$, $n \geq 4$:

6) $a^{2^{n-1}} = 1$, $b^2 = 1$, $ba = a^{1+2^{n-2}}b$;

$p = 2$, $n \geq 4$:

7) $a^{2^{n-1}} = 1$, $b^2 = 1$, $ba = a^{-1+2^{n-2}}b$.

Теорема 2.21. *Нехай G — p -група з циклічною підгрупою індексу p . G — адитивна група майже-кільця з одиницею тоді і тільки тоді, коли виконується одне з наступних тверджень:*

1. $G = \langle a \mid a^{p^n} \rangle$, $n \geq 1$.

2. $G = \langle a, b \mid a^{p^{n-1}}, b^p, ba = ab \rangle$, $n \geq 2$.

⁴Холл М. Теорія груп, М.: Видавництво іноземної літератури, 1962. (рос.)

3. $G = \langle a, b \mid a^{p^{n-1}}, b^p, ba = a^{1+p^{n-2}}b \rangle$, p — непарне, $n \geq 3$.

4. $G = \langle a, b \mid a^4, b^2, ba = a^{-1}b \rangle$.

5. $G = \langle a, b \mid a^{2^{n-1}}, b^2, ba = a^{1+2^{n-2}}b \rangle$, $n \geq 4$.

У розділі 3 вивчаються локальні майже-кільця на скінченних неабелевих 2-породжених p -групах.

Класифікація скінченних неабелевих 2-породжених p -груп з циклічним комутантом для непарних простих чисел p дана Мехом⁵.

Теорема 3.1. *Нехай G — скінченна неабелева 2-породжена p -група з циклічним комутантом для непарних простих чисел p . Далі дані визначальні співвідношення всіх неізоморфних груп G .*

(A.1) $G = \langle a, b \mid a^{p^l} = b^{p^m} = 1, b^a = b^a = b^{1+p^s} \rangle$, де $1 \leq s < m$ та $m - s \leq l$.

(A.2) $G = \langle a, b \mid b^{p^m} = 1, b^a = b^{1+p^s}, a^{p^l} = b^{p^h} \rangle$, де $1 \leq s < h < m$ та $m - s \leq h < l$.

(B.1) $G = \langle a, b, u \mid a^{p^l} = b^{p^m} = u^{p^n} = 1, b^a = bu, u^a = u^b = u \rangle$, де $1 \leq n \leq m \leq l$.

(B.2) $G = \langle a, b, u \mid a^{p^l} = u^{p^n} = 1, b^{p^m} = u^{p^k}, b^a = bu, u^a = u^b = u \rangle$, де $n \leq l$, $n \leq m$, $1 \leq k < n$.

(B.3) $G = \langle a, b, u \mid u^{p^n} = 1, a^{p^l} = u^{p^h}, b^{p^m} = u^{p^k}, b^a = bu, u^a = u^b = u \rangle$, де $1 \leq k < h < n \leq m$, $m + h - k < l$.

(C.1) $G = \langle a, b, u \mid a^{p^l} = b^{p^m} = u^{p^n} = 1, u^{p^n} = 1, b^a = bu, u^a = u^{1+p^s}, u^b = u \rangle$, де $n \leq l$, $n \leq m$, $0 < s < n$.

(C.2) $G = \langle a, b, u \mid a^{p^l} = u^{p^n} = 1, b^a = bu, u^a = u^{1+p^s}, u^b = u, b^{p^m} = u^{rp^k} \rangle$, де $n \leq l$, $k \leq m$, $r \not\equiv 0(p)$, $0 < k < n$, $0 < s < n$, $p^m \equiv rp^{k+s}(p^n)$.

(D.1) $G = \langle a, b, u \mid a^{p^l} = u^{p^h}, b^a = bu, u^a = u^{1+p^s}, u^b = u, b^{p^m} = u^{p^n} = 1 \rangle$, де $n \leq l$, $n - s \leq h < n \leq m$, $0 < s < n$.

⁵Miech R. J. On p -groups with a cyclic commutator, *J. Austral. Math. Soc.*, **20** (1975), 178–198.

- (D.2) $G = \langle a, b, u \mid a^{p^l} = u^{p^h}, u^{p^n} = 1, b^a = bu, u^a = u^{1+p^s}, u^b = u, b^{p^m} = u^{rp^k} \rangle$, де $0 < h < n \leq l$, $0 < s < n$, $n - s \leq h$, $r \equiv 0(p)$, $0 < k < n$, $k < m$, $p^m \equiv rp^{k+s}(p^n)$, та якщо $k < h$, то $l + k > m + h$, якщо $h \leq k$, то $m + n - s > l + k - h$.
- (E.1) $G = \langle a, b, u \mid b^{p^m} = u^{p^n} = 1, b^a = bu, u^a = u^{1+p^s}, u^b = u, b^{p^h} = a^{p^l} \rangle$, де $0 < s < n$, $0 < h < m$, $0 < l - h < n - s$, $n \leq h$.
- (E.2) $G = \langle a, b, u \mid b^{p^m} = u^{p^n} = 1, b^a = bu, u^a = u^{1+p^s}, u^b = u, a^{p^l} = b^{p^h} u^{tp^j} \rangle$ де $n \leq l$, $0 < h < m$, $0 < s < n$, $0 < l - h < n - s$, $n \leq m$, $t \not\equiv 0(p)$, $0 \leq j < h$, $j < n$, $p^h + tp^{s+j} \equiv 0(p^n)$ та $n \leq j + m - h$.
- (E.3) $G = \langle a, b, u \mid b^{p^m} = u^{p^n} = 1, b^a = bu, u^a = u^{1+p^s}, u^b = u, a^{p^l} = b^{p^h} u^{tp^j} \rangle$ де $n \leq l$, $0 < h < m$, $0 < s < n$, $0 < l - h < n - s$, $n \leq m$, $t \not\equiv 0(p)$, $0 \leq j < h$, $j < n$, $p^h + tp^{s+j} \equiv 0(p^n)$ та $n > j + m - h$.
- (F.1) $G = \langle a, b, u \mid u^{p^n} = 1, b^a = bu, u^a = u^{1+p^s}, u^b = u, b^{p^m} = u^{rp^k}, a^{p^l} = b^{p^h} u^{tp^j} \rangle$ де $0 < s < n$, $0 < k < n$, $s < m$, $k < m$, $p^m \equiv rp^{k+s}(p^n)$, $r \not\equiv 0(p)$, $h < l$, $h < m$, $l - h < n - s$, $t \not\equiv 0(p)$, $n \leq l$, $p^h + tp^{j+s} \equiv 0(p^n)$, $rp^k + tp^{j+m-h} \equiv 0(p^n)$.
- (F.2) $G = \langle a, b, u \mid u^{p^n} = 1, b^a = bu, u^a = u^{1+p^s}, u^b = u, a^{p^l} = b^{p^h} u^{tp^j}, b^{p^m} = u^{rp^k} \rangle$, де $0 < s < n$, $0 < k < n$, $k < m$, $s < m$, $p^m \equiv rp^{k+s}(p^n)$, $r \not\equiv 0(p)$, $h < l$, $h < m$, $l - h < n - s$, $t \not\equiv 0(p)$, $n \leq l$, $p^h + tp^{j+s} \equiv 0(p^n)$, $rp^k + tp^{j+m-h} \not\equiv 0(p^n)$, $j + m + n > l + s + k$.

В статті Менегазцо⁶ знайдено групи автоморфізмів скінченних неабелевих 2-породжених p -груп з циклічним комутантом ($p > 2$).

Лема 3.4. *Групи автоморфізмів груп типів (A.2), (B.3), (D.1), (D.2), (E.1), (E.2), (E.3), (F.1) і (F.2) є p -групами.*

Як наслідок маємо наступне твердження.

Лема 3.5. *Не існує локальних майже-кілець з адитивною групою одного з типів (A.2), (B.3), (D.1), (D.2), (E.1), (E.2), (E.3), (F.1) чи (F.2).*

Наступна теорема дає достатні умови для існування скінченних локальних майже-кілець, адитивна група яких ізоморфна групі $G(p^m, p^n, r)$.

⁶Menegazzo F. Automorphisms of p -groups with cyclic commutator subgroup, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **90** (1993), 81–101.

Теорема 3.35. Для кожного простого числа p та таких додатних цілих m, n , що або $m \geq n + r \geq 2r + [\frac{2}{p}]$, або $p = 2, 2 < m \leq n$ та $r = 1$ існує локальне майже-кільце R , адитивна група якого R^+ ізоморфна групі $G(p^m, p^n, r)$.

У підрозділі 3.3 вивчаються локальні майже-кільця на групах типу (B.1).

Нехай R — локальне майже-кільце з одиницею i , група R^+ якого ізоморфна групі $G(p^m, p^n, p^d)$. Тоді $R^+ = \langle a \rangle + \langle b \rangle + \langle c \rangle$ з елементами a, b та c , що задовольняють співвідношення $ap^m = bp^n = cp^d = 0$, $-b + a + b = a + c$ та $-a + c + a = -b + c + b = c$ з $1 \leq d \leq n \leq m$, де $a = i$ та кожен елемент $x \in R$ однозначно записується у вигляді $x = ax_1 + bx_2 + cx_3$ з коефіцієнтами $0 \leq x_1 < p^m, 0 \leq x_2 < p^n$ та $0 \leq x_3 < p^d$.

Покажемо, що множина L усіх необоротних елементів R є підгрупою індексу p в R^+ .

Теорема 3.49. Мають місце такі твердження:

1. $L = \langle a \cdot p \rangle + \langle b \rangle + \langle c \rangle$ і, зокрема, підгрупа L має індекс p в R^+ та $|R^*| = p^{m+n+d-1}(p-1)$;
2. $x = ax_1 + bx_2 + cx_3$ є оборотним елементом тоді і тільки тоді, коли $x_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Отримуємо наступну формулу для множення елементів $x = ax_1 + bx_2 + cx_3$ та $y = ay_1 + by_2 + cy_3$ у локальному майже-кільці R .

Наслідок 3.50. Якщо $x, y \in R$ з $1 \leq d \leq n \leq m$ і $xb = a\alpha(x) + b\beta(x) + c\gamma(x)$, то

$$\begin{aligned} xy &= a(x_1y_1 + y_2\alpha(x)) + b(x_2y_1 + y_2\beta(x)) + \\ &+ c(-x_1x_2 \binom{y_1}{2} - \binom{y_2}{2} \alpha(x)\beta(x) - x_2y_1y_2\alpha(x) + \\ &+ x_3y_1 + y_2\gamma(x) + x_1y_3\beta(x) - x_2y_3\alpha(x)), \end{aligned}$$

де відображення $\alpha: R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^m}$, $\beta: R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^n}$ і $\gamma: R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^d}$, та мають місце наступні твердження:

- (0) $\alpha(0) \equiv 0 \pmod{p^m}$, $\beta(0) \equiv 0 \pmod{p^n}$ and $\gamma(0) \equiv 0 \pmod{p^d}$ тоді і тільки тоді, коли майже-кільце R є нуль-симетричним;

- (1) $\alpha(x) \equiv 0 \pmod{p}$;
- (2) якщо $\beta(x) \equiv 0 \pmod{p}$, то $x_1 \equiv 0 \pmod{p}$;
- (3) $\alpha(xy) \equiv x_1\alpha(y) + \alpha(x)\beta(y) \pmod{p^m}$;
- (4) $\beta(xy) \equiv x_2\alpha(y) + \beta(x)\beta(y) \pmod{p^n}$;
- (5) $\gamma(xy) \equiv -x_1x_2\binom{\alpha(y)}{2} - \alpha(x)\beta(x)\binom{\beta(y)}{2} - x_2\alpha(x)\alpha(y)\beta(y) + x_3\alpha(y) + \gamma(x)\beta(y) + x_1\beta(x)\gamma(y) - x_2\alpha(x)\gamma(y) \pmod{p^d}$.

Наступна теорема показує, що умови, наведені в теоремі 3.49, є достатніми для існування скінченних локальних майже-кілець на $G(p^m, p^n, p^d)$. Більш того, кожна група $G(p^m, p^n, p^d)$ є адитивною групою майже-кілця з одиницею.

Теорема 3.51. Для кожного простого числа p та додатних цілих чисел m, n та d з $1 \leq d \leq n \leq m$ існує локальне майже-кілце R , адитивна група якого R^+ ізоморфна групі $G(p^m, p^n, p^d)$.

Як наслідок маємо наступне твердження.

Наслідок 3.52. Кожна група $G(p^m, p^n, p^d)$ є адитивною групою майже-кілця з одиницею.

У розділі 4 досліджуються напівдистрибутивні майже-кілця з одиницею та локальні майже-кілця.

Наведемо означення напівдистрибутивного майже-кілця.

Означення 4.5. (Ліве) майже-кілце R називається напівдистрибутивним, якщо таким є множення справа відносно його додавання. Іншими словами, для будь-яких елементів $r, s, t \in R$ виконується рівність $(r + s + r)t = rt + st + rt$.

Відомо, що адитивна група будь-якого дистрибутивного майже-кілця з одиницею є абелевою. Наступне твердження поширює цей факт на напівдистрибутивні майже-кілця.

Лема 4.8. Адитивна група кожного напівдистрибутивного майже-кілця R з одиницею є абелевою.

Теорема 4.15. Напівдистрибутивне майже-кілце R з одиницею є простим як майже-кілце тоді і тільки тоді, коли R є простим асоціативним кілцем.

У розділі 5 використовуючи пакет YangBaxter, надано класифікацію брейсів (до порядку 32) та косих брейсів (до порядку 16) відповідно до адитивних або мультиплікативних груп, які є p -групами

Міллера–Морено. Крім того, ми надаємо деяку інформацію щодо брейсів, що стосуються, пакету LocalNR.

У розділі 6 наведено алгоритм побудови скінченних локальних майже-кілець, функції для майже-кілець та груп для пакету LocalNR, класифікація локальних майже-кілець малих порядків. Також вивчаються ендосиклічні групи та локальні майже-кілець.

Алгоритм побудови майже-кілець з одиницею базується на наступній теоремі (див. теорема 1⁷).

Теорема 6.3. *Нехай G — група, і нехай множина $\text{End } G$ усіх ендоморфізмів G розглядається як моноїд щодо композиції ендоморфізмів. Тоді G — адитивна група майже-кілець з одиницею тоді і тільки тоді, коли існують елемент $g \in G$ та підмоноїд F групи $\text{End } G$ такі, що $G = g^F$ та $g^\phi = g^\psi$ лише тоді, коли $\phi = \psi$ для будь-яких $\phi, \psi \in F$.*

Наступна теорема описує умови, за яких майже-кілець $Nr = (G, \cdot, \star_F)$, побудоване на G моноїдом F , є локальним.

Теорема 6.4. *Нехай група G , її елемент g та підмоноїд F з $\text{End } G$ задовольняють висновок теореми 6.3 і нехай $A = F \cap \text{Aut } G$. Майже-кілець $Nr = (G, \cdot, \star_F)$ є локальним тоді й тільки тоді, коли існує така підгрупа L групи G , що $G = g^A \cup L$ та $g^A \cap L = \emptyset$.*

Функції для майже-кілець для пакету LocalNR: TheAdditiveGroupsOfLibraryOfLNRsOfOrder, TheLibraryOfLNRsOnGroup, LocalNearRing, AllLocalNearRings, IsAdditiveGroupOfLibraryOfLNRs, InfoLocalNearRing.

Функції для груп для пакету LocalNR: IsMinimalNonAbelianGroup, IsMetacyclicPGroup, EndoOrbitsOfGroup, IsEndoCyclicGroup.

Класифіковано 2-породженні групи є адитивними групами локальних майже-кілець порядку 64 (теорема 7.1).

Теорема 7.4 описує такі групи порядку $81 = 3^4$. Зокрема, серед 15 неізоморфних груп цього порядку лише 9 є такими групами.

Зазначимо, що існують 15 неізоморфних груп порядку $81 = 3^4$, з яких 9 є адитивними групами локальних майже-кілець. Теорема 7.5 описує 2-породжені групи порядку $243 = 3^5$ з цією властивістю. Зокрема, серед 29 неізоморфних 2-породжених груп цього порядку лише 10 є такими адитивними групами.

⁷Sysak Ya., Raievska I., Raievska M. Construction of local nearrings using GAP. *Algebra Discrete Math.*, 2025, **40** (1), 133–144.

Відомо, що існує 5 неізоморфних груп порядку $11^3 = 1331$. Виявляється, що всі вони є адитивними групами локальних майже-кілець. Теорема 7.8 містить список усіх неізоморфних майже-кілець цього порядку.

Існує 267 неізоморфних груп порядку $64 = 2^6$, з яких 53 є 2-породженими групами, і лише 39 з цих груп є ендоециклічними (лема 7.10). Більше того, 24 з цих груп є адитивними групами локальних майже-кілець.

Теорема 7.11. *Нехай G — 2-породжена група порядку 64. Якщо G — адитивна група локального майже-кілля R , то G є ендоециклічною.*

Існує 56092 неізоморфних груп порядку $256 = 2^8$, з яких 540 є 2-породженими групами: 3 групи мають експоненту 128, 9 груп мають експоненту 64, 30 груп мають експоненту 32, 107 груп мають експоненту 16, 84 групи мають експоненту 8, та 3 групи мають експоненту 4.

Визначено всі ендоециклічні 2-породжені групи G порядку 256 експоненти 16 та порядок множини всіх елементів групи G , порядок яких дорівнює експоненті цієї групи (лема 7.17).

Список наукових праць, де опубліковано результати дисертації, й інформацію щодо їхньої апробації наведено у додатку А.

ВИСНОВКИ

Основні результати дисертації можна сформулювати таким чином:

- Встановлений зв'язок між нільпотентною мультиплікативною групою та адитивною групою в локальному майже-кіллі.
- Класифіковано локальні майже-кілля, які не є полями та мультиплікативна група яких є групою Шмідта.
- Знайдені адитивні групи локальних майже-кілець порядку 32 та 128 з мультиплікативними групами Міллера–Морено.
- Вивчені скінченні p -групи з циклічною підгрупою індексу p як адитивні групи локальних майже-кілець.
- Отримано локальні майже-кілля з бібліотеки пакету SONATA системи комп'ютерної алгебри GAP.
- Проаналізовано скінченні неабелеві 2-породженні p -групи з циклічним комутантом.
- Показано, що не існує майже-кілець з одиницею, адитивна група якого ізоморфна групі $G(p^m, p^n)$ з $p > 2$ і $2 \leq m \leq n$.

– Вивчено скінченні локальні майже-кільця з розщепленою метациклічною адитивною групою.

– Отримано необхідні і достатні умови існування локальних майже-кільць на групах типу $(B.1)$. Доведено, що індекс підгрупи всіх необоротних елементів таких майже-кільць в адитивній групі дорівнює p . А також, показано, що кожна група типу $(B.1)$ є адитивною групою майже-кільця з одиницею.

– Введено та досліджено напівдистрибутивні майже-кільця з одиницею.

– Вивчено напівгрупу необоротних елементів локальних майже-кільць, адитивна група якого ізоморфна абелевій групі типу $(2^m, 2^n)$ з $m \geq n > 1$.

– Використовуючи пакет YangBaxter, надано класифікації брейсів (до порядку 32) та косих брейсів (до порядку 16) відповідно до адитивних або мультиплікативних груп, які є p -групами Міллера–Морено.

– Наведено деяку інформацію щодо майже-кільцевих брейсів, що стосуються, пакету LocalNR.

– Отримано алгоритм побудови скінченних локальних майже-кільць.

– Наведено функції для локальних майже-кільць з пакету LocalNR, а саме: TheAdditiveGroupsOfLibraryOfLNRsOfOrder, TheLibraryOfLNRsOnGroup, LocalNearRing, AllLocalNearRings, IsAdditiveGroupOfLibraryOfLNRs, InfoLocalNearRing.

– Наведено функції для груп з пакету LocalNR, а саме: IsMinimalNonAbelianGroup, IsMetacyclicPGroup, EndoOrbitsOfGroup, IsEndoCyclicGroup.

– Класифіковано локальні майже-кільця на 2-породжених групах порядків 64 та 243.

– Наведено класифікацію локальних майже-кільць порядків 81 та 1331.

– Вивчено локальні майже-кільця та ендоциклічні 2-породжені групи порядків 64 та 256.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Raievska I., Raievska M., Sysak Ya. LocalNR package and some of its applications. *Algebra Discrete Math.*, 2025, **40** (2), 215–225, <https://doi.org/10.12958/adm2449> (SJR — Q3)

2. Раєвська І., Раєвська М. Про ендосиклічні 2-поряджені групи порядку 256 та експоненти 16. *Буковинський матем. журнал*, 2025, **13** (2), 161–169 (Категорія Б)
3. Sysak Ya., Raievska I., Raievska M. Construction of local nearrings using GAP. *Algebra Discrete Math.*, 2025, **40** (1), 133–144, <https://doi.org/10.12958/adm2427> (SJR — **Q3**)
4. Raievska I., Raievska M. Local nearrings and endocyclic groups of small order. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 2025, **47** (2), 65–71, [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).65-71](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).65-71) (Категорія Б)
5. Raievska I., Raievska M. Braces and skew-braces via gap: YangBaxter and LocalNR packages. *Journal of Mathematical Sciences*, 2025, **294**, 230–241, <https://link.springer.com/article/10.1007/s10958-025-08097-1> (SJR — **Q3**)
6. Raievska M. p -groups with cyclic subgroup of index p and local nearrings. *Прикл. проблеми мех. і мат.*, 2024, **22**, 117–122 (Категорія Б)
7. Raievska I., Raievska M. Local nearrings, their structure, and the GAP system. *Ukrainian Math. J.*, 2025, **76** (11), 1831–1848, <https://doi.org/10.1007/s11253-025-02426-y>; translation of *Ukrain. Mat. Zh.*, 2024, **76** (11), 1629–1644 (SJR — **Q3**)
8. Раєвська М. Про локальні майже-кільця з нільпотентною мультиплікативною групою. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*, 2025, **46** (1), 89–92, [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).89-92](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).89-92) (Категорія Б)
9. Raievska I., Raievska M., Sysak Ya. Semidistributive nearrings with identity. *Algebra Discrete Math.*, 36(2) (2023), 217–224, <https://admjournal.luguniv.edu.ua/index.php/adm/article/view/2207/pdf> (SJR — **Q3**)
10. Raievska M. On semidistributive local nearrings. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*, **43**(2) (2023), 67–71, [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43\(2\).67-71](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).67-71) (Ка-

тегорія Б)

11. Raievska I. Yu., Raievska M. Yu. Local near-rings with a multiplicative Schmidt group. *Ukr. Math. J.*, **71** (2020), No. 10, P. 1643–1649, <https://doi.org/10.1007/s11253-020-01737-6>; перекладено з *Ukr. Mat. Zh.*, 2019, **71**, No. 10, 1435–1440. (in Ukrainian), <http://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/1526/509> (SJR — **Q3**)
12. Raievska I. Yu., Raievska M. Yu. Local nearrings on finite non-abelian 2-generated p-groups. *Carpathian Math. Publ.*, **12** (1) (2020), 199–207,
URL: <https://journals.pnu.edu.ua/index.php/cmp/article/view/3905/4478> (SJR — **Q2**)
13. Raievska I. Yu., Raievska M. Yu. Finite nearrings with identity on Miller-Moreno groups. *Mat. Stud.*, 2014, **42** (1), 15–20,
http://matstud.org.ua/texts/2014/42_1/15-20.pdf (Фахове видання)
14. Раєвська І. Ю., Раєвська М. Ю. Локальні майже-кільця з обмеженнями на мультиплікативні групи та підгрупи необоротних елементів. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*, Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2013, **14**, 134–145 (Фахове видання)
15. Raievska I. Yu., Raievska M. Yu., Sysak Ya. P. Local nearrings of order 243. *Proceedings CMSM 4*, June 28 — July 2, 2017, Chisinau / ed.: Mitrofan Choban [et al.]. Chisinau: Institute of Mathematics and Computer Science, 2017 (СЕР USM), 149–152.
16. Raievska I. Yu., Raievska M. Yu., Sysak Ya. P. Finite local nearrings with split metacyclic additive group. *Algebra and Discrete Mathematics*, (2016), **22** (1), 129–152,
<http://admjournal.luguniv.edu.ua/index.php/adm/article/view/293/pdf> (SJR — **Q4**)
17. Raievska I., Raievska M., Sysak Ya. DatabaseEndom64: (v1.0.1) [Data set] (2024). Zenodo,
<https://doi.org/10.5281/zenodo.10820320>
18. Raievska I., Raievska M., Sysak Ya. DatabaseEndom243: (v1.0.1) [Data set] (2024). Zenodo,
<https://doi.org/10.5281/zenodo.10820318>

19. Raievska I., Raievska M., Sysak Ya. LocalNR, Package of local nearriings, Version 1.0.4 (2024) (GAP package),
<https://gap-packages.github.io/LocalNR/>
20. Raievska M. p -Groups with cyclic subgroup of index p and local nearriings. 15th Ukraine Algebra Conference, Lviv, Ukraine, July 8–12, 2025. P. 87,
<https://xvuac.mmf.com.ua/index.php/abstracts>
21. Раєвська М. Про локальні майже-кілля з нільпотентною мультиплікативною групою. The conference of young scientists “Pidstryhach Readings — 2025”, Lviv, Ukraine, May 27–29, 2025,
http://iapmm.lviv.ua/chyt2025/abstracts/Raievska_Maryna.pdf
22. Raievska I. Yu., Raievska M. Yu. Braces, skew-braces, local nearriings via GAP: the YangBaxter and LocalNR packages. Тези доповідей конференції молодих учених “Підстригачівські читання — 2024”. Львів, Україна, 27–29 травня, 2024,
<http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2024/abstracts/Raievska.pdf>
23. Raievska I., Raievska M. LocalNR package and its applications, GAP Days Spring 2024, University of Kaiserslautern-Landau, Kaiserslautern, March 11–15, 2024,
<https://www.gapdays.de/gapdays2024-spring/abstracts/raievska>
24. Raievska I., Raievska M. Finite local nearriings and their classification, International conference-workshop “GAP Days Summer 2022”, RWTH Aachen University, Aachen, Germany, October 17–21, 2022,
<https://www.gapdays.de/gapdays2022-summer/abstracts/raievska>
25. Raievska I., Raievska M., Local nearriings and their classification, International Conference “On the Trail of Women in Mathematics “Contemporary Women in Mathematics”, Gdansk, Poland, September 15–17, 2022,
https://otowim22.ptkwm.pl/Abstract_Book.pdf
26. Raievska I., Raievska M., Local nearriings of order 343. International Algebraic Conference “At the End of the Year 2021”. Kyiv, Ukraine, December 27–28, 2021 (in the form of webinars)

- <https://www.imath.kiev.ua/~algebra/algebra2021/abstracts>
27. Abramov A. V., Raievska I. Yu., Raievska M. Yu., Sysak Ya. P., Yurashev V. G. Miller–Moreno groups as multiplicative groups of local nearrings of order 64. 13th International Algebraic Conference in Ukraine. Kyiv, Ukraine, July 6–9, 2021 (in the form of webinars) <https://drive.google.com/file/d/1wZLWtj9jeFLH9BjSb7ZX5RFnTfTpstE/view>
 28. Abramov A. V., Raievska I. Yu., Raievska M. Yu., Sysak Ya. P., Yurashev V. G. Local nearrings of order 1331. Abstracts of the conference dedicated to the 60th anniversary of the algebra department of Kyiv University. Kyiv, Ukraine, July 14–17, 2020, P. 11; <https://drive.google.com/file/d/1gyNWN20TC6V09mP3uRXw7uG9bg-3S\E7/view>
 29. Raievska I., Raievska M., The additive groups of local nearrings of order 64. Тези доповідей конференції молодих учених “Підстригачівські читання — 2020”. Львів, Україна, 26–28 травня, 2020, <http://iapmm.lviv.ua/chyt2020/abstracts/Raievska.pdf>
 30. Raievska I. Yu., Raievska M. Yu. Some special p -groups and nearrings with identity. Тези доповідей до XII Міжнародної алгебраїчної конференції в Україні, присвяченій 215-й річниці з дня народження В. Буняковського, 02—06 липня 2019 р., Донецький національний університет імені Василя Стуса, Вінниця, Україна, С. 92–93, <https://jiac.donnu.edu.ua/article/view/6991>
 31. Раєвська І. Ю., Раєвська М. Ю. Локальні майже-кілля на скінченних неабелевих p -групах. Тези доповідей міжнародної конференції “Сучасні проблеми механіки та математики” присвяченої 90-річчю від дня народження академіка НАН України Ярослава Степановича Підстригача та 40-річчю створеного ним Інституту прикладних проблем механіки і математики НАН України, 22–25 травня 2018 р., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Т. 3, С. 230, http://www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018/Volume_3.pdf
 32. Raievska I. Yu., Raievska M. Yu., Sysak Ya. P. Local nearrings of order 64. Abstracts of the International mathematical conference “Groups and Actions: Geometry and Dynamics, dedicated to the memory of professor Vitaly Sushchansky”. Kyiv, Ukraine, December

- 19–22, 2016, P. 43.
33. Raievska I. Yu., Raievska M. Yu. Finite one-sided distributive structures. Тези доповідей XI Літньої школи “Алгебра, Топологія, Аналіз”, 1–14 серпня 2016 р., Одеса, Україна, http://www.imath.kiev.ua/~topology/ata11/ata11_theses.pdf
 34. Raievska I., Raievska M. Local nearrings on finite 2-generated non-abelian non-metacyclic p -groups. Abstracts of Scientific Conference dedicated to 100th anniversary of K. M. Fishman and M. K. Fage. Chernivtsi, Ukraine, July 1–4, 2015, P. 103.
 35. Raievska I. Yu., Raievska M. Yu., Sysak Ya. P. Local nearrings of order 81. Abstracts of X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd, Odessa, Ukraine, August 20–27, 2015, P. 94.
 36. Raievska M. Finite local nearrings on non-abelian p -groups with cyclic commutator subgroups. Abstracts of conference “Groups and their actions”. Bedlewo (near Poznan), Poland, June 22–26, 2015, <http://mat.polsl.pl/groups/bedlewo-2015.pdf>
 37. Raievska I., Raievska M. Finite local nearrings on split metacyclic additive group. Тези доповідей Міжнародної конференції молодих математиків, 3–6 червня 2015 р., Ін-т математики НАН України, Київ, Україна, С. 42.
 38. Raievska M. On multiplicative groups of finite local nearrings. Abstracts of AAA89: Workshop on General Algebra, Dresden, Germany, February 26 – March 1, 2015, <http://at.yorku.ca/cgi-bin/abstract/cbkb-72>
 39. Raievska I., Raievska M. On finite one-sided distributive structures. Abstracts of Humboldt Kolleg “Education and science and their role in social and industrial progress of society”. Kyiv, Ukraine, June 12–15, 2014, P. 45.
 40. Raievska I., Raievska M., Sysak Ya. Finite local nearrings with multiplicative Miller–Moreno group. Abstracts of 9-th International Algebraic Conference in Ukraine. Lviv, Ukraine, July 8–13, 2013, P. 154.

АНОТАЦІЇ

Раєвська М. Ю. Локальні майже-кільця з деякими обме-

женнями на мультиплікативні групи та підгрупи необоротних елементів, і пов'язані з ними структури. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізикоматематичних наук за спеціальністю 01.01.06 — “алгебра та теорія чисел”. — Інститут математики Національної академії наук України, Київ, 2026.

Дисертацію присвячено вивченню локальних майже-кілець з деякими обмеженнями на мультиплікативні групи та підгрупи необоротних елементів, класифікації локальних майже-кілець та дослідженню їх адитивних груп.

Систематичне вивчення скінченних майже-полів було започатковано Цассенхаузом, де доведена абелевість їх адитивної групи та охарактеризовано їх мультиплікативні групи як групи регулярних автоморфізмів абелевих груп. В роботі Лая мультиплікативна група майже-поля названа спадковою, якщо кожна її підгрупа ізоморфна мультиплікативній групі деякого майже-поля, та отримано повну характеристику скінченних таких груп майже-полів. У подальшому майже-поля вивчалися головним чином завдяки їх застосуванням у геометрії. Вперше майже-поля застосували в геометрії Веблен і Вадербарн. Теорії майже-полів присвячено монографію Виглінга, в якій систематизовано більшість результатів про майже-поля.

Проблема визначення класів груп, які можуть бути адитивними або мультиплікативними групами майже-кілець з одиницею, є важливою з точки зору як теорії груп, так і теорії майже-кілець. Однак, наразі ця проблема вивчена досить мало. З цієї причини розробка нових методів теорії майже-кілець (зокрема, локальних у випадку, коли множина необоротних елементів є адитивною підгрупою) видається важливою та сприяє їх класифікації. Різні класи груп не можуть бути адитивними групами майже-кілець з одиницею. Клей та Малон довели, що проста група складеного порядку не може бути адитивною групою майже-кілець з одиницею. Лай розширює цей результат, а саме, показує, що скінченна неабелева група з рівно однією нетривіальною власною нормальною підгрупою не може бути адитивною групою майже-кілець з одиницею. Клей визначив усі майже-кільця з одиницею на $(D_4, +)$.

Замінивши в ньому слово “кільце” на “майже-кільце”, отримуємо означення локальних майже-кілець, вивчення яких вперше бу-

ло ініційовано Мексоном. В цій же статті встановлено, що адитивна група скінченного нуль-симетричного локального майже-кільця є p -групою. Мексон показав, що з точністю до ізоморфізму існує $p - 1$ локальне майже-кільце з елементарною абелевою адитивною групою порядку p^2 , в яких підгрупи необоротних елементів мають порядок p , тобто тих майже-кільць, які не є майже-поллями. Разом із фундаментальною роботою Цассенхауза про майже-поля та роботою Клея та Малоне, отримано повний опис усіх нуль-симетричних локальних майже-кільць порядку p^2 . Мексон показав, що кожна нециклічна абелева p -група порядку $p^n > 4$ є адитивною групою нуль-симетричного локального майже-кільця, яке не є кільцем. Однак у випадку скінчених неабелевих p -груп ситуація інша. Наприклад, ні узагальнена група кватерніонів, ні неабелева група порядку 8 не можуть бути адитивною групою локального майже-кільця.

Ключові слова: майже-кільце з одиницею, локальне майже-кільце, мультиплікативна група, підгрупа необоротних елементів, нільпотентна група, група Шмідта, група Міллера-Морено, GAP, SONATA, LocalNR.

Raievska M. Iu. Local nearrings with some restrictions on multiplicative groups and subgroups of non-invertible elements, and related structures. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.06 “Algebra and Number Theory”. — Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2026.

The systematic study of finite nearfields was initiated by Zassenhaus, who proved that their additive group is Abelian and characterized their multiplicative groups as groups of regular automorphisms of abelian groups. In Ligh’s work, the multiplicative group of a nearfield is called hereditary if each of its subgroups is isomorphic to the multiplicative group of some nearfield, and a complete characterization of finite such groups of nearfields was obtained. Subsequently, nearfields were studied mainly due to their applications in geometry. Nearfields were first used in geometry by Veblen and Waderbarn. The theory of nearfields is the subject of a monograph by Wähling, in which most of the results on nearfields are systematized.

The problem of defining classes of groups that can be additive or multiplicative groups of nearrings with identity is important from the

point of view of both group theory and nearring theory. However, this problem has been studied quite little so far. For this reason, the development of new methods of nearring theory (in particular, local methods in the case when the set of non-invertible elements is an additive subgroup) seems important and contributes to their classification. Different classes of groups that cannot be additive groups of nearrings with identity are studied. Clay and Malone proved that a simple group of composite order cannot be an additive group of nearrings with identity.

Replacing the word “ring” in it with “nearring”, we obtain the definition of local nearrings, the study of which was first initiated by Maxson. In the same paper it was established that the additive group of a finite zero-symmetric local nearring is a p -group. Maxson showed that up to isomorphism there exists $p-1$ local nearring with an elementary Abelian additive group of order p^2 , in which the subgroups of non-invertible elements have order p , i.e. those nearrings that are not nearfields. Together with the fundamental work of Zassenhaus on nearfields and the work of Clay and Malone, a complete description of all zero-symmetric local nearrings of order p^2 is obtained. Maxson showed that every non-cyclic Abelian p -group of order $p^n > 4$ is the additive group of a zero-symmetric local nearring that is not a ring. However, in the case of finite non-Abelian p -groups the situation is different. For example, neither the generalized group of quaternions nor the non-Abelian group of order 8 can be the additive group of a local nearring.

Key words: nearring with identity, local nearring, multiplicative group, subgroup of non-invertible elements, nilpotent group, Schmidt group, Miller–Moreno group, GAP, SONATA, LocalNR.