ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу

Раєвської Ірини Юріївни

“Скінченні майже-кільця з одиницею та локальні майже-кільця з деякими обмеженнями на адитивні групи”,

представлену на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук за спеціальністю

01.01.06 – алгебра та теорія чисел

Актуальність теми дисертації. Тема дисертаційної роботи є актуальною, оскільки результати дисертації пов’язані з вивченням скінченних майже-кілець з одиницею та локальних майже-кілець з обмеженнями на адитивні групи. Майже-кільця виникають природним чином при вивченні систем нелінійних відображень і вивчаються протягом багатьох десятиліть. Питання про те, які групи можуть бути адитивними групами майже-кілець з одиницею та локальних майже-кілець, досліджується з кінця 1960-х років.

Добре відомо і легко перевіряється, що якщо в майже-кільці з одиницею виконуються обидва дистрибутивних закони, то операція додавання в них обов’язково комутативна. Тому відсутність одного з дистрибутивних законів в означенні майже-кільця є значно більш важливою умовою ніж відсутність аксіоми комутативності додавання, і саме з цим пов’язані головні труднощі, які виникають при вивченні майже-кілець.

Один з перших результатів в цьому напрямку був отриманий Клейом та Малоне, які показали, що з точністю до ізоморфізму існує єдине майже-кільце з одиницею, адитивна група якого циклічна, і яке фактично є комутативним кільцем. Там же було встановлено, що адитивна група скінченного майже-кільця з одиницею є простою тоді і тільки тоді, коли це майже-кільце є полем простого порядку. Також було доведено, що кожна нециклічна група, порядок якої є добутком різних простих чисел, та симетрична група S_n при $n \geq 3$ не можуть бути адитивними групами майже-кілець з одиницею.

Використовуючи систему комп’ютерної алгебри GAP, Бойкетт та Нибауер класифікували всі майже-кільця з одиницею на групах порядку, що не перевищує 31. Це дозволило їм визначити всі неабелеві групи вказаних порядків, які не можуть бути адитивними групами майже-кілець з одиницею.

Вивчення локальних майже-кілець вперше було ініційовано в 1968 р. Мексоном, який встановив, що адитивна група скінченного нуль-симетричного локального майже-кільця є p-групою.

Цим же автором було показано, що група діедра порядку 8 не може бути адитивною групою локальних майже-кілець. Крім того, як показав Фейгельсток у 2006 році, для кожного простого числа p та цілого $n > p$ існує група порядку p^n, яка не є адитивною групою локального майже-кільця. Задача класифікації скінченних неабелевих p-груп, що є адитивними групами локальних майже-кілець, залишається далекою від розв'язання.

Отже, тема дисертації є актуальною, а результати отримані в дисертації матимуть вплив на подальший розвиток теорії майже-кілець, а також системи комп'ютерної алгебри GAP.

Структура та зміст дисертаційної роботи.

Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел. В другому розділі вивчаються скінченні майже-кільця з одиницею порядків p^3. В третьому розділі наведено основні означення та результати по локальним майже-кільцям. Отримано необхідні та достатні умови існування локальних майже-кілець з одиницею на групах порядку p^3. В четвертому та п'ятому розділах вивчаються майже-кільця з одиницею та локальні майже-кільця порядків p^4. Розглядаються групи класу нільпотентності 2 порядку p^4, які є адитивними групами локальних майже-кілець. Показано, що для непарних p із 6 таких груп 4 є адитивними групами локальних майже-кілець. Деякі приклади таких майже-кілець явно побудовані. Досліджуються групи класу нільпотентності 3 порядку p^4, які є адитивними групами локальних майже-кілець. Базуючись на системі комп'ютерної алгебри GAP, побудовано приклади локальних майже-кілець на вказаних групах. В сьомому розділі досліджується побудова майже-кілець з одиницею та класифікація локальні майже-кілець за допомогою системи GAP. Наведено функції для дослідження локальних майже-кілець пакету LocalNR.

Теоретичне та практичне значення роботи.

Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи, а також методика їх отримання, можуть бути використані для подальшого розвитку теорії майже-кілець, теорії груп, системи GAP. Окремі результати дисертаційної роботи можуть знайти застосування у деяких інших галузях науки, зокрема, теорії кодування.

Новизна отриманих результатів.

В дисертаційній роботі отримано ряд нових наукових результатів, наприклад:

- Описано майже-кільця з одиницею на групах порядку p^3.
- Наведено необхідні умови існування майже-кілець з одиницею на абелевих групах порядку p^3.
- Наведено необхідні умови існування майже-кілець з одиницею на неабелевих групах порядку p^3.
- Описано локальні майже-кільця з адитивними групами порядку p^3. Визначено формули множення для таких майже-кілець та описано функції, що їх задають.
- Наведено приклад локального майже-кільця з адитивною групою порядку p^3.
- Дано оцінку нижньої межі кількості локальних майже-кілець на групах порядку p^3.
- Наведено алгоритм побудови локального майже-кільця з елементарною абелевою адитивною групою порядку 5^3, що реалізовано в системі комп'ютерної алгебри GAP.
- Проаналізовано існування та кількість неізоморфних локальних майже-кілець на групах порядку p^3.
- Наведено деякі структурні результати стосовно груп порядку p^4.
- Отримано необхідні умови існування майже-кілець з одиницею на групах порядку p^4.
- Визначено формули множення для таких майже-кілець та описано функції, що їх задають.
- Описано локальні майже-кільця з адитивними групами порядку p^4. Вказано формули множення для таких майже-кілець та описано функції, що їх задають.
- Наведено приклад локального майже-кільця порядку $5^4 = 625$.
- Дано алгоритм побудови локального майже-кільця з неабелевою адитивною групою порядку 5^4, що реалізовано в системі комп'ютерної алгебри GAP.
- Наведено необхідні та достатні умови існування майже-кілець з одиницею на групах Міллера–Морено.
- Показано, що не існує майже-кілець з одиницею, адитивна група яких ізоморфна групі Шмідта.
- Описано прямі добутки p-груп Міллера–Морено та циклічних p-груп як адитивні групи майже-кілець з одиницею та локальних майже-кілець. Визначено формули множення для таких майже-кілець та описано функції, що їх задають.
- Описано побудову майже-кілець з одиницею.

- Наведено деякі функції для локальних майже-кілець з пакету LocalNR, а саме:
  - UnitsOfNearRing(R) (вивід: список оборотних елементів майже-кільця, якщо R є майже-кільцем з одиницею, інакше вивід має вигляд *Error, no units exist*),
  - IsLocalNearRing(R) (вивід: значення *true*, якщо R є локальним майже-кільцем, інакше вивід має значення *false*.),
  - IsLocalRing(R) (вивід: значення *true*, якщо R є локальним кільцем, інакше вивід має значення *false*),
  - NearRingNonUnits(R) (вивід: список необоротних елементів R.),
  - NonUnitsAsAdditiveSubgroup(R) (вивід: адитивна підгрупа необоротних елементів R).
- Описано майже-кільця з одиницею пакету SONATA та ендоциклічні групи.
- Проаналізовано локальні майже-кільця порядку 32.
- Наведено часткову класифікацію локальних майже-кілець порядку 128.
- Знайдено 2-породжені ендоциклічні групи порядку 256 та експоненти 16, які не є адитивними групами локальних майже-кілець.

Обґрунтованість результатів дисертації.

Результати, викладені в дисертації, було отримано математично строгими методами. Тому вважаю, що результати дисертації є новими, вони супроводжуються строгими і повними доведеннями, а їх правильність сумнівів не викликає.

Повнота викладу результатів дисертації в наукових публікаціях.

Основний зміст дисертації викладено у 15 статтях в наукових журналах, з яких 8 публікацій в наукових журналах проіндексовані в наукометричних базах даних Scopus та Web of Science. Наукові журнали, в яких опубліковано результати дисертації, відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank відносяться до першого квартилю (Q1) – 1 стаття, до третього (Q3) – 6, до четвертого (Q4) – 1.

До опублікованих праць, які додатково відображають наукові результати дисертації та є свідченням апробації роботи, відноситься 22 тези доповідей на міжнародних та всеукраїнських наукових конференціях та школах, які наведені в дисертації у списку праць, опублікованих за темою дисертації та рефераті.

Відомості про дотримання академічної доброчесності.

Під час аналізу дисертаційної роботи "Скінченні майже-кільця з одиницею та локальні майже-кільця з деякими обмеженнями на адитивні групи" та наукових публікацій Раєвської Ірини Юріївни, що відображають основний вміст роботи ознак плагіату, фальсифікації результатів або інших порушень академічної доброчесності, які могли б поставити під сумнів самостійний характер виконання роботи та/чи достовірність результатів, виявлено не було.

Зауваження до дисертаційної роботи.

Зауважимо, що дисертаційна робота містить і ряд деяких недоліків стилістичного і технічного характеру:

1. Щоб полегшити читання дисертаційної роботи варто було б періодично нагадувати деякі позначення, особливо, якщо вони не вказані в списку позначень. Наприклад, автор використовує (без нагадування) на стор. 108 групу G_3, означення якої дано зовсім в іншому місці дисертаційної роботи, те ж саме з групами G_1 і G_2.
2. Аналогічне зауваження відноситься до груп H_1 і H_2, означення яких пов'язані з теоремою 4.1 на стор. 138.
3. В Зауваженні 4.2 повинно бути «Існує 6 груп класу нільпотентності 2 порядку $2^4\cdots$» замість «Існують групи 6 класу нільпотентності 2 порядку $2^{4\cdots}$».
4. Можливо, краще писати словами «…наступний закон множення…» в тексті замість точки в лапках в Прикладі 6.30 на стор. 252 і в Прикладі 3.16 на стор. 126.

Ці зауваження не є суттєвими і не впливають на загальне позитивне враження від дисертації.

Реферат правильно і повно відображає зміст дисертації.

Висновок.

Вважаю, що дисертаційна робота Раєвської Ірини Юріївни "Скінченні майже-кільця з одиницею та локальні майже-кільця з деякими обмеженнями на адитивні групи" є завершеним та оригінальним науковим дослідженням, яке за актуальністю, науковою новизною, достовірністю, важливістю, теоретичною та практичною цінністю одержаних результатів відповідає усім вимогам щодо докторських дисертацій – п.п. 7 та 9 "Порядку присудження та

позбавлення ступеня доктора наук", затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України № 1197 від 17.11.2021 р., а її автор, Раєвська Ірина Юріївна, заслуговує на присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел.

Офіційний опонент:
доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри алгебри
і комп'ютерної математики
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка Анатолій ПЕТРАВЧУК

Підпис засвідчую
Вчений секретар ННІ
КАРАУЛЬНА Н.
10.08. 2026

Надійшов до спеціалізованої вченої ради Д 26.206.03
10.08.2026.
В.о. вченого секретаря Анатолій ДВОРНИК