

Лінійні оператори в скінченновимірних злідованих просторах

Визначення Лінійний простір над $\mathbb{C}$ - множина M , на якій задані операції

1) Додавання $M \ni x, y, \quad (x, y) \mapsto x + y \in M$

2) Множення на число $\alpha \in \mathbb{C}, x \in M \quad (\alpha, x) \mapsto \alpha x \in M$

Аксіоми л.п.

1) $x + y = y + x$

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$

3) $\exists 0 \in M, \quad 0 + x = x$

4) $\forall x \in M \exists -x \in M, \quad x + (-x) = 0$

5) $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, x \in M \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

6) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

8) $1 \cdot x = x$

Приклади 0) $M = \{0\}$ - тривіальний

1) $M = \mathbb{C}$

2) $\mathbb{C}^n \ni x = (x_1, \dots, x_n) \quad y = (y_1, \dots, y_n)$

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

4) $\mathbb{P}[x] \ni p = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$

5) $\mathbb{C}[x, y] \ni f, g \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

Вправи: 1) $0 \in \text{линійний}$ 2) $0 \cdot x = 0$ 3) $(-1)x = -x$ 4) $\alpha \cdot 0 = 0$

Лінійні комбінації $(x_j)_{j=1}^n \in M, \quad (\alpha_j)_{j=1}^n \in \mathbb{C} \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \in M$

$(x_j)_{j=1}^n$ лінійно незалежне, якщо з умови $\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j = 0$

випливає $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

Вправа $(x_j)_{j=1}^n$ лінійно залежне, то $\exists x_k, \text{ який } \in$

лінійною комбінацією інших в-в.

Визначення Лінійна оболонка системи векторів $(x_i)_{i \in I}$

л.о. $\langle (x_i) \rangle = \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \mid \alpha_j \in \mathbb{C}, x_j \in (x_i), n=1, 2, \dots \right\}$

Система векторів повна, якщо її лінійна оболонка $= M$

Визначення Базис (Датис Тамбас) лінійного простору -

це повна лінійно незалежна система

Якщо $(x_i)_{i=1}^n$ - базис, то $\forall x \in M \quad x = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j$

Вправа Розклад за базисом однозначний

Розмірність M - максимальна кількість лінійно незалежних векторів, $\dim M$

Випадок $(x_j)_{j=1}^n$ - базис, то $\dim M = n$

Приклад 1) $M = \mathbb{C}^n \Rightarrow x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum x_j e_j, e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$.

2) $P[x] = 1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ - базис

3) $M = M_{n \times n}(\mathbb{C})$ $E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ - базис

M, N - лінійні простори

Визначення $\varphi: M \rightarrow N$ гомоморфізм, якщо

$$\forall x, y \in M, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad \varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y).$$

Якщо φ бієктивно ізоморфізм, то це ізоморфізм

Випадок $\dim M = n \Rightarrow M \cong \mathbb{C}^n$

Підпростір $L \subset M$, якщо L - лінійний простір

Приклад 1) $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}^m, m > n, \mathbb{C}^m \ni x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$

2) $P_n[x]$ - многочислен степеня $\leq n$,

$$\text{тоді: } P_n[x] \subset P_m[x] \subset P[x]$$

$\uparrow$
 $n > m$

Випадок $N \subset M \Rightarrow \dim N \leq \dim M$.

Прямі суми просторів M та N , $M \dot{+} N$

Множина: $M \times N \ni (x, y), x \in M, y \in N$

Операції: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

Визначено просторів в прямій сумі

$$M \subset M \dot{+} N \quad M \ni x \mapsto (x, 0), \quad N \ni y \mapsto (0, y)$$

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + y.$$

$K \supset M$ чи можна знайти N , $K = M \dot{+} N$?

Фактор-простір. $K \supset M$ $x, y \in \text{еквівалентність}$,

якщо $x - y \in M$, кожну класу $\tilde{x}$ - сукупність векторів,

еквівалентних до x , $\tilde{x} = \{y \in K \mid x - y \in M\}$

Закладення $x \in M \Rightarrow x \sim 0, M \subset \tilde{0}$

Фактор-простір $K/M = N$ - сукупність класів еквівалентності

векторів з K . Операції $\tilde{x} + \tilde{y} = \widetilde{(x+y)}, \lambda \tilde{x} = \widetilde{(\lambda x)}, \lambda \in \mathbb{C}, x, y \in K$.

$x \sim x', y \sim y'$ можна, що $\tilde{x}' + \tilde{y}' = \tilde{x} + \tilde{y}$

$$\tilde{x}' + \tilde{y}' = \widetilde{(x' + y')} = \widetilde{(x + y + \underbrace{x' - x + y' - y}_{\in M})} = \widetilde{(x + y)},$$

Вправа Перевірити еквівалентність умовів

Теорема $V = N + M$, тоді лінійне відображення $\psi: N \rightarrow K/M$

$$N \ni x \mapsto \hat{x} \in K/M \text{ ізоморфізм}$$

Доведення існує лінійне $\psi(y_1) = \psi(y_2), y_1, y_2 \in N, \Rightarrow \hat{y}_1 = \hat{y}_2 \Rightarrow$

$$y_1 - y_2 \in M \Rightarrow y_1 - y_2 = \underset{\in N}{0} + \underset{\in M}{m}, \text{ і тому існує } y_1, y_2 \in N \Rightarrow$$

$$y_1 - y_2 = \underset{\in N}{n} + \underset{\in M}{0} \Rightarrow y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$$

Спробуємо: $\hat{x} \in K/M, x \in K \Rightarrow x = \underset{\in N}{x_N} + \underset{\in M}{x_M}$, тоді $x_M = x - x_N \in M$

$$\Rightarrow \hat{x}_N = \hat{x} \Rightarrow \forall \hat{x} \in K/M \exists x_N \in N \text{ } \psi(x_N) = \hat{x}$$

"(у кн.)"

Лінійне відображення

Теорема Додаток лінійних просторів.

M, N - лінійні простори їх тензорний добуток $M \otimes N$

1) Множина лінійних комбінацій формальних елементів $x \otimes y, x \in M, y \in N$

$$\Rightarrow \text{Додаток елементів } M \otimes N \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \otimes y_i, \lambda_i \in \mathbb{C}, x_i \in M, y_i \in N, m \in \mathbb{N}$$

$$\text{і задовольняє: } (x+y) \otimes z = x \otimes z + y \otimes z, x \otimes (y+z) = x \otimes y + x \otimes z$$

$$(\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y) = \lambda (x \otimes y)$$

Заявлення $(e_j)_{j=1}^n$ - базис в $M, (f_i)_{i=1}^m$ - базис в $N, x = \sum_{j=1}^n x_j e_j, y = \sum_{i=1}^m y_i f_i$

$$x \otimes y = \left(\sum_{j=1}^n x_j e_j \right) \otimes \left(\sum_{i=1}^m y_i f_i \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_j y_i e_j \otimes f_i$$

$$\Rightarrow (e_j \otimes f_i)_{j=1, i=1}^{n, m} \text{ - базис в } M \otimes N$$

Заявлення $\dim M \otimes N = \dim M \cdot \dim N$

Приклад $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ - має базис $e_j \otimes f_k, e_j$ - базис в $\mathbb{C}^n, f_k$ - базис в $\mathbb{C}^m$

$$e_j \otimes f_k \leftrightarrow E_{j,k} \text{ - матриці розміру } \Rightarrow \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m \sim M_{n \times m}(\mathbb{C})$$

$$2) P[x] \otimes P[y] \text{ базис в } P[x]: 1, x, x^2, \dots = (x^j)_{j=0}^{\infty}$$

$$\wedge P[y]: 1, y, y^2, \dots = (y_k)_{k=0}^{\infty}$$

$$\text{Базис в } P[x] \otimes P[y] \quad x^j \otimes y^k \Leftrightarrow x^j y^k \Rightarrow$$

$$P[x] \otimes P[y] = P[xy].$$

Гильбертів простір.

Скінченновимірний дієльний $\equiv$ евклідов

комплексний $\equiv$ унітарний

H - лінійний простір, скалярний добуток - лінійне

$$H \times H \rightarrow \mathbb{C}, \quad H \ni x, y \mapsto (x, y)_H \in \mathbb{C}$$

$$1) (x, x) \geq 0 \quad \forall x \in H, \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$2) (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z), \quad x, y, z \in H, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

$$3) (x, y) = \overline{(y, x)}, \quad x, y \in H$$

Норми 1) $(x, \alpha y) = \overline{(\alpha y, x)} = \overline{\alpha(y, x)} = \bar{\alpha} (x, y)$

$$2) (x, y + z) = (x, y) + (x, z)$$

$$\text{або} \text{ разом } (x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha} (x, y) + \bar{\beta} (x, z)$$

Означення Скінченновимірний лінійний простір H з

лінійним простором H і скалярним добутком.

Норма (довжина) вектора $\|x\|^2 = (x, x)$

відстань між x, y $\|x - y\|$ $\cos \angle x, y = \frac{|(x, y)|}{\|x\| \|y\|}$

Теорема (Нерівність Коші-Буняковського-Шварца).

$$\forall x, y \in H \quad |(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$$

Доведення $\alpha = \frac{(x, y)}{(x, y)}, \quad \alpha \in \mathbb{C}$

$$0 \leq (t\alpha x + y, t\alpha x + y) = t^2 \alpha \bar{\alpha} (x, x) + t\alpha (x, y) + t\bar{\alpha} (y, x) + (y, y)$$

$$= t^2 \|x\|^2 + t |(x, y)| + t |(x, y)| + \|y\|^2 = t^2 \|x\|^2 + 2t |(x, y)| + \|y\|^2$$

$$\Rightarrow D = 4 |(x, y)|^2 - 4 \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad |(x, y)| \leq \|x\| \|y\|. \quad \square$$

Зуваження: Рівність досягається $\Leftrightarrow y = \lambda x, \lambda \in \mathbb{C}$.

Вирівня $(x, y) = 0 \Rightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.



Полержайнінський тотожність

Теорема $\forall x, y \in H \quad (x, y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2))$.

Доведення В дієльному лінійному $(x, y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$

$$\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = (x + y, x + y) - (x - y, x - y) = \cancel{(x, x)} + (x, y) + (y, x) + (y, y) -$$

$$- \cancel{(x, x)} + (x, y) + (y, x) - \cancel{(y, y)} = 4(x, y) \quad \square$$

Базис в гильбертовом пространстве, ортонормованная система та ортонормованная базис.

$(x_j)_{j=1}^m$ ортонормованная, якщо $(x_j, x_k) = 0, j \neq k$

$(x_j)_{j=1}^m$ ортонормованная, якщо $(x_j, x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, j=k \\ 0, j \neq k \end{cases}$.

Вірше ортонормованная система ненулевых векторов линейно независима

Теорема (Кристингер-Бессель). Если $(e_j)_{j=1}^m$ ортонормованная, то для $\|x\|^2 \geq \sum_{j=1}^m |(x, e_j)|^2$.

Доказательство $0 \leq \|x - \sum_{j=1}^m (x, e_j) e_j\|^2 = (x - \sum_{j=1}^m (x, e_j) e_j, x - \sum_{j=1}^m (x, e_j) e_j) =$

$$= \|x\|^2 - (x, \sum_{j=1}^m (x, e_j) e_j) - (\sum_{j=1}^m (x, e_j) e_j, x) + (\sum_{j=1}^m (x, e_j) e_j, \sum_{k=1}^m (x, e_k) e_k) =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^m \overline{(x, e_j)} (x, e_j) - \sum_{j=1}^m (x, e_j) \overline{(x, e_j)} + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \overline{(x, e_j)} (x, e_k) \underbrace{(e_j, e_k)}_{=\delta_{jk}} =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^m 2|(x, e_j)|^2 \Rightarrow \|x\|^2 \geq \sum_{j=1}^m |(x, e_j)|^2$$

Означення $H \supset K$ гильбертов простір

$x \in H$ проекція x на K , $pr_K x$ - вектор з K ,

так що $x - pr_K x \perp K$, тобто $(x - pr_K x, y) = 0, y \in K$.

Лема Если $(e_j)_{j=1}^k$ - ортонормованная система,

то для $\sum_{j=1}^k (x, e_j) e_j$ - проекция x на л.о. $\{e_j\}_{j=1}^k \subseteq K$

Доказ $\forall y \in K \quad (x - \sum_{j=1}^k (x, e_j) e_j, y) = (x - \sum_{j=1}^k (x, e_j) e_j, \sum_{\ell=1}^k y_\ell e_\ell)$

$$= \sum_{\ell=1}^k y_\ell (x, e_\ell) - \sum_{j=1}^k (x, e_j) \underbrace{(e_j, \sum_{\ell=1}^k y_\ell e_\ell)}_{=y_j} = 0. \quad \square$$

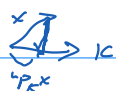
Отсюда система векторов $(e_j)_{j=1}^k$ полная, если л.о. $\{e_j\}_{j=1}^k = H$.

$(e_j)_{j=1}^k$ - ортонормованный базис, если полная и ортонормованная.

Теорема $(e_j)_{j=1}^k$ - ортонорм. базис, то для $\forall$

$$x = \sum_{j=1}^k (x, e_j) e_j. \quad \text{Справедливо, } \sum_{j=1}^k (x, e_j) e_j - \text{проекция } x \text{ на } K$$

$$\Rightarrow x = pr_H x.$$



Теорема (Пилле-Парсона) $\forall x \in H$

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^n |(x, e_j)|^2.$$

(x, e_j) — коэффициенты Фурье вектора $x \in H$.

Теорема В гильбертовом H , $\dim H < \infty$ $\exists$ ортонормированный базис.

Доказание. $(x_j)_{j=1}^n$ — любая система векторов в H , $x_j \neq 0, j=1, \dots, n$

$e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$. В последовательности $x_2, x_3, \dots, x_n$ выберем первый, который не $\in$ $\text{span}\{e_1\}$, назовем его x_2

$$e_2 = \frac{(x_2, e_1)e_1 - x_2}{\|(x_2, e_1)e_1 - x_2\|} \Rightarrow (e_1, e_2) = 0, \|e_2\| = 1.$$

В системе $x_2, x_3, \dots, x_n$ выберем первый вектор (назовем x_3), который не принадлежит к л.в. $\{e_1, e_2\}$

$$e_3 = \frac{\sum_{j=1}^2 (x_3, e_j)e_j - x_3}{\|\sum_{j=1}^2 (x_3, e_j)e_j - x_3\|}, \|e_3\| = 1, e_3 \perp e_1, e_3 \perp e_2.$$

... подобным образом систему $\{e_j\}_{j=1}^n$, $\|e_j\| = 1, e_j \perp e_k, k \neq j$. $\square$

Матрица Грама. H — гильбертово, $(x_j)_{j=1}^n$

За $(x_j)_{j=1}^n$ задано матрично

$$G = \begin{pmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \dots & (x_1, x_n) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & \dots & (x_2, x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_n, x_1) & (x_n, x_2) & \dots & (x_n, x_n) \end{pmatrix} - \text{матрица Грама системы } (x_j)_{j=1}^n$$

Теорема Система $(x_j)_{j=1}^n$ линейно независима $\Leftrightarrow |G| \neq 0$

Доказание $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0$

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_1 (x_1, x_1) + \bar{\lambda}_2 (x_1, x_2) + \dots + \bar{\lambda}_n (x_1, x_n) = 0 \\ \dots \\ \bar{\lambda}_1 (x_n, x_1) + \bar{\lambda}_2 (x_n, x_2) + \dots + \bar{\lambda}_n (x_n, x_n) = 0 \end{cases} \quad \square$$

Теорема Матрица Грама положительно определена

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{C} \quad \sum_{j,k=1}^n (x_j, x_k) \xi_j \bar{\xi}_k \geq 0$$

Справедливо, $\forall \xi_1, \dots, \xi_n$ положительно $x = \sum_{j=1}^n \xi_j x_j$

$$0 \leq (x, x) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \xi_j \bar{\xi}_k (x_j, x_k) \quad \square$$

$H \supset K$, то K - индериби,

Ортогональная прямая сумма $H = K \oplus K^\perp$ - индериби

пара (x, y) , $x \in H, y \in K$

Скалярный добуток в $H \oplus K$

$$((x, y), (x', y'))_{H \oplus K} = (x, x')_H + (y, y')_K$$

Значит $(x, 0) \perp (0, y)$, $\|(x, y)\|_{H \oplus K}^2 = \|x\|_H^2 + \|y\|_K^2$

Аналогично можно рассмотреть прямую сумму конечноого
численного индериби $H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_m$.

Ортогональное дополнение $H \supset K$ - индериби

Ортогональное дополнение $K^\perp = \{x \in H \mid (x, y) = 0 \ \forall y \in K\}$

Вспомогательное 1) $(K^\perp)^\perp = K$

2) $H = K \oplus K^\perp$, то есть $\forall x \in H \exists! x_1 \in K, x_2 \in K^\perp$

$$x = x_1 + x_2, \text{ причём } \|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$$

Тензорный добуток индерибных пространств.

H_1, H_2 - индериби $H_1 \otimes H_2 \ni \sum_{i=1}^n c_i x_i \otimes y_i, c_i \in \mathbb{C}, x_i \in H_1, y_i \in H_2$

$$(x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2)_{H_1 \otimes H_2} = (x_1, x_2)_{H_1} (y_1, y_2)_{H_2}$$

Значит, если $(e_j)_{j=1}^n$ - о.н.б. в H_1 , $(f_k)_{k=1}^m$ - о.н.б. в H_2

$$(e_j \otimes f_k, e_l \otimes f_m)_{H_1 \otimes H_2} = (e_j, e_l)_{H_1} (f_k, f_m)_{H_2} = \delta_{j,l} \delta_{k,m}$$

$$\Rightarrow (e_j \otimes f_k)_{j=1, k=1}^n, m - \text{о.н.б. в } H_1 \otimes H_2$$

Замечание. ① $H_1 \sim H_2$, если $\exists \varphi: H_1 \rightarrow H_2$

1) φ - биекция

$$2) \varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y), \alpha, \beta \in \mathbb{C}, x, y \in H_1$$

$$3) (\varphi(x), \varphi(y))_{H_2} = (x, y)_{H_1}$$

Вспомогательное $\dim H = n \Rightarrow H \sim \mathbb{C}^n$

② Вспомогательное Нормы на $\mathbb{C}^n$

$$1) \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$2) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \alpha \in \mathbb{C}, x \in H$$

$$3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

③ Значит y гильбертовому пространству.

$$H \ni (x_n)_{n=1}^{\infty}, \quad x_n \rightarrow x \in H \Leftrightarrow \|x - x_n\| \rightarrow 0.$$

Вспомогательное $x_n = \sum_{j=1}^n x_j^{(n)} e_j, \quad x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^{(x)} e_j, \quad x_n \rightarrow x \Leftrightarrow x_j^{(n)} \rightarrow x_j^{(x)}$

④ Ясно $\forall z \in H \quad (x, z) = (y, z) \Rightarrow x = y, \text{ с-р. } \mathcal{L} \mathcal{H},$

$$(x - y, z) = 0 \Rightarrow x - y = 0.$$

Линейный оператор в гильбертовом пространстве

H_1, H_2 - гильбертовы пространства. Линейный оператор A - отображение

из $H_1 \rightarrow H_2$, для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad x, y \in H_1$

как правило можно считать $H_1 = H_2$.

Означеніе $A: H \rightarrow H$ - ограниченный, если $\exists C \geq 0$, что $\forall x \in H \quad \|Ax\| \leq C \|x\|$.

Теорема Ограниченный оператор непрерывен.

Доказательство $x_n \rightarrow x$, тогда $Ax_n \rightarrow Ax$

$$\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \leq C \|x_n - x\| \rightarrow 0, \quad x_n \rightarrow x$$

Теорема Если H с.с. $\Rightarrow A$ ограниченный

Доказательство $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ - ортонормированный базис в H , $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j$

$$\|Ax\| = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} x_j A e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| \|A e_j\| \leq \|x\| \sum_{j=1}^{\infty} \|A e_j\| = C \|x\|$$

Означеніе Норма оператора $\|A\| = \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\|=1}} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$

$$\forall x \in H \quad \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|.$$

Вспомогательное $\|A\| = \inf \{c \geq 0 \mid \forall x \in H \quad \|Ax\| \leq c \|x\|\}$.

Примечание 1) $0x = 0 \quad \forall x \in H$ 2) $Ix = x$

Вспомогательное $\|0\| = 0, \quad \|I\| = 1.$

Определение Обратный оператор

Означеніе A л.о. в H , если $\text{Ker } A = \{x \in H \mid Ax = 0\}$

Вспомогательное $\text{Ker } A$ - инвариант в H

Образ оператора $\text{Ran } A = \{y \in H \mid \exists x \in H, Ax = y\}$

Вспомогательное $\text{Ran } A$ - инвариант

Операции с операторами.

$$1) (A + B)x = Ax + Bx$$

$$2) (\alpha A)x = \alpha Ax \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad x \in H$$

$$3) A, B - \text{операторы в } H \quad ABx = A(Bx).$$

Обернутый оператор

Определение A обратный, если для задан любого однозначное в-на.

$$\text{Обернутый оператор } A^{-1}(Ax) = x \Leftrightarrow A^{-1}A = I = AA^{-1}$$

Теорема $\dim H < \infty$. A обратный $\Leftrightarrow \text{Ker } A = 0 \Leftrightarrow \text{Ran } A = H$.

Доказание $\text{Ker } A = 0 \Leftrightarrow A: H \rightarrow H$ инъективно, т.д.то

$$x \neq y \Rightarrow Ax \neq Ay$$

$$x \neq y \Rightarrow x - y \neq 0 \Rightarrow A(x - y) \neq 0 \Rightarrow Ax \neq Ay$$
$$\overset{A^{-1}}{Ax - Ay}$$

Покажем, что $\text{Ran } A = H$. $(e_i)_{i=1}^n$ - о.н.б. тогда $(Ae_i)_{i=1}^n$ - линейно независимы,

$$\text{В-рше } \text{Ran } H = H \Rightarrow \text{Ker } A = 0.$$

Теорема A, B обратны, тогда $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

С сопряженный оператор A оператор в H . Сопряженный оператор A^*

вынакостяе условием $\forall x, y \in H \quad (Ax, y) = (x, A^*y)$.

A^* - линейное отображение.

$$(x, A^*(\alpha y + \beta z)) = (Ax, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha}(Ax, y) + \bar{\beta}(Ax, z) =$$
$$= (x, \alpha A^*y) + (x, \beta A^*z) \Rightarrow A^*(\alpha y + \beta z) = \alpha A^*y + \beta A^*z$$

Вместе с:

$$(AB)^* = B^*A^*, \quad (A(Bx), y) = (Bx, A^*y) = (x, B^*A^*y)$$
$$(x, (AB)^*y)$$

$$(A^*)^* = A \quad (\text{в-рше})$$

$$(A+B)^* = A^* + B^* \quad (\text{в-рше})$$

$$(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^* \quad (\text{в-рше})$$

$$0^* = 0, \quad I^* = I \quad (Ix, y) = (x, y) = (x, Iy)$$

$$\text{Если } \exists A^{-1} \Rightarrow (A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$$

$$A^{-1}A = I = I^* = (A^{-1}A)^* = A^*(A^{-1})^* \Rightarrow (A^{-1})^* = (A^*)^{-1}.$$

Теорема $\|A^*\| = \|A\|$.

Доказание

$$\text{Лемма } \text{если } \forall y \in H \quad |(x, y)| \leq C \|y\| \Rightarrow \|x\| \leq C.$$
$$\text{берем } y = x, \quad |(x, x)| \leq C \|x\| \Rightarrow \|x\| \leq C.$$
$$\overset{\|x\|^2}{\|x\|^2}$$

$$|(A^*x, y)| = |(x, Ay)| \leq \|x\| \|Ay\| \leq \|x\| \|A\| \|y\| \Rightarrow \|A^*x\| \leq \|A\| \|x\|$$
$$\Rightarrow \|A^*\| \leq \|A\|$$

$$\text{Если } A = (A^*)^* \Rightarrow \|A\| \leq \|A^*\|$$

Теорема A - л.о. в H , тогда $\text{Ran } A = (\text{Ker } A^*)^\perp \Leftrightarrow \text{Ker } A^* = (\text{Ran } A)^\perp$

Доказано. $y \in \text{Ran } A \quad x \in \text{Ker } A^* \quad , \quad y = Az$

$$\forall z \in H \quad (Az, x) = (z, A^*x) = 0 \Rightarrow A^*x = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Ker } A^*$$

Этот же вектор $z \in \text{Ran } A \perp x$

Матрица оператора

Имеем ортонормированный базис $(e_j)_{j=1}^n$, A -оператор

$$\forall x = \sum_{j=1}^n x_j e_j, \quad Ax = \sum_{j=1}^n x_j A e_j$$

$$A e_j = \sum_{k=1}^n (A e_j, e_k) e_k \quad a_{jk} = (A e_k, e_j)$$

$$[A] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad A e_j = \sum a_{kj} e_k$$

$$x = \sum_{j=1}^n x_j e_j, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$(Ax)_j = (Ax, e_j) = \left(\sum_k x_k A e_k, e_j \right) = \sum_k x_k (A e_k, e_j) = \sum_k a_{jk} x_k$$

где $(Ax)_j$ - сумма координат образов элементов j -го базиса матрицы A по координатам вектора

Выводим $A: H_1 \rightarrow H_2$, $(e_j)_{j=1}^n$ - о.н.б. в H_1 , $(f_k)_{k=1}^m$ - о.н.б. в H_2

$a_{jk} = (A e_k, f_j)$, матрица a_{jk} называется матрицей оператора

Операции над матрицами Θ , $a_{jk} = (A e_k, f_j) = 0 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

$$I \rightarrow a_{jk} = (I e_k, f_j) = \delta_{jk} \Rightarrow I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$1) A+B \rightarrow [A+B] = [A] + [B], \quad [A+B]_{jk} = a_{jk} + b_{jk} \quad (\text{чл. сумма})$$

$$2) \lambda A \rightarrow \lambda[A] \quad [\lambda A]_{jk} = \lambda a_{jk} \quad (\text{чл. умножение})$$

$$3) B: H_1 \rightarrow H_2, \quad A: H_2 \rightarrow H_3, \quad AB: H_1 \rightarrow H_3$$

$$[AB] = [A][B] \quad [AB]_{jk} = (AB e_k, f_j) = \left(A \sum_{l=1}^m b_{lk} e_l, f_j \right) = \sum_{l=1}^m b_{lk} (A e_l, f_j) = \sum_{l=1}^m b_{lk} a_{jl}$$

$$4) A^* \rightarrow [A^*]_{jk} = (A^* e_k, f_j) = (e_k, A f_j) = \overline{(A f_j, e_k)} = \overline{a_{kj}}$$

Можно увидеть, что A^* для $A: H_1 \rightarrow H_2$, $A^*: H_2 \rightarrow H_1$.

Замітка о.н.б. Нехай $(e_j)_{j=1}^n, (f_e)_{e=1}^n$ - це ортонормовані базиси $Ue_j \rightarrow f_j$, за лінійності можна продовжити до лінійного оператора в H .

$$[U] = \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & \dots & u_{nn} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow f_k = \begin{pmatrix} u_{1k} \\ \vdots \\ u_{nk} \end{pmatrix}, f_e = \begin{pmatrix} u_{1e} \\ \vdots \\ u_{ne} \end{pmatrix}$$

$$\forall k=1, \dots, n \quad \sum_j |u_{jk}|^2 = 1, \quad \sum_j u_{jk} \overline{u_{je}} = 0 \quad \overline{u_{je}} = (U^*)_{ej}$$

$$\sum_j u_{jk} (U^*)_{ej} \Rightarrow U^* U = U U^* = I.$$

Доведення U унітарне, якщо $U^* U = U U^* = I$, тобто $U^* = U^{-1}$.

A - матриця в (e_j) , A' - матриця в базисі (f_j)

$$a_{jk} = (A e_k, e_j), \quad A' = (A f_e, f_j) = (A U e_k, U e_j) = (U^* A U e_k, e_j)$$

$$\Rightarrow \text{матриця } A' = U^* A U = U^{-1} A U.$$

Якщо матриця U не унітарна, є лише одразу $A' = U^{-1} A U$ - подібність.

Спектр лінійного оператора та розкладання.

Визначення $\lambda \in \mathbb{C}$ - регулярна точка A , якщо $(A - \lambda I)$ оборотний

2) Спектр оператора - доповнення до n -ни регулярних точок, тобто $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda I \text{ не оборотний}\}$

$$A - \lambda I \text{ не оборотний} \Rightarrow \text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\} \Rightarrow$$

$$(A - \lambda I)x = 0 \text{ має ненульовий розв'язок}$$

$$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0 - \text{характеристичне рівняння}$$

$$\sigma(A) = \{ \text{корені характеристичного многочлена} \}$$

$$\text{Рівняння } (A - \lambda I)x = 0 \text{ має ненульовий розв'язок} \Leftrightarrow$$

$$(A - \lambda I)x = 0 \Leftrightarrow Ax - \lambda x = 0 \Leftrightarrow Ax = \lambda x \Rightarrow$$

$$\text{Якщо } \lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \exists x \neq 0, Ax = \lambda x$$

Визначення Власний вектор оператора A з власним значенням

$$\lambda \in \mathbb{C} - \text{вектор } x \in H, \text{ для якого } Ax = \lambda x.$$

$$\lambda \notin \sigma(A) \Rightarrow \exists (A - \lambda I)^{-1} = R_\lambda(A) - \text{резольвента } A \text{ в точці } \lambda$$

$$\frac{1}{A - \lambda} \cdot \frac{1}{A - \lambda_1} - \frac{1}{A - \lambda_2} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{(A - \lambda_1)(A - \lambda_2)}$$

Теорема (Томенский, Гильберта) $\lambda_1, \lambda_2 \notin \sigma(A) \Rightarrow R_{\lambda_1}(A) - R_{\lambda_2}(A) = (\lambda_1 - \lambda_2) R_{\lambda_1} R_{\lambda_2}$

Доказательство $(A - \lambda_2 I) - (A - \lambda_1 I) = (\lambda_1 - \lambda_2) I$ домножим на $R_{\lambda_1}(A)$ справа на $R_{\lambda_2}(A)$

$$(A - \lambda_1 I)^{-1} (A - \lambda_2 I) (A - \lambda_1 I)^{-1} - (A - \lambda_1 I)^{-1} (A - \lambda_2 I) (A - \lambda_2 I)^{-1} = (\lambda_1 - \lambda_2) R_{\lambda_1}(A) R_{\lambda_2}(A)$$

Заключение $R_{\lambda_1}(A) R_{\lambda_2}(A) = R_{\lambda_2}(A) R_{\lambda_1}(A)$

Лемма о сходимости $R_{\lambda}(A)$ нелинейна

Теорема $\lambda \notin \sigma(A)$ тогда $\exists$ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_{\lambda+h}(A) - R_{\lambda}(A)}{h}$

Справедливо $\frac{1}{h} (R_{\lambda+h}(A) - R_{\lambda}(A)) = \frac{1}{h} R_{\lambda+h}(A) R_{\lambda}(A) \rightarrow (R_{\lambda}(A))^2$

Слэд оператора. A - л.о. $[A]$ - таблица матрицы

Означения Слэд матрицы A - сумма её диагональных элементов

$$\text{Tr}(A) = \sum_{j=1}^n a_{jj} \quad \text{для матрицы оператора}$$

$$\text{Tr}(A) = \sum_{j=1}^n (A e_j, e_j)$$

Теорема Если A, B - квадратные матрицы порядка n ,

тогда $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

$$[AB]_{jj} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{kj}$$

$$[BA]_{jj} = \sum_{k=1}^n b_{jk} a_{kj}$$

$$\sum_{j=1}^n [AB]_{jj} = \sum_{j,k=1}^n a_{jk} b_{kj}$$

$$\sum_{j=1}^n [BA]_{jj} = \sum_{j,k=1}^n b_{jk} a_{kj}$$

Заключение $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(BCA) = \text{Tr}(CAB) \neq \text{Tr}(BAC)$

Если A та A' унитарно эквивалентны, $A' = U^* A U$, U - унитарна

Теорема $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A') = \text{Tr}(U^* A U) = \text{Tr}(U U^* A) = \text{Tr}(A)$

Слэд - инвариантом оператора и не зависит от базиса.

Пространство линейных операторов $B(H)$ - пространство всех линейных операторов в H .

Операции: 1) $A+B$, 2) λA , 3) $\|A\|$, 4) AB , 5) A^*

$B(H)$ - C^* -алгебра.

для $H = \mathbb{C}^n$ в $B(H)$ можно ввести естественный скалярный продукт

$$(A, B)_{HS} = \text{Tr}(B^* A). \quad \text{Если } A \rightarrow (a_{jk})_{j,k=1}^n, B \rightarrow (b_{jk})_{j,k=1}^n$$

Справедливо определение: $(A, B) = \sum_{j,k} a_{jk} \bar{b}_{jk}$

$$\|A\|_{HS}^2 = (A, A)_{HS} = \text{Tr}(A^* A) = \sum_{j,k=1}^n |a_{jk}|^2$$

Твердження $\|A\| \leq \|A\|_{H_1}$. (Виває через нерівність Шварца)

Оператори в прямій сумі просторів

$$H = H_1 \oplus H_2 \quad \forall x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in H_1, x_2 \in H_2, (x_1, x_2) = 0$$

$$A \in B(H) \quad A|_{H_1}: H_1 \rightarrow H_1 \oplus H_2$$

$$A \in B(H_1), B \in B(H_2)$$

Означення $A \oplus B: H_1 \oplus H_2 \rightarrow H_1 \oplus H_2, \quad \forall x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in H_1, x_2 \in H_2$

$$(A \oplus B)x = Ax_1 + Bx_2 \in H_1 \oplus H_2 - \text{прямі сума } A \text{ та } B$$

Лема Пірса $H = H_1 \oplus H_2, \quad A \in B(H) \quad I = P_{H_1} + P_{H_2}$

$$A|_{H_1}: H_1 \rightarrow H_1 \oplus H_2$$

$$A|_{H_1} = P_{H_1} A|_{H_1} + P_{H_2} A|_{H_1}$$

$$A|_{H_2} = \underbrace{P_{H_1} A|_{H_2}}_{A_{12}} + \underbrace{P_{H_2} A|_{H_2}}_{A_{22}}$$

Тоді оператор A можна подати у вигляді

блокової матриці
$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} H_1 \\ H_2 \end{matrix}$$

$$A_{11}: H_1 \rightarrow H_1, \quad A_{12}: H_2 \rightarrow H_1, \quad A_{21}: H_1 \rightarrow H_2, \quad A_{22}: H_2 \rightarrow H_2.$$

якщо вздемо о.н.б. $e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{n+m}$
о.н.б. H_1 о.н.б. H_2

$$A = \begin{pmatrix} \begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Оператори в тензорному добутку просторів

H_1, H_2 - скінченновимірні простори

$$H_1 \otimes H_2 = \text{л.о.} \left\{ \sum_{j=1}^m c_j x_j \otimes y_j \mid c_j \in \mathbb{C}, x_j \in H_1, y_j \in H_2, m=1,2,\dots \right\}$$

$$\text{скалярний добуток} \quad (x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2)_{H_1 \otimes H_2} = (x_1, x_2)_{H_1} \cdot (y_1, y_2)_{H_2}$$

якщо $A \in B(H_1), B \in B(H_2)$

$$A \otimes B \in B(H_1 \otimes H_2) \quad (A \otimes B)(x \otimes y) = (Ax) \otimes (By)$$

$$H_1: (e_j)_{j=1}^n, \quad H_2: (f_i)_{i=1}^m, \quad e_j \otimes f_i$$

$$e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, \dots, e_1 \otimes f_m, e_2 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2, \dots, e_2 \otimes f_m, \dots, e_n \otimes f_1, \dots, e_n \otimes f_m$$

матрица $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$
 $A \otimes B =$
 матрица
 размером $m \times n$

$$\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

$(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n) \quad (\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n) \quad \dots \quad (\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n)$

Самосопряжённый оператор. H , $A \in B(H)$ самосопряжённый,
 т.е. $A = A^*$.

Теорема $\forall A \in B(H)$ с.с.о. $\operatorname{Re}(A), \operatorname{Im}(A) \in B(H)$

$$A = \operatorname{Re}(A) + i \operatorname{Im}(A).$$

$$\operatorname{Re}(A) = \frac{A + A^*}{2}, \quad \operatorname{Im}(A) = \frac{A - A^*}{2i}.$$

Полуположительные операторы, называемые γ оператором

$$A \in B(H), \text{ таковы что } b_A(x, y) = (Ax, y), \quad x, y \in H.$$

$$\text{Вспомогательные свойства: } \begin{cases} b_A(\alpha x + \beta y, z) = \alpha b_A(x, z) + \beta b_A(y, z) \\ b_A(x, \alpha y + \beta z) = \alpha b_A(x, y) + \beta b_A(x, z) \end{cases}$$

Квадратичная форма, порождённая A $b_A[x] := b_A(x, x) = (Ax, x)$.

Теорема (неотрицательность тождества)

$$b_A(x, x) = \frac{1}{4} (b_A[x+y] - b_A[x-y] + i b_A[x+iy] - i b_A[x-iy])$$

Теорема $A = A^* \Leftrightarrow b_A(x, y) = \overline{b_A(y, x)} \Leftrightarrow b_A[x] \in \mathbb{R}, \quad x, y \in H.$

Доказательство $b_A(x, y) = (Ax, y) = (x, A^*y) = \overline{(A^*y, x)} = \overline{b_{A^*}(y, x)}$

Вспомогательное также $b_A(x, y) = b_B(y, x), \quad x, y \in H \Rightarrow A = B.$

$$b_A(x, y) = b_A[x+y] - b_A[x-y] + i b_A[x+iy] - i b_A[x-iy]$$

$$b_A(y, x) = b_A[y+x] - b_A[y-x] - i b_A[y+ix] + i b_A[y-ix]$$

$$b_A[y+x] = b_A[y+x, y+x] = b_A(x+y, x+y)$$

$$b_A[y-x] = b_A[-(x-y), -(x-y)] = b_A(x-y, x-y)$$

$$b_A[y+ix] = b_A(i(x-iy), i(x-iy)) = b_A(x-iy, x-iy)$$

$$b_A[y-ix] = b_A(x+iy, x+iy)$$

Вспомогательное 1) $\forall A \in B(H) \quad A^*A$ - с.с.о., 2) $A^*A = 0 \Rightarrow A = 0$

3) A, B - с.с.о., $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha A + \beta B$ - с.с.о.

4) $A = A^*, \exists A^{-1} \Rightarrow (A^{-1})^* = A^{-1}$

Матрица с.е.о. $A = A^*$ $a_{jk} = (Ae_j, e_k) = (e_k, Ae_j) = \overline{(Ae_j, e_k)} = \overline{a_{kj}}$, $(k, j) = 1, \dots, \dim H$.

Звернемо $A = A^* \Rightarrow a_{jj} \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, \dim H$.

Проектори $H \supset H_1$, $x \mapsto \text{пр}_{H_1} x \in H_1$, $x - \text{пр}_{H_1} x \perp H_1$

$$H = H_1 \oplus H_1^\perp, \quad x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in H_1, \quad x_2 \in H_1^\perp$$

$$\text{пр}_{H_1} x = x_1.$$

Визначення $\gamma \rightarrow \text{пр}_{H_1} x$ - лінійний оператор.

Властивості проєкторів P -проєктор на $H_1 \subset H$

$$Px = \text{пр}_{H_1} x.$$

1) $P^2 = P$. Бачимо, якщо $x \in H_1$, то $\text{пр}_{H_1} x = x$.

2) $P^* = P$. $\forall x \in H$ $(Px, x) = (P(x_1 + x_2), x_1 + x_2) = (x_1, x_1 + x_2) = (x_1, x_1) \in \mathbb{R}$

3) $P \neq 0$, $P^* = P^2 = P \Rightarrow \|P\| = 1$ $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$

$$\forall x \in H \quad \|Px\|^2 = \|P(x_1 + x_2)\|^2 = \|x_1\|^2 \leq \|x\|^2 \Rightarrow \|P\| \leq 1$$

$$\forall x \in H_1 \quad \|Px\| = \|x\| \Rightarrow \|P\| = 1.$$

Теорема нехай $\underline{P = P^* = P^2}$, тоді P -проєктор на $\text{Рен } P$.

$$\forall x, y \in H \quad \text{розглянемо } (x - Px, Py) = (P(x - Px), Py) =$$

$$= (\underbrace{Px - P^2 x}_{=0}, Py) = 0 \Rightarrow \forall x \quad x - Px \text{ ортогональний до } \text{Рен } P$$

$$x = Px + (x - Px) \Rightarrow P\text{-проєктор на } \text{Рен } P. \quad \square$$

Властивості проєкторів

1) P -проєктор на $H_1 \subset H$, тоді $I - P$ -проєктор на $H_1^\perp$ (бачимо),

2) P_1, P_2 -проєктори, $P_1 + P_2$ -проєктор $\Leftrightarrow P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$.

$$P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$$

$$(P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + P_1 P_2 + P_2 P_1 + P_2^2 = P_1 + P_2 + P_1 P_2 + P_2 P_1$$

$$\text{нехай } P_1 + P_2 \text{ - проєктор} \Rightarrow P_1 P_2 + P_2 P_1 = 0 = P_1 P_2 = -P_2 P_1$$

Маємо

$$P_1 P_2 = P(P_2) = P(-P_2 P_1) = -(P_1 P_2) P_1 = P_2 P_1 P_1 = P_2 P_1 \Rightarrow P_1 P_2 = 0$$

$$(P_1 P_2)^* = 0^* = P_2^* P_1^* = P_2 P_1. \quad \square$$

Визначення Тревіріон, що у цьому випадку $P_1 + P_2$ -проєктор на $\text{Рен } P_1 \oplus \text{Рен } P_2$.

3) P_1, P_2 - проектор $\Leftrightarrow P_1 P_2 = P_2 P_1$.

$$P_1 P_2 = (P_1 P_2)^* = P_2^* P_1^* = P_2 P_1, \quad (P_1 P_2)^2 = P_1 P_2 P_1 P_2 = P_1 P_2$$

Вывод P_1, P_2 - проектор на $\text{Ran } P_1 \cap \text{Ran } P_2$.

Теорема P_1, P_2 - проекторы, $\|P_1 - P_2\| < 1 \Rightarrow \text{Ran } P_1 \sim \text{Ran } P_2$

О.т.с.д.е.н.н. $H_1 = \text{Ran } P_1$, $(e_j)_{j=1}^k$ - о.н.д. в H_1

Посмотрим, что $(P_2 e_j)_{j=1}^k$ линейно независимы

$$H_1 \ni x = \sum_{j=1}^k \alpha_j e_j \quad P_2 x = \sum_{j=1}^k \alpha_j P_2 e_j \text{ - линейно независимые } (P_2 e_j)_{j=1}^k$$

$$\text{Итак } \sum \alpha_j P_2 e_j = 0 \Rightarrow P_2 x = 0$$

Примем, что $x \neq 0$

$$\|(P_1 - P_2)x\| = \|P_1 x - P_2 x\| = \|x\|$$

$$\text{а.т.е. } \|(P_1 - P_2)x\| \leq \|P_1 - P_2\| \|x\| < \|x\| \Rightarrow \|x\| \leq \|x\| \Rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_j = 0, \quad j=1, \dots, k \Rightarrow (P_2 e_j)_{j=1}^k \subset \text{Ran } P_2 \text{ линейно независимы}$$

$$\dim \text{Ran } P_2 \geq k = \dim \text{Ran } P_1 \Rightarrow \dim P_1 = \dim P_2 \Rightarrow$$

Матрица проектора

P - проектор на H_k , $\underbrace{e_1, \dots, e_k}_{\text{базис в } H_k}$ $\underbrace{e_{k+1}, \dots, e_n}_{\text{базис в } H_k^\perp}$

$$P_{j\ell} = (P e_\ell, e_j) = \begin{cases} 1 & \ell \leq k, (e_\ell, e_j) = \delta_{\ell j} \\ 0 & \ell > k \end{cases} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Спектр проектора: 2 вида матриц: $\Rightarrow P e_j = e_j, j \leq k$

$$P e_j = 0, j > k$$

$$\Rightarrow \sigma(P) = \{0, 1\},$$

$$P = I \Rightarrow \sigma(P) = \{1\}$$

$$(P - I)^k, k=1, \dots, n-k$$

$$P = 0 \Rightarrow \sigma(P) = \{0\}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{pmatrix} \quad c = \cos \alpha, s = \sin \alpha, \quad \alpha \in (0, \pi/2)$$

$$(P_1 - P_2)^2 = s^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Спектральные теоремы для с.с.о

Теорема $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

$$Ax = \lambda x, \quad \|x\| = 1 \quad \lambda(x, x) = (Ax, x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda}(x, x) \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$$

Теорема $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \sigma(A), \quad Ax_1 = \lambda_1 x_1, Ax_2 = \lambda_2 x_2 \Rightarrow (x_1, x_2) = 0$

$$\lambda_1(x_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, x_2) = (Ax_1, x_2) = (x_1, Ax_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = \lambda_2(x_1, x_2), \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow (x_1, x_2) = 0$$

Інваріантні підпростори оператора

Означення $H_0 \subset H$ інваріантним відносно $A \in B(H)$,

1) якщо $\forall x \in H_0 \Rightarrow Ax \in H_0$

або 2) $\forall x \in H \quad A P x = P A P x \Leftrightarrow AP = P A P$

3) $H = H_0 \oplus H_0^\perp \quad A = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \begin{matrix} H_0 \\ H_0^\perp \end{matrix} \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} H_0 \rightarrow 0 \\ H_0^\perp \rightarrow H_0 \\ H_0 \rightarrow H_0^\perp \\ H_0^\perp \rightarrow H_0^\perp \end{matrix}$

Твердження $A = A^*$, H_0 є інваріантним підпростором $\Rightarrow H_0^\perp$ - інваріантним

1) $x \in H_0, y \in H_0^\perp \Rightarrow (Ax, y) = (x, Ay) \Rightarrow Ay \perp x \quad \forall x \in H_0 \quad \forall y \in H_0^\perp$

2) $AP = P A P, (AP)^* = (P A P)^* \Rightarrow P A = P A P$

$A(I-P) = (I-P)A(I-P) = A - AP - PA + PA P = A - PA = A - AP = A(I-P)$

3) $H_0 \text{ inv} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}, A^* = A \quad A^* = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}.$

Теорема (спектральна теорема для с.с.о. в термінах ортогональних операторів).

$A = A^* \in B(H), \dim H < \infty$, тоді $H = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} H_j, \quad I = \sum_{j \in \mathbb{N}} P_j$

$A = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j P_j.$

можливо вибрати базис

$P_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \boxed{0} & \\ 0 & & \boxed{0} \end{pmatrix}, P_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \boxed{1} & \\ 0 & & \boxed{0} \end{pmatrix}.$

$P_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \boxed{\lambda_2} & \\ 0 & & \lambda_r \end{pmatrix}$

Теорема (спектральна теорема для с.с.о. у формі власного базису)

$A = A^* \in B(H),$ тоді $\exists$ о.н.б.

Доведення. $\lambda_1 \in \sigma(A) \exists x: Ax = \lambda_1 x \quad H_{\lambda_1}$ - сукупість всіх

власних векторів з власним значенням $\lambda_1, \Rightarrow H_{\lambda_1}$ - інваріантний (фірмовий)

H_{λ_1} - інваріантний $\Rightarrow H_{\lambda_1}^\perp$ - інваріантний $A|_{H_{\lambda_1}^\perp}: H_{\lambda_1}^\perp \rightarrow H_{\lambda_1}^\perp$

Виберемо $\lambda_2 \in \sigma(A), H_{\lambda_2}$ - сукупість власних векторів A з вл. зн. λ_2

$H = H_{\lambda_1} \oplus H_{\lambda_2} \oplus (H_{\lambda_1} \oplus H_{\lambda_2})^\perp \quad A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$

$P_{H_{\lambda_i}} =$ оператор $H_{\lambda_i}, i=1, \dots, r \quad \sum_{\lambda \in \sigma(A)} P_{\lambda} = I \quad A = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda P_{\lambda} \quad \square$

Функция в-д с.с.о.

Оператор $A \in B(H)$ $A, A^2, \dots, A^n, \dots$, $\forall p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$

$$p(A) = a_n A^n + \dots + a_1 A + a_0 I$$

Для с.с.о. A : $\exists$ о.н.б. $(e_j)_{j=1}^\infty$, $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Вывод
$$p(A) = \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Означенные функции $F: \sigma(A) \rightarrow \mathbb{C}$, тогда:

$$F(A) = \begin{pmatrix} F(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & F(\lambda_n) \end{pmatrix} \text{ возмущающие операторы и в-д операторов } A$$

Замечание $F, G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $F(\lambda_j) = G(\lambda_j)$, $\lambda_j \in \sigma(A)$
 $\Rightarrow F(A) = G(A)$

Коммутативный набор с.с.о.

Означенные $A, B \in B(H)$, A та B коммутируют, т.е. $AB = BA$.

Тогда, коммутирует $[A, B] = 0$, $[A, B] = AB - BA$.

Теорема. $A = A^* = \sum_{\lambda_j \in \sigma(A)} \lambda_j P_{\lambda_j}$, $B = B^*$ и $[A, B] = 0$, то $[P_{\lambda_j}, B] = 0$

Доказательство. $x \in H_{\lambda_j}$, рассмотрим Bx - собственный вектор

$$\text{с тем же } \lambda_j. \quad A(Bx) = ABx = BAx = \lambda_j(Bx)$$

$$\Rightarrow B \text{ переводит } H_{\lambda_j} \rightarrow H_{\lambda_j}, \Rightarrow BP = PBP, x \in$$

$$P B (I - P) = 0 \quad x \in H_{\lambda_j}, y \in H_{\lambda_j}^\perp$$

$$(P B x, y) = (B x, P(I - P)y) = 0$$

$$B = \begin{pmatrix} P_{\lambda_1} & \dots & P_{\lambda_n} \\ & \ddots & \\ P_{\lambda_n} & \dots & P_{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 I & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n I \end{pmatrix} \quad AB = BA \Rightarrow B = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_n \end{pmatrix}$$

Нехай $B = B^* \Rightarrow B_j = B_j^*, j=1, \dots, n$.

$$P_{\lambda_j} = \sum_{\substack{\lambda_j, \mu_k \\ \mu_k \in \sigma(B_j)}} P_{\lambda_j, \mu_k}, \quad B_j = \sum \mu_k P_{\lambda_j, \mu_k}$$

$$\sum P_j = I \Rightarrow \sum_{\substack{\lambda_j \in \sigma(A) \\ \mu_k \in \sigma(B)}} P_{\lambda_j, \mu_k} = I$$

$$A = \sum_{\substack{\lambda_j \in \sigma(A) \\ \mu_k \in \sigma(B)}} \lambda_j P_{\lambda_j, \mu_k}, \quad B = \sum \mu_k P_{\lambda_j, \mu_k}$$

$$F(A, B) = \sum_{\lambda_j, \mu_k \in \sigma(A, B)} F(\lambda_j, \mu_k) P_{\lambda_j, \mu_k}$$

Сумісний спектр комутативної пари с.с.о. - $\{(\lambda, \mu) | \lambda \in \sigma(A), \mu \in \sigma(B), P_{\lambda, \mu} \neq 0\}$

Теорема Для комутативної пари с.с.о. $\exists$ орт.б. базис

середства з сумісних власних векторів.

Сумісний власний вектор $\sqrt{\lambda, \mu}$ сумісних власних значень (λ, μ) : $x \in H$: $Ax = \lambda x, Bx = \mu x$.

Зачепок $A_1, \dots, A_m$ - комутативний набір с.с.о., тоді

1) сумісний власний вектор з сумісними в.н.з. $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$

$$x: A_j x = \lambda_j x, j=1, \dots, m$$

2) в H $\exists$ ортонормований базис, який складається з сумісних власних векторів.

Нормальні оператори A - нормальний, якщо $AA^* = A^*A$

$$\text{Випадок } A \text{ нормальний, } A = \operatorname{Re} A + i \operatorname{Im} A, \Leftrightarrow [\operatorname{Re} A, \operatorname{Im} A] = 0.$$

Спектральна теорема A нормальний $\Leftrightarrow$

$$I = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} P_{\lambda}, \quad A = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda P_{\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad \lambda = \operatorname{Re} \lambda + i \operatorname{Im} \lambda.$$

S - часткова ізометрія, якщо $\exists H_0 \subset H$, що $\|Sx\| = \begin{cases} \|x\|, & x \in H_0 \\ 0, & x \in H_0^\perp \end{cases}$

H_0 - початковий простір, $\operatorname{Ran} S = H_1$ - кінцевий простір

$A \geq 0$, якщо $\forall x \in H \quad (Ax, x) \geq 0$

$$\text{Випадок } A \geq 0 \Rightarrow \sigma(A) \subset [0, \infty)$$

Положитивний розклад оператора

$\forall A \in B(H) \exists$! ч.і. S , тоді $|A| \geq 0$, що $\operatorname{Ker} |A| = \operatorname{Ker} S$,

$$i \quad A = S |A|. \quad \text{При цьому } |A| = \sqrt{A^* A}.$$