

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу

Раєвської Ірини Юріївни

“Скінченні майже-кілець з одиницею та локальні майже-кілець

з деякими обмеженнями на адитивні групи”,

представлену на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук за спеціальністю

01.01.06 – алгебра та теорія чисел

Актуальність теми дисертації. Сучасний розвиток алгебри характеризується зростанням інтересу до узагальнень класичних алгебраїчних систем та поглибленим вивченням їхніх структурних властивостей. Важливе місце в цьому напрямі посідають майже-кілець, які узагальнюють поняття кілець та мають широкий спектр застосувань. Майже-кілець природно виникають під час дослідження систем нелінійних відображень і вже протягом багатьох десятиліть залишаються предметом інтенсивних досліджень.

За класичною теоремою про будову скінченних абелевих груп кожна така група A розкладається у пряму суму примарних циклічних підгруп, кожна з яких можна розглядати як адитивну групу деякого кілець лишків Z/p^iZ . Тому A ізоморфна адитивній групі прямої суми цих кілець. Отже, кожна скінченна абелева група є адитивною групою асоціативного і навіть комутативного кілець з одиницею. Натомість не кожна скінченна неабелева група є адитивною групою майже-кілець з одиницею. У зв'язку з цим природно постає питання про те, які групи можуть бути адитивними групами майже-кілець з одиницею. Це питання досліджується з кінця 1960-х років. Над його розв'язанням та суміжними проблемами працювали такі вчені, як Бойкетт, Джонсон, Дой, Клей, Кріммел, Лай, Лекстон, Локхарт, Малон, Мексон, Нибауер, Пільц, М. Раєвська, Сисак, Усенко та інші.

Нагадаємо, що кілець R з одиницею, множина L всіх необоротних елементів якого утворює ідеал в R , називається локальним кілецем. Як легко переконатися, в означенні локального кілець достатньо насправді припускати, що L є тільки підгрупою адитивної групи кілець R . Замінивши в цьому означенні слово “кілець” на “майже-кілець”, отримуємо поняття локального майже-кілець, вивчення якого розпочав Мексон. Відомо, що скінченна група є адитивною групою деякого локального кілець тоді і тільки тоді, коли вона є абелевою p -групою. Водночас узагальнені групи кватерніонів і дієдральна група порядку 8 не можуть бути адитивними групами локальних майже-кілець. Крім того, як показав Фейгельсток, для

кожного простого числа p та цілого $n > p$ існує група порядку p^n , яка не є адитивною групою локального майже-кілля. Попри наявні результати, задача класифікації скінченних неабелевих p -груп, що є адитивними групами локальних майже-кілля, залишається далекою від розв'язання. Тому всебічне дослідження адитивних груп локальних майже-кілля є важливою й актуальною проблемою сучасної алгебри, розв'язання окремих аспектів якої становить одну з основних цілей представленої дисертаційної роботи.

Зв'язок роботи з науковими темами. Тематика дисертації пов'язана з науковими дослідженнями відділу алгебри і топології Інституту математики НАН України у межах наступних науково-дослідних тем: «Теорія зображень та її застосування в алгебрі, геометрії й топології» (номер державної реєстрації 0111U002096, 2011–2015 рр.), «Розробка й застосування нових методів у теорії зображень, абстрактній алгебрі та алгебраїчній геометрії» (0116U003125, 2016–2020 рр.), «Дослідження динамічних систем та еволюційних задач топологічними, стохастичними та алгебричними методами» (0117U004091, 2017–2021 рр.), «Категорні, комбінаторні та аналітичні методи дослідження проблем теорії зображень, алгебраїчної геометрії, алгебраїчної та диференціальної топології» (0121U100395, 2021–2025 рр.), «Сучасні методи алгебри і топології та їх застосування» (0126U000346, 2026–2030 рр.), що підтверджує актуальність напряму дисертаційного дослідження.

Структура та зміст дисертаційної роботи. У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету й завдання дослідження, визначено наукову новизну, теоретичне та практичне значення одержаних результатів роботи.

У першому розділі наведено огляд наукової літератури за темою дисертації. Зокрема, висвітлено відомі результати щодо скінченних майже-кілля з одиницею та скінченних локальних майже-кілля, а також описано можливості системи комп'ютерної алгебри GAP, які використовуються в дисертаційному дослідженні.

Другий розділ присвячений майже-кілцям з одиницею на групах порядку p^3 . У ньому наведено основні означення та попередні результати про групи порядку p^3 і майже-кілля з одиницею, які використовуються в подальших дослідженнях. Встановлено необхідні умови існування майже-кілля з одиницею на абелевих групах порядку p^3 , а також доведено відповідні необхідні умови для неабелевих груп цього порядку.

Третій розділ присвячено дослідженню локальних майже-кілля порядку p^3 та їхніх властивостей. Досліджено локальні майже-кілля з елементарною абелевою адитивною групою порядку p^3 та побудовано

відповідні приклади. Встановлено необхідні й достатні умови існування локальних майже-кілець, адитивні групи яких для непарного простого p ізоморфні неабелевій групі порядку p^3 та експоненти p , неабелевій метациклічній групі порядку p^3 та експоненти p^2 , а також прямому добутку циклічних груп порядків p^2 і p .

У четвертому розділі вивчаються майже-кілець з одиницею порядку p^4 . Наведено класифікацію груп порядку p^4 та виокремлено групи класів нільпотентності 2 і 3, які розглядаються як адитивні групи таких майже-кілець. Для відповідних типів груп досліджено структуру майже-кілець з одиницею та встановлено необхідні умови їх існування. Крім того, для розглянутих майже-кілець одержано явні формули множення та встановлено умови, яким мають задовольняти функції, що входять до цих формул.

П'ятий розділ присвячено дослідженню локальних майже-кілець порядку p^4 . Для непарного простого p розглянуто групи порядку p^4 класів нільпотентності 2 і 3 як можливі адитивні групи локальних майже-кілець. Встановлено, що чотири із шести груп класу нільпотентності 2 можуть бути адитивними групами локальних майже-кілець; для деяких із них наведено явні конструкції відповідних майже-кілець. Для двох визначених у дисертації типів груп класу нільпотентності 3 одержано необхідні й достатні умови існування локальних майже-кілець, а для двох інших типів сформульовано гіпотезу щодо можливості їх існування.

У шостому розділі досліджено майже-кілець з одиницею на деяких неабелевих групах. Доведено, що група Шмідта не може бути адитивною групою майже-кілець з одиницею. Розглянуто прямі добутки метациклічних p -груп Міллера–Морено та циклічних p -груп як адитивні групи майже-кілець з одиницею і локальних майже-кілець. Для таких майже-кілець визначено формули множення та описано функції, що входять до цих формул. Також досліджено прямі добутки неметациклічних p -груп Міллера–Морено та циклічних p -груп як адитивні групи майже-кілець з одиницею і локальних майже-кілець.

Сьомий розділ присвячено застосуванню системи комп'ютерної алгебри GAP для дослідження та класифікації локальних майже-кілець. Розглянуто можливості пакета LocalNR та описано деякі функції з UnitsOfNearRing, IsLocalNearRing, IsLocalRing, NearRingNonUnits і NonUnitsAsAdditiveSubgroup, призначені для дослідження оборотних і необоротних елементів та перевірки локальності майже-кілець. Встановлено зв'язки між майже-кілецьми з одиницею, локальними майже-кілецьми та ендоециклічними групами.

Обґрунтованість і достовірність результатів. Результати дисертаційної роботи одержано із застосуванням строгих математичних методів. Їх достовірність забезпечується необхідними доведеннями, що ґрунтуються на класичних методах теорії груп і теорії майже-кілець, а результати, одержані за допомогою системи комп'ютерної алгебри GAP, супроводжуються відповідними програмними реалізаціями та обчисленнями. Отже, основні положення, висновки та результати дисертації є належним чином обґрунтованими й достовірними.

Наукова новизна одержаних результатів. Наукова новизна дисертаційної роботи полягає в системному дослідженні скінченних майже-кілець з одиницею та локальних майже-кілець із заданими адитивними групами й одержанні нових структурних, класифікаційних та обчислювальних результатів.

До найвагоміших наукових здобутків належать результати про встановлення умов існування майже-кілець з одиницею та локальних майже-кілець на групах порядків p^3 і p^4 ; дослідження груп Міллера–Морено, груп Шмідта та відповідних прямих добутків як адитивних груп таких майже-кілець; розроблення алгоритмічних і програмних засобів у системі комп'ютерної алгебри GAP та пакеті LocalNR, застосованих для одержання нових класифікаційних результатів.

Основні результати дисертації є новими та належно науково обґрунтованими. Особистий внесок здобувачки в наукових публікаціях, виконаних у співавторстві, чітко визначено як у рефераті, так і в самій дисертації. Сукупність одержаних результатів істотно доповнює теорію скінченних майже-кілець і розширює можливості їх подальшого структурного та комп'ютерного дослідження.

Теоретичне та практичне, загальнонаціональне та світове значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має переважно теоретичний характер. Одержані результати мають значення для подальшого розвитку теорії майже-кілець, теорії груп та обчислювальної алгебри. Вони доповнюють наявні у світовій математичній літературі результати щодо адитивних груп майже-кілець з одиницею та локальних майже-кілець, а розроблені алгоритми й програмні засоби розширюють можливості системи GAP для дослідження скінченних алгебраїчних структур. Результати роботи можуть також знайти застосування в суміжних напрямках досліджень, зокрема в теорії кодування.

Результати дисертації можуть бути використані в подальших алгебраїчних дослідженнях, що здійснюються науковцями Інституту математики НАН України, Київського національного університету імені

Тараса Шевченка, Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, Львівського національного університету імені Івана Франка, Карпатського національного університету імені Василя Стефаника, Луганського національного університету імені Тараса Шевченка та інших наукових установ і закладів вищої освіти, в яких розвиваються теорія груп, теорія напівгруп, теорія кілець і близькі напрями сучасної алгебри.

Світовому поширенню одержаних результатів сприяють 8 англomовних статей, опублікованих у журналах, представлених у міжнародних наукометричних базах Scopus та/або Web of Science, а також широка апробація результатів на міжнародних і всеукраїнських наукових конференціях, школах та семінарах, відображена у 22 публікаціях у матеріалах і тезах доповідей. Серед закордонних наукових заходів, на яких було представлено й обговорено основні результати дисертації, слід відзначити конференції, воркшопи та школи в Кайзерслаутерні, Аахені, Ламбрехті й Дрездені (Німеччина), Тарту (Естонія), Гданську та Варшаві (Польща), Еспоо (Фінляндія), а також науковий семінар «Algebra and Discrete Mathematics» в Університеті Йоганна Кеплера в Лінці (Австрія).

Повнота викладу результатів дисертації в наукових публікаціях. Основні наукові результати дисертаційної роботи достатньо повно відображено в публікаціях здобувачки. У них висвітлено результати дослідження майже-кілець з одиницею та локальних майже-кілець на групах різних типів, наведено відповідні конструкції та класифікаційні результати, а також представлено розроблені алгоритми й програмні засоби, реалізовані в пакеті LocalNR для системи комп'ютерної алгебри GAP. Зміст наукових публікацій відповідає основним положенням і висновкам дисертації та належною мірою розкриває одержані в ній результати.

Основний зміст дисертації викладено у 15 статтях, опублікованих у наукових виданнях, із яких 8 – у журналах, представлених у міжнародній наукометричній базі Scopus та/або Web of Science. За даними SCImago Journal & Country Rank, наведеними в дисертації, 1 статтю опубліковано у виданні першого квартиля (Q1), 6 – у виданнях третього квартиля (Q3), 1 – у виданні четвертого квартиля (Q4). До праць, що додатково відображають наукові результати дисертації та засвідчують їх апробацію, належать 22 публікації у матеріалах і тезах доповідей міжнародних та всеукраїнських наукових конференцій і шкіл, наведені у списку праць, опублікованих за темою дисертації, та в рефераті.

Відповідність реферату змісту дисертації. Реферат дисертації відповідає її змісту та достатньо повно відображає основні положення, наукові результати й висновки роботи.

Відомості про дотримання академічної доброчесності. Під час аналізу дисертаційної роботи «Скінченні майже-кільця з одиницею та локальні майже-кільця з деякими обмеженнями на адитивні групи» та наукових публікацій Раєвської І. Ю., у яких висвітлено основні результати дисертації, ознак академічного плагіату, фальсифікації або інших порушень академічної доброчесності, що могли б поставити під сумнів самостійність виконання роботи чи достовірність одержаних результатів, не виявлено.

Зауваження до дисертаційної роботи. У представленій дисертації є певні недоліки, до яких можна віднести такі.

1. У доведенні теореми 3.15 на с. 126 було б доцільно явно зазначити, який інваріант відрізняє останнє побудоване нуль-симетричне локальне майже-кільце від кожного з попередніх $p - 1$ нуль-симетричних майже-кілець, що зробило б обґрунтування їх попарної неізоморфності повнішим.

2. У лемі 3.19 на с. 133 варто було б нагадати, що R є локальним майже-кільцем, яке не є майже-полем, а його адитивна група ізоморфна прямому добутку циклічних груп порядків p^2 і p . Також слід було обґрунтувати використану рівність $\beta(x + z) = \beta(x)$, $x \in R$, $z \in \langle ap \rangle$, де a є одиницею в R , необхідну для доведення того, що $\langle ap \rangle$ є ідеалом у R .

3. У доведенні лемі 5.12 на с. 198 замість p^2 має бути зазначено, що підгрупа $\langle ap \rangle$ має порядок p . Крім того, корисно було б надати коротке пояснення, чому жоден елемент із $G_6 \setminus \langle ap \rangle$ не є ендоциклічним.

4. У лемі 6.17 на с. 237–238 у визначенні функції ψ порівняння має бути записане за модулем p^n , а не p^m , відповідно до області значень ψ . Крім того, варто було б узгодити умову $\xi(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$ з наявністю одиниці a в майже-кільці R . Проте ці неточності не змінюють основної ідеї побудови локального майже-кільця на заданій адитивній групі.

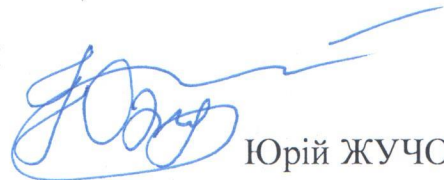
5. У тексті наявні окремі граматичні, друкарські та стилістичні неточності. Зазначимо деякі з них: с. 5, 20, 49 і 138 – замість «*майже-кільця порядків ...*» краще писати «*майже-кільця порядку ...*»; с. 7 – замість «*if such an nearring*» має бути «*if such a nearring*»; с. 10, 11, 14, 306, 315 – слід уніфікувати форми «*Schmidt group*» та «*Shmidt group*»; с. 11 – у ключових словах слід писати «*Miller–Moreno groups*» замість «*Millera–Moreno groups*»; с. 105 – замість «*Лема 2.11 базуються ...*» має бути «*Лема 2.11 базується ...*»; у низці місць замість «*співпадає*» слід вживати «*збігається*» (наприклад, с. 51, 98, 149, 183, 228 і 243); с. 198 – замість « *G_6 не є ендоциклічним*» слід писати « *G_6 не є ендоциклічною групою*»; с. 221 – замість «*являється*» краще використовувати «*є*»; с. 236, рядки 4–6 знизу, – у тексті залишено речення англійською мовою «*Moreover, each element...*»; с. 292 – написано «*групи з пропозиції 1*», хоча йдеться про твердження 7.16.

Однак виявлені недоліки та інші неточності в тексті роботи не є принциповими, мають переважно технічний і редакційний характер та не знижують загальної позитивної оцінки дисертації.

Висновок. Вважаю, що дисертаційна робота Раєвської Ірини Юріївни «Скінченні майже-кільця з одиницею та локальні майже-кільця з деякими обмеженнями на адитивні групи» є завершеним, самостійним та оригінальним науковим дослідженням, яке за актуальністю, науковою новизною, обґрунтованістю й достовірністю одержаних результатів, їх теоретичним і практичним значенням відповідає всім вимогам пунктів 7 і 9 Порядку присудження та позбавлення наукового ступеня доктора наук, затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 17 листопада 2021 року № 1197, а здобувачка, Раєвська Ірина Юріївна, заслуговує на присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел.

Офіційний опонент:

доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри математики та інформатики
факультету технологій та інформаційних систем
Державного закладу «Луганський національний
університет імені Тараса Шевченка»


Юрій ЖУЧОК

Проректор
з науково-методичної роботи



доц. Ярослав ЮРКІВ

Підпис Юрія Жуцьке
Засвідчую
Начальник відділу кадрів Жуцьке
ДЗ "Луганський національний університет
імені Тараса Шевченка"

05.08.2026

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛУГАНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
ВІДДІЛ
КАДРІВ
ІД. КОД 02125131 *
ДЕРЖАВНИЙ ЗАКЛАД

Надійшов до спеціалізованої
вченої ради Д 26.206.03
07.08.2026

В.О. університетський секретар
М. ДИВОРНИК

