

Вступ до теорії ореймів.

$$H \ni x \mapsto \sum_{j=1}^N x_j e_j, \quad (e_j)_{j=1}^N - \text{о.н.б.} \quad x_j = (x, e_j)$$

$$f \in \text{Фур'є}, \quad [0, 2\pi] \quad f \mapsto \frac{c}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \cos(jx) + \beta_j \sin(jx)$$

Гармоничний аналіз $\rightarrow$ Перетворення Фур'є, Двоїстий Поступи

Системні: правила для операторів

Фрейм Габора 1946.

Музика - показовий приклад

Звук: частота $\cos(\lambda t)$, λ - висота звуку

$$f = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \text{модуль } a(t) \cos(\lambda t) \quad a - \text{амплітуда}$$

Вісто: λ_0 - частота звуку t_0 - змусованість

Метод

$$\sum_{k=1}^M a_k f(t) \cos \lambda_k(t - t_k) \quad \left(\varphi_k(t) = f(t - t_k) \cos \lambda_k(t - t_k) \right)$$

Означення H - гільбертів, $M \leq \infty$, система $(f_j)_{j=1}^M \subset H$ орейм,

якщо $\exists A, B > 0$, що $\forall x \in H$

$$A \|x\|^2 \leq \sum_{j=1}^M |(x, f_j)|^2 \leq B \|x\|^2.$$

Приклад $(e_j)_{j=1}^N - \text{о.н.б.} \Rightarrow$ Рівність Парсеваля $\|x\|^2 = \sum_{j=1}^N |(x, e_j)|^2$

Означення A - нижня межа, B - верхня межа

Тісний (tight), якщо $A = B$

Тривіальний, якщо $A = B = I$

Ормонічний, якщо $\|f_j\| = 1, j = 1, \dots, M,$

Ормонічний, якщо $\|f_j\| \leq C < \infty, j = 1, \dots, M$

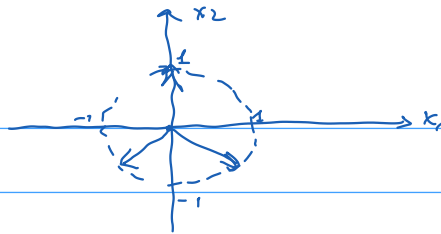
Рівнокутний, якщо $\frac{|(f_j, f_k)|}{\|f_j\| \|f_k\|} = c, j \neq k.$

Приклад $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_N, e_N\}$,

$$\forall x \in H \quad \sum_{j=1}^N |(x, e_j)|^2 = 2 \|x\|^2. \quad - A = B = 2, \text{ тісний}$$

2) $\{a_1 e_1, a_2 e_2, \dots, a_N e_N\}, a_j > 0.$

3) Карсес-Бесу.



Требуемое $A = B = \frac{3}{2}$.

$$x = (x_1, x_2), \quad f_1 = (0, 1), \quad f_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad f_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 |(x, f_j)|^2 &= |x_2|^2 + \left|-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2\right|^2 + \left|\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2\right|^2 = \\ &= x_2^2 + \frac{3}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_1x_2 + \frac{3}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_1x_2 = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 \\ &= \frac{3}{2} \|x\|^2. \end{aligned}$$

Требуемое. $\dim H < \infty$, $(f_j)_{j=1}^M$ — ортонорм. $\Leftrightarrow (f_j)_{j=1}^M$ — ортонорм., тогда л.о. $\{f_j\}_{j=1}^M$ — базис.

Доказательство. $(f_j)_{j=1}^M$ — ортонорм. $\Rightarrow$ л.о. $\{f_j\}_{j=1}^M$ — базис $H_0 \neq H$.

$$\forall x \in H_0^\perp, \quad A \|x\|^2 \leq \sum_{j=1}^M |(x, f_j)|^2, \quad A > 0, \quad \|x\| > 0 \text{ суммируем}$$

Несколько чисел, а не одно ортонорм.

$$\forall x \in H \quad \sum_{j=1}^M |(x, f_j)|^2 \leq \sum_{j=1}^M \|x\|^2 \|f_j\|^2 = \|x\|^2 \left(\sum_{j=1}^M \|f_j\|^2 \right) = \|x\|^2 M$$

$$\text{Тогда } \forall j \exists \|x_j\| = 1, \quad \sum_{j=1}^M |(x_j, f_j)|^2 \leq \frac{1}{M}$$

$$x_j - \text{ортонорм.} \Rightarrow \exists x_j \rightarrow x \in H, \quad \|x\| = 1$$

$$\sum_{j=1}^M |(x, f_j)|^2 = 0 \Rightarrow \forall j \quad (x, f_j) = 0 \Rightarrow x \perp \text{л.о. } \{f_j\}_{j=1}^M \Rightarrow x = 0 \text{ — противоречие}$$

Оператор, связанный с системой векторов

$\dim H = N$, $(e_j)_{j=1}^N$ — о.н.б., $(f_j)_{j=1}^M$ — система векторов в H .

Оператор анализа $T: H \rightarrow \mathbb{C}^M$, $\forall x \in H$

$$(Tx = ((x, f_1), (x, f_2), \dots, (x, f_M))) \in \mathbb{C}^M$$

$$(f_j)_{j=1}^M \text{ — стандартный о.н.б. в } \mathbb{C}^M, \text{ тогда } (Tx = \sum_{j=1}^M (x, f_j) f_j)$$

Оператор синтеза $T^*: \mathbb{C}^M \rightarrow H$, $(T^* f_j, x)_H = (f_j, Tx)_{\mathbb{C}^M}$.

$$\forall x \in H \quad (Tx, f_j) = (x, f_j) = (x, T^* f_j) \Rightarrow \boxed{T^* f_j \rightarrow f_j}$$

Задача Найти оператор T^*

$$T^* = \begin{pmatrix} e_1 & (f_1, e_1) & \dots & (f_M, e_1) \\ e_2 & (f_1, e_2) & \dots & (f_M, e_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_N & (f_1, e_N) & \dots & (f_M, e_N) \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{matrix}$$

f_j — ортонорм. матрица синтеза — компоненты вектора f_j

Теорема $(f_j)_{j=1}^M$ ортонорм $\Leftrightarrow \text{Ker } T = 0$ (T инъективен) $\Leftrightarrow \text{Ran } T^* = H$.

Доказание. Заметим, что $\sum_{j=1}^M |(x, f_j)|^2 = \|Tx\|^2$

(f_j) ортонорм $\Rightarrow A\|x\|^2 \leq \|Tx\|^2 \leq B\|x\|^2 \Rightarrow \sqrt{A}\|x\| \leq \|Tx\| \leq \sqrt{B}\|x\| \Rightarrow \|T\| \leq \sqrt{B}$
 $\|Tx\| \geq A\|x\|, A > 0 \Rightarrow \text{Ker } T = 0.$

также $x \in \text{Ker } T, x \neq 0, \Rightarrow \|Tx\| \geq \sqrt{A}\|x\| \neq 0.$

$\text{Ker } T = (\text{Ran } T^*)^\perp \Rightarrow \text{Ran } T^* = H \quad \|T^{-1}\| \leq \frac{1}{\sqrt{A}}$

$A = \frac{1}{\|T^{-1}\|^2}$ — наименьшее значение. $\square$

Оператор ортогональности $F = T^*T: H \rightarrow H$

$\forall x \in H, \quad Fx = T^*(Tx) = T^*\left(\sum_{j=1}^M (x, f_j) f_j\right) = \sum_{j=1}^M (x, f_j) T^* f_j = \sum_{j=1}^M (x, f_j) f_j$

$$x = \sum_{j=1}^M (x, f_j) f_j$$

Замечание $(f_j)_{j=1}^M$ — о.н.б. $\Rightarrow Fx = x \Leftrightarrow F = I,$

Теорема $(f_j)_{j=1}^M$ — ортонорм $\Leftrightarrow F$ — положительный самосопряженный оператор, удовлетворяющий $AI \leq F \leq BI$

Доказание. $\forall x \in H, \quad (Fx, x) = \left(\sum_{j=1}^M (x, f_j) f_j, x\right) = \sum_{j=1}^M (x, f_j) \overline{(x, f_j)} = \sum_{j=1}^M |(x, f_j)|^2.$

$(f_j)_{j=1}^M$ — ортонорм $\Leftrightarrow A\|x\|^2 \leq (Fx, x) \leq B\|x\|^2$

$(AIx, x) \leq (Fx, x) \Leftrightarrow ((F - AI)x, x) \geq 0 \Leftrightarrow A \leq F, \text{ следовательно } F \in BI$

$F \geq 0 \Leftrightarrow \sigma(F) \in [0, \infty), \quad F \geq AI \Leftrightarrow \sigma(F) \in [A, \infty) \Rightarrow \text{Ker } F = 0$

$\Rightarrow \exists F^{-1} \quad \square$

Бидиалогичные векторы для координатного оператора ортогональности

$(f_j)_{j=1}^M$ ортонорм $\Rightarrow Fx = \sum_{j=1}^M (x, f_j) f_j$

$x = F^{-1}(Fx) = \sum_{j=1}^M (x, f_j) (F^{-1}f_j)$

$F(F^{-1}x) = \sum_{j=1}^M (F^{-1}x, f_j) f_j = \sum_{j=1}^M (x, F^{-1}f_j) f_j$

Вывод $(F^{-1}f_j)_{j=1}^M$ — ортонорм к оператору ортогональности F^{-1}

$(F^{-1}f_j)_{j=1}^M$ — канонический базис относительно $(f_j)_{j=1}^M$ ортона.

Если $(f_j)_{j=1}^M$ — ортонорм, $\Rightarrow \exists F^{-1}$ — с.с.о., $\Rightarrow \exists \sqrt{F^{-1}} \geq 0$

Рассмотрим систему $(\sqrt{F^{-1}}f_j)_{j=1}^M$

$$\sum_{j=1}^M (x, \sqrt{F^{-1}}f_j) \sqrt{F^{-1}}f_j = \sqrt{F^{-1}} \sum_{j=1}^M (\sqrt{F^{-1}}x, f_j) f_j = \sqrt{F^{-1}} F(\sqrt{F^{-1}}x) = x$$

$\Rightarrow (\sqrt{F^{-1}}f_j)_{j=1}^M$ — ортонорм базиса.

Замечание $(f_j)_{j=1}^M$ — ортонорм базиса $\Rightarrow x = \sum_{j=1}^M (x, f_j) f_j.$

Теорема Фрэнкля $A = B \Rightarrow \|x\|^2 = \sum_{j=1}^M |(x, f_j)|^2$ $(\frac{1}{\sqrt{A}} f_j)$ - ортонорм

Теорема ТФЭ

1) $(f_j)_{j=1}^M$ - ортонормальная система и матрица A

2) $F = A \cdot I$

3) $\forall x \in H \quad x = \frac{1}{A} \sum (x, f_j) f_j$

4) T - оператор Фрэнкля, $\frac{1}{\sqrt{A}} T$ - изометрия, $\left(\begin{array}{l} \text{тогда } \forall x \in H \quad \|Tx\| = \|x\| \Leftrightarrow \\ \forall x, y \in H \quad (Tx, Ty) = (x, y) \Leftrightarrow \\ T^* T = I \end{array} \right)$

$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^M |(x, f_j)|^2, x \in H \Leftrightarrow$

$(F x, x) \leq \dots$ $1 \Rightarrow 2, 2 \Rightarrow 3$

$\left(\frac{1}{\sqrt{A}} T^* \right) \left(\frac{1}{\sqrt{A}} T \right) = \frac{1}{A} T^* T = \frac{1}{A} F = \frac{1}{A} \cdot A \cdot I = I.$

Заключение $(f_j)_{j=1}^M$ - ортонормальная $\Leftrightarrow T$ - изометрия

Вещное значение оператора Фрэнкля

$(f_j)_{j=1}^M, F, \dim H = N < \infty.$

$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ - вещные значения $F, (e_j)_{j=1}^N$ - ортонормальная система и вещные значения $F e_j = \lambda_j e_j \Rightarrow F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix}$

Теорема 1) λ_1 - наименьшее вещное значение

2) λ_N - наибольшее вещное значение

3) $\forall x \in H \quad \sum_{j=1}^M |(x, f_j)|^2 = \sum_{j=1}^N \lambda_j |(x, e_j)|^2$

Доказательство A - вещное значение $\Leftrightarrow F - A I \geq 0, F - A I = \begin{pmatrix} \lambda_1 - A & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N - A \end{pmatrix}$

$\Rightarrow 1) 2) B$ - вещное значение $\Leftrightarrow B I - F \geq 0$

3) $\forall x = \sum_{j=1}^N (x, e_j) e_j, F x = \sum_{j=1}^N (x, e_j) F e_j$

$\sum_{j=1}^M |(x, f_j)|^2 = (F x, x) = \sum_{j=1}^N (x, e_j) (F e_j, \sum_{k=1}^N (x, e_k) e_k) = \sum_{j=1}^N \lambda_j |(x, e_j)|^2$

Преобразование пространства

$H \times H \rightarrow H \times H, \Phi = (f_j)_{j=1}^M$ $\Psi = (\psi_j)_{j=1}^M, \psi_j = V f_j$

Теорема Оператор единичности матрицы $\Psi: T_\Psi = T_\Phi V^*$

Доказательство $T_\Phi x = \sum_{j=1}^M (x, f_j) f_j, T_\Psi x = \sum_{j=1}^M (x, \psi_j) \psi_j =$
 $= \sum_{j=1}^M (x, V f_j) f_j = \sum_{j=1}^M (V^* x, f_j) f_j \Rightarrow T_\Psi x = T_\Phi (V^* x) \Rightarrow T_\Psi = T_\Phi V^*$

Теорема $(f_j)_{j=1}^M$ - ортонорм, $\text{Ran } V = H \Rightarrow (\psi_j)_{j=1}^M = (V f_j)_{j=1}^M$ - ортонорм.

Решение $T_\psi = T_\phi V^* \Rightarrow T_\psi^* = V T_\phi^*$, $(f_j)_{j=1}^M$ ортонорм $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{Ran } T_\phi^* = H$, следовательно $\text{Ran } V = H \Rightarrow \text{Ran } T_\psi^* = H \Rightarrow$

T_ψ^* - сюръект

Означения $(f_j)_{j=1}^M$ и $(\psi_j)_{j=1}^M$ 1) взаимно ортонорм, если существует

обратный $V: H \rightarrow H$, что $\psi_j = V f_j$, $j=1, \dots, M$.

2) взаимно ортонорм, если $\exists$ унитарный V , $\psi_j = V f_j$, $j=1, \dots, M$.

Теорема Наследующие условия эквивалентны:

1) $(f_j)_{j=1}^M$ ортонорм и $(\psi_j)_{j=1}^M$

2) $\text{Ran } T_\phi = \text{Ran } T_\psi$

3) $\text{Ker } T_\phi^* = \text{Ker } T_\psi^*$

$\text{Ran } T = (\text{Ker } T^*)^\perp$

Доказание. $1 \Rightarrow 3$: $\exists V: \psi_j = V f_j$, $j=1, \dots, M$.

$T_\psi = T_\phi V^* \Rightarrow T_\psi^* = V T_\phi^*$, $\exists V^{-1} \Rightarrow T_\psi^* x = 0 \Leftrightarrow T_\phi^* x = 0$.

$2 \Rightarrow 1$. $f_j = T_\phi^* \varphi_j$, $(\varphi_j)_{j=1}^M$ - стандартный о.н.д. в $\mathbb{C}^M$

$\psi_j = T_\psi^* \varphi_j$.

Положим $W = \text{Ran } T_\phi = \text{Ran } T_\psi = (\text{Ker } T_\phi^*)^\perp = (\text{Ker } T_\psi^*)^\perp$

P -проектор в $\mathbb{C}^M$ на W

$f_j = T_\phi^* \varphi_j = T_\phi^* P \varphi_j$, $\psi_j = T_\psi^* P \varphi_j$

$(f_j), (\psi_j)$ ортонорм $\Rightarrow \text{Ker } T_\phi = \text{Ker } T_\psi = 0 \Rightarrow$

$T_\phi, T_\psi: H \rightarrow W$ взаимно однозначны, $T_\phi^*, T_\psi^*: W \rightarrow H$ взаимно однозначны.

$\Rightarrow \exists (T_\phi^*|_W)^{-1}: W \rightarrow H$

$V = T_\psi^* (T_\phi^*|_W)^{-1}: H \rightarrow H$ $V f_j = T_\psi^* (T_\phi^*|_W)^{-1} T_\phi^* P \varphi_j$
 $= T_\psi^* P \varphi_j = \psi_j$, $j=1, \dots, M$.

Замечание. 1) $\Phi = (f_j)_{j=1}^M$ ортонорм, $F = T_\phi^* T_\phi$

$(\sqrt{F} f_j)_{j=1}^M$ - ортонорм преобразование $\Rightarrow$

0-с-образное ортонормальное взаимно ортонормальное преобразование.

2) $\Phi = (f_j)_{j=1}^M$, $\Psi = (\psi_j)_{j=1}^M$, F_Φ, F_Ψ - операторы ортонорм

$V = \sqrt{F_\Psi} \sqrt{F_\Phi}^{-1}$ $(V f_j)_{j=1}^M = \Psi$

$F_\Psi = V T_\phi^* T_\phi V^* = V F_\Phi V^* = \sqrt{F_\Psi} \sqrt{F_\Phi}^{-1} F_\Phi \sqrt{F_\Phi}^{-1} \sqrt{F_\Psi} = F_\Psi$.

$\Rightarrow \forall \Phi \exists$ ортонормальное преобразование Λ , что $F_\Lambda = F_\Psi$.

Двоітні орреїтн,

$\Phi = (f_j)_{j=1}^M$ - орреїтн, $\Psi = (F^{-1}f_j)_{j=1}^M \stackrel{=}{=} \psi_j$ - канонічний двоїтні, тоді $\forall x \in H \quad x = \sum (x, \psi_j) \psi_j$.

Означення $(\psi_j)_{j=1}^M$ - двоїтні до $(f_j)_{j=1}^M$, якщо $\forall x \in H \quad x = \sum_{j=1}^M (x, \psi_j) \psi_j$.

Твердження - $\Phi = (f_j)_{j=1}^M, \Psi = (\psi_j)_{j=1}^M, T_\Phi, T_\Psi$ - оператори синтезу, тоді: Ψ двоїтні до $\Phi \Leftrightarrow T_\Phi^* T_\Psi = I$.

Доказ $\forall x \in H \quad T_\Phi^* T_\Psi x = T_\Phi^* \left(\sum_{j=1}^M (x, \psi_j) \psi_j \right), (\psi_j)_{j=1}^M \text{ - о.н.д. в } \mathbb{R}^M$
 $= \sum_{j=1}^M (x, \psi_j) \underbrace{T_\Phi^* \psi_j}_{= f_j} = \sum (x, \psi_j) f_j = x \Leftrightarrow \Psi \text{ двоїтні до } \Phi$

Наслідок Ψ двоїтні до $\Phi \Leftrightarrow \Phi$ двоїтні до Ψ .

Опис двоїтних орреїтн.

Твердження $\Phi = (f_j)_{j=1}^M$ - орреїтн, T_Φ - оператор аналізу F_Φ - орреїтн системи векторів

$\eta_j = F^{-1}f_j + \psi_j, j=1, \dots, M, (\eta_j)_{j=1}^M = \Psi$ - система векторів, T_Ψ - оператор синтезу Ψ двоїтні орреїтн до $\Phi \Leftrightarrow T_\Psi^* T_\Phi = O. (\Leftrightarrow \text{Ran } T_\Phi \perp \text{Ran } T_\Psi)$

Доказ Оператор аналізу для $(\eta_j)_{j=1}^M = \Lambda, T_\Lambda$

$$T_\Lambda x = \sum_{j=1}^M (x, \eta_j) \eta_j = \sum_{j=1}^M (x, F^{-1}f_j) \eta_j + \sum_{j=1}^M (x, \psi_j) \eta_j = (T_{(F^{-1}\Phi)}^* T_\Psi)x$$

$$= (T_\Phi F_\Phi^{-1} + T_\Psi)x$$

$$\Lambda = (\eta_j)_{j=1}^M \text{ двоїтні до } \Phi \Leftrightarrow T_\Lambda^* T_\Phi = I$$

$$I = T_\Lambda^* T_\Phi = (F_\Phi^{-1} T_\Phi^* + T_\Psi^*) T_\Phi = F_\Phi^{-1} \underbrace{T_\Phi^* T_\Phi}_{= I} + T_\Psi^* T_\Phi \Rightarrow T_\Psi^* T_\Phi = O$$

Коли двоїтні орреїтн ізоморфні до Φ ?

Твердження - Φ двоїтні орреїтн, ізоморфний до ℓ_2 - канонічний двоїтні орреїтн.

Доказ $(f_j)_{j=1}^M$ - орреїтн, $T, F, (\psi_j)_{j=1}^M$ - двоїтні

: ізоморфні $\Rightarrow \psi_j = V f_j, V$ - одоморфізм

$$Tx = T^* (T V^*) x = F V^* x \Rightarrow F V^* = I \Rightarrow V^* = F^{-1} = (F^{-1})^* = V$$

Теорема Гильберта (версия для ортогональных)

$H \supset H_0$ - изометрия. P - проектор на H_0 $P = P^* = P^2$, $\text{Ran } P = H_0$

Предположения Семейство $(f_j)_{j=1}^M$ - ортонормированный базис в H_0

Тогда: $(Pf_j)_{j=1}^M \subset H$ - ортонормированный базис в H .

Доказательство Семейство $x_0 \in H_0 \Leftrightarrow Px_0 = x_0$

$$\sum_{j=1}^M |(x_0, Pf_j)|^2 = \sum_{j=1}^M |(Px_0, f_j)|^2 = \sum_{j=1}^M |(x_0, f_j)|^2 \in [A \|x_0\|^2, B \|x_0\|^2]. \quad \square$$

Наследие Семейство $(e_j)_{j=1}^M$ - базис в H , тогда: $(Pe_j)_{j=1}^M$ - ортонормированный базис в H_0 .

Теорема (наблюдения) Семейство $(f_j)_{j=1}^M$ - ортонормированный базис в H , тогда: существует $\tilde{H} \supset H$, таковы, что $(e_j)_{j=1}^M \subset \tilde{H}$, и $Pf_j = Pe_j$, P - проектор на H в $\tilde{H}$.

Доказательство $(f_j)_{j=1}^M$ - ортонормированный базис в H $\Leftrightarrow$ оператор сдвига T - изометрия, тогда $\forall x \in H \|Tx\| = \|x\|, \Leftrightarrow \forall x, y \in H (Tx, Ty) = (x, y)_H$
 $\Leftrightarrow T^*T = I$.

Таким образом H изоморфизм $\text{Ran } T \subset \mathbb{C}^M = \tilde{H}$

Проектор на H в $\tilde{H}$: TT^* . Справедливо, $(TT^*)^* = TT^*$

$$(TT^*)^2 = \underbrace{TT^*}_{I} TT^* = TT^*, \quad \text{Ran } TT^* = \text{Ran } T \cong H$$

$(e_j)_{j=1}^M$ - стандартный о.н.б. в $\mathbb{C}^M$, $\forall x \in H$

$$(x, T^*Pe_j) = (Tx, Pe_j) = (Tx, TT^*e_j) = (x, \underbrace{T^*T}_{I}e_j) = (x, T^*e_j) = (x, f_j) \\ \Rightarrow T^*Pe_j = f_j \quad \square$$

Пример Матрица-базис в бесконечномерном пространстве.

$\tilde{H} = \mathbb{C}^M$ бесконечномерное пространство $H \subset \tilde{H}$, ортогональные до

базиса $e = \sum_{j=1}^M \varphi_j$, (φ_j) - стандартный о.н.б. в $\mathbb{C}^M$

Вывод $\tilde{H} \ni x = (x_1, x_2, \dots, x_M) \in H \Leftrightarrow \sum_{j=1}^M x_j = 0$

Проектор P на H в $\tilde{H}$. $Px = x - \text{пр}_e x = x - \frac{(x, e)e}{\|e\|^2} = x - \frac{(x, e)e}{M}$

$$e_j = \varphi_1 \dots \varphi_{j-1} \varphi_{j+1} \dots \varphi_M \\ f_j = Pe_j = \left(-\frac{1}{M}, -\frac{1}{M}, \dots, -\frac{1}{M}, \frac{M-1}{M}, -\frac{1}{M}, \dots, -\frac{1}{M} \right).$$

Требуется $(f_j)_{j=1}^M$ - ортонормальная система.

$$\cos(\hat{f}_j, \hat{f}_k) = \frac{|(f_j, f_k)|}{\|f_j\| \|f_k\|}$$

$$\|f_j\|^2 = \frac{1}{M^2} (M-1) + \frac{(M-1)^2}{M^2} = \frac{M(M-1)}{M^2} = \frac{M-1}{M}$$

и $|(f_j, f_k)| = (M-2) \frac{1}{M^2} - 2 \frac{M-1}{M^2} = \frac{M-2-2M+2}{M^2} = -\frac{1}{M}$

$$\cos(\hat{f}_j, \hat{f}_k) = \frac{1}{M} \frac{M}{M-1} = \frac{1}{M-1}$$

$$M=3, \dim H=2, \cos(\hat{f}_j, \hat{f}_k) = \frac{1}{2}, \|f_j\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Элементы ортонормальной системы

Требуется $(f_j)_{j=1}^M$ - система из элементов A, B

т.е.:

- 1) $\|f_j\|^2 \leq B, j=1, \dots, M$

- 2) если $\|f_j\|^2 = B \Rightarrow f_j \perp f_k, k \neq j$

- 3) если $\|f_j\|^2 < A$, то $f_j \in \text{л.о.} \{f_k\}_{k \neq j}^\perp$.

Докажем. Пусть $x \in H, A\|x\|^2 \leq \sum_{j=1}^M |(x, f_j)|^2 \leq B\|x\|^2$

Рассмотрим $x = f_j$

$$A\|f_j\|^2 \leq \sum_{k=1}^M |(f_j, f_k)|^2 = \|f_j\|^4 + \sum_{k \neq j} |(f_j, f_k)|^2 \leq B\|f_j\|^2$$

$$\Rightarrow \|f_j\|^4 \leq B\|f_j\|^2 \Rightarrow (\text{если } f_j \neq 0) \|f_j\|^2 \leq B \Rightarrow (1)$$

$$\text{если } \|f_j\|^2 = B \Rightarrow \sum_{k \neq j} |(f_j, f_k)|^2 = 0 \Rightarrow (f_j, f_k) = 0 \Rightarrow (2)$$

$$3) \text{ Принимая } f_j \notin \text{л.о.} \{f_k\}_{k \neq j}, \exists = H_0 \Rightarrow H_0 \neq H$$

P - проектор на $H_0^\perp, P \neq 0$.

Рассмотрим $f'_j = Pf_j \neq 0$

$$A\|f'_j\|^2 \leq \sum_{k=1}^M |(f'_j, f_k)|^2 = (\text{так как } f'_j \perp f_k, k \neq j) = |(f'_j, f_j)|^2 = |(Pf_j, f_j)|^2 = |(Pf_j, Pf_j)|^2 = \|f'_j\|^4$$

$$\Rightarrow A \leq \|f'_j\|^2 \leq \|f_j\|^2$$

$\dim H < \infty, M < \infty, (f_j)_{j=1}^M$ - система, T, T^*, F - билинейные операторы.

$$\Rightarrow \exists \text{ базисные векторы } (e_j)_{j=1}^N \text{ где } F, F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_N \end{pmatrix}$$

Требуется. Если T^* - матрица T^* и система $x, (e_j)_{j=1}^N \subset H, (y_j)_{j=1}^M \subset H$.

$$T^*_{jk} = (T^* e_k, e_j) = (f_k, e_j) = t_{jk}$$

$$F = T^* T$$

$$F_k = (\psi_k, \psi_k)$$

$$T^* = \begin{pmatrix} (f_1, e_1) & (f_2, e_1) & (f_3, e_1) & \dots & (f_M, e_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (f_1, e_N) & (f_2, e_N) & (f_3, e_N) & \dots & (f_M, e_N) \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix}$$

Тоді 1) Рядки T^* ортогональні

2) Квадрат норми j -го рядка $= \lambda_j$, $j=1, \dots, N$

3) Квадрат норми k -го стовпчика $= \|f_k\|^2$, $k=1, \dots, M$

4) k -й стовпчик — вектор f_k у базисі $(e_j)_{j=1}^N$.

Доведення. 1) ми знаємо $\Rightarrow$ 3)

Розглянемо $\psi_j = ((f_1, e_j), (f_2, e_j), \dots, (f_M, e_j))$, $j=1, 2, \dots, N$.

$$\psi_j = \sum_{\ell=1}^M (f_\ell, e_j) \psi_\ell$$

$$(\psi_j, \psi_k) = \left(\sum_{\ell=1}^M (f_\ell, e_j) \psi_\ell, \sum_{m=1}^M (f_m, e_k) \psi_m \right) = \sum_{\ell=1}^M (f_\ell, e_j) \overline{(f_\ell, e_k)}.$$

$$(f_\ell, e_j) = \left(\sum_{\ell=1}^M (e_j, f_\ell) f_\ell, e_k \right) = \sum_{\ell=1}^M (e_j, f_\ell) (f_\ell, e_k) = \sum_{\ell=1}^M \overline{(f_\ell, e_j)} (f_\ell, e_k)$$

$$\stackrel{11}{(e_j, f_\ell) = \delta_{jk}} \Rightarrow (\psi_k, \psi_j).$$

Наслідок 1) λ -власні значення F , тоді $\sum_{j=1}^M \|f_j\|^2 = \sum_{j=1}^N \lambda_j = \text{Tr } F$

2) Якщо $F = \lambda I \Rightarrow \text{Tr } F = N \cdot \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^M \|f_j\|^2$

3) Якщо $\|f_j\|^2 = c = \text{const}$

$$\Rightarrow M \cdot c = \text{Tr } F = \sum_{j=1}^N \lambda_j$$

4) Якщо $\|f_j\| = 1$, $j=1, \dots, M$, $F = \lambda I \Rightarrow \lambda = \frac{M}{N}$.

Мінімальні моменти

$$(f_j)_{j=1}^M \quad (F^{-1} f_j)_{j=1}^M \quad x = \sum_{j=1}^M (x, F^{-1} f_j) f_j.$$

Ізразення Якщо $x = \sum_{j=1}^M \beta_j f_j$

$$\text{Тоді } \sum_{j=1}^M |e_j|^2 = \sum_{j=1}^M |(x, F^{-1} f_j)|^2 + \sum_{j=1}^M |(F^{-1} x, f_j) - \beta_j|^2.$$

Доведення.

$$x = \sum_{j=1}^M \beta_j f_j = \sum_{j=1}^M (x, F^{-1} f_j) f_j, \text{ оскільки } \text{на } F^{-1} x$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^M \beta_j (f_j, F^{-1} x) = \sum_{j=1}^M (x, F^{-1} f_j) (f_j, F^{-1} x) = \sum_{j=1}^M |(x, F^{-1} f_j)|^2$$

$$\sum_{j=1}^M |(x, F^{-1} f_j)|^2 + \sum_{j=1}^M ((F^{-1} x, f_j) - \beta_j) ((f_j, F^{-1} x) - \beta_j) = \dots = \sum_{j=1}^M |\beta_j|^2. \quad \square$$

Подход в пределе Парсона + тесных орбит.

1) Пусть U - унитарная матрица в $\mathbb{C}^M$

размерности N

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{N1} & u_{N2} & \dots & u_{NM} \end{pmatrix} \Rightarrow F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$f_i = \begin{pmatrix} u_{i1} \\ \vdots \\ u_{iN} \end{pmatrix} \quad i=1, \dots, M \quad - \text{векторы Парсона.}$$

$q^M = 1$ - M -ый корень из 1

$$U = \frac{1}{\sqrt{M}} \begin{pmatrix} 1 & q & q^2 & \dots & q^{M-1} \\ q & q^2 & q^3 & \dots & \vdots \\ q^2 & q^3 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ q^{M-1} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad - \text{унитарная матрица}$$

Для z достаточно густого распределения точек

Предположение $L, M \ll \infty$. $(f_i)_{i=1}^M$ - орбиты, F - оператор орбиты

$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ - собственные значения F

Тогда: орбиты векторы $f_{M+1}, \dots, f_L$, и

$(f_i)_{i=1}^L$ - тесный орбит и мощность λ_N .

Следствие Вудермана в N собственных значения для F ,

тогда:

$$T^* = \begin{pmatrix} (f_1, e_1) & \dots & (f_M, e_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (f_1, e_N) & \dots & (f_M, e_N) \end{pmatrix} \quad \sum_{i=1}^M |(f_i, e_k)|^2 = \lambda_k$$

$$T^* = \begin{pmatrix} (f_1, e_1) & \dots & (f_M, e_1) & \sqrt{\lambda_M - \lambda_1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \sqrt{\lambda_N - \lambda_2} \\ (f_1, e_N) & \dots & (f_M, e_N) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda_N \\ \lambda_N \\ \vdots \\ \lambda_N \end{matrix}$$

Спектральный тест

Алгоритм подбора тесного орбиты в $\mathbb{C}^N$ M векторы, $M \geq 2N$

$\|f_i\| = 1$, $i=1, \dots, M$, тогда $F = \frac{M}{N} I$. Будем считать T^*

за столбцами. Тогда: 1) ряды ортогональны

2) квадрат нормы ряда = $\frac{M}{N}$ 3) квадрат нормы столбца = 1.

Будем использовать данные

1) 1×1 0 2) $(x \ 1 \ 1 \ 2 \times 2 \ A(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{x} & \sqrt{x} \\ \sqrt{1-x} & -\sqrt{1-x} \end{pmatrix}, x \in [0, 2]$

Властности $A(x)$: 1) рядов ортогонально

2) квадрат нормы 1 ряда = x , 2 ряда $2-x$

3) норма столбцов = 1

$N=4, M=11 \Rightarrow \frac{M}{N} = \frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4} > 2$

$T^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A(\frac{3}{4}) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A(\frac{1}{2}) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A(\frac{1}{4}) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{cases} 1+1+3x = \frac{11}{4} & x_1 = \frac{3}{4} \\ 2-\frac{3}{4}+1+x_2 = \frac{11}{4} & x_2 = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}+1+x_3 = \frac{11}{4} & x_3 = \frac{1}{4} \end{cases}$

Формы Гейзенберга-Вейля.

$\mathbb{C}^N, q = \sqrt[2]{1}$ - унитарный, $q^N = 1$.

$C = \begin{pmatrix} 1 & q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & q^{N-1} \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\text{базис } e_0, e_1, \dots, e_{N-1}$
 $S e_j = \begin{cases} e_{j+1}, j+1 < N \\ e_1, j+1 = N \end{cases}$
 $C^N = I, S^N = I, CS = qSC,$

из матрицы унитарной C и тригональной дискретной преобразования Гейзенберга-Вейля

мы получаем систему векторов $f_{jk}, i, k = 0, \dots, N-1$

выберем $\|f\|=1, f_{jk} = C^j S^k f, \text{ выберем } f_{00}=1, f_{j0} = C^j f, f_{0k} = S^k f$

Теперь $(f_{jk})_{j,k=0}^{N-1}$ - полный ортонормальный базис. Матрица $= \frac{N^2}{N} = N$.

Решение Попробуем переписать в базисе матрицу системы

Решение системы $f = e_0$ (свойства)

$f_{jk} = C^j S^k e_0 = C^j e_k = q^j e_k, j, k = 0, \dots, N-1$

$\psi_j = (C f_{00}, C f_{01}, \dots, C f_{0, N-1})$ - j -й ряд T^*

$= (0, \dots, 0, (f_{01}, e_1), \dots, (f_{0, N-1}, e_{N-1}), 0, \dots) \Rightarrow \|\psi_j\|^2 = N$

$(\psi_j, \psi_k) = 0, \quad \|f_{jk}\|=1, \text{ до } \|f\|=1, C, S - \text{ унитарны}$

Матрица Грама оператора

$(f_j)_{j=1}^M$ - система векторов в U , где $U \subset V = N$

$$T = \begin{pmatrix} (f_1, f_1) & \dots & (f_n, f_1) \\ \vdots & & \vdots \\ (f_1, f_n) & \dots & (f_n, f_n) \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} (f_1, f_1) & \dots & (f_1, f_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (f_n, f_1) & \dots & (f_n, f_n) \end{pmatrix}$$

$$T^* \varphi_j = f_j$$

$$T^* = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -\overline{f_1} \\ -\overline{f_2} \\ \vdots \\ -\overline{f_n} \end{pmatrix}$$

$$(TT^*)_{j\ell} = (T^* \varphi_j, T^* \varphi_\ell) = (T^* \varphi_j, T^* \varphi_\ell) = (f_j, f_\ell)$$

Теорема $G = TT^*$, симметричная и положительно

определенная $G_{j\ell}$ - сумма координатных доделов

j -го ряда T на n -й столбец $T^* = (f_\ell, f_j)$.

Замечание $\lambda \in \sigma(T^*T), \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(TT^*)$

$$\lambda \neq 0 \quad T^*Tx = \lambda x, \quad y = Tx \quad TT^*y = T(T^*Tx) = T\lambda x = \lambda Tx = \lambda y.$$

$$\Rightarrow \sigma(G) \setminus \{0\} = \sigma(F)$$

Напомним $(f_j)_{j=1}^M$ - ортонормированная $\Leftrightarrow G$ - проектор.

Мы же матрицу Грама G (неоднозначно) считаем $\sqrt{\sum_{j=1}^M (f_j)_{j=1}^M}$

для этой матрицы Грама G и G .

Нормы $\tilde{H} = \mathbb{C}^M$ $(\varphi_j)_{j=1}^M$ - стандартный о.н.б.

$$f_j = \sqrt{G} \varphi_j \in \text{Ran } G \subset \tilde{H}$$

$$(f_j, f_\ell) = (\sqrt{G} \varphi_j, \sqrt{G} \varphi_\ell) = (G \varphi_j, \varphi_\ell) = G_{\ell j}.$$

Графовый оператор

$$H = \mathbb{C}^N, \quad (f_j)_{j=1}^M, \quad \|f_j\| = 1, \quad j = 1, \dots, M$$

Указано, что оператор симметричный, в явном виде минимизирует кут

и не обязательно терять какой-то базисный

$$\max_{i \neq k} |(f_i, f_k)| = \psi, \quad \text{где минимизирует значение } \psi \rightarrow \min$$

системы, где ψ достигается минимальным значением

значения - графовый оператор.

Пример $N=2, \quad M=2 \Rightarrow \psi=0$

$$\mathbb{R}^2$$

$$M=3$$

$$\psi = \frac{1}{2}$$

$$M=4$$

$$\psi = \frac{1}{2}$$



Задание 1) complete - нормальная единица.

2) incomplete - Проблема.

Теорема (Ostrowski-Welch's.)

исполн. dim $H = N$, $M > N$, $T \in \mathcal{B}(H)$

$$\psi \geq \sqrt{\frac{M-N}{N(M-1)}}$$

Примеры $N=2, M=3$ $\psi \geq \frac{1}{2}$

$$M=4$$

$$\psi \geq \sqrt{\frac{2}{2 \cdot 3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{1}{2}$$

Доказание. $(f_j)_{j=1}^M$, $\|f_j\| = 1$, $j=1, \dots, M$ $T^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ f_1 & f_2 & \dots & f_M \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

$$M + (M^2 - M)\psi^2 \geq \sum_{j,k=1}^M |(f_j, f_k)|^2 = \|G\|_{HS}^2 = \|TT^*\|_{HS}^2$$

Матрица

$$0 \leq \|TT^* - \frac{M}{N}I\|_{HS}^2 = \text{Tr} \left(T^*T - \frac{M}{N}I \right) \left(T^*T - \frac{M}{N}I \right) =$$

$$= \text{Tr} \left(T^*TT^*T - 2\frac{M}{N}T^*T + \frac{M^2}{N^2}I \right) =$$

$$= \text{Tr} \left(\underbrace{T^*TT^*T}_{=I} - 2\frac{M}{N}T^*T + \frac{M^2}{N^2}I \right) =$$

$$= \text{Tr} (T^*T^*TT^*) - 2\frac{M}{N} \text{Tr} (T^*T) + \frac{M^2}{N^2}N$$

$$= \text{Tr} (T^*T^*TT^*) - 2\frac{M}{N} \underbrace{\text{Tr} (T^*T)}_{=M} + \frac{M^2}{N^2}N$$

$$= \|TT^*\|_{HS}^2 - 2\frac{M^2}{N} + \frac{M^2}{N} = \|TT^*\|_{HS}^2 - \frac{M^2}{N}$$

$$\Rightarrow \|TT^*\|_{HS}^2 \geq \frac{M^2}{N} \Rightarrow M + (M^2 - M)\psi^2 \geq \frac{M^2}{N}$$

$$(M^2 - M)\psi^2 \geq \frac{M^2 - MN}{N} \Rightarrow \psi^2 \geq \frac{M(M-N)}{N(M(M-1))} \Rightarrow \psi \geq \sqrt{\frac{M-N}{N(M-1)}} \quad \square$$

Как доказать теорему?

1) $|(f_j, f_k)| = \psi$, $j \neq k \Rightarrow$ equiangular family

2) $F = T^*T = \frac{M}{N}I \Rightarrow$ equilateral family

Означения equiangular family $\|f_j\|=1$ family, если $|(f_j, f_k)| = \text{const}$ $j \neq k$

Постановка Даны задано $N = \dim H$, $(f_i)_{i=1}^N$, $\|f_i\|=1$ - p. линейные
 и можно считать нормированные M !

Теорема Даны $(f_i)_{i=1}^N$ линейные $\in K^N$, $K \in (\mathbb{R}, \mathbb{C})$
 тогда

1) в $\mathbb{R}^N$ $M \leq \frac{N(N+1)}{2}$ 2) в $\mathbb{C}^N$ $M \leq N^2$.

Доказательство Мы докажем, что система P_i на f_i линейно независима в $M_K(K)$

в линейном $\mathbb{R}$ л.н. (P_i | P -ортонорм) = линейная симметричная матрица
 и мы докажем $\frac{N(N+1)}{2}$.

в линейном $\mathbb{C}$ л.н. (P_i | P -ортонорм) = M_N , $\dim M_N = N^2$.

Проекция на $f_j : P_j = f_j f_j^*$, $f_j = \begin{bmatrix} f_{j1} \\ \vdots \\ f_{jN} \end{bmatrix}$, $f_j^* = \{ \overline{f_{j1}}, \dots, \overline{f_{jN}} \}$
 $(f_j, f_k) = f_k^* f_j$

$f = (f_1, \dots, f_N)$
 $\forall f \neq 0 \quad P_f = \begin{pmatrix} f_1 f_1^* & f_1 f_2^* & \dots & f_1 f_N^* \\ f_2 f_1^* & f_2 f_2^* & \dots & f_2 f_N^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_N f_1^* & f_N f_2^* & \dots & f_N f_N^* \end{pmatrix}$

Рассмотрим P_j как элементы в $M_N(K)$ и скалярным

множителем $(P_j, P_k) = \text{Tr}(P_j P_k^*) = \text{Tr}(P_j P_k) =$

$= \text{Tr}(f_j f_j^* f_k f_k^*) = (f_k, f_j) \text{Tr}(f_j^* f_k^*) = (f_k, f_j) \text{Tr}(f_k^* f_j) = (f_k, f_j) (f_j, f_k)$
 $= |(f_k, f_j)|^2 = \begin{cases} 1 & j=k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$

матрица Тресса $G = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & c^2 & \\ & c^2 & & 1 \end{pmatrix} = I + \begin{pmatrix} 0 & c^2 & \dots & c^2 \\ c^2 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ c^2 & & & 0 \end{pmatrix}$

$= I + c^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} = I + c^2 A$

$\lambda \in G(G) \Leftrightarrow \frac{\lambda-1}{c^2} \in G(A)$

Рассмотрим $G(A)$

$e_1 = (1, \dots, 1)$, $A e_1 = \begin{pmatrix} N-1 \\ N-1 \\ \vdots \\ N-1 \end{pmatrix} = (N-1) e_1$, $N-1 \in G(A)$

$x \perp e_1 \Leftrightarrow x = (x_1, \dots, x_N)$, $\sum_{i=1}^N x_i = 0$.

$Ax = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j \neq 1} x_j \\ \sum_{j \neq 2} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j \neq N} x_j \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \Rightarrow x - \text{вектор} \text{ длины } N \text{ с суммой } -1$
 $\Rightarrow G(A) = \{-1, N-1\}$

$\Rightarrow G(c^2 A) = \{-c^2, (N-1)c^2\}$, $G(I + c^2 A) = \{1-c^2, 1+(N-1)c^2\}$

$c^2 < 1 \Rightarrow G(G) \neq \emptyset \Rightarrow G$ обратима $\Rightarrow (P_j)_{j=1}^N$ л.н. система $\square$

$A = A^*$
 $A = \sum \lambda_i P_i$

P_j -ортонорм
 на $M_N(K)$
 и $\dim M_N(K) = N^2$

Максиміальні рівнянні системи.

1) Дійсний випадок, $H = \mathbb{R}^N$, $(f_j)_{j=1}^m$ - рівняння системи
маємо $m \leq \frac{N(N+1)}{2}$. Коли кількість досягається?

Твердження $N \neq 3$, і рівняння система $m = \frac{N(N+1)}{2} \Rightarrow$
 $N = (2k+1)^2 - 2$.

$N \in \{2, \textcircled{7}, \textcircled{23}, \textcircled{47}, 79, \dots\}$.

2) Комплексний випадок. Гіпотеза Зейделя (2000)

и N ^{рівняння} система з N^2 векторів, (тісно зв'язані).

Явно переконали: $N \leq 20$, Зейделя При $n=3$ існує
неперервна серія рівнянь системи, у всіх інших випадках
випадках кількість систем скінченна.

Комп'ютерні обчислення: $N \leq 150$ виконано позитивно.

Всі відомі явні системи будується як операції Гейлборга-Вейла

Сферичні дизайни.

$$\mathbb{R}^N \supset S^{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \|x\| = 1\}.$$

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_M\} \subset S^{N-1}$ X - сферичний k -дизайн,

якщо для довільного многочлена P степеня $\leq k$

$$\frac{1}{M} \sum_{x \in X} P(x) = \frac{1}{\omega} \int_{S^{N-1}} P(x) dx$$

Є нерівності для нижньої межі M , наприклад, $k=5$

$M \geq N(N+1)$. Дизайн тісний (tight), якщо $M = \text{мінімальна}$ значення

твердження X -тісний 5 -дизайн $\Rightarrow X = \phi \cup (-\phi)$,

де ϕ - максимальний рівноважний орбіт в $\mathbb{R}^N$.

Fusion орбіти.

$$(f_j)_{j=1}^M \text{ - орбіти. } Fx = \sum_{j=1}^M \langle x, f_j \rangle P_j =$$
$$= \sum_{j=1}^M \|P_j\|^2 \left(x, \frac{f_j}{\|f_j\|} \right) \frac{f_j}{\|f_j\|} = \sum_{j=1}^M \|P_j\|^2 P_{\frac{f_j}{\|f_j\|}} x$$

$\|f\| = 1$, то

$$\text{np}_+ x = (x, f) f$$

$$A \leq F \leq BI$$

$$F = \sum_{j=1}^M c_j P_j, \quad c_j > 0, \quad P_j \text{ - проектори на } f_j, \Rightarrow \text{дію } P_j = 1$$

Означення Fusion орбіт з множина A, B - набір проекторів P_i
та чисел $c_j > 0$, що $AI \leq \sum_{j=1}^M c_j P_j \leq BI$.