

Пара підпросторів заданого простору.

H - простір над $\mathbb{C}$.

$$H_1 \subset H, \quad H_2 \subset H.$$

Для одного підпростору: $H_1 \subset H$, $\dim H = N$, $\dim H_1 = n$

$e_1, \dots, e_n$ - о.н.б. H_1 доповнимо до о.н.б. в H

$(e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_N)$ - о.н.б.

$$x \in H_1 \Leftrightarrow x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots, 0)$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}. \quad H \cong \mathbb{C}^N, \quad H_1 \cong \mathbb{C}^n$$

Ми будемо вважати пару просторів з точністю до

унітарної еквівалентності (P_1, P_2) унітарно еквівалентною $(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2)$.

Якщо $\exists U$ унітарний, що $\tilde{P}_1 = U^* P_1 U$, $\tilde{P}_2 = U^* P_2 U$.

Зауваимо, що будь-який простір на n -вимірному підпросторі

$$\text{унітарно еквівалентний } \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} = P_n$$

Лема Проектор P в H однозначно з точністю до

унітарної еквівалентності визначається $k = \dim P$.

Висновок $k_1 \neq k_2 \Rightarrow P_{k_1}$ не еквівалентна P_{k_2} .

Пара просторів P_1, P_2 проектує на $H_1, H_2 \subset H$

$$\text{Зведемо матицею результат } P_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

але про бачимо P_2 матиме виглядом.

$$P_2 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

$$H = H_1 \oplus H_1^\perp \ni x = x_1 + x_1^\perp, \quad x_1 \in H_1, \quad x_1^\perp \in H_1^\perp$$

Звернемо увагу на H_2 . Можливі ситуації: 1) $x \in H_1$, 2) $x \in H_1^\perp$, 3) може бути, 4)

$$H_{11} = H_1 \cap H_2 = \{x \in H_2 \mid x \in H_1\} - \text{підпростір в } H_1, \text{ підпростір в } H_1, \text{ в } H_2$$

$$H_{21}^\perp = H_1^\perp \cap H_2 = \{x \in H_2 \mid x \perp H_1\} - \text{підпростір в } H_2$$

$$H_{10} = H_1 \cap H_2^\perp = \{x \in H_1 \mid x \perp H_2\} - \text{підпростір в } H_1$$

$$H_{00} = H_1^\perp \cap H_2^\perp = \{x \in H \mid x \perp H_1, x \perp H_2\}$$

Звернемо увагу, що $H_{10}, H_{20} \subset H$, $H_{10} \perp H_{20}$, якщо $(x, y) \neq 0$

$$x \in H_{10}, \quad y \in H_{20} \Rightarrow x \in H_1, \quad y \in H_2 \Rightarrow x \perp y$$

Теорема Косини з издържатель $H_{jk}, j, k = 0, 1$

интерпретации видою P_1, P_2

$$k \in H_{jk} \quad P_1 x = \begin{cases} 0, & \text{если } j=0 \\ x, & \text{если } j=1 \end{cases}, \quad P_2 x = \begin{cases} 0, & k=0 \\ x, & k=1 \end{cases}$$

$$P_1|_{H_{0k}} = 0, \quad P_1|_{H_{1k}} = I, \quad P_2|_{H_{j0}} = 0, \quad P_2|_{H_{j1}} = I$$

Разложение $H = H_{00} \oplus H_{01} \oplus H_{10} \oplus H_{11}$, — интерпретации P_1, P_2 , в издържатель

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{matrix} H_{00} \\ H_{01} \\ H_{10} \\ H_{11} \end{matrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

Теорема $H = H_{00} \oplus H_{01} \oplus H_{10} \oplus H_{11} \oplus H_2$, все компоненты интерпретации видою P_1, P_2 .

Структура издържатель H_2 издържатель

з точности до издържатель интерпретации видою

$$d_{jk} = \dim H_{jk}, \quad j, k = 0, 1.$$

Теорема $H_2 = H_c \oplus H_s$, в котором первая издържатель P_1, P_2 можно звест до издържатель

$$P_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{pmatrix}, \quad c, s - \text{дождат: гиперболические функции}, \quad c = \cosh z, \quad s = \sinh z.$$

Доказательство $P_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}, \quad A_{11} = A_{11}^*, \quad A_{22} = A_{22}^*$

$$P_2 = P_2^2 = \begin{pmatrix} A_{11}^2 + A_{12}A_{12}^* & A_{11}A_{12} + A_{12}A_{22} \\ * & A_{12}^*A_{12} + A_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_{11}^2 + A_{12}A_{12}^* = A_{11} \\ A_{11}A_{12} + A_{12}A_{22} = A_{12} \\ A_{12}^*A_{12} + A_{22}^2 = A_{22} \end{cases}$$

Получено, что $\text{Ker } A_{12} = 0$. Нехват $x \in \text{Ker } A_{12} \Rightarrow (0, x) \in \text{Ker } P_1$

$$\text{Аналогично } \text{Ker } A_{12}^* = 0$$

$$(0, x) \in \text{Ker } P_2 = \text{Ker } P_2^2$$

$$\Rightarrow A_{12} \text{ обратимый} \Rightarrow \mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}_c \oplus \mathfrak{h}_c$$

$A_{12} = U |A_{12}|$, A_{12} обратимый $\Rightarrow U$ унитарный в $\mathfrak{h}_c$

$$U = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \text{ - унитарный в } \mathfrak{h}_2$$

$$U^* P_1 U = \begin{pmatrix} U^* I U & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P_1$$

$$U^* P_2 U = \begin{pmatrix} U^* A_{12} U & U^* A_{12} I \\ I A_{12}^* U & A_{22} \end{pmatrix} = |A_{12}|$$

Ввиду того, что унитарное преобразование не меняет нормы $A_{12} \geq 0$.

Видно, что $A_{12} \geq 0$

$$A_{11}^2 + A_{12}^2 = A_{11}^2$$

$$A_{12}^2 = A_{11} - A_{11}^2 \Rightarrow A_{12} = \sqrt{A_{11} - A_{11}^2} = \sqrt{A_{22} - A_{22}^2}$$

$$A_{11} A_{12} + A_{12} A_{22} = A_{12}$$

$$A_{11}^2 A_{12} + A_{22}^2 A_{12} = A_{22} A_{12}$$

$$A_{12}^2$$

A_{12} обратимый

A_{12} коммутателен с A_{11}, A_{22}
 $C^2 + S^2 = I$

$$A_{11} + A_{22} = I$$

$$A_{11} = C^2, A_{22} = S^2, A_{12} = CS = SC. \quad \square$$

Теорема P_1, P_2 унитарно эквивалентны операторы

$$\text{в } \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{00} \oplus \mathfrak{H}_{01} \oplus \mathfrak{H}_{10} \oplus \mathfrak{H}_{11} \oplus (\mathfrak{h}_c \oplus \mathfrak{h}_c),$$

$$P_1 = 0 \oplus 0 \oplus I \oplus I \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq C \leq I, \quad \ker C = \ker S = \ker S.$$

$$P_2 = 0 \oplus I \oplus 0 \oplus I \oplus \begin{pmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{pmatrix}, \quad S = \sqrt{1 - C^2}$$

Подобравшись к уравнению на $\mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}_c \oplus \mathfrak{h}_c$

$$P_2 = \begin{pmatrix} C^2 \sqrt{1-C^2} & \\ \sqrt{1-C^2} & 1-C^2 \end{pmatrix}. \text{ Видно, что в } \mathfrak{h}_c \text{ базисный вектор, } e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_m \text{ - базис}$$

$$\text{тогда } P_2 = \begin{pmatrix} e_1^2 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{1-e_1^2} & 0 \\ 0 & e_2^2 & \dots & 0 & 0 & \sqrt{1-e_2^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1-e_1^2 \\ 0 & \sqrt{1-e_1^2} & \dots & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1-e_2^2 \end{pmatrix}$$

Репрезентацию базиса в $\mathfrak{h}_2$ $e_1 \oplus 0, e_2 \oplus 0, \dots, e_n \oplus 0, 0 \oplus e_1, 0 \oplus e_2, \dots, 0 \oplus e_n$

$$e_1 \oplus 0, 0 \oplus e_1, e_2 \oplus 0, 0 \oplus e_2, \dots, e_n \oplus 0, 0 \oplus e_n \Rightarrow$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & I & \\ 0 & & I \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} C^2 \sqrt{1-C^2} & & 0 \\ \sqrt{1-C^2} & & 0 \\ 0 & & I \end{pmatrix} =$$

$$S = \sqrt{1-C^2}$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} c_1^2 \quad c_1 s_1 \\ 0, c_1 \quad s_1^2 \end{array} & \begin{array}{c} c_2^2 \quad c_2 s_2 \\ c_2 s_2 \quad s_2^2 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} c_n^2 \quad c_n s_n \\ c_n s_n \quad s_n^2 \end{array} \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$h_j = H_{c_j} \oplus H_{c_2} \oplus \dots \oplus H_{c_m}, \quad H_{c_j} = \mathbb{C}^2$$

$$\text{в } H_j \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{pmatrix}$$

Вспомогательное $H_{c_j} = \mathbb{R}^2$, P_1 проектор на $\odot x$
 P_2 проектор по направлению
 вектора φ , $c_j = \cos \varphi_j$, $s_j = \sin \varphi_j$.

Вспомогательное $\dim H = 3$, $\dim H_1 = 1, 2$, $\dim H_2 = 1, 2$.

Теперь P_1, P_2 — проекторы
$$\frac{(P_1 - P_2)^2}{h_j} = s^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$P_1 P_2 P_1 = \begin{pmatrix} c^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \|P_1 P_2\|$$

Структура тривиальных изотропов (тривиальных изотропов)

Безмедианно.