

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

Директор Інституту математики
Національної академії наук України
академік НАН України

 Олександр ТИМОХА

“ 2 ” квітня 2026 р.



В И С Н О В О К

про наукову новизну, теоретичне й практичне значення результатів
дисертаційної роботи Ірини Юріївни РАЄВСЬКОЇ
**“Скінченні майже-кільця з одиницею та локальні майже-кільця
з деякими обмеженнями на адитивні групи”**,
поданої на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук
зі спеціальності 01.01.06 — алгебра та теорія чисел

Актуальність теми дослідження. Характерною рисою сучасного етапу розвитку алгебри є підвищення активності досліджень в областях, що узагальнюють теорії класичних алгебраїчних систем, наприклад, теорія майже-кілець. Майже-кільця виникають природним чином при вивченні систем нелінійних відображень і вивчаються протягом багатьох десятиліть.

Відомо, що будь-яка скінченна абелева група A є прямою сумою примарних циклічних підгруп, кожна з яких можна розглядати як адитивну групу деякого кільця лишків $\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$. Звідси A є адитивною групою прямої суми цих кілець. Отже, кожна скінченна абелева група є адитивною групою асоціативного (і навіть комутативного) кільця з одиницею. Однак, у випадку майже-кілець з одиницею аналогічний результат для скінченних неабелевих груп не виконується.

Питання про те, які групи можуть бути адитивними групами майже-кілець з одиницею, досліджується з кінця 1960-х років. Над вирішенням цього питання працювали Бойкетт, Джонсон, Дой, Клей, Кріммел, Лай, Лекстон, Локхарт, Малон, Мексон, Нібauer, Раєвська М., Сисак та інші.

Відомо, наприклад, що узагальнені групи кватерніонів та група діедра порядку 8 не можуть бути адитивними групами локальних майже-кілець. Крім того, як показав Фейгельсток, для кожного простого числа p та цілого $n > p$ існує група порядку p^n , яка не є адитивною групою локального майже-кілець.

Однак, задача класифікації скінченних неабелевих p -груп, що є адитивними групами локальних майже-кілець, залишається далекою від розв'язання.

З огляду на вище сказане, тематика дослідження є актуальною.

Достовірність та наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, положення та висновки, що виносяться на захист, логічно пов'язані з матеріалом дисертації та опублікованих за темою дисертації наукових праць.

Ступінь обґрунтованості і достовірності наукових положень дисертації. Всі нові поняття, з якими автор оперує в дисертаційній роботі визначені в математично строгих означеннях. Матеріал дисертації викладено послідовно і логічно, доведення не викликають жодних сумнівів. Отже, достовірність отриманих результатів не викликає заперечень.

Наукова новизна отриманих результатів. У представленій дисертації вперше було одержано низку нових важливих наукових результатів, а саме:

- Описано майже-кілець з одиницею на групах порядку p^3 .
- Наведено необхідні умови існування майже-кілець з одиницею на абелевих групах порядку p^3 .
- Наведено необхідні умови існування майже-кілець з одиницею на неабелевих групах порядку p^3 .
- Описано локальні майже-кілець з адитивними групами порядку p^3 . Визначено формули множення для таких майже-кілець та описано функції, що їх задають.
- Наведено приклад локального майже-кілець з адитивною групою порядку p^3 .
- Дано оцінку нижньої межі кількості локальних майже-кілець на групах порядку p^3 .
- Наведено алгоритм побудови локального майже-кілець з елементарною абелевою адитивною групою порядку 5^3 , що реалізовано в системі комп'ютерної алгебри GAP.
- Проаналізовано існування та кількість неізоморфних локальних майже-кілець на групах порядку p^3 .
- Наведено деякі структурні результати стосовно груп порядку p^4 .
- Отримано необхідні умови існування майже-кілець з одиницею на групах порядку p^4 .
- Визначено формули множення для таких майже-кілець та описано функції, що їх задають.
- Описано локальні майже-кілець з адитивними групами порядку p^4 . Вказано формули множення для таких майже-кілець та описано функції, що їх задають.
- Наведено приклад локального майже-кілець порядку $5^4 = 625$.
- Дано алгоритм побудови локального майже-кілець з неабелевою адитивною адитивною групою порядку 5^4 , що реалізовано в системі комп'ютерної алгебри GAP.
- Наведено необхідні та достатні умови існування майже-кілець з одиницею на групах Міллера–Морено.
- Показано, що не існує майже-кілець з одиницею, адитивна група яких ізоморфна групі Шмідта.
- Описано прямі добутки p -груп Міллера–Морено та циклічних p -груп як адитивні групи майже-кілець з одиницею та локальних майже-кілець. Визначено формули множення для таких майже-кілець та описано функції, що їх задають.
- Описано побудову майже-кілець з одиницею.

- Наведено деякі функції для локальних майже-кілець з пакету LocalNR, а саме:
 - UnitsOfNearRing(R) (вивід: список оборотних елементів майже-кілця, якщо R є майже-кілцем з одиницею, інакше вивід має вигляд **Error, no units exist**),
 - IsLocalNearRing(R) (вивід: значення **true**, якщо R є локальним майже-кілцем, інакше вивід має значення **false**.),
 - IsLocalRing(R) (вивід: значення **true**, якщо R є локальним кілцем, інакше вивід має значення **false**),
 - NearRingNonUnits(R) (вивід: список необоротних елементів R .),
 - NonUnitsAsAdditiveSubgroup(R) (вивід: адитивна підгрупа необоротних елементів R).
- Описано майже-кілця з одиницею пакету SONATA та ендоециклічні групи.
- Проаналізовано локальні майже-кілця порядку 32.
- Наведено часткову класифікацію локальних майже-кілець порядку 128.
- Знайдено 2-породжені ендоециклічні групи порядку 256 та експоненти 16, які не є адитивними групами локальних майже-кілець.

Теоретичне та практичне значення роботи. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи, а також методика їх отримання, можуть бути використані для подальшого розвитку теорії майже-кілець, теорії груп, системи GAP, і у деяких інших галузях науки, зокрема, теорії кодування.

Повнота викладу матеріалів у публікаціях положень, висновків і рекомендацій, сформульованих у дисертації. Результати дисертації висвітлено у 42 наукових публікаціях, з них 15 — статті у наукових виданнях, внесених до переліку наукових фахових видань України та закордонних виданнях, а також 22 публікації у тезах доповідей і матеріалах міжнародних та вітчизняних конференцій. 8 публікацій проіндексовані у міжнародних наукометричних базах Scopus або Web of Science. Зокрема, у профільних наукових журналах кuartилію Q1 (відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank) опубліковано 1 статтю, кuartилію Q3 — 6 статей, кuartилію Q4 — 1 статтю. Відповідно до п. 2 Наказу № 1220 МОН України від 23.09.2019 “Про опублікування результатів дисертації на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук” (зі змінами) вказані 15 статей зараховуються як 23 наукові публікації. 7 статей опубліковано в інших профільних журналах, які відносяться до фахових видань МОН України (але не індексуються в Scopus або Web of Science). З статті одноосібні. В кінці кожного розділу дисертаційної роботи пояснюється, в яких саме роботах викладено основні результати відповідного розділу. Отже, результати дисертації викладені досить повно і детально в публікаціях.

Особистий внесок здобувача до наукових публікацій. Основні результати дисертації, які виносяться на захист, отримані автором особисто. Три статті опубліковано без співавторів. У спільних з науковим консультантом та М. Ю. Раєвською публікаціях зі Списку публікацій (С. 12–18 дисертації) розподіл особистих внесків такий:

- у роботах [1, 2, 17, 18, 19, 20] — визначення напрямку досліджень, постановка задач, ідеї відносно вибору методик розв’язування, побудова алгоритму, брав участь у написанні функцій, обговоренні результатів, контроль якості викладення результатів належить науковому консультанту Я. П. Сисаку.
- у статті [1] — в дисертацію включено теорему 1. Здобувачка брала участь в обговоренні алгоритму.
- у статті [2] — здобувачка брала участь у написанні функцій для майже-кілець: `UnitsOfNearRing`, `IsLocalNearRing`, `IsLocalRing`, `NearRingNonUnits`, `NonUnitsAsAdditiveSubgroup`. В дисертацію включено твердження 1 та гіпотезу.
- у статті [3] — внесок авторів рівноцінний. В дисертацію включено лему 4.
- у статтях [5, 9, 10, 12, 13, 16, 17, 18, 19] — співавторка М. Ю. Раєвська перевіряла результати та брала участь в обговоренні результатів, постановці гіпотез та фінальному оформленні результатів.
- у статті [6] — внесок авторів рівноцінний. В дисертацію включено теорему 13.
- у статті [7] — внесок авторів рівноцінний. В дисертацію включено лему 1, теорему 1, лему 2, теорему 2.
- у статті [14] — внесок авторів рівноцінний. В дисертацію включено лему 5, лему 6, теорему 4.
- у статті [15] — внесок авторів рівноцінний. В дисертацію включено лему 5, теорему 3.
- у пакеті [20] — здобувачка та М. Ю. Раєвська брали участь у написанні функцій, побудові локальних майже-кілець, оформленні та перевірці.

ВИСНОВОК.

Дисертаційна робота, виконана Іриною Юріївною Раєвською на тему “Скінченні майже-кілець з одиницею та локальні майже-кілець з деякими обмеженнями на адитивні групи”, є завершеною науково-дослідною роботою. Отримані результати є новими та оригінальними і мають важливу науково-теоретичну цінність. Зміст дисертації відповідає визначеній меті, поставлені здобувачці наукові завдання вирішені, мету дослідження досягнуто. Основні результати дисертації повністю обґрунтовані й отримали необхідну апробацію на наукових конференціях та семінарах. Структура та обсяг роботи відповідають встановленим вимогам. У публікаціях здобувачки відображені всі положення дисертації.

Вищевикладене дозволяє зробити висновок про те, що дисертаційна робота Ірини Юріївни Раєвської “Скінченні майже-кілець з одиницею та локальні майже-кілець з деякими обмеженнями на адитивні групи” відповідає вимогам 7, 8 та 9 “Порядку призначення та позбавлення наукового ступеня доктора наук”, затвердженого постановою Кабінету міністрів України від 17 листопада 2021 р., № 1197 (зі змінами).

Результати дисертаційного дослідження обговорено і схвалено на засіданні Алгебраїчного семінару Інституту математики НАН України 25 березня 2026 року.

Отже, дисертація рекомендується до захисту на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 — алгебра та теорія чисел.

Головуючий на засіданні фахового семінару,
академік НАН України



Сергій МАКСИМЕНКО

Рецензенти:

академік НАН України,
доктор фіз.-мат. наук, професор,
завідувач відділу алгебри і топології
Інституту математики НАН України



Сергій МАКСИМЕНКО

член-кореспондент НАН України,
доктор фіз.-мат. наук, старший дослідник,
провідний науковий співробітник
Інституту математики НАН України



Олена ВАНЄЄВА

доктор фіз.-мат. наук, професор,
завідувач відділу комплексного
аналізу і теорії потенціалу
Інституту математики НАН України



Сергій ПЛАКСА

Вчений секретар семінару,
кандидат фіз.-мат. наук,
науковий співробітник
відділу алгебри і топології
Інституту математики НАН України



Богдан ФЕЩЕНКО