

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ



**РАЄВСЬКА Ірина Юріївна**

УДК 512.6

**Скінченні майже-кільця з одиницею та  
локальні майже-кільця  
з деякими обмеженнями на адитивні групи**

01.01.06 — алгебра та теорія чисел

Реферат  
дисертації на здобуття наукового ступеня  
доктора фізико-математичних наук

Київ — 2026

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано в Інституті математики НАН України.

Науковий консультант:

професор, доктор фізико-математичних наук

**СИСАК Ярослав Прокопович**

Інститут математики НАН України,

провідний науковий співробітник

відділу алгебри і топології.

Офіційні опоненти:

професор, доктор фізико-математичних наук

**ЖУЧОК Юрій Володимирович**

Луганський національний університет

імені Тараса Шевченка, професор кафедри

математики та інформатики факультету технологій

та інформаційних систем;

заслужений діяч науки і техніки України,

професор, доктор фізико-математичних наук

**КУРДАЧЕНКО Леонід Андрійович**

Дніпровський національний університет

імені Олеся Гончара, професор кафедри

геометрії та алгебри;

професор, доктор фізико-математичних наук

**ПЕТРАВЧУК Анатолій Петрович**

Київський національний університет

імені Тараса Шевченка, завідувач кафедри

алгебри і комп'ютерної математики.

Захист відбудеться «26» серпня 2026 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.03 Інституту математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України та на офіційному сайті інституту за адресою: <https://www.imath.kiev.ua/zahyst/>.

Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради



**Андріяна ПЛАКОШ**

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Дисертаційна робота** присвячено вивченню скінченних майже-кілець з одиницею та локальних майже-кілець з обмеженнями на адитивні групи.

**Обґрунтування вибору теми дослідження.** Характерною рисою сучасного етапу розвитку алгебри є підвищення активності досліджень в областях, що узагальнюють теорії класичних алгебраїчних систем, наприклад, теорія майже-кілець. Майже-кілеця виникають природним чином при вивченні систем нелінійних відображень і вивчаються протягом багатьох десятиліть.

Основи аксіоматики теорії майже-кілець були закладені в роботах Оре, Фуртванглера-Таусскі та Таусскі-Тодд.

Дослідження майже-кілець пов'язане з роботами Бейдлемана, Бетша, Блекетта, Вендта, Мейсона, Х. Нойман, Петерсона, Хезерлі та інші.

Однією з перших робіт в Україні, в якій розглядаються майже-кілеця, є стаття Калужніна та Суцанського, опубліковано в 1978 році. Першою дисертацією в Україні, в якій розглядаються майже-кілеця, є докторська дисертація Усенка захищена у 1999 році.

Відомо, що будь-яка скінченна абелева група  $A$  є прямою сумою примарних циклічних підгруп, кожна з яких можна розглядати як адитивну групу деякого кільця лишків  $\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ . Звідси  $A$  є адитивною групою прямої суми цих кілець. Отже, кожна скінченна абелева група є адитивною групою асоціативного (і навіть комутативного) кільця з одиницею. Однак, у випадку майже-кілець з одиницею аналогічний результат для скінченних неабелевих груп не виконується.

Питання про те, які групи можуть бути адитивними групами майже-кілець з одиницею, досліджується з кінця 1960-х років. Над вирішенням цього питання працювали Бойкетт, Джонсон, Дой, Клей, Кріммел, Лай, Лекстон, Локхарт, Малон, Мексон, Нибауер, Раєвська М., Сисак та інші.

В дисертації розглянуто майже-кілеця на групах Міллера-Морено, Шмідта.

Монографії Пільца, Мелдрума, Клея, К. Ферреро та Г. Ферреро, Локхарта присвячені загальній теорії майже-кілець.

Нагадаємо, що кільце  $R$  з одиницею, множина  $L$  всіх необоротних елементів якого утворює ідеал в  $R$  (а отже, фактор-кільце  $R/L$  є тілом), називається локальним кільцем. Як легко переконатися,

в означенні локального кільця достатньо насправді припускати, що  $L$  є тільки підгрупою адитивної групи кільця  $R$ . Замінивши в ньому слово “кільце” на “майже-кільце”, отримуємо означення локальних майже-кілець, вивчення яких розпочав Мексон. Відомо, що скінченна група є адитивною групою деякого локального кільця тоді і тільки тоді, коли вона є абелевою  $p$ -групою. Як було показано Мексоном, адитивна група  $R^+$  скінченного локального майже кільця  $R$  є  $p$ -групою, а його підгрупа  $L$  необоротних елементів є ідеалом в  $R$ . Звідси випливає, зокрема, що фактор-група  $R/L$  є елементарною абелевою. Більш того, ним було встановлено, що кожна абелева  $p$ -група, відмінна від циклічної групи та групи порядку 4, є адитивною групою локального майже-кілець, що не є кільцем, а також описані всі неізоморфні нуль-симетричні локальні майже-кільця з елементарною абелевою адитивною групою порядку  $p^2$ , які не є майже-поллями.

Однак, задача класифікації скінченних неабелевих  $p$ -груп, що є адитивними групами локальних майже-кілець, залишається далекою від розв’язання. Прямі добутки метациклічних  $p$ -груп Міллера–Морено та циклічних  $p$ -груп, прямі добутки неметациклічних  $p$ -груп Міллера–Морено та циклічних  $p$ -груп досліджуються в даному рукописі.

Відомо, наприклад, що узагальнені групи кватерніонів та група діедра порядку 8 не можуть бути адитивними групами локальних майже-кілець. Крім того, як показав Фейгельсток, для кожного простого числа  $p$  та цілого  $n > p$  існує група порядку  $p^n$ , яка не є адитивною групою локального майже-кілець.

Вивченню локальних майже-кілець присвячені роботи Амберга, Городніка, Губерта, Мексона, Раєвської М., Сисака, Фейгелстока та інших.

Оскільки повністю описані усі нуль-симетричні локальні майже-кільця порядку  $p^2$ , то наступним кроком є характеристизація локальних майже-кілець на абелевих та неабелевих групах порядку  $p^3$  та на групах порядку  $p^4$  класу нільпотентності 2 та класу нільпотентності 3.

Список усіх 698 неізоморфних локальних майже-кілець порядку не більше 31 містяться в пакеті SONATA системи комп’ютерної алгебри GAP. Однак класифікація майже-кілець порядку 32 і вище вимагає набагато складніших обчислень. Для локальних майже-кілець вони були реалізовані в новому GAP-пакеті LocalNR.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Робота виконувалася в Інституті математики НАН України у відділі алгебри і топології згідно із загальним планом досліджень у рамках науково-дослідних тем “Теорія зображень та її застосування в алгебрі, геометрії й топології” (номер державної реєстрації 0111U002096, 2011–2015 рр.), “Розробка й застосування нових методів у теорії зображень, абстрактній алгебрі та алгебраїчній геометрії” (номер державної реєстрації 0116U003125, 2016–2020 рр.), “Дослідження динамічних систем та еволюційних задач топологічними, стохастичними та алгебричними методами” (номер державної реєстрації 0117U004091, 2017–2021 рр.) та “Категорні, комбінаторні та аналітичні методи дослідження проблем теорії зображень, алгебраїчної геометрії, алгебраїчної та диференціальної топології” (номер державної реєстрації 0121U100395, 2021–2025 рр.), “Сучасні методи алгебри і топології та їх застосування” (номер державної реєстрації 0126U000346, 2026–2030 рр.).

**Мета і завдання дослідження.** Розвиток теорії майже-кілець з одиницею та пов'язаних з ними груп.

*Об'єктом дослідження* є скінченні майже-кілець з одиницею та локальні майже-кілець.

*Предметом дослідження* є адитивні групи скінченних майже-кілець з одиницею та локальних майже-кілець, класифікація скінченних локальних майже-кілець.

*Завдання дослідження:*

- Описати майже-кілець з одиницею на групах порядку  $p^3$ .
- Отримати необхідні умови існування майже-кілець з одиницею на абелевих групах порядку  $p^3$ .
- Отримати необхідні умови існування майже-кілець з одиницею на неабелевих групах порядку  $p^3$ .
- Описати локальні майже-кілець з адитивними групами порядку  $p^3$ . Визначити формули множення для таких майже-кілець та описано функції, що їх задають.
- Навести приклад локальних майже-кілець з адитивною групою порядку  $p^3$ .
- Дати оцінку нижньої межі кількості локальних майже-кілець на групах порядку  $p^3$ .
- Навести алгоритм побудови локального майже-кілець з елементарною абелевою адитивною групою порядку  $5^3$ , що реалізовано в системі комп'ютерної алгебри GAP.

- Проаналізувати існування та кількість неізоморфних локальних майже-кілець на групах порядку  $p^3$ .
- Навести деякі структурні результати стосовно груп порядку  $p^4$ .
- Отримати необхідні умови існування майже-кілець з одиницею на групах порядку  $p^4$ . Визначити формули множення для таких майже-кілець та описано функції, що їх задають.
- Описати локальні майже-кілець з адитивними групами порядку  $p^4$ . Вказати формули множення для таких майже-кілець та описано функції, що їх задають.
- Навести приклад локального майже-кілець порядку  $5^4 = 625$ .
- Дати алгоритм побудови локального майже-кілець з неабелевою адитивною групою порядку  $5^4$ , що реалізовано в системі комп'ютерної алгебри GAP.
- Навести необхідні та достатні умови існування майже-кілець з одиницею на групах Міллера–Морено.
- Показати, що не існує майже-кілець з одиницею, адитивна група яких ізоморфна групі Шмідта.
- Дослідити прямі добутки  $p$ -груп Міллера–Морено та циклічних  $p$ -груп як адитивні групи майже-кілець з одиницею та локальних майже-кілець. Визначити формули множення для таких майже-кілець та описано функції, що їх задають.
- Описати побудову майже-кілець з одиницею.
- Навести деякі функції для локальних майже-кілець з пакету LocalNR, а саме: UnitsOfNearRing(R) (вивід: список оборотних елементів майже-кілець, якщо  $R$  є майже-кілем з одиницею, інакше вивід має вигляд **Error, no units exist**), IsLocalNearRing(R) (вивід: значення **true**, якщо  $R$  є локальним майже-кілем, інакше вивід має значення **false**.), IsLocalRing(R) (вивід: значення **true**, якщо  $R$  є локальним кілем, інакше вивід має значення **false**), NearRingNonUnits(R) (вивід: список необоротних елементів  $R$ ), NonUnitsAsAdditiveSubgroup(R) (вивід: адитивна підгрупа необоротних елементів  $R$ ).
- Описати майже-кілець з одиницею пакету SONATA та ендоециклічні групи.
- Проаналізувати локальні майже-кілець порядку 32.
- Навести часткову класифікацію локальних майже-кілець порядку 128.
- Знайти 2-породжені ендоециклічні групи порядку 256 та експоненти 16, які не є адитивними групами локальних майже-кілець.

**Методи дослідження.** У роботі використовуються методи теорії груп та теорії майже-кілець. Для побудови прикладів локальних майже-кілець були написані алгоритми та програми на мові GAP, які було реалізовано на кластерах та суперкомп'ютерах;

- Інституту математики НАН України (м. Київ, Україна);
- Інституту кібернетики НАН України (м. Київ, Україна);
- Київського політехнічного інституту імені Ігоря Сікорського (м. Київ, Україна);
- CIRCA (м. Сент Андрюс, Шотландія, Велика Британія);
- CIRUS (м. Единбург, Шотландія, Велика Британія);
- Інституту математики Польської Академії Наук (м. Варшава, Польща).

**Наукова новизна отриманих результатів.** Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, є новими і полягають у такому:

- Описано майже-кілець з одиницею на групах порядку  $p^3$ .
- Наведено необхідні умови існування майже-кілець з одиницею на абелевих групах порядку  $p^3$ .
- Наведено необхідні умови існування майже-кілець з одиницею на неабелевих групах порядку  $p^3$ .
- Описано локальні майже-кілець з адитивними групами порядку  $p^3$ . Визначено формули множення для таких майже-кілець та описано функції, що їх задають.
- Наведено приклад локального майже-кілець з адитивною групою порядку  $p^3$ .
- Дано оцінку нижньої межі кількості локальних майже-кілець на групах порядку  $p^3$ .
- Наведено алгоритм побудови локального майже-кілець з елементарною абелевою адитивною групою порядку  $5^3$ , що реалізовано в системі комп'ютерної алгебри GAP.
- Проаналізовано існування та кількість неізоморфних локальних майже-кілець на групах порядку  $p^3$ .
- Наведено деякі структурні результати стосовно груп порядку  $p^4$ .
- Отримано необхідні умови існування майже-кілець з одиницею на групах порядку  $p^4$ .
- Визначено формули множення для таких майже-кілець та описано функції, що їх задають.
- Описано локальні майже-кілець з адитивними групами порядку  $p^4$ . Вказано формули множення для таких майже-кілець та описано

функції, що їх задають.

- Наведено приклад локального майже-кільця порядку  $5^4 = 625$ .
- Дано алгоритм побудови локального майже-кільця з неабелевою адитивною групою порядку  $5^4$ , що реалізовано в системі комп'ютерної алгебри GAP.
- Наведено необхідні та достатні умови існування майже-кілець з одиницею на групах Міллера–Морено.
- Показано, що не існує майже-кілець з одиницею, адитивна група яких ізоморфна групі Шмідта.
- Описано прямі добутки  $p$ -груп Міллера–Морено та циклічних  $p$ -груп як адитивні групи майже-кілець з одиницею та локальних майже-кілець. Визначено формули множення для таких майже-кілець та описано функції, що їх задають.
- Описано побудову майже-кілець з одиницею.
- Наведено деякі функції для локальних майже-кілець з пакету LocalNR, а саме: UnitsOfNearRing(R) (вивід: список оборотних елементів майже-кільця, якщо  $R$  є майже-кільцем з одиницею, інакше вивід має вигляд **Error, no units exist**), IsLocalNearRing(R) (вивід: значення **true**, якщо  $R$  є локальним майже-кільцем, інакше вивід має значення **false**.), IsLocalRing(R) (вивід: значення **true**, якщо  $R$  є локальним кільцем, інакше вивід має значення **false**), NearRingNonUnits(R) (вивід: список необоротних елементів  $R$ .), NonUnitsAsAdditiveSubgroup(R) (вивід: адитивна підгрупа необоротних елементів  $R$ ).
- Описано майже-кільця з одиницею пакету SONATA та ендоециклічні групи.
- Проаналізовано локальні майже-кільця порядку 32.
- Наведено часткову класифікацію локальних майже-кілець порядку 128.
- Знайдено 2-породжені ендоециклічні групи порядку 256 та експоненти 16, які не є адитивними групами локальних майже-кілець.

**Практичне значення одержаних результатів.** Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи, а також методика їх отримання, можуть бути використані для подальшого розвитку теорії майже-кілець, теорії груп, системи GAP, і у деяких інших галузях науки, зокрема, теорії кодування.

**Особистий внесок здобувача.** Основні результати дисертації, які виносяться на захист, отримані автором особисто. Три статті опублікована без співавторів. У спільних з науковим консультантом та



М. Ю. Раєвською публікаціях за темою дисертації розподіл особистих внесків такий:

- у роботах [1, 2, 17, 18, 19, 20] — визначення напрямку досліджень, постановка задач, ідеї відносно вибору методик розв’язування, побудова алгоритму, брав участь у написанні функцій, обговоренні результатів, контроль якості викладення результатів належить науковому консультанту Я. П. Сисаку.
- у статті [1] — в дисертацію включено теорему 1. Здобувачка брала участь в обговоренні алгоритму.
- у статті [2] — здобувачка брала участь у написанні функцій для майже-кілець: `UnitsOfNearRing`, `IsLocalNearRing`, `IsLocalRing`, `NearRingNonUnits`, `NonUnitsAsAdditiveSubgroup`. В дисертацію включено твердження 1 та гіпотезу.
- у статті [3] — внесок авторів рівноцінний. В дисертацію включено лему 4.
- у статтях [5, 9, 10, 12, 13, 16, 17, 18, 19] — співавторка М. Ю. Раєвська перевіряла результати та брала участь в обговоренні результатів, постановці гіпотез та фінальному оформленні результатів.
- у статті [6] — внесок авторів рівноцінний. В дисертацію включено теорему 13.
- у статті [7] — внесок авторів рівноцінний. В дисертацію включено лему 1, теорему 1, лему 2, теорему 2.
- у статті [14] — внесок авторів рівноцінний. В дисертацію включено лему 5, лему 6, теорему 4.
- у статті [15] — внесок авторів рівноцінний. В дисертацію включено лему 5, теорему 3.
- у пакеті [20] — здобувачка та М. Ю. Раєвська брали участь у написанні функцій, побудові локальних майже-кілець, оформленні та перевірці.

**Апробація результатів дисертації.** Результати роботи були представлені, доповідалися і обговорювалися на: Воркшоп, присвячений 70-річчю Юрія Вікторовича Боднарчука, 23 грудня 2025 року, Національний університет “Києво-Могилянська академія”, Київ, Україна; Ukraine Mathematics Conference “At the End of the Year 2025”, December 18–19, 2025, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine; Міжнародна конференція, присвячена 75-й річниці від дня народження Володимира Маслюченка, 25–27 вересня 2025 року, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна; 15th Ukraine Algebra Conference,

July 8–12, 2025, Lviv, Ukraine; The conference of young scientists “Pidstryhach Readings — 2025”, May 27–29, 2025, Lviv, Ukraine; GAP Days Spring 2024, March 11–15, 2024, University of Kaiserslautern-Landau, Kaiserslautern, Germany; Ukraine Algebra Conference “At the End of the Year 2023” (online), December 26–27, 2023, Kyiv, Ukraine, XIX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, присвячена 125-річчю КПІ ім. Ігоря Сікорського (онлайн), 11–12 жовтня 2023 року, Київ, Україна; AAA103, The 103rd Workshop on General Algebra, June 9–11, 2023, University of Tartu, Tartu, Estonia; Online Twinning Conference (online), March 27–30, 2023, Digital Theme UK-Ukraine Twinning Initiative, Great Britain; International Algebraic Conference “At the End of the Year 2022” (online), December 27–28, 2022, Kyiv, Ukraine; International conference-workshop “GAP Days Summer 2022”, October 17–21, 2022, RWTH Aachen University, Aachen, Germany; International Conference “On the Trail of Women in Mathematics “Contemporary Women in Mathematics”, September 15–17, 2022, Gdansk, Poland; Підстригачівські читання – 2021 (онлайн), 26–28 травня 2021 року, Львів, Україна; 11th International Skorobohatko Mathematical Conference, October 26–30, 2020, Lviv, Ukraine; Конференція молодих учених “Підстригачівські читання – 2020”, 26–28 травня 2020 року, Львів, Україна; 11th International Skorobohatko Mathematical Conference, October 26–30, 2020, Lviv, Ukraine; GAP-Singular-Meeting as part of the OpenDreamKit project, August 15–23, 2019, PfalzAkademie, Lambrecht, Germany; Міжнародної наукової конференції “Сучасні проблеми механіки та математики”, яка присвячена 90-річчю від дня народження академіка НАН України Ярослава Степановича Підстригача та 40-річчю створеного ним Інституту прикладних проблем механіки і математики НАН України, 22–25 травня 2018 року, Львів, Україна; 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko, July 03–07, 2017, Kyiv, Ukraine; XI Літня школа “Алгебра, Топологія, Аналіз”, 1–14 серпня 2016 року, Одеса, Україна; Міжнародна конференція молодих математиків присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Юрія Олексійовича Митропольського (1917–2008), 7–10 червня 2017 року, Київ, Україна; Summer School on Algebra, Statistics and Combinatorics, June 27 – July 2, 2016, Espoo, Finland; AAA89: Workshop on General Algebra, February 26 – March 01, 2015, Dresden, Germany; The International Algebraic Conference dedicated to 100-th anniversary

of L. A. Kaluzhnin, 07–12 July, 2014, Kyiv, Ukraine; IX-а Літня школа “Алгебра, топологія і аналіз”, 7–18 липня 2014 року, Поляниця, Україна; IV Міжнародна Ганська конференція, 30 червня – 1 липня 2014 року, Чернівці, Україна; Humboldt Kolleg “Education and Science and their Role in Social and Industrial Progress of Society”, June 12–15, 2014, Kyiv, Ukraine; Всеукраїнська наукова конференція “Застосування математичних методів в науці і техніці”, 22–23 листопада 2013 року, Луцьк, Україна; 2nd EUMLS Conference Mathematics for Life Sciences, September 05–10, 2013, Olenivka, Crimea, Ukraine; засіданнях Вченої ради Інституту математики НАН України; Алгебраїчний семінар Інституту математики НАН України, Київ, Україна, керівник – чл.-кор. Ю. А. Дрозд, академік С. І. Максименко; лабораторії топології Інституту математики НАН України, Київ, Україна, керівник – академік С. І. Максименко; “Алгебра” Варшавського університету, Варшава, Польща, керівник – проф. Ян Окнінський; “Secant group” в ІМ ПАН, Варшава, Польща, керівник – проф. Ярослав Бучинський; “Algebra and Discrete Mathematics” в Університеті міста Лінц, Лінц, Австрія, керівник – проф. Мануель Кауерс; Scientific Seminar “Geometry, Topology, Applications”, Львів, Україна, керівник – проф. Т. О. Банах; розширене засідання “Під кінець року” Алгебраїчного семінару Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, керівник – проф. А. П. Петравчук; Семінар молодих вчених Інституту математики НАН України, Київ, Україна, організатор – Рада молодих вчених ІМ НАНУ.

**Публікації.** Результати дисертації висвітлено у 42 наукових публікаціях, з них 15 — статті у наукових виданнях, внесених до переліку наукових фахових видань України та закордонних виданнях, а також 22 публікації у тезах доповідей і матеріалах міжнародних та вітчизняних конференцій. Статті [5, 1, 2, 6, 9, 10, 14, 12] проіндексовані у міжнародних наукометричних базах Scopus або Web of Science. Статтю [5] опубліковано у виданні з квартиля Q1 відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, статті [1, 2, 6, 9, 10, 14] у виданнях з квартиля Q3, статтю [12] у виданні з квартиля Q4. Відповідно до п. 2 Наказу № 1220 МОН України від 23.09.2019 вказані 15 статей зараховуються як 23 наукові публікації. Роботи [1, 2, 5–7, 9–16, 20] проіндексовано у базі Zentrablatt Math, а роботи [1, 5, 6, 9, 10, 12, 14, 15] проіндексовано у базі MathSciNet. Статті [4, 8, 11] одноосібні.

**Структура й обсяг дисертації.** Дисертація складається з пе-

реліку умовних позначень, вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 130 найменувань та додатку зі списком публікацій і апробацією результатів. Повний обсяг роботи становить 325 сторінок друкованого тексту із них список використаних джерел міститься на 16 сторінках, а додаток — на 13 сторінках.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету та завдання дослідження, наукову новизну одержаних результатів.

У розділі 1 наведено огляд літератури за темою дисертації.

В розділі 2 наведено основні означення та результати, що стосуються майже-кілець з одиницею та груп порядку  $p^3$ . У підрозділах 2.1 та 2.2 наведено результати про групи порядку  $p^3$  та майже-кілець з одиницею, відповідно, які буде використано в подальших дослідженнях.

Наступне твердження містить класифікацію груп порядку  $p^3$  (див. М. Холл<sup>1</sup>).

**Твердження 2.1.** *Нехай  $G$  — група порядку  $p^3$ . Далі дані визначальні співвідношення всіх неізоморфних груп  $G$ . Абелеві групи:*

- 1)  $a^{p^3} = 1$ ;
- 2)  $a^{p^2} = 1, b^p = 1, ab = ba$ ;
- 3)  $a^p = b^p = c^p = 1, ab = ba, ac = ca, cb = bc$ .

*Неабелеві групи порядку  $2^3 = 8$ :*

- 4) *група діедра,  $a^4 = 1, b^2 = 1, a^{-1}b = ba$ ;*
- 5) *група кватерніонів,  $a^4 = 1, b^2 = a^2, a^{-1}b = ba$ .*

*Неабелеві групи порядку  $p^3, p$  — непарне:*

- 4\*)  $a^{p^2} = 1, b^p = 1, b^{-1}ab = a^{1+p}$ ;
- 5\*)  $a^p = 1, b^p = 1, c^p = 1, ab = bac, ac = ca, bc = cb$ .

Наведемо основні означення.

**Означення 2.4.** *Непорожня множина  $R$  з двома бінарними операціями “+” та “.” називається майже-кільцем, якщо:*

---

<sup>1</sup>Холл М. Теорія груп, М.: Видавництво іноземної літератури, 1962 (рос.).

- 1)  $(R, +)$  — група з нейтральним елементом 0;
- 2)  $(R, \cdot)$  — напівгрупа;
- 3)  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$  для всіх  $x, y, z \in R$ .

Таке майже-кільце називається лівим майже-кільцем. Якщо ж аксіому 3) замінити аксіомою  $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$  для всіх  $x, y, z \in R$ , то отримуємо праве майже-кільце.

Група  $(R, +)$  позначається через  $R^+$  та називається адитивною групою, а її нейтральний елемент 0 — нулем майже-кільця  $R$ .

Майже-кільце  $R$ , в якому напівгрупа  $(R, \cdot)$  є моноїдом з одиничним елементом  $i$ , називається майже-кільцем з одиницею  $i$ .

Підрозділ 2.3 присвячено вивченню майже-кільць з одиницею на абелевих групах порядку  $p^3$ . Отримані необхідні умови існування майже-кільць з одиницею на таких групах.

Нехай  $G(p, p, p)$  — група зі співвідношеннями 3) з твердження 2.1.

Нехай  $R$  — майже-кільце з одиницею, адитивна група  $R^+$  якого ізоморфна групі  $G(p, p, p)$ . Тоді  $R^+ = \langle a \rangle + \langle b \rangle + \langle c \rangle$  для деяких  $a, b, c \in R$ , що задовольняють співвідношення  $ap = bp = cp = 1$ ,  $a + b = b + a$ ,  $a + c = c + a$ ,  $c + b = b + c$ . Зокрема, кожний елемент  $x \in R$  єдиним чином записується у вигляді  $x = ax_1 + bx_2 + cx_3$  з коефіцієнтами  $0 \leq x_1 < p$ ,  $0 \leq x_2 < p$  та  $0 \leq x_3 < p$ .

Без втрати загальності, можна припустити, що  $a$  є одиницею в  $R$ , тобто  $ax = xa = x$  для кожного  $x \in R$ . Більш того, для кожного  $x \in R$  існують такі коефіцієнти  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$ ,  $\gamma(x)$ ,  $\lambda(x)$ ,  $\mu(x)$  та  $\nu(x)$ , що

$$xb = a\alpha(x) + b\beta(x) + c\gamma(x)$$

та

$$xc = a\lambda(x) + b\mu(x) + c\nu(x).$$

Зрозуміло, що вони єдиним чином визначені за модулем  $p$ , тому деякі відображення  $\alpha : R \rightarrow Z_p$ ,  $\beta : R \rightarrow Z_p$ ,  $\gamma : R \rightarrow Z_p$ ,  $\lambda : R \rightarrow Z_p$ ,  $\mu : R \rightarrow Z_p$ ,  $\nu : R \rightarrow Z_p$ .

**Теорема 2.7.** Якщо  $x, y = ay_1 + by_2 + cy_3 \in R$ , то

$$\begin{aligned} xy &= a(x_1y_1 + \alpha(x)y_2 + \lambda(x)y_3) + b(x_2y_1 + \beta(x)y_2 + \mu(x)y_3) + \\ &+ c(x_3y_1 + \gamma(x)y_2 + \nu(x)y_3), \end{aligned}$$

причому виконуються наступні твердження:

- (0)  $\alpha(0) \equiv 0 \pmod{p}$ ,  $\beta(0) \equiv 0 \pmod{p}$ ,  $\gamma(0) \equiv 0 \pmod{p}$ ,  
 $\lambda(0) \equiv 0 \pmod{p}$ ,  $\mu(0) \equiv 0 \pmod{p}$  та  $\nu(0) \equiv 0 \pmod{p}$  тоді і  
 тільки тоді, коли майже-кільце  $R$  є нуль-симетричним;
- (1)  $\alpha(a) = 0$ ,  $\beta(a) = 1$ ,  $\gamma(a) = 0$ ,  $\lambda(a) = 0$ ,  $\mu(a) = 0$ ,  $\nu(a) = 1$   
 $\pmod{p}$ ;
- (2)  $\alpha(xy) \equiv x_1\alpha(y) + \alpha(x)\beta(y) + \lambda(x)\gamma(y) \pmod{p}$ ;
- (3)  $\beta(xy) \equiv x_2\alpha(y) + \beta(x)\beta(y) + \mu(x)\gamma(y) \pmod{p}$ ;
- (4)  $\gamma(xy) \equiv x_3\alpha(y) + \gamma(x)\beta(y) + \nu(x)\gamma(y) \pmod{p}$ ;
- (5)  $\lambda(xy) \equiv x_1\lambda(y) + \alpha(x)\mu(y) + \lambda(x)\nu(y) \pmod{p}$ ;
- (6)  $\mu(xy) \equiv x_2\lambda(y) + \beta(x)\mu(y) + \mu(x)\nu(y) \pmod{p}$ ;
- (7)  $\nu(xy) \equiv x_3\lambda(y) + \gamma(x)\mu(y) + \nu(x)\nu(y) \pmod{p}$ .

Розділ 3 присвячено вивченню локальних майже-кільць порядку  $p^3$ . У підрозділі 3.1 наведено означення локальних майже-кільць та їх основні властивості. Підрозділ 3.2 присвячено вивченню локальних майже-кільць на абелевих групах порядку  $p^3$ . Цей розділ складається з одного підпункту 3.2.1, в якому побудовано приклади локальних майже-кільць з елементарною абелевою адитивною групою порядку  $p^3$ . У підрозділі 3.3 вивчаються локальні майже-кільця на неабелевих групах порядку  $p^3$ . В трьох підпунктах 3.3.1, 3.3.2 та 3.3.3 цього розділу отримані необхідні та достатні умови існування локальних майже-кільць, адитивні групи яких ізоморфні  $G_1$ ,  $G_2$  та  $G_3$ , відповідно.

**Означення 3.1.** *Майже-кільце  $R$  з одиницею називається локальним, якщо множина  $L$  всіх необоротних елементів із  $R$  утворює підгрупу адитивної групи  $R^+$ . В цьому випадку  $L$  будемо називати підгрупою необоротних елементів майже-кільця  $R$ .*

Маємо наступну теорему.

**Теорема 3.11.** *Існує зонайменше  $p$  неізоморфних локальних майже-кільць на елементарній абелевій групі порядку  $p^3$ .*

Позначимо через  $G_1$  групу зі співвідношеннями 5\*) твердження 2.1,  $G_2$  групу зі співвідношеннями 4\*) твердження 2.1,  $G_3$  групу зі співвідношеннями 2) твердження 2.1.

Нехай  $R$  — локальне майже-кільце, адитивна група якого  $R^+$  ізоморфна  $G_1$ . Тоді  $R^+ = \langle a \rangle + \langle b \rangle + \langle c \rangle$  для деяких елементів  $a$ ,  $b$  і

$c \in R$ , що задовольняють співвідношення  $ap = 0$ ,  $bp = 0$ ,  $cp = 0$ ,  $a + b = b + a + c$ ,  $a + c = c + a$  і  $b + c = c + b$ . Зокрема, кожен елемент  $x \in R$  однозначно записується у вигляді  $x = ax_1 + bx_2 + cx_3$  з коефіцієнтами  $0 \leq x_1 < p$ ,  $0 \leq x_2 < p$  і  $0 \leq x_3 < p$ .

Оскільки порядок елемента  $a$  дорівнює експоненті групи  $G$ , то за лемою 2.2 можна вважати, що  $a$  є одиницею в  $R$ , тобто  $ax = xa = x$  для кожного  $x \in R$ . Крім того, для кожного  $x \in R$  існують такі коефіцієнти  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$  і  $\gamma(x)$ , що

$$xb = a\alpha(x) + b\beta(x) + c\gamma(x).$$

Зрозуміло, що вони так однозначно визначені за модулем  $p$ , що визначені деякі відображення  $\alpha : R \rightarrow \mathbb{Z}_p$ ,  $\beta : R \rightarrow \mathbb{Z}_p$  і  $\gamma : R \rightarrow \mathbb{Z}_p$ .

Отже, маємо приклади  $p + 1$  майже-кільцевих добутків і формулюємо наступний результат.

**Теорема 3.15.** *На кожній неметациклічній абелевій групі порядку  $p^3$  існує щонайменше  $p + 1$  неізоморфних локальних майже-кільць.*

Маємо наступний результат.

**Твердження 3.17.** *На кожній групі порядку  $p^3$  з  $p > 2$  існує локальне майже-кільце.*

Нехай  $R$  — локальне майже-кільце, яке не є майже-полем, адитивна група якого  $R^+$  ізоморфна  $G_3$ . Тоді  $R^+ = \langle a \rangle + \langle b \rangle$  для деяких елементів  $a$  і  $b$  з  $R$ , що задовольняють відношення  $ap^2 = 0$ ,  $bp = 0$  та  $b + a = a + b$ .

Отже, формулюємо наступний результат.

**Теорема 3.21.** *На кожній метациклічній абелевій групі порядку  $p^3$  існує щонайменше  $p + 1$  неізоморфних локальних майже-кільць.*

Розділ 4 складається з трьох підрозділів 4.1, 4.2 та 4.3. В цьому розділі вивчаються майже-кільця з одиницею порядків  $p^4$ . У підрозділі 4.1 наведено класифікацію груп порядку  $p^4$ . Підрозділах 4.2 та 4.3 отримано необхідні умови існування майже-кільць з одиницею на групах класу нільпотентності 2 та класу нільпотентності 3, відповідно.

Групи порядку  $p^4$  з  $p > 3$  описано в такій теоремі (див., наприклад, Бернсайд<sup>2</sup>).

---

<sup>2</sup>Burnside W. Theory of groups of finite order, Cambridge: At the University press, 1897, 430 p.

**Теорема 4.1.** *Існує 10 неізоморфних груп порядку  $p^4$  з  $p > 3$ , які є:*

6 неізоморфних груп класу нільпотентності 2, які є:

- $G_1 = \langle a, b \mid a^{p^2} = b^p = [a, [a, b]] = [b, [a, b]] = [a, b]^p = e \rangle = (C_{p^2} \times C_p) \rtimes C_p$ ;
- $G_2 = \langle a, b \mid a^{p^2} = b^{p^2} = e, [b, a] = b^p \rangle = C_{p^2} \rtimes C_{p^2}$ ;
- $G_3 = \langle a, b \mid a^{p^3} = b^p = e, [b, a] = a^{p^2} \rangle = C_{p^3} \rtimes C_p$ ;
- $G_4 = \langle a, b, d \mid a^p = b^p = c^p = d^p = [a, c] = [b, c] = [a, d] = [b, d] = [c, d] = e \rangle = C_p \times ((C_p \times C_p) \rtimes C_p)$ , де  $c = [a, b]$ ;
- $G_5 = \langle a, b, c \mid a^{p^2} = b^p = c^p = [a, c] = [b, c] = e, [b, a] = a^p \rangle = C_p \times (C_{p^2} \rtimes C_p)$ ;
- $G_6 = \langle a, b, c \mid a^{p^2} = b^p = c^p = [a, b] = [a, c] = e, [c, b] = a^p \rangle = (C_{p^2} \times C_p) \rtimes C_p$ .

4 неізоморфні групи класу нільпотентності 3, які є:

- $H_1 = \langle a, b \mid a^p = b^p = c^p = [a, c]^p = [b, c] = e, [a, [a, c]] = [b, [a, c]] = e \rangle = (C_p \times C_p \times C_p) \rtimes C_p$ , де  $c = [a, b]$ ;
- $H_2 = \langle a, b \mid a^{p^2} = b^p = [a, b]^p = [b, [a, b]] = e, [a, [a, b]] = a^p \rangle = (C_{p^2} \times C_p) \rtimes C_p$ ;
- $H_3 = \langle a, b \mid a^{p^2} = b^p = [a, b]^p = [a, [a, b]] = e, [b, [a, b]] = a^p \rangle = (C_{p^2} \rtimes C_p) \rtimes C_p$ ;
- $H_4 = \langle a, b \mid a^{p^2} = b^p = [a, b]^p = [a, [a, b]] = e, [b, [a, b]] = a^{2p} \rangle = (C_{p^2} \times C_p) \rtimes C_p$ .

Розглянемо групи класу нільпотентності 2 порядку  $p^4$ .

Нехай  $G_4$  — адитивно записана група з теореми 4.1. Тоді  $G_4 = \langle a \rangle + \langle b \rangle + \langle c \rangle + \langle d \rangle$  для деяких елементів  $a, b, c$  і  $d$  з  $R$ , що задовольняють співвідношення  $ap = 0, bp = 0, cp = 0, dp = 0, a + b = b + a + c, a + c = c + a, b + c = c + b, a + d = d + a, b + d = d + b$  і  $c + d = d + c$ .

Нехай  $R$  — майже-кільце з одиницею адитивна група  $R^+$  якого ізоморфна групі  $G_4$ . Тоді

$$R^+ = \langle a \rangle + \langle b \rangle + \langle c \rangle + \langle d \rangle$$



для деяких елементів  $a, b, c$  і  $d$  з  $R$  задовольняють співвідношення  $ap = 0, bp = 0, cp = 0, dp = 0, a + b = b + a + c, a + c = c + a, b + c = c + b, a + d = d + a, b + d = d + b$  і  $c + d = d + c$ . Зокрема, кожен елемент  $x \in R$  єдиним чином записаний у вигляді  $x = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$  з коефіцієнтами  $0 \leq x_1 < p, 0 \leq x_2 < p, 0 \leq x_3 < p$  і  $0 \leq x_4 < p$ .

Оскільки порядок елемента  $a$  рівний експоненті групи  $G$ , то за лемою 2.2 можна припустити, що  $a$  є одиницею в  $R$ , тобто  $ax = xa = x$  для кожного  $x \in R$ . Крім того, для кожного  $x \in R$  існують такі коефіцієнти  $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x), \varphi(x), \lambda(x), \mu(x), \nu(x)$  і  $\psi(x)$ , що

$$xb = a\alpha(x) + b\beta(x) + c\gamma(x) + d\varphi(x)$$

і

$$xd = a\lambda(x) + b\mu(x) + c\nu(x) + d\psi(x).$$

Зрозуміло, що вони однозначно визначені так по модулю  $p$ , що визначені деякі відображення  $\alpha: R \rightarrow \mathbb{Z}_p, \beta: R \rightarrow \mathbb{Z}_p, \gamma: R \rightarrow \mathbb{Z}_p, \varphi: R \rightarrow \mathbb{Z}_p, \lambda: R \rightarrow \mathbb{Z}_p, \mu: R \rightarrow \mathbb{Z}_p, \nu: R \rightarrow \mathbb{Z}_p$  і  $\psi: R \rightarrow \mathbb{Z}_p$ .

**Лема 4.5.** *Нехай  $R$  — майже-кільце з одиницею адитивна група  $R^+$  якого ізоморфна групі  $G_4$ . Якщо  $a$  співпадає з одиничним елементом в  $R$ ,  $x = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4, y = ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4 \in R$ ,*

$$xb = a\alpha(x) + b\beta(x) + c\gamma(x) + d\varphi(x)$$

і

$$xd = a\lambda(x) + b\mu(x) + c\nu(x) + d\psi(x),$$

то

$$\begin{aligned} xy = & a(x_1y_1 + \alpha(x)y_2 + \lambda(x)y_4) + b(x_2y_1 + \beta(x)y_2 + \mu(x)y_4) + \\ & + c(-x_1x_2 \binom{y_1}{2} - \alpha(x)\beta(x) \binom{y_2}{2} - x_2\alpha(x)y_1y_2 - \lambda(x)\mu(x) \binom{y_4}{2}) - \\ & - x_2\alpha(x)y_3 + x_3y_1 + \gamma(x)y_2 + x_1\beta(x)y_3 + \nu(x)y_4 + d(x_4y_1 + \\ & + \varphi(x)y_2 + \psi(x)y_4). \end{aligned}$$

Більш того, для відображень

$\alpha: R \rightarrow \mathbb{Z}_p, \beta: R \rightarrow \mathbb{Z}_p, \gamma: R \rightarrow \mathbb{Z}_p, \varphi: R \rightarrow \mathbb{Z}_p, \lambda: R \rightarrow \mathbb{Z}_p, \mu: R \rightarrow \mathbb{Z}_p, \nu: R \rightarrow \mathbb{Z}_p$  і  $\psi: R \rightarrow \mathbb{Z}_p$  виконуються наступні твердження:

$$(0) \quad \alpha(0) \equiv 0 \pmod{p}, \beta(0) \equiv 0 \pmod{p}, \gamma(0) \equiv 0 \pmod{p};$$

$$\varphi(0) \equiv 0 \pmod{p}, \lambda(0) \equiv 0 \pmod{p}, \mu(0) \equiv 0 \pmod{p},$$

$\nu(0) \equiv 0 \pmod{p}$  і  $\psi(0) \equiv 0 \pmod{p}$  тоді й лише тоді, коли майже-кільце  $R$  є нуль-симетричним;

$$(1) \quad \alpha(xy) \equiv x_1\alpha(y) + \alpha(x)\beta(y) + \lambda(x)\varphi(y) \pmod{p};$$

$$(2) \quad \beta(xy) \equiv x_2\alpha(y) + \beta(x)\beta(y) + \mu(x)\varphi(y) \pmod{p};$$

$$(3) \quad \gamma(xy) \equiv -x_1x_2\binom{\alpha(y)}{2} - \alpha(x)\beta(x)\binom{\beta(y)}{2} - x_2\alpha(x)\alpha(y)\beta(y) - \\ - \lambda(x)\mu(x)\binom{\varphi(y)}{2} - x_2\alpha(x)\gamma(y) + x_3\alpha(y) + \gamma(x)\beta(y) + \\ + x_1\beta(x)\gamma(y) + \nu(x)\varphi(y) \pmod{p};$$

$$(4) \quad \varphi(xy) \equiv x_4\alpha(y) + \varphi(x)\beta(y) + \psi(x)\varphi(y) \pmod{p};$$

$$(5) \quad \lambda(xy) \equiv x_1\lambda(y) + \alpha(x)\mu(y) + \lambda(x)\psi(y) \pmod{p};$$

$$(6) \quad \mu(xy) \equiv x_2\lambda(y) + \beta(x)\mu(y) + \mu(x)\psi(y) \pmod{p};$$

$$(7) \quad \nu(xy) \equiv -x_1x_2\binom{\lambda(y)}{2} - \alpha(x)\beta(x)\binom{\mu(y)}{2} - x_2\alpha(x)\lambda(y)\mu(y) - \\ - \lambda(x)\mu(x)\binom{\psi(y)}{2} - x_2\alpha(x)\nu(y) + x_3\lambda(y) + \gamma(x)\mu(y) + \\ + x_1\beta(x)\nu(y) + \nu(x)\psi(y) \pmod{p};$$

$$(8) \quad \psi(xy) \equiv x_4\lambda(y) + \varphi(x)\mu(y) + \psi(x)\psi(y) \pmod{p}.$$

Ми розглянемо групи класу нільпотентності 3 порядку  $p^4$ .

Нехай  $H_1$  — адитивно записана група з теореми 4.1. Тоді  $H_1 = \langle a \rangle + \langle b \rangle + \langle c \rangle + \langle d \rangle$  для деяких елементів  $a, b, c$  і  $d$  з  $R$  задовольняють співвідношення  $ap = bp = cp = dp = 0$ ,  $b + c = c + b$ ,  $a + d = d + a$ ,  $b + d = d + b$ , де  $c = -a - b + a + b$  і  $d = -a - c + a + c$ .

Нехай  $R$  — майже-кільце з одиницею, адитивна група якого  $R^+$  ізоморфна  $H_1$ . Тоді  $R^+ = \langle a \rangle + \langle b \rangle + \langle c \rangle + \langle d \rangle$  для деяких елементів  $a, b, c$  і  $d$  of  $R$  задовольняють співвідношення  $ap = bp = cp = dp = 0$ ,  $b + c = c + b$ ,  $a + d = d + a$ ,  $b + d = d + b$ , де  $c = -a - b + a + b$  і  $d = -a - c + a + c$ . Зокрема, кожен елемент  $x \in R$  однозначно

записується у формі  $x = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$  з коефіцієнтами  $0 \leq x_1 < p$ ,  $0 \leq x_2 < p$ ,  $0 \leq x_3 < p$  і  $0 \leq x_4 < p$ .

Оскільки порядок елемента  $a$  дорівнює експоненті групи  $G$ , тобто  $p$ , з цього випливає, що ми можемо припустити, що  $a$  є одиницею в  $R$ , тобто  $ax = xa = x$  для кожного  $x \in R$ . Крім того, для кожного  $x \in R$  існують такі коефіцієнти  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$ ,  $\gamma(x)$ ,  $\phi(x)$ , що

$$xb = a\alpha(x) + b\beta(x) + c\gamma(x) + d\phi(x).$$

Зрозуміло, що вони однозначно визначені за модулем  $p$ , тому визначені деякі відображення  $\alpha: R \rightarrow \mathbb{Z}_p$ ,  $\beta: R \rightarrow \mathbb{Z}_p$ ,  $\gamma: R \rightarrow \mathbb{Z}_p$ ,  $\phi: R \rightarrow \mathbb{Z}_p$ .

**Лема 4.17.** *Нехай  $R$  — майже-кільце з одиницею, адитивна група якого  $R^+$  ізоморфна  $H_1$ . Якщо  $a$  збігається з одиничним елементом  $R$ ,  $x = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$ ,  $y = ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4 \in R$ ,*

$$xb = a\alpha(x) + b\beta(x) + c\gamma(x) + d\phi(x),$$

тоді

$$\begin{aligned} xy = & a(x_1y_1 + \alpha(x)y_2) + b(x_2y_1 + \beta(x)y_2) + c(x_3y_1 - x_1x_2 \binom{y_1}{2}) - \\ & - x_2\alpha(x)y_1y_2 + \gamma(x)y_2) - \alpha(x)\beta(x) \binom{y_2}{2} + x_1\beta(x)y_3 - \\ & - x_2\alpha(x)y_3) + d(x_4y_1 + x_2 \binom{x_1}{2} \binom{y_1}{2} - x_1x_3 \binom{y_1}{2} + \\ & + x_1^2x_2 \binom{y_1}{y_1 - 3} + x_2y_1 \binom{\alpha(x)y_2}{2} - \alpha(x)x_3y_1y_2 + \\ & + x_1x_2\alpha(x) \binom{y_1}{2} y_2 + \phi(x)y_2 + \beta(x) \binom{\alpha(x)}{2} \binom{y_2}{2} - \\ & - \alpha(x)\gamma(x) \binom{y_2}{2} + \alpha(x)^2\beta(x) \binom{y_2}{y_2 - 3} + x_1\gamma(x)y_3 - \\ & - \beta(x) \binom{x_1}{2} y_3 + x_2 \binom{\alpha(x)}{2} y_3 - x_3\alpha(x)y_3 + x_1^2\beta(x)y_4 - \\ & - x_1x_2\alpha(x)y_4). \end{aligned}$$

Крім того, для відображень

$\alpha: R \rightarrow \mathbb{Z}_p$ ,  $\beta: R \rightarrow \mathbb{Z}_p$ ,  $\gamma: R \rightarrow \mathbb{Z}_p$ ,  $\phi: R \rightarrow \mathbb{Z}_p$  справедливі наступні твердження:

$$(0) \quad \alpha(0) \equiv 0 \pmod{p}, \beta(0) \equiv 0 \pmod{p}, \gamma(0) \equiv 0 \pmod{p};$$

та  $\phi(0) \equiv 0 \pmod{p}$  тоді і тільки тоді, коли майже-кільце  $R$  є нуль-симетричним;

$$(1) \quad xc = c(x_1\beta(x) - x_2\alpha(x)) + d(x_1\gamma(x) - \beta(x)\binom{x_1}{2} + x_2\binom{\alpha(x)}{2} - x_3\alpha(x));$$

$$(2) \quad xd = d(x_1^2\beta(x) - x_1x_2\alpha(x));$$

$$(3) \quad \alpha(xy) \equiv x_1\alpha(y) + \alpha(x)\beta(y) \pmod{p};$$

$$(4) \quad \beta(xy) \equiv x_2\alpha(y) + \beta(x)\beta(y) \pmod{p};$$

$$(5) \quad \gamma(xy) \equiv x_3\alpha(y) - x_1x_2\binom{\alpha(y)}{2} - x_2\alpha(x)\alpha(y)\beta(y) + \gamma(x)\beta(y) - \\ - \alpha(x)\beta(x)\binom{\beta(y)}{2} + x_1\beta(x)\gamma(y) - x_2\alpha(x)\gamma(y) \pmod{p};$$

$$(6) \quad \phi(xy) \equiv x_4\alpha(y) + x_2\binom{x_1}{2}\binom{\alpha(y)}{2} - x_1x_3\binom{\alpha(y)}{2} + x_1^2x_2\binom{\alpha(y)}{\alpha(y)-3} + \\ + x_2\alpha(y)\binom{\alpha(x)\beta(y)}{2} - \alpha(x)x_3\alpha(y)\beta(y) + x_1x_2\alpha(x)\binom{\alpha(y)}{2}y_2 + \\ + \phi(x)\beta(y) + \beta(x)\binom{\alpha(x)}{2}\binom{\beta(y)}{2} - \alpha(x)\gamma(x)\binom{\beta(y)}{2} + \\ + \alpha(x)^2\beta(x)\binom{\beta(y)}{\beta(y)-3} + x_1\gamma(x)\gamma(y) - \beta(x)\binom{x_1}{2}\gamma(y) + \\ + x_2\binom{\alpha(x)}{2}\gamma(y) - x_3\alpha(x)\gamma(y) + x_1^2\beta(x)\phi(y) - x_1x_2\alpha(x)\phi(y) \pmod{p}.$$

У розділі 5 описано локальні майже-кільця порядку  $p^4$ . Підрозділ 5.1 присвячено дослідженню локальні майже-кільця на групах порядку  $p^4$  та класу нільпотентності 2. А саме, показано, що для непарних  $p$  із 6 таких груп 4 є адитивними групами локальних майже-кільць. Деякі приклади таких майже-кільць явно побудовані. У підрозділі 5.2 досліджуються групи класу нільпотентності 3 порядку  $p^4$ , які є адитивними групами локальних майже-кільць. В трьох підрозділах 5.2.1, 5.2.2 та 5.2.3 цього розділу отримані необхідні та достатні умови існування локальні майже-кільць, адитивні групи яких ізоморфні  $H_1$  та  $H_2$ . У підрозділі 5.2.4 сформульовано гіпотезу щодо груп  $H_3$  та  $H_4$ .

Нехай  $R$  — локальне майже-кільце, адитивна група якого  $R^+$  ізоморфна  $G_4$ . Тоді  $R^+ = \langle a \rangle + \langle b \rangle + \langle c \rangle + \langle d \rangle$  для деяких елементів  $a, b, c$  та  $d$  з  $R$ , що задовольняють співвідношення  $ap = 0$ ,  $bp = 0$ ,  $cp = 0$ ,

$dp = 0$ ,  $a + b = b + a + c$ ,  $a + c = c + a$ ,  $b + c = c + b$ ,  $d + c = c + d$ ,  
 $a + d = d + a$  і  $b + d = d + b$ .

Маємо наступний результат.

**Теорема 5.6.** *Для кожного непарного простого числа  $p$  існує локальне майже-кільце  $R$ , адитивна група якого  $R^+$  ізоморфна  $G_4$ .*

Нехай  $G_6$  — адитивно записана група з теореми 4.1. Тоді  $G_6 = \langle a \rangle + \langle b \rangle + \langle c \rangle$  для деяких елементів  $a$ ,  $b$  та  $c$  з  $R$ , що задовольняють співвідношення  $ap^2 = 0$ ,  $bp = 0$ ,  $cp = 0$ ,  $a + b = b + a$ ,  $a + c = c + a$ ,  $c + b = b + c + ap$ .

**Лема 5.12.**  $G_6$  не є ендоециклічною.

**Гіпотеза 5.13.** *Не існує локального майже-кільця, адитивна група якого ізоморфна  $G_6$ .*

Нехай  $R$  — локальне майже-кільце, адитивна група якого  $R^+$  ізоморфна  $H_1$ . Тоді  $R^+ = \langle a \rangle + \langle b \rangle + \langle c \rangle + \langle d \rangle$  для деяких елементів  $a$ ,  $b$ ,  $c$  і  $d$  з  $R$  задовольняючи співвідношення  $ap = bp = cp = dp = 0$ ,  $b + c = c + b$ ,  $a + d = d + a$ ,  $b + d = d + b$ , де  $c = -a - b + a + b$  і  $d = -a - c + a + c$ .

Маємо наступний результат.

**Теорема 5.17.** *Для кожного простого числа  $p > 3$  існує локальне майже-кільце  $R$ , адитивна група якого  $R^+$  ізоморфна  $H_1$ .*

Проаналізувавши групи  $H_3$  та  $H_4$  порядку 625 за допомогою GAP, з'ясували, що не існує локальних майже-кілець на цих групах. Це дозволяє зробити наступне припущення.

**Гіпотеза 5.23.** *Не існує локального майже-кільця, адитивна група якого ізоморфна  $H_3$  чи  $H_4$ .*

У розділі 6 вивчаються майже-кільцям з одиницею на деяких неабелевих групах. У підрозділі 6.1 дано означення та опис груп Міллера–Морено та груп Шмідт. У підрозділі 6.2 описано всі можливі типи груп Міллера–Морено, які є адитивними групами майже-кілець з одиницею. У підрозділі 6.3 показано, що не існує майже-кілець з одиницею, адитивна група яких ізоморфна групі Шмідта. Підрозділ 6.4 складається з трьох підпунктів 6.4.1, 6.4.2 та 6.4.3. У цьому підрозділі досліджуються прямі добутки метациклічних  $p$ -груп Міллера–Морено та циклічних  $p$ -груп як адитивні групи майже-кілець з одиницею та локальних майже-кілець. Більш того, визначено формули множення для таких майже-кілець та описано функції, що їх задають. У підрозділі 6.5 вивчаються прямі добутки неметациклічних  $p$ -груп Міллера–Морено та циклічних  $p$ -груп як адитивні групи майже-кілець з одиницею та локальних майже-кілець. Цей під-

розділ складається з трьох підпунктів 6.5.1, 6.5.2 та 6.5.3. В першому підпункті 6.5.1 наведено попередні результати. В підпункті 6.5.2 досліджуються майже-кільця з одиницею на групах  $F(p^m, p^n, p, p^k)$ . В підпункті 6.5.3 визначено формули множення для локальних майже-кільць на групах  $F(p^m, p^n, p, p^k)$  та описано функції, що їх задають.

Нагадаємо, що групою Шмідта або мінімальною нелінійною називається скінченна нелінійна група, будь-яка власна підгрупа якої лінійна.

Маємо наступне твердження.

**Теорема 6.12.** *Не існує майже-кільця з одиницею, адитивна група яких ізоморфна групі Шмідта.*

Нехай  $R$  — локальне майже-кільце, адитивна група якого  $R^+$  ізоморфна  $F(p^m, p^n, p^k)$ . Тоді  $R^+ = \langle a \rangle + \langle b \rangle + \langle c \rangle$  з елементами  $a, b$  та  $c$ , де  $a$  співпадає з одиничним елементом  $R$  та виконуються співвідношення  $a^{p^m} = b^{p^n} = c^{p^k} = 1$ ,  $b^{-1}ab = a^{1+p^{m-1}}$ ,  $ca = ac$  та  $cb = bc$ , де  $m \geq 2$ ,  $n \geq 1$  та  $k \geq 1$ .

**Теорема 6.18.** *Для кожного непарного простого числа  $p$ ,  $m \geq n$  та  $m \geq k$  існує локальне майже-кільце  $R$ , адитивна група якого  $R^+$  ізоморфна  $F(p^m, p^n, p^k)$ .*

Розділ 7 присвячено застосуванню системи GAP для дослідження та класифікації локальних майже-кільць. В перших двох підрозділах 7.1 та 7.2 вивчається побудова та класифікація майже-кільць з одиницею. В підрозділі 7.3 описано деякі функції з пакету LocalNR, а саме, UnitsOfNearRing 7.3.1, IsLocalNearRing 7.3.2, IsLocalRing 7.3.3, NearRingNonUnits 7.3.4 та NonUnitsAsAdditiveSubgroup 7.3.5. В підрозділі 7.4 досліджено майже-кільця з одиницею і локальні майже-кільця, та ендосиклічні групи. Підрозділ 7.5 присвячено класифікації локальних майже-кільць малих порядків, а саме, локальних майже-кільць порядку 32 7.5.1 та 128 7.5.2 та 7.5.3.

Алгоритм побудови майже-кільць з одиницею базується на наступній теоремі.

**Теорема 7.1.** *Нехай  $G$  — група, і нехай множина  $\text{End } G$  усіх ендоморфізмів  $G$  розглядається як моноїд щодо композиції ендоморфізмів. Тоді  $G$  — адитивна група майже-кільця з одиницею тоді і тільки тоді, коли існують елемент  $g \in G$  та підмоноїд  $F$  з  $\text{End } G$  такі, що  $G = g^F$  та  $g^\phi = g^\psi$  лише тоді, коли  $\phi = \psi$  для будь-яких  $\phi, \psi \in F$ .*

Пакет LocalNR містить бібліотеку локальних майже-кільць до порядку 361 та деякі функції для аналізу скінченних майже-кільць.

Поточна версія цього пакету — 1.0.4, випущена 15.03.2024.

Список наукових праць, де опубліковано результати дисертації, й інформацію щодо їхньої апробації наведено у додатку А.

## ВИСНОВКИ

Основні результати дисертації можна сформулювати таким чином:

- Описано майже-кільця з одиницею на групах порядку  $p^3$ .
- Наведено необхідні умови існування майже-кілець з одиницею на абелевих групах порядку  $p^3$ .
- Наведено необхідні умови існування майже-кілець з одиницею на неабелевих групах порядку  $p^3$ .
- Описано локальні майже-кільця з адитивними групами порядку  $p^3$ . Визначено формули множення для таких майже-кілець та описано функції, що їх задають.
- Наведено приклад локального майже-кільця з адитивною групою порядку  $p^3$ .
- Дано оцінку нижньої межі кількості локальних майже-кілець на групах порядку  $p^3$ .
- Наведено алгоритм побудови локального майже-кільця з елементарною абелевою адитивною групою порядку  $5^3$ , що реалізовано в системі комп'ютерної алгебри GAP.
- Проаналізовано існування та кількість неізоморфних локальних майже-кілець на групах порядку  $p^3$ .
- Наведено деякі структурні результати стосовно груп порядку  $p^4$ .
- Отримано необхідні умови існування майже-кілець з одиницею на групах порядку  $p^4$ .
- Визначено формули множення для таких майже-кілець та описано функції, що їх задають.
- Описано локальні майже-кільця з адитивними групами порядку  $p^4$ . Вказано формули множення для таких майже-кілець та описано функції, що їх задають.
- Наведено приклад локального майже-кільця порядку  $5^4 = 625$ .
- Дано алгоритм побудови локального майже-кільця з неабелевою адитивною адитивною групою порядку  $5^4$ , що реалізовано в системі комп'ютерної алгебри GAP.
- Наведено необхідні та достатні умови існування майже-кілець з одиницею на групах Міллера–Морено.

– Показано, що не існує майже-кілець з одиницею, адитивна група яких ізоморфна групі Шмідта.

– Описано прямі добутки  $p$ -груп Міллера–Морено та циклічних  $p$ -груп як адитивні групи майже-кілець з одиницею та локальних майже-кілець. Визначено формули множення для таких майже-кілець та описано функції, що їх задають.

– Описано побудова майже-кілець з одиницею.

– Наведено деякі функції для локальних майже-кілець з пакету LocalNR, а саме: UnitsOfNearRing(R) (вивід: список оборотних елементів майже-кіля, якщо  $R$  є майже-кілем з одиницею, інакше вивід має вигляд **Error, no units exist**), IsLocalNearRing(R) (вивід: значення **true**, якщо  $R$  є локальним майже-кілем, інакше вивід має значення **false**.), IsLocalRing(R) (вивід: значення **true**, якщо  $R$  є локальним кілем, інакше вивід має значення **false**), NearRingNonUnits(R) (вивід: список необоротних елементів  $R$ .), NonUnitsAsAdditiveSubgroup(R) (вивід: адитивна підгрупа необоротних елементів  $R$ ).

– Описано майже-кіля з одиницею пакету SONATA та ендоециклічні групи.

– Проаналізовано локальні майже-кіля порядку 32.

– Наведено часткову класифікацію локальних майже-кілець порядку 128.

– Знайдено 2-породжені ендоециклічні групи порядку 256 та експоненти 16, які не є адитивними групами локальних майже-кілець.

## Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Sysak Ya., Raievska I., Raievska M. Construction of local nearrings using GAP. *Algebra Discrete Math.*, 2025, **40** (1), 133–144, <https://doi.org/10.12958/adm2427> (SJR — **Q3**)
2. Raievska I., Raievska M., Sysak Ya. LocalNR package and some of its applications. *Algebra Discrete Math.*, 2025, **40** (2), 215–225, <https://doi.org/10.12958/adm2449> (SJR — **Q3**)
3. Раєвська І., Раєвська М. Про ендоециклічні 2-породжені групи порядку 256 та експоненти 16. *Буковинський матем. журнал*, 2025, **13** (2), 161–169, [https://bmj.chnu.edu.ua/media/gbdhv1v1/161-169\\_raievska\\_raievska\\_cor.pdf](https://bmj.chnu.edu.ua/media/gbdhv1v1/161-169_raievska_raievska_cor.pdf) (Категорія B)



4. Раєвська І. Про прямі добутки неметациклічних  $p$ -груп Міллера–Морено та циклічних  $p$ -груп як адитивні групи локальних майже-кілець. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*, 2025, **46** (1), 79–88, [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).79-88](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).79-88) (Категорія Б)
5. Raievskia I., Raievskia M. Groups of the nilpotency class 3 of order  $p^4$  as additive groups of local nearrings. *Carpathian Math. Publ.*, 2025, **17** (1), 292–301, <https://doi.org/10.15330/cmp.17.1.292-301> (SJR — **Q1**)
6. Raievskia I., Raievskia M. Local nearrings, their structure, and the GAP system. *Ukrainian Math. J.*, 2025, **76** (11), 1831–1848, <https://doi.org/10.1007/s11253-025-02426-y>; translation of *Ukrain. Mat. Zh.*, 2024, **76** (11), 1629–1644. **76** (11), 1629–1644 (SJR — **Q3**)
7. Raievskia I., Raievskia M. Local nearrings and endocyclic groups of small order. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 2025, **47** (2), 65–71, [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).65-71](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).65-71) (Категорія Б)
8. Raievskia I. On direct products of metacyclic Miller–Moreno  $p$ -groups and cyclic  $p$ -groups as additive groups of local nearrings. *Прікл. проблеми мех. і мат.*, 2024, **22**, 123–130. (Категорія Б)
9. Raievskia I., Raievskia M. Groups of order  $p^4$  as additive groups of local nearrings. *Ukrainian Math. J.*, 2024, **76** (6), 1005–1024, <https://doi.org/10.1007/s11253-024-02369-w>; translation of *Ukrain. Mat. Zh.*, 2024, **76** (6), 890–906. **76** (6), 890–906 (SJR — **Q3**)
10. Raievskia I., Raievskia M. Groups of nilpotency class 2 of order  $p^4$  as additive groups of local nearrings. *Algebra Discrete Math.*, 2024, **38** (1), 93–114, <http://dx.doi.org/10.12958/adm2269> (SJR — **Q3**)
11. Raievskia I. Yu. Local nearrings with additive groups of order 128, *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*, 2024, **44** (1), 46–50, [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).110-114](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).110-114)

(Категорія Б)

12. Raievska I., Raievska M. Lower bounds for the number of local nearrings on groups of order  $p^3$ . *Math. Commun.*, 2024, **29** (2), 177–191,  
<https://www.mathos.unios.hr/mc/index.php/mc/issue/view/35> (SJR — **Q4**)
13. Раєвська І. Ю., Раєвська М. Ю. Локальні майже-кільця на елементарних абелевих групах порядку  $p^3$ . Науковий вісник Ужгородського університету. Серія “Математика і інформатика”, 2021, **38**(1), 85–93,  
[https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).85-93](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).85-93) (Категорія Б)
14. Raievska I. Yu., Raievska M. Yu. Local near-rings with a multiplicative Schmidt group. *Ukr. Math. J.*, **71** (2020), No. 10, 1643–1649, <https://doi.org/10.1007/s11253-020-01737-6>; перекладено з *Ukr. Mat. Zh.*, 2019, **71**, No. 10, 1435–1440. (in Ukrainian), <http://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/1526/509> (SJR — **Q3**)
15. Raievska I. Yu., Raievska M. Yu. Finite nearrings with identity on Miller-Moreno groups. *Mat. Stud.*, 2014, **42** (1), 15–20,  
[http://matstud.org.ua/texts/2014/42\\_1/15-20.pdf](http://matstud.org.ua/texts/2014/42_1/15-20.pdf) (Фахове видання)
16. Раєвська І. Ю., Раєвська М. Ю. Скінченні локальні майже-кільця. *Могиллянський математичний журнал*, 2018, **1**, 38–48,  
<http://mmj.ukma.edu.ua/article/view/152611/151700>
17. Raievska I., Raievska M., Sysak Ya. DatabaseEndom32: (v1.0.2) [Data set] (2024). Zenodo,  
<https://doi.org/10.5281/zenodo.10820301>
18. Raievska I., Raievska M., Sysak Ya. DatabaseEndom128: (v0.2) [Data set] (2022). Zenodo,  
<https://doi.org/10.5281/zenodo.7225377>
19. Raievska I., Raievska M., Sysak Ya. DatabaseEndom625: (v0.2) [Data set] (2023). Zenodo,  
<https://doi.org/10.5281/zenodo.7613145>
20. Raievska I., Raievska M., Sysak Ya. LocalNR, Package of local nearrings, Version 1.0.4 (2024) (GAP package),

- <https://gap-packages.github.io/LocalNR/>
21. Sysak Ya., Raievska I., Raievska M. Construction of local nearrings using GAP, Ukraine Mathematics Conference “At the End of the Year 2025”, December 18–19, 2025, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, P. 54,  
<https://drive.google.com/file/d/1LGUD-of4DUq2LiKYbN233claruwbGIj4/view>
  22. Raievska I., Raievska M., Sysak Ya. Local nearrings with additive groups of order 128 and exponent 8. II, Міжнародна конференція, присвячена 75-й річниці від дня народження Володимира Маслюченка, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, 25–27 вересня 2025 року, Чернівці, Україна, С. 159,  
<https://drive.google.com/file/d/1Clufy2S3NPcxiNvsyQLnBD035EKDZQsV/view>
  23. Raievska I. On direct products of metacyclic Miller–Moreno  $p$ -groups and cyclic  $p$ -groups as additive groups of local nearrings, 15th Ukraine Algebra Conference, Lviv, Ukraine, July 8–12, 2025. P. 86,  
<https://xvuac.mmf.com.ua/index.php/abstracts>
  24. Раєвська І. Про прямі добутки неметациклічних  $p$ -груп Міллера–Морено та циклічних  $p$ -груп як адитивні групи локальних майже-кілець, The conference of young scientists “Pidstryhach Readings — 2025”, Lviv, Ukraine, May 27–29, 2025,  
[http://iapmm.lviv.ua/chyt2025/abstracts/Raievska\\_Iryna.pdf](http://iapmm.lviv.ua/chyt2025/abstracts/Raievska_Iryna.pdf)
  25. Raievska I., Raievska M. LocalNR package and its applications, GAP Days Spring 2024, University of Kaiserslautern-Landau, Kaiserslautern, March 11–15, 2024,  
<https://www.gapdays.de/gapdays2024-spring/abstracts/raievska>
  26. Raievska I., Raievska M. Groups of order  $p^4$  as additive groups of local nearrings, Ukraine Algebra Conference “At the End of the Year 2023”, Kyiv, Ukraine, December 26–27, 2023 (online),  
<https://sites.google.com/view/aey2023/home?authuser=0>
  27. Raievska I., Raievska M. Groups of nilpotency class 3 of order  $p^4$  as additive groups of local nearrings, XIX International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference, dedicated to the 125th anni-

- versary of Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, October 11–12, 2023 (online),  
<https://matan.kpi.ua/en/kravchuk-conf-2023/>
28. Raievska I., Raievska M. Groups of the nilpotency class 2 of order  $p^4$  as additive groups of local nearrings, The 103rd Workshop on General Algebra, Tartu, Estonia, June 9–11, 2023,  
[https://kodu.ut.ee/~vlaan/AAA103abstracts/abstract\\_Raievska.pdf](https://kodu.ut.ee/~vlaan/AAA103abstracts/abstract_Raievska.pdf)
  29. Raievska I., Raievska M., Finite one-sided distributive structures and GAP, International Algebraic Conference “At the End of the Year 2022” (online), Kyiv, Ukraine, December 27–28, 2022,  
<https://www.imath.kiev.ua/~algebra/algebra2022/abstracts>
  30. Raievska I., Raievska M., Finite local nearrings and their classification, International conference-workshop “GAP Days Summer 2022”, RWTH Aachen University, Aachen, Germany, October 17–21, 2022,  
<https://www.gapdays.de/gapdays2022-summer/abstracts/raievska>
  31. Raievska I., Raievska M., Local nearrings and their classification, International Conference “On the Trail of Women in Mathematics “Contemporary Women in Mathematics”, Gdansk, Poland, September 15–17, 2022,  
[https://otowim22.ptkwm.pl/Abstract\\_Book.pdf](https://otowim22.ptkwm.pl/Abstract_Book.pdf)
  32. Раєвська І. Ю., Раєвська М. Ю., Локальні майже-кільця на елементарних абелевих групах порядку  $p^3$ , Тези доповідей конференції молодих учених “Підстригачівські читання — 2021”, Львів, Україна, 26–28 травня, 2021,  
<http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2021/abstracts/Raievska.pdf>
  33. Raievska I., Raievska M., On local nearrings of order  $p^3$ , Abstracts of 11th International Skorobohatko Mathematical Conference, Lviv, Ukraine, October 26–30, 2020, P. 97,  
[http://www.iapmm.lviv.ua/conf\\_skorob2020/documents/2020tezy.pdf](http://www.iapmm.lviv.ua/conf_skorob2020/documents/2020tezy.pdf)
  34. Raievska I. Yu., Raievska M. Yu. Local nearrings of order  $p^3$ . Abstracts of 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko, July 3–7,

- 2017, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine, P. 113.
35. Раєвська І. Ю., Раєвська М. Ю. Адитивні групи скінченних майже-кілець з одиницею. Тези доповідей Міжнародної конференції молодих математиків, присвяченої 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського (1917–2008), 7–10 червня 2017 р., Ін-т математики НАН України, Київ, С. 20.
  36. Raievskaya I. Yu., Raievskaya M. Yu. Finite one-sided distributive structures. Тези доповідей XI Літньої школи “Алгебра, Топологія, Аналіз”, 1–14 серпня 2016 р., Одеса, Україна;  
[http://www.imath.kiev.ua/~topology/ata11/ata11\\_theses.pdf](http://www.imath.kiev.ua/~topology/ata11/ata11_theses.pdf)
  37. Raievskaya I. On additive groups of finite local nearrings. Abstracts of AAA89: Workshop on General Algebra, Dresden, Germany, February 26–March 01, 2015,  
<https://tu-dresden.de/mn/math/algebra/forschung/tagungen/aaaseries/aaa89>
  38. Raievskaya I., Raievskaya M. Using the computer algebra system GAP for constructing and studying of algebraic structures. Abstracts of IXth Summer School “Algebra, Topology and Analysis”, Polianytsia, Ukraine, July 7–18, 2014, P. 68–69.
  39. Raievskaya I. Yu., Raievskaya M. Yu., Sysak Ya. P. Small groups as the additive groups of local nearrings. Abstracts of the International Algebraic Conference dedicated to 100-th anniversary of L. A. Kaluzhnin, Taras Shevchenko Nat. Univ., Kyiv, Ukraine, July 7–12, 2014, P. 70.
  40. Raievskaya I., Raievskaya M. Finite nearrings with identity on Miller-Moreno groups. Abstracts of IV International Hahn conference dedicated to the 135-th anniversary of Hans Hahn, Chernivtsi, Ukraine, June 30–July 5, 2014, P. 253–255.
  41. Raievskaya I., Raievskaya M. Nearrings with identity on Miller-Moreno groups. Abstracts of II Ukrainian Scientific Conference “Applying of mathematics methods in science and technics”. Lutsk, Ukraine, November 22–23, 2013, P. 104–109
  42. Raievskaya I. Yu., Raievskaya M. Yu. Local nearrings of order at most 31.

Abstracts of 2nd EUMLS Conference Mathematics for Life Sciences.  
Olenivka, Crimea, Ukraine, September 5–10, 2013, P. 27.

## АНОТАЦІЇ

**Раєвська І. Ю. Скінченні майже-кільця з одиницею та локальні майже-кільця з деякими обмеженнями на адитивні групи.** — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 — “алгебра та теорія чисел”. — Інститут математики Національної академії наук України, Київ, 2026.

Дисертацію присвячено дослідженню майже-кілець з одиницею та локальних майже-кілець, та їх побудові за допомогою системи комп’ютерної алгебри GAP.

Очевидно, що кожне асоціативне кільце є майже-кільцем, і кожна група є адитивною групою майже-кільця, але не обов’язково майже-кільця з одиницею. Клей ввів механізм, необхідний і достатній для побудови всіх майже-кілець, адитивна група яких є скінченною та циклічною. Мексон довів, що якщо таке майже-кільце має мультиплікативну одиницю, то це майже-кільце є кільцем. Питання про те, які групи можуть бути адитивними групами майже-кілець з одиницею, досліджується з кінця 1960-х років. Один з перших результатів в цьому напрямку був отриманий Клейом і Малон, які показали, що з точністю до ізоморфізму існує єдине майже-кільце з одиницею, адитивна група якого циклічна, і яке фактично є комутативним кільцем. Також було встановлено, що адитивна група скінченного майже-кільця з одиницею є простою тоді і тільки тоді, коли це майже-кільце є полем простого порядку. Більш того, доведено, що кожна нециклічна група, порядок якої є добутком різних простих чисел, та симетрична група  $S_n$  при  $n \geq 3$  не можуть бути адитивними групами майже-кілець з одиницею. Клей показав, що не існує майже-кільця з одиницею, адитивна група якого ізоморфна групі кватерніонів  $Q_8$  та встановив, що існує сім неізоморфних класів майже-кілець з одиницею на групі діедра  $D_4$  порядку 8.

Дослідження локальних майже-кілець було ініційовано Мексоном, який визначив ряд їх основних властивостей і, зокрема, довів, що адитивна група нуль-симетричного локального майже-кільця є  $p$ -групою. Цим автором було описано усі неізоморфні нуль-симетричні локальні майже-кільця з нециклічною адитивною групою порядку

$p^2$ , які не є майже-полями. Зазначимо, що залишається відкритим питання, які неабелеві  $p$ -групи можуть бути адитивними групами локальних майже-кілець.

Разом із системою GAP розповсюджується багато пакетів для неї, наприклад, пакет “Systems of nearrings and their applications” (SONATA) — це пакет для побудови та дослідження скінченних майже-кілець та майже-кілець з одиницею. В цьому пакеті міститься бібліотека всіх 68659 майже-кілець порядку менших за 16, та всіх майже-кілець з одиницею порядку меншого за 32. А також, різноманітні функції для аналізу структури та елементів скінченних майже-кілець.

**Ключові слова:** майже-кілля з одиницею, локальні майже-кілля, адитивна група, групи Міллера–Морено, групи Шмідта, GAP, SONATA, LocalNR.

**Raievska I. Iu. Finite nearrings with identity and local nearrings with some restrictions on additive groups.** — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.06 “Algebra and Number Theory”. — Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2026.

It is obvious that every associative ring is a nearring, and every group is the additive group of a nearring, but not necessarily of a nearring with identity. Clay introduced a mechanism necessary and sufficient to construct all nearrings whose additive group is finite and cyclic. Maxson proved that if such an nearring has a multiplicative identity, then this nearring is a ring. The question of which groups can be additive groups of nearrings with identity has been studied since the late 1960s. One of the first results in this direction was obtained by Clay and Malone, who showed that up to isomorphism there exists a unique nearring with unity whose additive group is cyclic and which is in fact a commutative ring. It was also established that the additive group of a finite nearring with unity is prime if and only if this nearring is a field of prime order. Moreover, it was proved that every non-cyclic group whose order is the product of distinct primes and the symmetric group  $S_n$  for  $n \geq 3$  cannot be additive groups of nearrings with identity. Clay showed that there is no nearring with unity whose additive group is isomorphic to the quaternion group  $Q_8$  and established that there are seven non-isomorphic classes of nearrings with unity on the dihedral group  $D_4$  of order 8.

The study of local nearrings was initiated by Maxson, who determined a number of their basic properties and, in particular, proved that the additive group of a zero-symmetric local nearring is a  $p$ -group. This author described all non-isomorphic zero-symmetric local nearrings with a non-cyclic additive group of order  $p^2$  that are not nearfields. Note that it remains an open question which non-abelian  $p$ -groups can be additive groups of local nearrings.

Many packages for GAP are distributed together with the system, for example, the “Systems of nearrings and their applications” (SONATA) package — this is a package for constructing and studying finite nearrings and nearrings with identity. This package contains a library of all 68659 nearrings of order less than 16, and all nearrings with identity order less than 32. Also, various functions for analyzing the structure and elements of finite nearrings.

**Key words:** Nearrings, local nearrings, additive group, Millera–Moreno groups, Shmidt group, GAP, SONATA, LocalNR.