Національна академія наук України
Інститут математики

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ЛАГОДЗІНСЬКИЙ Олександр Євгенійович

УДК 532.585

Асимптотична нелінійна теорія усталених резонансних коливань рідини в контейнері квадратного перерізу

113 Прикладна математика
11 Математика та статистика

Дисертація
на здобуття ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

О. Є. Лагодзінський

Науковий керівник
доктор фіз.-мат. наук, академік
НАН України
ТИМОХА Олександр Миколайович

Київ — 2026

ABSTRACT

Lagodzinskyi O.Ye. Asymptotic nonlinear theory of steady-state resonant liquid sloshing in a square-based container. — Manuscript.

The dissertation is submitted for the degree of Doctor of Philosophy in Applied Mathematics (113). — Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2026.

The dissertation is devoted to the development of methods of nonlinear analytical mechanics and asymptotic methods for analyzing steady-state resonant wave motions of liquid in a container of square cross-section, which oscillates according to a prescribed law, periodically in space, with small amplitude.

The work develops the nonlinear multimodal approach to problems of liquid dynamics in moving containers, an approach that was initiated at various times in the works of M. Moiseev and G. Narimanov, V. Stolbetsov, J. Miles, J. Ockendon, O. Faltinsen, I. Lukovsky, O. Limarchenko, Yu. Kononov, O. Timokha, T. Ikeda, O. Konstantinov, I. Raynovskyy, and others. The multimodal approach makes it possible to reduce the free-surface boundary-value problem to a system of ordinary differential equations with respect to generalized hydrodynamic coordinates, which describe the perturbations of the natural modes of liquid oscillation. By applying various types of asymptotic schemes, these modal systems are reduced to finite dimension, which opens up the possibility of constructing analytical asymptotic periodic solutions, classifying them, analytically investigating their stability, identifying bifurcation transitions between them, as well as studying chaotic dynamics. The subject of the scientific research of the dissertation is related to the topics of fundamental scientific research of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine.

The dissertation consists of an introduction, four chapters, conclusions, a list of references comprising 188 entries, as well as an appendix. The total volume of the dissertation is 150 pages. The work contains 18 figures. The conclusion regarding the relevance of this line of research is confirmed by the results of the literature review, which shows that the classification of steady-

state waves in tanks of square cross-section under arbitrary perturbations is indeed a practically important problem, and has also remained an open theoretical problem for over 20 years.

The introduction substantiates the relevance of the topic, formulates the aim (construction of an asymptotic nonlinear theory for the classification of steady-state resonant wave motions of liquid in a container of square cross-section for arbitrary three-dimensional periodic perturbations of the container), the object, subject, and tasks of the research, the practical significance, and the scientific novelty, which, in particular, consists in the fact that (i) for a container of square cross-section, an asymptotic nonlinear third-order modal system of the Narimanov–Moiseev type is investigated for the first time in the case of arbitrary three-dimensional perturbations, (ii) analytical asymptotic periodic solutions of the modal system describing steady-state resonant waves are constructed for the first time, and their stability is investigated, (iii) a secular system of nonlinear algebraic equations (the necessary condition for the existence of periodic solutions) is derived and investigated, (iv) for the first time, for tanks of square cross-section, it is proved that arbitrary three-dimensional resonant perturbations can, in an asymptotic sense, be reduced to elliptic orbital translational horizontal motions of the tank, (v) for the first time, all possible types of steady-state resonant waves are classified, and the corresponding amplitude-frequency curves and their bifurcations under changes in the character of the tank perturbation are constructed. The introduction also provides information about the scientific publications and the approbation of the dissertation's results.

The first chapter gives a detailed review of the literature on the topic of the dissertation, describes the solved and open problems, and formulates the main task of the dissertation: the classification (determination of all possible stable and unstable) steady-state resonant waves in a tank of square cross-section for arbitrary small-amplitude periodic motions of the tank.

Chapter 2 of this dissertation presents the formulation of the original free-boundary boundary-value problem, and, within the framework of implementing the modal approach, derives an asymptotic modal system of

the Narimanov–Moiseev type, which is the basis for further research.

Chapter 3 constructs a general analytical theory of steady-state resonant waves for arbitrary periodic motions of the tank. Analytical asymptotic periodic solutions of the Narimanov–Moiseev type system are derived, which describe steady-state resonant wave regimes, as well as the condition for the existence of such a solution (the secular system), which relates the dominant amplitudes of the resonant wave and the dimensionless perturbation frequency. It is proved that (i) the stability of the asymptotic solutions is uniquely determined by the first approximation, (ii) for an arbitrary resonant perturbation of the tank there exists an equivalent one in the form of an orbital translational elliptic horizontal motion (with the same frequency), which leads, up to terms of the highest order, to analogous steady-state resonant waves, (iii) there exist only four types of steady-state waves: standing, almost standing, swirling, and chaotic (none of the preceding wave types being unstable). Clear criteria for the realization of one of these steady-state resonant waves are given (the classification). An alternative form of the secular system is derived, which relates the amplitudes and phase shifts, as well as the input parameters of the elliptic perturbation: the major axis, the ratio of the minor and major axes $-1 \leq \delta_1 \leq 1$ (a negative sign corresponds to a clockwise perturbation trajectory, a positive one – counterclockwise), and the angle γ between the principal axis and Ox. An efficient numerical method for solving the alternative secular system is developed. It is shown that this numerical method makes it possible to find all admissible solutions, including those that define smooth branches as well as local loop structures that may arise as a result of the nonlinear interaction of modes.

Chapter 4 demonstrates the amplitude-frequency characteristics of all possible steady-state waves, stable and unstable, for arbitrary orbital horizontal elliptic perturbations of the container. The chapter determines the ranges of existence of the steady-state resonant waves defined in Chapter 3. As a result of the numerical investigation of the amplitude-frequency curves, it is established that: (i) the steady-state wave regimes can indeed be classified as standing, almost standing, swirling, and chaotic, with all of them

existing for certain input parameters; (ii) the existence and stability of these regimes are determined by the parameters $-1 \leq \delta_1 \leq 1$ (the axis ratio of the perturbation ellipse, taking into account the direction of the orbit), γ (the inclination of the major axis of the ellipse to the Ox axis), the damping coefficient ξ, and the dimensionless frequency σ/σ_1; (iii) multistability (the existence of several stable steady-state solutions) and chaos (the absence of any stable solutions) are typical phenomena for practically all input parameters except the circular orbit, where chaotic waves are not predicted.

The last chapter of the dissertation presents the conclusions.

Keywords: free surface, waves, hydrodynamics, dynamic system, approximate solutions, numerical methods, asymptotic methods, liquid-body interaction.

АНОТАЦІЯ

Лагодзінський О.Є. Асимптотична нелінійна теорія усталених резонансних коливань рідини в контейнері квадратного перерізу. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертацію подано на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 — Прикладна математика. — Інститут математики НАН України, Київ, 2026.

Дисертаційна робота присвячена розвитку методів нелінійної аналітичної механіки та асимптотичних методів для аналізу усталених резонансних хвильових рухів рідини в контейнері квадратного перерізу, який коливається за заданим законом періодично в просторі із малою амплітудою. Робота розвиває нелінійний мультимодальний підхід до задач динаміки рідини в рухомих контейнерах, підхід, що було започатковано у різні часи в роботах М. Моісєєва та Г. Наріманова, В. Столбецова, Дж. Майлза, Дж. Окендона, О. Фалтінсена, І.Луковського, О. Лимарченко, Ю. Кононова, О. Тимохи, Т. Ікеди, О. Константінова, І. Райновського та інших. Мультимодальний підхід дозволяє звести крайову задачу з вільною поверхнею до системи звичайних диференціальних рівнянь відносно узагальнених гідродинамічних координат, які описують збурення власних форм коливання рідини. Застосовуючи різного типу асимптотичні схеми, ці модальні системи редукуються до скінченної розмірності, що відкриває можливість побудови аналітичних асимптотичних періодичних розв'язків, їх класифікації, аналітичного дослідження їх стійкості, виявлення біфуркаційних переходів між ними, а також вивчення хаотичної динаміки. Тематика наукових досліджень дисертаційної роботи пов'язана з тематикою фундаментальних наукових досліджень Інституту математики НАН України.

Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел із 188 найменувань, а також додатку. Загальний обсяг дисертації становить 150 сторінок. Робота містить 18 рисунків. Висновок про актуальність даного напряму досліджень підтверджується результатами огляду літератури, де показано, що класифікація устале-

них хвиль в баках квадратного перерізу за умови довільних збурень є дійсно практично важливою задачею, а також залишалася відкритою теоретичною проблемою понад 20 років.

У вступі аргументується актуальність теми, формулюється мета (побудова асимптотичної нелінійної теорії для класифікації усталених резонансних хвильових рухів рідини в контейнері квадратного перерізу для довільних тривимірних періодичних збурень контейнера), об'єкт, предмет та завдання досліджень, практичне значення, наукова новизна, яка, зокрема, полягає у тому, що (i) для контейнера квадратного перерізу вперше досліджено асимптотичну нелінійну модальну систему третього порядку типу Наріманова–Моісеєва у випадку довільних тривимірних збурень, (ii) вперше побудовано аналітичні асимптотичні періодичні розв'язки модальної системи, що описують усталені резонансні хвилі, досліджена їх стійкість, (iii) виведено та досліджено секулярну систему нелінійних алгебраїчних рівнянь (необхідну умову існування періодичних розв'язків), (iv) вперше для баків квадратного перерізу доведено, що довільні тривимірні резонансні збурення можна в асимптотичному сенсі звести до еліптичних орбітальних поступальних горизонтальних рухів баку, (v) вперше прокласифіковано всі можливі типи усталених резонансних хвиль, побудовано відповідні амплітудно-частотні криві та їх біфуркації зі зміною характеру збурення баку. Також у вступі наведена інформація про наукові публікації та апробацію результатів дисертаційної роботи.

У першому розділі дається детальний огляд літератури за темою дисертаційної роботи, описуються розв'язані та відкриті проблеми, а також формулюється основна задача дисертаційної роботи: класифікація (визначення всіх можливих стійких та нестійких) усталених резонансних хвиль в базі квадратного перерізу для довільних малоамплітудних періодичних рухів баку.

Розділ 2 цієї дисертаційної роботи наводить постановку вихідної крайової задачі із вільною межею, а в рамках реалізації модального підходу виводиться асимптотична модальна система типу Наріманова-Моісєєва,

яка є базовою для подальших досліджень.

Розділ 3 будує загальну аналітичну теорію усталених резонансних хвиль для довільних періодичних рухів баку. Виведено аналітичні асимптотичні періодичні розв'язки системи типу Наріманова-Моісєєва, які описують усталені резонансні хвильові режими, а також умову існування такого розв'язку (секулярну систему), яка пов'язує домінантні амплітуди резонансної хвилі, безрозмірну частоту збурення. Доведено, що (i) стійкість асимптотичних розв'язків однозначно визначається першим наближенням, (ii) для довільного резонансного збурення баку існує еквівалентне у формі орбітального поступального еліптичного горизонтального (із тією ж самою частотою) руху, яке приводить з точністю до членів найвищого порядку до аналогічних усталених резонансних хвиль, (iii) існує лише чотири типи усталених хвиль: стоячі, майже стоячі, кругові та хаотичні (жодний із попередніх типів хвиль нестійкий). Дано чіткі критерії реалізації однієї з цих усталених резонансних хвиль (класифікація). Виведена альтернативна форма секулярної системи, яка зв'язує амплітуди та зсуви фаз, а також вхідні параметри еліптичного збурення: найбільша вісь, відношення меншої та більшої осей $-1 \leq \delta_1 \leq 1$ (від'ємний знак відповідає траєкторії збурення за годинниковою стрілкою, додатній – проти), а також кутом γ між основною віссю та Ox. Розроблено ефективний чисельний метод розв'язування альтернативної секулярної системи. Показано, що цей чисельний метод дозволяє знаходити всі допустимі розв'язки, включаючи такі, які задають гладкі гілки, так і локальні петльові структури, які можуть виникати внаслідок нелінійної взаємодії мод.

Розділ 4 демонструє амплітудно-частотні характеристики всіх можливих усталених хвиль, стійких та нестійких, для довільних орбітальних горизонтальних еліптичних збурень контейнера. Розділ визначає діапазони існування визначених в розділі 3 усталених резонансних хвиль. В результаті чисельних досліджень амплітудно-частотних кривих встановлено, що: (i) усталені хвильові режими дійсно можуть бути класифіковані як стоячі, майже стоячі, кругові та хаотичні, причому всі з них існують

для певних вхідних параметрів; (ii) існування та стійкість цих режимів визначається параметрами $-1 \leq \delta_1 \leq 1$ (відношення осей еліпса збурення із урахуванням напряму орбіти), γ (нахилом головної осі еліпсу до осі Ox), коефіцієнтом демпфування ξ та безрозмірною частотою σ/σ_1; (iii) мультистійкість (існування декількох стійких усталених розв'язків) та хаос (відсутність будь-яких стійких розв'язків) є типовим явищем для практично усіх вхідних параметрів окрім кругової орбіти, коли хаотичні хвилі не прогнозуються.

Останній розділ дисертаційної роботи наводить висновки.

Ключові слова: вільна поверхня, хвилі, гідродинаміка, динамічна система, наближені розв'язки, числові методи, асимптотичні методи, взаємодія рідини з тілом.

Список публікацій здобувача за темою дисертації

Наукові праці, в яких опубліковано наукові результати дисертації:

1. Faltinsen O. M., Lagodzinskyi O. E., Timokha A. N. Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square-base basin. Part 5. Three-dimensional non-parametric tank forcing. *Journal of Fluid Mechanics* **894** (2020), A10, https://doi.org/10.1017/jfm.2020.253, (Scopus/WoS – Q1)

2. Lagodzinskyi O. E., Timokha A. N. Counter- and co-directed swirling-type waves due to orbital excitations of a square-base tank. *Доповіді Національної академії наук України*, № 6 (2021), 45–51, https://doi.org/10.15407/dopovidi2021.06.045, (фахове видання, категорія Б).

3. Timokha O. M., Lagodzinskyi O. E. Steady-state sloshing in an orbitally forced square-base tank. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics*, № 1 (2019), 210–213, https://doi.org/10.17721/1812-5409.2019/1.49, (фахове видання – А, індексується Scopus)

4. Lagodzinskyi, O., Timokha, A. Swirling-Type Sloshing in Square Base Tank Due to Orbital Excitations. In: Timokha, A. (eds) Analytical and Approximate Methods for Complex Dynamical Systems. *Understanding Complex Systems*, (2025), Springer Cham, ISSN 1860-0832, https://doi.org/10.1007/978-3-031-77378-5_1, (Scopus – Q4)

5. Lahodzinskyi O. Resonant three-dimensional steady-state resonant sloshing in square-base tank for arbitrary periodic nonparametric forcing. *International Conference of Young Mathematicians*, June 3–5, 2021, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine (online), Kyiv, Ukraine, https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2021/Abstracts_2021.pdf.

6. Lahodzinskyi O., Timokha A. N. Resonant three-dimensional steady-state oscillations of a liquid in a container with a square-cross section under arbitrary periodic nonparametric disturbances. *VI International Scientific Conference "MODERN PROBLEMS OF MECHANICS"*, August 30–31, 2021, Kyiv, Ukraine, https://lcwf.univ.kiev.ua/wp-content/uploads/2021/08/PROGRAM_MPM_2021_UKR.pdf.

7. Лагодзінський О. Є. Резонансні тривимірні усталені коливання рідини в контейнері квадратного перерізу. *Міжнародна наукова конференція "СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МЕХАНІКИ ТА МАТЕМАТИКИ – 2023"*, 23–25 травня 2023 р., Львів, Україна, https://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_06.pdf.

8. Лагодзінський О. Є. Деякі характеристики резонансних тривимірних усталених коливань рідини в контейнері квадратного перерізу. *VII International Scientific Conference "MODERN PROBLEMS OF MECHANICS"*, 28–29 August 2021, Kyiv, Ukraine, https://lcwf.univ.kiev.ua/wp-content/uploads/2023/08/ABSTRACTS_MPM_2023_UKR.pdf.

9. Lahodzinskyi O. Swirling-type sloshing in square base tank due to orbital excitations. *Workshop "Complex Dynamical Systems – 2023"*, October 2–4, 2023, Kyiv, Ukraine, https://events.imath.kiev.ua/event/1451/.

Зміст

ВСТУП **13**

Розділ 1

Огляд літератури за темою дисертаційного дослідження **20**

1.1. Аналітичні підходи до задачі про коливання рідини в резервуарах . . . 23

1.2. Лінійні модальні методи . . . 24

1.3. Класичні не модальні нелінійні теорії коливання рідини . . 27

1.4. Нелінійні модальні теорії . . . 30

1.5. Нелінійний мультимодальний метод для двовимірних хлюпань в прямокутному контейнері . . . 33

1.6. Нелінійний мультимодальний метод для тривимірних баків квадратного перерізу . . . 36

1.7. Яку відкриту проблему розв'язує дана дисертаційна робота 39

Розділ 2

Диференціальна, варіаційна та модальна постановки задачі **41**

2.1. Крайова задача з вільною поверхнею . . . 43

2.2. Варіаційне формулювання Люка-Бейтмена . . . 46

2.3. Нелінійні модальні рівняння Майлза-Луковського . . . 48

2.4. Модальні системи для посудини квадратного перерізу . . . 55

2.5. Висновки до розділу . . . 67

Розділ 3

Усталені резонансні хвилі та їх класифікація: аналітичні асимптотичні розв'язки та їх стійкість **70**

3.1. Асимптотичні аналітичні періодичні розв'язки системи (2.60)–(2.62) та їх стійкість . . . 71

3.2. Класифікація зовнішніх збурень: еквівалентні орбітальні рухи бака в рамках асимптотичної теорії Наріманова-Моісєєва 76
3.3. Амплітудно-фазова форма секулярних рівнянь та методи їх розв'язування 80
3.4. Класифікація типів усталених хвиль 85
3.5. Висновки до розділу 89

Розділ 4

Амплітудно-частотні характеристики резонансних усталених хвиль **91**

4.1. Кругові орбітальні збурення бака 93
4.2. Еліптичні орбіти збурення канонічного типу 97
4.3. Еліптичні орбіти із віссю уздовж діагоналі 103
4.4. Еліптичні орбіти руху бака під кутом до стінок (косий тип еліптичного збурення) 110
4.5. Висновки до розділу 123

ВИСНОВКИ **126**

Додаток А: Список публікацій та апробація результатів **148**

ВСТУП

Актуальність теми. Задача про коливання рідини в резервуарах (хлюпання) належить до класичних задач гідромеханіки, аналітичної механіки та прикладної математики. Вона має важливе теоретичне та прикладне значення [1] і пов'язується із широким колом актуальних важливих інженерних застосувань, зокрема в транспортних, морських, аерокосмічних та технологічних, зокрема вирощування протеїну. Особливий теоретичний та практичний інтерес становлять резонансні хвилі, які виникають за періодичних збурень контейнера із частотою, найближчою до першої власної частоти коливання рідини, бо саме такі збурення приводять до максимальних гідродинамічних навантажень на стінки бака, що суттєво впливає на динаміку та стійкість сумісних рухів системи бак-рідина.

Традиційним інженерним підходом до дослідження резонансних хлюпань є застосування різноманітних чисельних методів розв'язування відповідних початково-крайових задач із вільною поверхнею (див., досить детальний огляд таких методів в [2]). Модифікації таких методів останніх трьох десятиріч показали свою високу ефективність, особливо при моделюванні перехідних хвиль. Вони були навіть спроможні описати розрив суцільності вільної поверхні. В той же час, з теоретичною та практичною точок зору прямі чисельні методи дотепер залишаються малоефективними для класифікації (знаходження усіх можливих та дослідження стійкості) усталених резонансних хвильових режимів. Такі режими реалізуються на довгому проміжку часу та з математичної точки зору, як правило, пов'язуються із періодичними розв'язками вихідної початково-крайової задачі. З експериментів та теоретичних досліджень [1] відомо, що задача має неоднозначний періодичний розв'язок, тобто має місце феномен мультистійкості (існування різних стійких усталених хвиль за тих самих вхідних даних). Виявити всі можливі стійкі періодичні хвилі шляхом розв'язання серії складних початково-крайових задач із віль-

ною межею здається наразі нереальною задачею. Крім того, для задач хлюпання типовим є існування хаотичних хвиль [1, 3, 4]. При чисельному моделюванні, виходячи з початково-крайової задачі, важко відрізнити чисельну нестійкість алгоритму та реальний хаос. Мультистійкість та існування хаосу є двома основними факторами, чому для задач про усталене резонансне хлюпання рідини особливого значення набувають аналітичні методи та підходи, огляд яких можна знайти в книгах [1, 5].

Одним із найефективніших аналітичних підходів до задачі класифікації усталених резонансних хвиль є асимптотичний мультимодальний метод, який був започаткований в 50–х роках минулого сторіччя в роботах М. Моісєєва та Г. Наріманова та надалі розвинутий В. Столбецовим, Дж. Майлсом, Дж. Окендоном, О. Фалтінсеном, І. Луковським, О. Лимарченко, Ю. Кононовим, О. Тимохою, Т. Ікеда, О. Константіновим, І. Райновським та іншими. Мультимодальний метод дозволяє звести вихідну крайову задачу з вільною поверхнею до системи звичайних диференціальних рівнянь відносно узагальнених гідродинамічних координат, які описують збурення власних форм коливання рідини. Застосовуючи різного типу асимптотичні спрощення, такі системи часто редукуються до скінченної розмірності, що відкриває можливість побудови аналітичних асимптотичних періодичних розв'язків, їх класифікації, аналітичного дослідження їх стійкості, виявлення біфуркаційних переходів між ними, а також вивчення хаотичної динаміки.

Контейнери квадратного (чи майже квадратного) перерізу є типовими для різноманітних танкерів. Така геометрія є практично та теоретично важливою й цікавою з математичної точки зору через наявність двох перпендикулярних власних форм коливання із рівною власною частотою, що, як і у випадку контейнера кругового перерізу, невідворотно приводить до суттєво тривимірних хвиль [1, глава 9] за умови збурення першої власної частоти коливання рідини. Ключовою теоретичною роботою, з якої почалося систематичне дослідження усталених періодичних резонансних хвиль в такому контейнері, є стаття [6]. В цій статті виведено першу в літературі нелінійну модальну систе-

му типу Наріманова-Моісєєва, ефективність якої продемонстровано для аналізу резонансних усталених хлюпань для поздовжніх та діагональних зворотно-поступальних гармонічних резонансних збурень контейнера. Результати було валідовано порівнянням із експериментальними даними, у тому числі для достатньо великих амплітуд збурення, відхилень перерізу від квадратного [7–9], було показано необхідність враховувати ненульове (але мале) в'язке демпфування в гідродинамічній системі [10, 11].

У той же час всі попередні дослідження резонансних усталених хвиль було проведено виключно для зворотно-поступальних збурень контейнера. Що відбуватиметься в баці, які типи хвиль реалізуються, є стійкими, і чи є діапазон хаотичних хвиль, за умови довільних тривимірних періодичних рухів контейнера із частотою, близькою до першої власної залишалося відкритою проблемою. Цю відкриту проблему було розв'язано у даній дисертаційній роботі.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Ця дисертація виконана у Відділі математичних проблем механіки та теорії керування Інституту математики Національної академії наук України в рамках дослідницьких проектів «Розробка та дослідження математичних моделей складних об'єктів механіки та систем керування» (2021-2025, номер державної реєстрації 0121U100317), «Складні динамічні системи в науках: теорія, математичне моделювання, чисельні методи та впровадження в передові технології» (Національний фонд досліджень України, 2020-2024, номер державної реєстрації 0120U104004), «Математичне моделювання складних динамічних систем та процесів, актуальних для державної безпеки» (2024-2025, номер державної реєстрації 0123U100853). Дослідження відповідають пріоритетним напрямкам фундаментальних досліджень, встановленим Національною академією наук України в галузі прикладної математики.

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є побудова асимптотичної нелінійної теорії для класифікації усталених резонансних хвильових рухів рідини в контейнері квадратного перерізу за

наявності малого в'язкого демпфування та для довільних тривимірних періодичних збурень контейнера, частота яких є близькою до найнижчої власної частоти хлюпання рідини.

Для досягнення поставленої мети необхідно було розв'язати такі основні задачі:

- сформулювати вихідну крайову задачу з вільною поверхнею для руху рідини в контейнері квадратного перерізу в диференціальній, варіаційній та модальній постановках, а також здійснити її редукцію до модальної системи типу Наріманова–Моїсеєва, яка забезпечує аналітичні дослідження резонансних хвильових режимів за довільних періодичних рухів контейнера;

- побудувати аналітичні асимптотичні періодичні розв'язки побудованої модальної системи, що відповідають усталеним резонансним хвилям, та дослідити їхню стійкість;

- проаналізувати необхідну умову існування періодичних розв'язків (секулярну систему нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно амплітуд і фазових зсувів), побудувати ефективні алгоритми розв'язування секулярної системи, дослідити її аналітичні й чисельно-аналітичні властивості;

- узагальнити результати І. Райновського та О. Тимохи, отримані для випадку баку кругового перерізу, довівши, що довільні резонансні збурення баку можна в асимптотичному сенсі звести до еліптичних поступальних горизонтальних;

- базуючись на структурі асимптотичного розв'язку виділити типи усталених резонансних хвиль;

- проаналізувати поведінку амплітудно-частотних кривих зі зміною характеру збурення баку, біфуркації цих кривих, а також типи усталених хвиль, які відповідають кожній точці на цих кривих.

Об'єкт дослідження — нелінійна крайова задача з вільною поверхнею про резонансні хвилі у баці квадратного перерізу, її варіаційна та

модальна постановки.

Предмет дослідження — усталені хвильові режими, що описуються періодичними розв'язками, амплітуди, фазові зсуви, стійкість та біфуркації періодичних розв'язків.

Методи дослідження. У роботі використано варіаційні методи аналітичної механіки, рівняння Ейлера–Лагранжа другого роду, модальний метод, асимптотичні методи нелінійної механіки, метод багатьох масштабів часу, лінійний метод Ляпунова, а також чисельно-аналітичні методи дослідження секулярних систем нелінійних алгебраїчних рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі одержано такі нові наукові результати:

- для контейнера квадратного перерізу досліджено асимптотичну нелінійну модальну систему третього порядку типу Наріманова–Моїсеєва, яка забезпечує аналітичне дослідження резонансних усталених хвиль для довільних тривимірних збурень;

- вперше побудовано аналітичні асимптотичні періодичні розв'язки модальної системи, що відповідають усталеним резонансним хвилям для довільного тривимірного збурення, досліджена їх стійкість;

- задачу визначення усталених режимів зведено до секулярної системи нелінійних алгебраїчних рівнянь (необхідної умови існування періодичних розв'язків) відносно амплітуд A, B та фазових зсувів ψ, φ; побудовано ефективні алгоритми її розв'язування, досліджено її аналітичні й чисельно-аналітичні властивості;

- вперше для баків квадратного перерізу доведено, що довільні тривимірні резонансні збурення можна в асимптотичному сенсі звести до еліптичних поступальних горизонтальних рухів баку;

- базуючись на структурі асимптотичного розв'язку прокласифіковано всі можливі типи усталених резонансних хвиль, побудовано відповідні амплітудно-частотні криві, біфуркації зі зміною характеру збурення баку.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають передусім теоретичний характер і можуть бути використані для подальшого розвитку модальних та асимптотичних методів у задачах гідромеханіки обмежених об'ємів рідини. Вони також можуть бути застосовані для аналізу динаміки рідини в інженерних системах, де істотними є резонансні режими коливань, їхня стійкість, фазові характеристики та вплив демпфування. Отримані результати можуть бути корисними при інтерпретації експериментальних даних та в подальших теоретичних дослідженнях задач про хлюпання рідини у резервуарах складної геометрії.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, що становлять основний зміст дисертації та виносяться на захист, одержано автором особисто. У роботах, виконаних у співавторстві, автору належить проведення аналітичних і чисельно-аналітичних досліджень та інтерпретація одержаних результатів.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на науковому семінарі відділу математичних проблем механіки та теорії керування (м. Київ, 2020–2026 рр.) Інституту математики НАН України, а також на міжнародних наукових конференціях:

- International Conference of Young Mathematicians (2021);
- VI International Scientific Conference "Modern Problems of Mechanics" (2021);
- Workshop "Complex Dynamical Systems – 2023" (2023);
- Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми механіки та математики – 2023", 23–25 травня 2023 р., м. Львів, Україна;
- VII International Scientific Conference "Modern Problems of Mechanics";
- XX Міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука, 17–20 листопада 2025 р.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у дев'яти наукових працях за темою дослідження. Це включає три статті, з яких дві індексуються Scopus (одна Q1), а одна у фаховому журналі категорії Б. Ще одна робота – глава у колективній монографії, що індексується Scopus (Q4). Ще чотири наукові праці – матеріали міжнародних конференцій.

Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел із 188 найменувань. Робота містить 18 рисунків. Загальний обсяг дисертації становить 150 сторінок.

Розділ 1

Огляд літератури за темою дисертаційного дослідження

В даній дисертаційній роботі розглядається практично важлива гібридна механічна система, що складається з абсолютно твердого контейнеру, який може рухатися із шістьма ступенями вільності (тут за визначеним періодичним законом у часі) та рідини з вільною поверхнею у цьому баці. Коливання рідини (хлюпання) в контейнері описуються еволюційною крайовою задачею з вільною (наперед невизначеною) межею. Ці коливання породжують гідродинамічні навантаження на бак, що, у свою чергу, впливають на рух абсолютно жорсткого тіла (контейнера).

Найбільш практично розповсюдженим підходом для аналізу хлюпання рідини в баці та впливу на рух всієї гібридної системи є суто обчислювальний. Він зводиться до застосування різноманітних чисельних методів розв'язування відповідної початково-крайової задачі з вільною межею, яка описує коливання рідини. З математичної точки зору за такого підходу розв'язується відповідна задача Коші, коли задаються початкове положення вільної межі та початковий розподіл швидкостей на поверхні чи всередині рідини. З механічної точки зору відповідний чисельний розв'язок описує перехідні хвилі на поверхні рідини.

В той же час, практично важливими, аби бути в центрі уваги, є усталені хвилі, особливо резонансні, які реалізуються за умови періодичних збурень контейнера із частотами, близькими до власних коливань рідини. З математичної точки зору усталеним хвилям відповідають високоамплітудні періодичні розв'язки вихідної нелінійної задачі, коли амплітуда поверхневих хвиль є значно більшою, ніж амплітуда збурення. З механічної точки зору, усталені періодичні хвилі реалізуються після закінчення перехідних процесів, які описуються початково-крайовою задачею. Суто чисельні підходи для визначення усталених хвиль через

розв'язання серії задач Коші із різними початковими сценаріями (початковими умовами) виявилися неефективними. Одна з причин полягає в тому, що задача про усталені резонансні хвилі може не мати єдиного стійкого розв'язку. Експериментальні дослідження показують, що задача про періодичні розв'язки (усталені хвилі) характеризується мультистійкістю (існує декілька стійких усталених хвиль за тих самих вхідних параметрів, появу яких пов'язують із різними початковими умовами). Крім того, виникають хаотичні хвилі у вузьких діапазонах частот збурення.

Це означає, що для опису всіх можливих усталених хвиль, як стійких так і не стійких із використанням традиційних чисельних методів (розв'язання початкової задачі Коші), необхідно перебрати нескінченну кількість початкових сценаріїв. І для кожного такого сценарію (початкової умови) необхідно провести нетривіальні та тривалі обчислення (симуляції) до тих пір, поки не зникнуть перехідні хвилі та хвиля стане періодичною (усталеною). Окрім цього виникають проблеми з чисельним дослідженням стійкості періодичних хвиль: по-перше, описана чисельна процедура із перебором всіх початкових сценаріїв може віднайти лише стійку усталену хвилю; по-друге, якщо така чисельна процедура не приводить до періодичного розв'язку, не можна однозначно зробити висновок, що не існує стійких усталених розв'язків, бо іноді важко відрізнити фізичну (реальну) та чисельну нестійкість, яка пов'язується із недосконалістю алгоритмів.

Підсумовуючи сказане, робимо висновок, що задача про класифікацію (опис всіх можливих усталених резонансних хвиль та дослідження їх стійкості) потребує спеціальних аналітичних підходів, які не зводяться до перебору початкових сценаріїв та аналізу перехідних хвиль. Таким можливим аналітичним підходом є так званий модальний метод, який зводить вихідну еволюційну крайову задачу із вільною поверхнею до редукованої математичної моделі у вигляді системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь відносно узагальнених гідродинамічних координат системи (аналогу рівнянь типу Ейлера-Лагранжа з аналітичної механіки). Важливо, що нелінійні модальні системи можна спростити

до такого вигляду, що стає можливим здійснювати їх аналітичні дослідження, у тому числі будувати аналітично їх періодичні розв'язки та застосовувати добре розвинуту теорію стійкості періодичних розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь.

Основні інструменти нелінійного модального підходу, які використовуються в даній дисертаційній роботі є варіаційний метод, що базується на функціоналі дії Бейтмена-Люка. Завдяки цьому вдається вивести загальну модальну систему типу Майлза-Луковського, що є аналогом рівнянь типу Ейлера-Лагранжа. Далі до такої системи застосовуються асимптотичні підходи, що дозволяють отримати спеціальну наближену форму модальних нелінійних рівнянь у вигляді Наріманова-Моісєєва. До наближеної асимптотичної модальної системи Наріманова-Моісєєва можуть додаватися дисипативні члени, які відповідають за декременти затухання власних форм коливань рідини.

Асимптотична модальна система типу Наріманова-Моісєєва для контейнера прямокутного (в аналізі квадратного) контейнера була отримана науковим керівником дисертанта ще у 2003 році [6]. Але використання цієї системи для аналізу усталених резонансних хвиль було обмежено випадками горизонтальних поступальних резонансних рухів контейнера, коли відносно просто можна було побудувати асимптотичні аналітичні розв'язки. Науковим керівником із співавторами для такого типу поступальних збурень розглядалися випадки вторинних резонансів [12], відхилень перерізу баку від квадратної форми [9], а також вплив малого демпфування і напрямку поступальних резонансних збурень [11].

В дисертаційній роботі буде показано як узагальнити відповідні аналітичні підходи на довільні тривимірні резонансні збурення контейнера [13]. В загальному випадку вперше побудовано періодичні розв'язки для різних типів тривимірного руху бака, проаналізовано стійкість кожного окремо взятого типу руху рідини. Дано завершену класифікацію всіх типів хвиль для усіх типів тривимірних резонансних рухів контейнера в рамках асимптотики Наріманова-Моісєєва.

1.1. Аналітичні підходи до задачі про коливання рідини в резервуарах

В рамках основних постулатів та методів аналітичної механіки та математичного моделювання задачу про рух рідини в баці можна розглядати як механічну систему із нескінченною кількістю ступенів вільності. Ці незалежні ступені вільності асоціюються зі збуреннями власних форм коливання рідини. Означення власних форм коливання рідини було математично сформульовано Михайлом Остроградським [14] ще на початку XIX століття. Робота Остроградського була подана до Паризької Академії Наук у 1826 та, згодом, узагальнена Пуассоном для інших типів баків (історія проблеми описана в [15]).

М. Остроградський розглядав вертикальний бак кругового перерізу та побудував аналітичні розв'язки задачі у термінах того, що пізніше буде названо функціями Бесселя. На початку 60-х років XX століття була створена [16] загальна абстрактна математична теорія власних коливань рідини в контейнерах. Ця теорія пов'язується із розв'язками спеціального типу спектральних крайових задач із параметром на частині границі. Цей спектральний параметр визначає власні частоти коливань, а власні функції задачі – власні форми коливання рідини. З гідродинамічної точки зору такі власні форми та частоти визначають стоячі хвилі на поверхні нерухомого бака.

Застосування анонсованого вище модального методу необхідно передбачає введення гідродинамічних узагальнених координат, які відповідають за збурення власних форм коливання рідини. Метод дозволяє аналітично вивести (модальну) систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь відносно узагальнених координат. Система, як було вже сказано, є аналогом рівнянь Ейлера-Лагранжа для даного типу механічних систем. Процедура виведення, як правило, передбачає використання методів аналітичної механіки, зокрема, варіаційних формулювань типу Гамільтона-Остроградського. Після того, як така система звичайних диференціальних рівнянь виведена, її можна безпосередньо застосовувати для прямих розрахунків нелінійних поверхневих хвиль, відповід-

них сил та моментів (перша задача механіки). Така модальна система також дозволяє моделювати сумісні рухи тіло-рідина, із застосуванням аналітично зв'язаних модальних рівнянь та рівнянь руху носія (баку) [1, 5, 17, 18].

Модальні системи за визначенням є нескінченновимірними, бо гідродинамічна система налічує нескінченну кількість власних форм коливання рідини. Це є малоприйнятним для аналітичних досліджень. Бажано її спростити. Для цього використовуються асимптотичні методи, які приводять до відносно простих та часто-густо скінченновимірних систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь.

Так склалося, що на сьогодні спрощені асимптотичні нелінійні модальні системи є практично єдиним ефективним інструментом для вивчення резонансних усталених хлюпань рідини, дослідження їх стійкості, внутрішніх резонансів, хаосу та інших динамічних характеристик хлюпання рідини. Особливу увагу при цьому дослідники приділяють системам типу Наріманова-Моісєєва.

1.2. Лінійні модальні методи

Перші дослідження, які присвячені модальному методу в лінійній постановці виникли у науковій літературі вже у 50-60-х роках минулого століття. В ті часи перед вченими вперше постала проблема щодо недостатньої кількості накопичених знань та методів щодо коливання рідини у літальних апаратах, космічних кораблях та морських контейнерах. Основна увага, звісно, була зосереджена на аерокосмічній тематиці. Систематизовані перші досягнення у напрямку розвитку модальних методів можна знайти в роботах [17, 19–24] (USA) та [16, 25–33] (СРСР). На той період дослідники були сфокусовані на теоретичному аналізі лінійних (малих) коливань рідини та експериментальному вивченню нелінійних (резонансних) феноменів. Основні експериментальні результати американських вчених представлені у звіті НАСА [19]. Щодо експериментів науковців Радянського Союзу можемо сказати те, що вони проводились у Москві, Києві [5, 27], Дніпрі [34] та Томську [35, 36], але на жаль, у

своїй більшості, їхній хід та результати лишилися не опублікованими.

Власне те, що зараз має назву лінійний модальний метод, вперше було запропоновано та розвинуто у 50-х роках минулого сторіччя. Серед перших визначних робіт слід відмітити [16, 28, 37–40]. Пізніше результати тих років були детально описані, систематизовані та узагальнені в главі 5 книги [1]. При застосуванні модального методу до лінійної задачі хлюпання, ми отримуємо нескінченну множину незв'язаних лінійних осциляторів (звичайних диференціальних рівнянь), яких називають лінійною модальною системою. Кожне рівняння описує збурення відповідної власної форми коливання рідини. В правій частині цих лінійних рівнянь з'являються шість функцій – узагальнених координат (ступенів вільності) твердого тіла. Невідомі (у лівій частині) гідродинамічні узагальнені координати формально відповідають за відхилення вільної границі.

Метод вимагає знати власні форми коливання рідини, $\varphi_n(x, y, z)$, власні частоти, σ_n, а також лінійні потенціали Стокса-Жуковського,

$$\mathbf{\Omega}_0(x, y, z) = (\Omega_{01}(x, y, z), \Omega_{02}(x, y, z), \Omega_{03}(x, y, z)).$$

Якщо об'єднати разом лінійну модальну систему та динамічні рівняння твердого контейнера, використовуючи лінеаризовані формули Луковського, які виражають гідродинамічні сили та моменти у термінах гідродинамічних узагальнених координат, можна побудувати рівняння сумісних рухів механічної системи типу "тіло-рідина". Такі рівняння були та й досі залишаються основним апаратом для моделювання прикладних корабельних та аерокосмічних задач.

У лінійній модальній системі та формулах Луковського гідродинамічні коефіцієнти є інтегралами від $\mathbf{\Omega}_0$, φ_n та їхніх просторових частинних похідних. Звідси випливає, що, отримавши якимось чином $\mathbf{\Omega}_0$ та φ_n через аналітичні та/або чисельні методи розв'язування відповідних спектральних та крайових задач, можна миттєво отримати систему лінійних звичайних диференціальних (модальних) рівнянь, яка безумовно має аналітичний розв'язок (навіть для перехідних рухів рідини у вигляді згортки). Такі розв'язки (усталені та перехідні) приведено в главі 5 книги [1] та роботах [41–44].

Якщо мати три скалярні потенціали Стокса-Жуковського, Ω_{0i}, $i = 1, 2, 3$, то можна вивести неоднорідні компоненти, що пов'язано із трьома кутовими ступенями вільності твердого баку. Ці потенціали є розв'язками крайових задач Неймана в гідростатичній області рідини Q_0, які вперше були виведені Миколою Жуковським (1885) [45], коли він досліджував просторовий рух твердого тіла із порожнинами, повністю заповненими ідеальною нестисливою рідиною. Точні аналітичні вирази для Ω_{0i} є доволі нечастими випадками (див., глави 4 та 5 в [1]).

Власні форми коливання рідини $\varphi_n(x, y, z)$ є власними функціями спектральної крайової задачі в області Q_0, де спектральний параметр κ_n з'являється у граничній умові на гідростатичній вільній поверхні Σ_0, а власні частоти визначаються за формулою

$$\sigma_n = \sqrt{\kappa_n g},$$

де g – прискорення гравітації Землі. При тому сліди власних форм $\varphi_n|_{\Sigma_0}$ визначають геометрію стоячих (власних) хвиль. Як вже було зазначено, вони були вперше описані Михайлом Остроградським для вертикального кругового баку.

Точна математична теорія спектральних задач про власні коливання рідини (яка виступила логічним продовженням робіт попередників) була побудована в 60-х роках минулого сторіччя (див. Главу VI в книзі [16] та [46, 47]). Одним із основних результатів цієї загальної математичної теорії є те, що в ній доведено, що (i) спектр задачі складається виключно із додатних власних значень, κ_n, із єдиною граничною точкою на нескінченності (в порівнянні із зовнішньою задачею хвиль на поверхні океану, де спектр є неперервним) та (ii) $\varphi_n|_{\Sigma_0}$ являють собою, разом із ненульовою сталою, ортогональний базис в $L_2(\Sigma_0)$.

Вищенаведене твердження (i) допомагає зрозуміти чому рівняння Кордевега-де-Вріза і Буссінеска (нескінченний об'єм рідини) та модальні системи (рідина в посудині) випливають із одної й тої самої крайової задачі із вільною поверхнею, але мають різну математичну природу. А твердження (ii) зробило можливим введення гідродинамічних узагальнених координат, розклавши шуканий розв'язок для вільної поверхні за

повним набором ортогональних функцій φ_n.

Продовжуючи дослідження задачі коливання рідини в баках в 60-70х роках, спочатку С. Крейн [48, 49] (також див. [50, 51]) спромігся узагальнити класичні результати на випадок в'язкої нестисливої рідини, а Копачевський, в свою чергу, врахував поверхневий натяг (частина II у книзі [52] та [48, 53]). Також слід відмітити цікаву задачу про власні коливання рідини у пружних резервуарах, різні аспекти якої досліджено в [25, 28, 29, 33, 54–56].

В 70-80-х роках минулого сторіччя, основні наукові результати теорії коливань рідини у рухомих баках були пов'язані з побудовою аналітичних наближених розв'язків задачі про власні коливання рідини та визначенням лінійного потенціалу Стокса-Жуковського. У зв'язку з необхідністю виконання умови збереження маси, розв'язки [40, 57], як загальний тренд тих років, використовували метод Трефтца. Із зростанням можливостей високопродуктивних обчислень у 90-х роках минулого століття знаходження φ_n та $\mathbf{\Omega}_0$ стало набагато простішим. Винятковими випадками, можливо, є негладкі баки, що містять перегородки, сітки тощо, що веде до сингулярної поведінки розв'язків $\bigtriangledown\varphi_n$ [41, 58–62].

1.3. Класичні не модальні нелінійні теорії коливання рідини

1.3.1. Аналітичні підходи. Теоретичні дослідження нелінійних коливань рідини в рухомих баках розпочалися ще у 50-х роках XX століття такими науковцями, як Пенні та Прайс [63], Моісєєв [64], Наріманов [65] та Перко [66, 67].

Застосувавши теорію асимптотичних збурень, яка йде від Пенні та Прайс [63], Моісєєв [64] побудував асимптотичний усталений (періодичний) розв'язок задачі про нелінійні коливання рідини в абсолютно жорсткому баку, що виконує горизонтальні і/або кутові низькоамплітудні гармонічні рухи з частотою σ, що є близькою до найнижчої власної частоти коливання рідини σ_1. Моісєєвим було розглянуто відносно загальний

випадок скінченної (немалої) глибини рідини в контейнері, заповненим ідеальною нестисливою рідиною з безвихоровими рухами та було доведено, що якщо безрозмірна амплітуда коливання посудини має порядок $\epsilon \ll 1$, то перша власна форма коливань рідини необхідно має амплітуду порядку $O(\epsilon^{1/3})$. Необхідною умовою для побудови такого розв'язку є асимптотика (Моісєєва)

$$\frac{|\sigma^2 - \sigma_1^2|}{\sigma_1^2} = O(\epsilon^{2/3}),$$

яка математизує факт резонансу в системі, $\sigma \to \sigma_1$. Також слід відмітити, що теорія Моісєєва неявно припускає, що немає так званого внутрішнього резонансу [1, 68–71] в цій гідродинамічній системі.

Загальну асимптотичну схему Моісєєва важко застосувати для практично важливих задач, особливо для баків складної геометрії. Тому увага приділялася відносно простим випадкам, як правило, двовимірним. Асимптотичний розв'язок типу Моісєєва було в явному вигляді аналітично побудовано для двовимірного прямокутного баку в [72, 73]. Інші типи посудин було розглянуто в [17, 74–76], щоправда, в обмеженому вигляді, коли фокус був на конкретних типах резонансних хвиль, без класифікації всіх можливих. Пов'язується це із тим, що отримання асимптотичного розв'язку Моісєєва в аналітичному вигляді вимагає доволі об'ємні викладки, що пов'язано із необхідністю розв'язувати аналітично послідовність відносно складних крайових задач, заданих в незбуреній області рідині.

У 80-х роках, Джон Майлз ввів та проаналізував майже періодичні коливань рідини, тим самим узагальнив результати Моісєєва [77, 78] та вивів так звані рівняння Майлза. Дані рівняння зв'язують повільні варіації домінантних амплітуд майже усталеної хвилі. В роботах Майлза було розглянуто горизонтальні гармонічні збурення вертикального кругового циліндричного баку, ним застосовувалася асимптотика Моісєєва для σ та σ_1 та процедура розділення швидкого і повільного часів [79–81]. Згодом, рівняння Майлза були отримані для випадку вертикального прямокутного баку.

У прикладній математиці з тематики дослідження майже періодичних резонансних коливань рідини (і знаходження періодичних орбіт та класифікації хаосу) використання рівнянь Майлза можна назвати вже типовим підходом [77, 82, 83]. Також слід відмітити, що як горизонтальні, так і вертикальні (хвилі Фарадея) гармонічні збурення були досліджені із використанням підходу Майлза [78, 82, 84–91], хоч для вертикальних збурень контейнера (параметричних хвиль) асимптотика Моісєєва виявилася непридатною. Роботи [3, 4] дозволили вивчити системи бак-рідина з обмеженою за амплітудою силою, яка діє на бак.

1.3.2. Про чисельні методи. Методи Обчислювальної Гідродинаміки (CFD) коливання рідини стали масово розвиватися лише в 90-х роках. Піонерським був пакет FLOW-3D, який є відомим комерційним розв'язником рівняння Нав'є Стокса. Велика кількість прикладів застосування цього пакету наведено Ф. Солаас [92]. У 2000-х роках сформувалися дві майже незалежні один від одного напрямки досліджень нелінійних коливань рідини, які умовно можна розділити на суто чисельні та методи аналітичної механіки. Ознайомитися із результатами і здобутками чисельного моделювання можливо у огляді [2] (див. також [93–99]). Кращі з таких чисельних методів та алгоритмів розвиваються для моделі в'язкої нестисливої рідини. Вони ефективно описують коливання рідини для заданих початкових сценаріїв (розв'язують задачу Коші), здатні моделювати дефрагментацію вільної поверхні, перекидання хвилі, удари хвилі по стінкам та перевертання (flip-through). Деякі з наведених феноменів неможливо точно описати в рамках гідродинамічних (математичних) моделей, які зазвичай застосовуються для аналітичних досліджень коливання рідини. Останні гідродинамічні моделі є слабко-нелінійними та припускають, як правило, те, що ми маємо справу з ідеальною нестисливою рідиною із потенційними течіями і гладкі вільні поверхні без розривів суцільності.

Слід відмітити, що в XX столітті подібне розмежування методів сталося в теорії морських хвиль, які сьогодні досліджуються, майже незалежно, через чисельні розв'язки відповідних крайових задач, або за

допомогою наближених аналітичних моделей типу Кортевега-де Вріза, Бусінеска та ін., які, самі по собі, є відносно простими диференціальними рівняннями у частинних похідних [100]. Причому останні наближені аналітичні моделі зазвичай застосовують для якісного аналізу та класифікації типів поверхневих хвиль, їхній стійкості, дослідження виникнення хаосу, залежності хвиль від початкових сценаріїв та вхідних параметрів, оскільки традиційні чисельні методи не є ефективним із практичної точки зору через складність та громіздкість обчислень. В той же час, наближені аналітичні моделі зазвичай не використовуються для розв'язування практичних інженерних задач із цих же міркувань, оскільки чисельні методи для цих випадків є більш досконалими в тому сенсі, що вони здатні описувати вищевказані специфічні локальні феномени.

1.4. Нелінійні модальні теорії

Застосувавши загальну теорію збурень, Наріманов [65] зміг вперше отримати слабко нелінійні модальні рівняння, які описують резонансні коливання рідини. Наріманов не знав результати теорії Моісєєва. Але Наріманов вивів асимптотичну залежність між гідродинамічними узагальненими координатами та гідродинамічними узагальненими швидкостями в тому ж сенсі та за таким самим асимптотичним порядком як вони випливають із періодичного розв'язку Моісєєва, побудованого без застосування модальних підходів.

Перші оригінальні модальні системи самого Наріманова [65] як і подальші в роботах [101–104], що було виведено за його методом, містили помилки, які згодом зміг виправити І.О. Луковський [5, 105–107].

Слід відмітити, що підхід Наріманова теж приводить до громіздких викладок, які мають властивість стрімко збільшуватися у обсягах при збільшенні кількості введених гідродинамічних узагальнених координат. З цієї причини, всі дотепер виведені нелінійні асимптотичні модальні системи Наріманова є малорозмірними. Кількість узагальнених координат превентивно обмежується перед початком аналітичних перетворень. Зазвичай існуючи модальні системи пов'язують від двох до п'яти (із не-

скінченної кількості) гідродинамічних узагальнених координат.

Модальні системи типу Наріманова було отримано різними авторами для різноманітних типів баків як за формою (кругових, прямокутних, конусоподібних та сферичних), так і для наявності внутрішніх структур, зокрема для вертикального кругового циліндричного баку із перегородкою у вигляді твердого кільця [5, 106–108]. На даний момент асимптотичний модальний метод Наріманова майже не використовується. Він поступився місцем варіаційним версіям модального методу [109–111], які у більшості випадків базуються на варіаційному принципі Бейтмена-Люка [1, 5, 79–81]. Головною перевагою варіаційного підходу Бейтмена-Люка є те, що він природним чином виводить динамічну та кінетичну частини модальних систем в термінах крайової задачі про коливання рідини [1, 5, 112–114].

Варіаційний модальний метод, який має у своїй основі принцип Бейтмена-Люка, було вперше представлено науковій спільноті у 1976 році Дж. Майлзом [115] та І.О. Луковським [106, 116]. Вони паралельно та незалежно один від одного вивели нелінійну модальну систему відносно узагальнених координат та узагальнених швидкостей для коливання рідини у вертикальному баку, що рухається за заданим коливним поступальним законом.

Пізніше І.О. Луковський отримав вже наразі "класичну" нелінійну модальну систему, що сьогодні широко відома як система Майлза-Луковського. Ця нескінченновимірна модальна система допускає довільні рухи баку [1, 117].

І.О. Луковським також запропоновано техніку неконформних відображень для баків із невертикальними стінками [105, 118–121] та аналітично виведено так звані формули Луковського для гідродинамічної сили та моменту [5, 106] (Глава 7 книги [1] дає альтернативний метод виводу цих формул), яка виражає ці сили і моменти в термінах узагальнених гідродинамічних координат. Також І.О. Луковський зміг узагальнити та довести відповідні теореми, які відображають варіаційний формалізм Бейтмена-Люка для сумісних рухів системи типу "твердий

бак-рідина" [106, 122].

Якщо підставити додатково асимптотичні співвідношення між гідродинамічними узагальненими координатами та гідродинамічними узагальненими швидкостями в модальну систему Майлза-Луковського, можна перевести цю систему до слабко нелінійної форми, яка отримала назву адаптивної нелінійної (асимптотичної) модальної системи [1, 5, 123–125].

Модальна система Майлза-Луковського та адаптивна нелінійна модальна система вимагають знати (a priori) власні форми коливання рідини, φ_n, та нелінійні потенціали Стокса-Жуковського, $\mathbf{\Omega}$. В явному аналітичному вигляді. Більш того, аналітичні власні форми повинні бути неперервно продовженими вище гідростатичної вільної поверхні Σ_0. Останнє не випливає із постановки задачі про власні коливання рідини. Це та інші обмеження нелінійних модальних методів детально описано в Главі 7 книги [1] та в роботах [118, 123, 125].

Л. Перко запропонував чисельний модальний метод, який він використав для моделювання короткотривалих перехідних хвильових процесів на поверхні рідини. Задля отримання такої моделі він подав потенціал швидкості у вигляді рядів Фур'є за власними формами коливання рідини [66, 67]. В подальшому метод Перко було модифіковано та застосовано Чахловим [126, 127] та О.С. Лимарченко з учнями [128–134]. Оскільки О.С. Лимарченко у своїх роботах застосовував здебільшого варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського та теорію збурень, він запропонував, фактично, слабко нелінійну варіаційну версію модального методу Перко. Як вже було сказано, метод Перко, взагалі кажучи, слабо придатний для аналітичних досліджень усталених резонансних хвиль, він найкраще обчислює перехідні хвилі на короткому проміжку часу. Оскільки метод Перко належить до прямих чисельних методів, який використовує в обчисленнях спрощені гідродинамічні (математичні асимптотичні) моделі модального типу, він не є ефективним для обчислень локальних гідродинамічних навантажень і опису вищезгаданих хвильових феноменів на вільній поверхні.

Куди практичнішими є методи аналізу, котрі базуються на нелінійних системах Майлза-Луковського [135, 136], чи слабко нелінійних системах [132, 137–143]. Однією із проблем, що виникають при розв'язуванні задачі методом Перко є те, що відповідні системи звичайних диференціальних рівнянь є жорсткими. Це означає те, що покрокові обчислення необхідно вимагають внесення штучного демпфування для зниження паразитних вищих гармонік [137, 138], які насправді не існують завдяки в'язкості рідини. Якщо не вносити в систему демпфування, то можна отримати чисельну нестійкість. В той же час метод Перко є доволі практичним для проведення обчислень для випадку посудин, обладнаних екранами-перегородками, оскільки тоді демпфування хлюпання рідини є досить природним чином досить високим [141–143].

1.5. Нелінійний мультимодальний метод для двовимірних хлюпань в прямокутному контейнері

В статті [117] було перевиведено систему Майлза-Луковського. Саме із цієї статті почалася серія публікацій відносно нелінійних модальних систем, яка в більшості своїй була присвячена прямокутним та круговим бакам, бо саме для них є точні аналітичні вирази для власних форм φ_n та потенціалів Стокса-Жуковського $\mathbf{\Omega_0}$, коли глибина рідини є скінченною величиною. Для опису усталених та перехідних резонансних хвиль було використано саме слабко нелінійні модальні системи різного типу.

Двовимірні нелінійні резонансні коливання рідини у гладкому прямокутному баку із скінченною глибиною рідини досліджувалися із використанням відмінних між собою нелінійних модальних систем в роботах [69, 117, 123, 144–148]. Відмітимо, що резонансні збурення, прикладені до баку, були порядку $O(\epsilon) \ll 1$ (тобто малим по відношенню до ширини баку L), а частота збурення σ була близькою до найнижчої власної частоти коливань рідини σ_1. Модальна система [117] базується на асимптотиці Наріманова-Моісєєва. Перехідні та усталені режими було описано для гармонічних збурень контейнера [117] та для баку, що пла-

ває на поверхні моря (танкерна задача) [18, 149–151]. Було показано, що усталені резонансні коливання рідини характеризуються м'якою нелінійністю для випадку співвідношення глибини до довжини $> 0.3368..$, та в цей же час жорсткою нелінійністю для $< 0.3368...$, так що теоретична безрозмірна критична глибина дорівнює $0.3368....$ Для такої глибини побудована в [117] модальна система незастосовна. Аналіз цієї нелінійної асимптотичної мультимодальної системи було детально розглянуто в роботах [123, 144, 145].

Відмітимо те, що нелінійна асимптотична модальна система типу Наріманова-Моісєєва [117] стає також неможливою із фізичної точки зору, коли ми збільшуємо амплітуди коливання, а також у випадку мілкої води. Основною причиною незастосовності цієї модальної системи є вторинний (внутрішній) резонанс в гідродинамічній системі. Це стосується як критичної і мілкої глибини, так і великої амплітуди збурення. Вторинний резонанс виникає тоді, коли $n\sigma \approx \sigma_n$ для деякого цілого n, в сенсі обраної асимптотичної шкали. Він призводить до збільшення амплітуди коливань вищих власних форм коливання рідини через нелінійний механізм перерозподілу енергії від основних (тут пов'язується із першою власною частотою σ_1) до вторинних (σ_n) збурених гідродинамічних узагальнених координат.

Аби мати змогу працювати із нелінійними вторинними резонансами для рідини із скінченною глибиною, необхідно використати так звані адаптивні нелінійні модальні системи [69, 145], що передбачають постулювання декількох домінантних (збурених вторинно) гідродинамічних узагальнених координат порядку $\sim O(\epsilon^{1/3})$. Для цих узагальнених гідродинамічних координат внесок домінантних вищих гармонік є теоретично передбачуваним коли $n\sigma \approx \sigma_n$. Припущення про еквівалентний домінантний внесок вищих форм, яке відоме з літератури як адаптивний мультимодальний підхід, було валідовано порівнянням з експериментальними даними в роботах [69, 70, 138]. Коли виникають вторинні резонанси в цій гідродинамічній системі, відповідні амплітудно-частотні криві для усталених хвиль характеризуються множинними пікам в зоні основного резо-

нансу. Про адаптивні модальні системи та їх структуру можна детально прочитати у Главі 8 книги [1], а також в недавніх лекціях О.М. Тимохи [152].

На основі адаптивної модальної системи Герман та Тимоха [145] показали, що критична глибина є функцією від амплітуди збурень (граничним випадком при $\epsilon \to 0$ є 0.3368...). Вони дали теоретичне пояснення експериментальному значенню для критичної глибини 0.28 в класичній експериментальній роботі [153]. Адаптивні модальні системи [146–148] застосовують асимптотичне впорядкування узагальнених гідродинамічних координат, яке базується на понятті вторинного резонансу.

Для випадку, коли необхідно вивести нелінійну модальну систему [70] для рідини із малою глибиною у прямокутному баку потрібно застосувати асимптотичне впорядкування четвертого порядку типу Бусінеска (що поєднує асимптотику Моісєєва та Кордевега-де-Вріза [73, 154, 155], де всі гідродинамічні узагальнені координати та безвимірна глибина рідини є однакового асимптотичного порядку $O(\epsilon^{1/4})$). Урізавши дану нескінченновимірну систему та включивши до системи члени, які описують лінійне демпфування (завдяки ламінарному в'язкому шару на змоченій поверхні баку, Глава 6 в книзі [1] та [156–160]), було отримано гарне співпадіння теоретичних результатів із експериментальними вимірами з робіт [70, 161, 162], як для усталених хвиль, так і для перехідного типів коливання рідини. Для прикладу, в експериментах Честера [70, 161, 162] теоретичні амплітудно-частотні криві усталених резонансних хвиль [70, 163] мали таку саму "пальцеподібну" форму із багатьма піками в зоні основного резонансу (коли $\sigma \approx \sigma_1$), як то було і в експериментах. Але, якщо збільшити амплітуду збурення і/або зменшити глибину рідини то, як результат, отримуємо фізично незастосовну нелінійну модальну систему для малих глибин [70] через розриви та перекидання хвиль і фрагментацію вільної поверхні, що дають надзвичайно великий вклад у демпфування. Із ретельною експериментальною класифікацією хлюпання для мілководдя (де було наведено чотири різні типи хвиль) в загальному та із акцентом на локальні поверхневі феномени можна ознайомитися

у Главі 8 книги [1]. Цікаво, що демпфування внаслідок вищезгаданих феноменів вільної поверхні є схожим до удару по стелі (кришки) баку, ефект якого було включено із використанням теорії Вагнера в нелінійні модальні системи [69, 117] в статті [164].

Слід відмітити, що демпфування через в'язкий турбулентний шар при перетіканні рідини через пористі екрани було враховано в нелінійних модальних системах [137, 141, 165, 166] (для випадку коливання рідини у прямокутному двовимірному баку із скінченною глибиною). У випадку, коли маємо менше відношення щільності екранів, $0 < S_n < 0.5$, та відносно малої сили коливань, застосовуючи умову падіння тиску на екрані [167], було отримано інтегральні доданки для наявних модальних систем [141, 165]. Такі модифіковані нелінійні модальні системи показали результат, що узгоджується кількісно та якісно із експериментальними. Для випадку, коли маємо більше відношення щільності $0.5 < S_n < 1$, змінюються власні форми та частоти коливань рідини [58] і, внаслідок чого, лінійні [166] та нелінійні [137] модальні системи також змінюють свою аналітичну структуру. В такому випадку вторинні резонанси стають більш виразними, та піки амплітудно-частотних кривих в основній резонансній зоні відрізняються від тих, що спостерігали для гладкого (без перегородок) прямокутного баку. Нелінійні модальні системи баків із пористими екранами були виведені, вивчені та валідовані у роботах [141–143, 168, 169].

1.6. Нелінійний мультимодальний метод для тривимірних баків квадратного перерізу

Визначною роботою для узагальнення двовимірних результатів про резонансні коливання рідини з роботи [117] на випадок тривимірного прямокутного баку є стаття [6]. Основна увага була приділена майже квадратному перерізу, що призводить до ситуації, коли дві нижчі форми коливання мають рівні власні частоти (хвилі Стокса). Відповідна нелінійна асимптотична модальна система типу Наріманова-Моісєєва [6] має

дев'ять ступенів вільності та містить дві домінантні узагальнені гідродинамічні координати порядку $O(\epsilon^{1/3})$, три узагальнені гідродинамічні координати порядку $O(\epsilon^{2/3})$, а також чотири найвищого асимптотичного порядку $O(\epsilon)$. Вищі узагальнені гідродинамічні координати описуються в рамках лінійної теорії та мають порядок $o(\epsilon)$.

Нелінійна асимптотична модальна система типу Наріманова-Моісєєва [6] дозволяє ефективно й аналітично класифікувати усталені режими (плоска, діагональна, майже діагональна та кругова хвилі) для поздовжніх, діагональних та майже діагональних гармонічних збурень/коливань баку [7, 8, 11]. Усталений періодичний розв'язок модальної системи приводить, в свою чергу, до специфічних амплітудно-частотних кривих (причому окремо слід виділити випадок, коли співвідношення між горизонтальними розмірами баку збурюється в околі одиниці [9, 170, 171].) Було отримане гарне якісне узгодження з експериментами, включаючи оцінку діапазону частот, де існують хаотичні хвилі.

Але слід відмітити, що теоретичні перехідні та усталені хвилі не були кількісно підкріплені експериментальними вимірюваннями через ефект вторинного резонансу, який стає особливо виразним для кругової хвилі, навіть для достатньо малої амплітуди збурень (коливань баку). Внаслідок успішного врахування ефекту вторинного резонансу було отримано багатовимірні адаптивні модальні системи [138, 172]. Для досягнення через обчислення усталених періодичних хвиль необхідно було вводити досить спекулятивним шляхом лінійні елементи, які відповідають демпфуванню в системі.

Досить довго залишалася відкритою проблема необхідності врахування впливу малої дисипації на усталені резонансні хвилі. Модальні системи за визначенням не мають відповідних членів, тих, які відображають в'язке демпфування в системі. Бо модальна теорія базується на моделі нев'язкої рідини та потенційних рухів. Але незважаючи на нехтування в'язкістю, модальні теорії досить точно описували всі амплітудні та силові характеристики, спричинені резонансними хвилями. В то же час, за останні роки в науковій літературі були описані випадки, коли не-

хтування в'язким демпфуванням не давало змоги якісно описувати ряд фізичних феноменів. Для баків квадратного перерізу таким є феномен Такеші Ікеди [10]. В наведеній роботі японських вчених було зафіксовано той факт, що за діагональних резонансних збурень для кругової хвилі, яка виникає для частот в малому околі основної власної частоти, амплітуди хвилі на протилежних відносно діагоналі стінках не рівні, причому де більша, а де менша залежить від напрямку кругової хвилі (за чи проти годинникової стрілки). Ці експериментальні результати протирічать результатам модальної теорії з роботи [6], де розглядалися такі діагональні збурення. З'ясувалося, що феномен Такеші Ікеди можна описати в рамках модальної системи [6], якщо ввести малі, але не нульові члени, які описують в'язке демпфування. Це було зроблено в статті [11].

Інший феномен, опис якого вимагає ненульового демпфування в модальній системі, є виникнення (зникнення) кругової хвилі у контейнері кругового перерізу. Піонерська аналітична робота [173], в якій розглядалися орбітальні рухи із резонансною частотою кругового циліндричного баку за допомогою модальних рівнянь Наріманова-Моісєєва без демпфування показала, що для суто кругових орбіт баку повинні існувати як стійкі кругові хвилі як за напрямком збурення, так і проти нього. Пізніше в роботі [174] було введено мале ненульове демпфування в систему, що привело до того, що для кругових орбітальних збурень зникла теоретична протинаправлена кругова хвиля. Причому не має значення величина такого демпфування, головне, аби воно було ненульове. В той же час для еліптичних орбіт протинаправлена кругова хвиля теоретично мала місце для систем із демпфуванням. Останній висновок відносно важливості врахування демпфування було недавно підтверджено експериментально [175].

Нарешті, без врахування демпфування, причому нелінійного з математичної точки зору неможливо описати, навіть якісно, зсув фаз між гармонічним збуренням та хвилею. Цьому факту присвячено роботи [176, 177].

1.7. Яку відкриту проблему розв'язує дана дисертаційна робота

Для баку квадратного перерізу залишалася відкритою проблема відносно класифікації усталених резонансних хвиль за умови довільних періодичних рухів баку із частотою, близькою до першої власної частоти. Всі попередні дослідження стосувалися виключно плоско-поступальних гармонійних збурень. Тим самим виник розрив між тим, що відомо для усталених хвильових рухів рідини у випадку вертикальних баків кругового перерізу (результати підсумовано в монографії [178]), для яких така класифікація проведена.

Складністю задачі по відношенню до випадку кругового перерізу є те, що нема кругової симетрії баку й тому, скажімо, для еліптичних поступальних орбітальних збурень баку з'являється додатковий параметр в системі – кут між головною віссю еліпса збурення та паралельними вертикальними стінками. Значно ускладнюється аналітика. Якщо слідувати аналітичним викладкам з роботи [178], для проміжних постановок відсутні аналітичні розв'язки. Крім того, на відміну від випадку кругового циліндра, крім плоских та стоячих хвиль, гідродинамічна система може характеризуватися також діагональними (майже діагональними) по відношенню до площини збурення усталеними хвилями. І це навіть для плоско-поступальних рухів баку [10, 11]. Для більш складних періодичних збурень баку не було ясно взагалі які типи усталених хвиль взагалі можливі.

Таким чином, основною задачею цієї дисертаційної роботи було узагальнення результатів О.М. Тимохи та І.А. Райновського [178–180] про класифікацію (визначення всіх можливих стійких та нестійких) усталених резонансних хвиль з випадку циліндричних баків кругового перерізу на випадок баку квадратного перерізу. Необхідно було розглянути довільні малоамплітудні періодичні рухи баку, визначитися, чи можливо ці рухи, як у випадку кругового баку, звести в асимптотичному сенсі до орбітальних горизонтальних. Далі, якщо можливо, потрібно було визначитися із тим як від форми еліпсу збурення та його положення в

горизонтальній площині, залежать типи усталених хвиль й взагалі, які усталені хвилі існують в такому випадку. При цьому, зважаючи на попередні результати, в модальну систему [6] необхідно було інкорпорувати демпфування.

Таке узагальнення було успішно проведено та результати викладено в цій дисертаційній роботі. Ключові проривні результати таких узагальнень опубліковано в Journal of Fluid Mechanics [13].

Розділ 2 цієї дисертаційної роботи наводить постановку вихідної крайової задачі із вільною межею про коливання рідини в рухомих баках. Приводиться диференціальна, варіаційна та модальна версія. В рамках реалізації модального методу наводиться загальний вигляд модальної системи у формі Майлза-Луковського. Надалі, виходячи із результатів класичної статті [8], наводиться вивід адаптивної та асимптотичної модальних систем типу Наріманова-Моісєєва. Остання є базовою для досліджень у двох подальших главах.

Розділ 3 присвячено загальній аналітичній теорії, яка виходить з модальних систем Наріманова-Моісєєва із демпфуванням [6, 11], що дозволяє класифікувати всі усталені резонансні хвилі для довільних періодичних рухів баку. Доведено, що, як і у випадку баку кругового перерізу контейнера, в асимптотичному сенсі усталені резонансні хвилі для таких довільних збурень еквівалентні тим, які виникають при відповідних горизонтальних еліптичних орбітальних поступальних рухах контейнерів. Далі дається детальна класифікація які саме усталені хвилі взагалі можливі за орбітальних еліптичних збурень.

Розділ 4 демонструє амплітудно-частотні характеристики всіх можливих усталених хвиль, стійких та нестійких, для довільних орбітальних збурень. Визначає діапазони існування визначених в розділі 3 усталених резонансних хвиль.

Останній розділ дисертаційної роботи наводить висновки.

Розділ 2

Диференціальна, варіаційна та модальна постановки задачі

В даній дисертаційній роботі розглядаються коливання рідини у рухомій абсолютно жорсткій порожнині квадратного перерізу, яка рухається у просторі згідно позначень на Рис. 2.1.

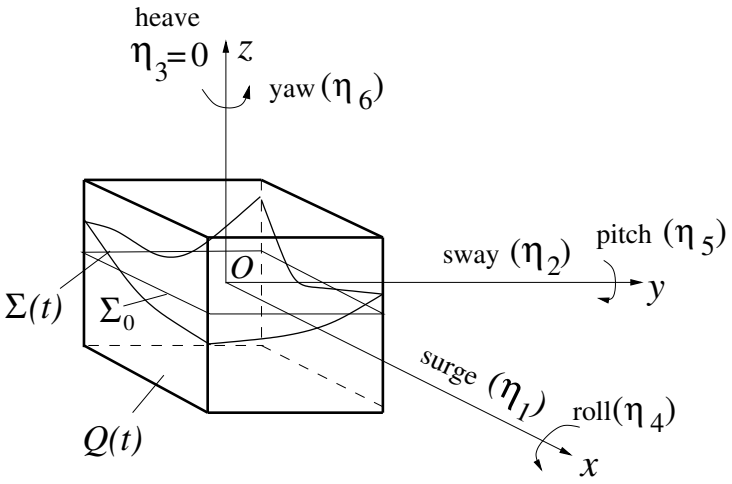

Рис. 2.1. Рухомий абсолютно жорсткий резервуар квадратної форми, частково заповнений рідиною. Система $Oxyz$ жорстко пов'язана із баком. Відносні рухи системи $Oxyz$ є визначеними в будь-який момент t швидкістю $\boldsymbol{v_O} = d\boldsymbol{r'_O}/dt = \dot{\boldsymbol{r}}'_{\boldsymbol{O}}$ початку координат та миттєвою кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}(t)$. Ці два вектори визначають шість ступенів вільності контейнера, які позначаються на рисунку як $\eta_i(t), i = 1...6$. Як показано в підручнику [1], вертикальні коливні рухи баку породжують параметричні хвилі, які присутні в математичних постановках, але не є предметом розгляду дисертаційної роботи.

Будемо вважати, що стінки баку та дно є абсолютно жорсткими, система координат $Oxyz$ є жорстко зв'язаною із контейнером, площина Oxy збігається з незбуреною (гідростатичною) вільною поверхнею рідини. Надалі також припускаємо, що рух контейнера є відомим, тобто розв'язується перша задача динаміки: *описати рухи рідини та відповідні гідродинамічні навантаження на стінки баку за відомого руху тіла.*

Крім того, відносно руху контейнера надалі постулюємо, що він є осциляторним з малою амплітудою (відносно довжини баку) та частота

збурення є близькою до першої власної частоти коливання рідини. Система бак-рідина знаходиться у гравітаційному полі, яке має потенціал

$$U_g = -\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{r'} = -\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{r} - \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{r'_O}, \tag{2.1}$$

де $\boldsymbol{g}$ – вектор прискорення земного тяжіння, $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, а $\boldsymbol{r'_O}$ – радіус-вектор початку координат O відносно деякою нерухомої (інерційної) системи координат $O'x'y'z'$. Рідина вважається нестисливою, ідеальною, та течії рідини є безвихоровими. В подальшому припускаємо, що рідина не містить газових включень. Також не будемо враховувати поверхневий натяг, оскільки розглядаються відносно великі розміри баку, для яких число Бонда перевищує 1000 [1].

Такі припущення відносно нев'язкої рідини будується на тому, що для випадків, що розглядаються, в'язкий ламінарний поверхневий шар на змочених стінках посудини є тонким, а поза межами такого шару рідину в контейнері можна вважати за ідеальну. Такі припущення є стандартними для аналітичних та напіваналітичних теорій коливання рідини (хлюпання) [1, 121]. В той же час, як показали недавні дослідження [10, 152, 174, 178], хоч можна нехтувати в'язкістю для опису амплітудних відгуків рідини на резонансні збурення, коректний опис ряду усталених хвиль та їх стійкості неможливий за ігнорування демпфування. Отже, ми не можемо зовсім нехтувати демпфуванням, яке породжує в'язкий шар на стінках.

Врахувати демпфування стає можливим завдяки переходу від класичної крайової задачі з вільною поверхнею, яка описує коливання ідеальної рідини, до системи звичайних диференціальних (модальних) рівнянь відносно гідродинамічних узагальнених координат, ввівши в останню систему відповідні члени, які відповідають за демпфування.

Перехід від крайової задачі із вільною поверхнею до звичайних диференціальних рівнянь (типу Ейлера-Лагранжа), що зв'язують узагальнені координати системи й перетворюють задачу гідромеханіки у задачу теоретичної механіки, до якої можна застосувати традиційні для цієї галузі методи досліджень, буде описаним у цьому розділі.

2.1. Крайова задача з вільною поверхнею

В подальшому в тексті будемо застосувати наступні позначення: $Q(t)$ – рухомий об'єм рідини, $\Sigma(t)$ – вільна поверхня, $S(t)$ – змочена поверхня баку, Q_0 – незбурений (гідростатичний) об'єм рідини, Σ_0 – незбурена вільна (гідростатична) поверхня, S_0 – незбурена (гідростатична) змочена поверхня баку.

2.1.1. Рівняння руху рідини. Запишемо рівняння безвихрових рухів ідеальної нестисливої рідини у неінерційній системі координат $Oxyz$, що жорстко зв'язана із абсолютно жорстким баком (носієм, посудиною). За введених вище припущень, поле абсолютних швидкостей в $Q(t)$ описується потенціалом абсолютних швидкостей,

$$\boldsymbol{v} = \nabla\Phi.$$

Даний потенціал абсолютних швидкостей задовільняє рівняння Лапласа, яке є наслідком збереження маси рідини. Тиск в об'ємі рідини можна знайти, використовуючи інтеграл Лагранжа-Коші [1, 181]. З огляду на те, що рівняння Лапласа є інваріантним відносно вибору системи координат (не має значення інерційна чи неінерційна, бо рівняння виражає умову збереження маси)

$$\triangle\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \text{ в } Q(t), \tag{2.2}$$

а інтеграл Лагранжа–Коші в інерційній системі координат $O'x'y'z'$

$$p + \rho\left(\left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{\text{інерційна}} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{v})^2 + U_g\right) = C(t). \tag{2.3}$$

Оскільки нам потрібно записати інтеграл Лагранжа-Коші в неінерційній системі координат $Oxyz$, виникає потреба переписати похідну від часу Φ для фіксованих точок з координатами (x', y', z') в інерційній системі. У неінерційній системі координат $Oxyz$ ми оперуємо з похідною по часу від Φ, для фіксованої точки (x, y, z), що означає

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{\text{в неінерційній } Oxyz} = \lim_{\triangle t\to 0}\frac{\Phi(x,y,z,t+\Delta t) - \Phi(x,y,z,t)}{\Delta t}.$$

Нехай маємо таке, що точка (x, y, z) співпадає з точкою (x', y', z') в момент часу t. Тоді, різниця між точками (x, y, z) та (x', y', z') в момент часу $t+\Delta t$, з точністю до нелінійних членів, рівна $\boldsymbol{v}_b \Delta t$, де $\boldsymbol{v}_b$ - швидкість точки (x, y, z) в системі (x', y', z'), у відповідності до формули Ейлера

$$\boldsymbol{v_b} = \boldsymbol{v_O} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \tag{2.4}$$

є цією швидкістю точки (x, y, z), заданого радіусом-вектором $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{v_O}$ – швидкість початку координат O, а $\boldsymbol{\omega}$ – миттєва кутова швидкість тіла навколо O.

Якщо ми застосуємо розклад в ряд Тейлора функції $\Phi(x, y, z, t + \Delta t)$ в околі точки (x', y', z')

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{\text{в неінерційній } Oxyz} =$$
$$= \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\Phi(x', y', z', t + \Delta t) + \boldsymbol{v_b} \cdot \bigtriangledown \Phi \triangle t - \Phi(x, y, z, t)}{\Delta t} =$$
$$= \left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{\text{в інерційній } O'x'y'z'} + \boldsymbol{v_b} \cdot \bigtriangledown \Phi. \tag{2.5}$$

Звідси випливає, що інтеграл Лагранжа–Коші (2.3) в неінерційній системі $Oxyz$ можна записати у вигляді

$$p + \rho \left(\left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{\text{неінерційна}} - (\boldsymbol{v_O} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot \bigtriangledown \Phi + \frac{1}{2} (\bigtriangledown \Phi)^2 + U_g \right) = C(t), \tag{2.6}$$

де $C(t)$ – довільна функція часу, ρ – густина рідини, p – тиск в рідині.

Потенціал сили тяжіння U_g було визначено в (2.1) як $U_g = -\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{r'}$, або, пригадавши, що $\boldsymbol{r'} = \boldsymbol{r'_O} + \boldsymbol{r}$, а $\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{r'_O}$ буде лише функцією від часу (потенціал можна визначити з точністю до функції від часу), а не координат, будемо вважати, що в неінерційній системі координат $Oxyz$

$$U_g = -\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{r}, \ \boldsymbol{r} = (x, y, z). \tag{2.7}$$

Оберемо систему координат $Oxyz$ таким способом, щоб $z = 0$ співпадало із незбуреною поверхнею рідини (у випадку, коли маємо справу із статичним положенням, коли посудина знаходиться у вертикальному положенні).

Припустимо, що атмосферний тиск в газі над рідиною є сталою p_0. Оберемо таке $C(t)$, аби тиск дорівнював p_0 на незбуреній поверхні. Інтеграл Лагранжа-Коші (2.6) для цього випадку буде мати такий вигляд

$$p - p_0 = -\rho\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\bigtriangledown\Phi)^2 - \bigtriangledown\Phi \cdot (\boldsymbol{v_O} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + U_g\right). \tag{2.8}$$

2.1.2. Крайові умови. Крайова умова на змоченій поверхні баку $S(t)$ відповідає умові неперетікання рідини через змочену поверхню баку, тобто аби виконувалася умова, що нормальна швидкість рідини дорівнює нормальній швидкості абсолютно твердого баку на змоченій поверхні

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{v_O} \cdot \boldsymbol{n} + [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}] \cdot \boldsymbol{n} \text{ на } S(t), \tag{2.9}$$

де $\boldsymbol{n}$ – зовнішній вектор нормалі до поверхні $S(t)$ та $\boldsymbol{v}$ – абсолютна швидкість рідини. Можемо записати рівняння (2.9) у такому вигляді

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \boldsymbol{v_O} \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{\omega} \cdot [\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n}] \text{ на } S(t). \tag{2.10}$$

Зважаючи на те, що тиск на вільній поверхні є рівний тиску зовнішнього газу p_0 над рідиною, можна, застосувавши (2.8), записати так звану динамічну крайову умову

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\bigtriangledown\Phi)^2 - (\boldsymbol{v_O} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot \bigtriangledown\Phi + U_g = 0 \text{ на } \Sigma(t). \tag{2.11}$$

Звідси слідує, що ми маємо дві крайові умови: одна із них на змочених стінках баку (2.10), інша – на невідомій вільній поверхні (2.11).

Окрім вищезазначених, слід додати кінетичну крайову умову на вільній поверхні, яка забезпечує те, що частинка рідини завжди перебуває на вільній поверхні, або іншими словами немає розриву суцільності на $\Sigma(t)$. Для випадку, коли використовується система координат $Oxyz$, найбільш загальне, неявне визначення вільної поверхні асоціюється з рівнянням

$$Z(x, y, z, t) = 0. \tag{2.12}$$

Той факт, що частинки рідини залишаються на вільній поверхні означає, що матеріальна похідна від Z в інерційній системі координат $O'x'y'z'$

дорівнює нулю, тобто

$$0 = \frac{D'Z}{Dt} = \left.\frac{\partial Z}{\partial t}\right|_{O'x'y'z'} + \boldsymbol{v}\cdot\bigtriangledown Z = \left.\frac{\partial Z}{\partial t}\right|_{Oxyz} - \boldsymbol{v_b}\cdot\bigtriangledown Z + \bigtriangledown\Phi\cdot\bigtriangledown Z \text{ на } \Sigma(t), \tag{2.13}$$

де ми застосували формулу для похідної за часом в неінерційній системі (як і в рівнянні (2.5)). Вектор зовнішньої нормалі до вільної поверхні $\Sigma(t)$ можна записати як

$$\boldsymbol{n} = \frac{\bigtriangledown Z}{|\bigtriangledown Z|} \text{ на } \Sigma(t). \tag{2.14}$$

Рівняння (2.13) можна привести до вигляду

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \boldsymbol{v_O}\cdot\boldsymbol{n} + \boldsymbol{\omega}\cdot[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}] - \frac{\partial Z/\partial t}{|\bigtriangledown Z|} \text{ на } \Sigma(t), \tag{2.15}$$

в якому похідна по часу обчислюється у системі координат $Oxyz$. Рівняння (2.15) називають кінетичною умовою на вільній поверхні.

Слід відмітити, що для практично важливих випадків, коли стінка посудини паралельна осі z в околі вільної поверхні, можна скористатися нормальною формою представлення вільної поверхні

$$Z(x,y,z,t) = z - \zeta(x,y,t) = 0. \tag{2.16}$$

Тоді кінематична крайова умова (2.15) буде мати такий вигляд

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = (\boldsymbol{v_0} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n} + \frac{\partial\xi/\partial t}{\sqrt{1+(\bigtriangledown\xi)^2}} \text{ на } \Sigma(t), \tag{2.17}$$

Отже, повинні виконуватися дві умови, (2.11) та (2.17), на рухомій вільній поверхні $\Sigma(t)$.

2.2. Варіаційне формулювання Люка-Бейтмена

Твердження 1.1 (принцип Гамільтона–Остроградського у формі Люка-Бейтмена). *Гладкі розв'язки крайової задачі з вільною поверхнею (2.2), (2.10), (2.11), (2.13)) співпадають із екстремумом функціоналу*

дії за Люке–Бейтменом

$$W(Z,\Phi)=\int_{t_1}^{t_2} L\,\mathrm{d}t,$$
$$L=\int_{Q(t)}(p-p_0)\,dQ=-\rho\int_{Q(t)}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2-\nabla\Phi\cdot(\boldsymbol{v_0}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})+U_g\right]dQ \tag{2.18}$$

для ізохронних незалежних гладких варіацій

$$\begin{aligned}&\delta\Phi(x,y,z,t_1)=0,\ \ \delta\Phi(x,y,z,t_2)=0;\\&\delta Z(x,y,z,t_1)=0,\ \ \delta Z(x,y,z,t_2)=0.\end{aligned} \tag{2.19}$$

Вищезазначене варіаційне формулювання доведено в [182]. Розглянемо певні важливі моменти цього доведення, які є корисними для розуміння структури модальних рівнянь Майлза-Луковського.

Припустимо, що можна задати дві невідомі функції у вигляді $\Phi=\Phi(x,y,z,t,\alpha_1)$ та $Z=Z(x,y,z,t,\alpha_2)$, де два малі параметри α_1 та α_2 є незалежними та їхні нулі відповідають екстремальним точкам функціоналу W. Підстановка таким чином визначених Φ і Z в (2.18) дозволяє отримати функцію від двох дійсних змінних α_1 та α_2 ($W=W(\alpha_1,\alpha_2)$). Тоді диференціал цієї функції в точці $\alpha_1=\alpha_2=0$ має вигляд

$$\begin{aligned}0=dW(0,0)&=\left.\frac{\partial W}{\partial\alpha_1}\right|_{0,0}d\alpha_1+\left.\frac{\partial W}{\partial\alpha_2}\right|_{0,0}d\alpha_2\\&=\delta W=\frac{\partial W}{\partial Z}\underbrace{\frac{\partial Z}{\partial\alpha_2}d\alpha_2}_{\delta Z}+\frac{\partial W}{\partial\Phi}\underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_1}d\alpha_1}_{\delta\Phi}\\&=-\rho\int_{t_1}^{t_2}\left(-\int_{\sum(t)}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\bigtriangledown\Phi)^2-\bigtriangledown\Phi\cdot(\boldsymbol{v_0}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})+U_g\right]\frac{\partial Z}{|\bigtriangledown Z|}dS\right.\\&\left.+\int_{Q(t)}\left[\bigtriangledown\Phi\cdot\bigtriangledown(\delta\Phi)+\frac{\partial(\delta\Phi)}{\partial t}-\bigtriangledown(\delta\Phi)\cdot(\boldsymbol{v_0}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\right]dQ\right)dt.\end{aligned} \tag{2.20}$$

При цьому нами було враховано те, що потенціал гравітації U_g та $(\boldsymbol{v_0}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$ не є залежними від α_1 та α_2; ба більше, їх варіації є нульовими.

У зв'язку з тим, що варіації δZ та $\delta\Phi$ незалежні, можемо на якийсь момент обрати $\delta\Phi=0$. Умова довільної варіації δZ, завдяки рівності (2.20) виводить динамічну крайову умову (2.11) на $\Sigma(t)$. У випадку $\delta Z=$

0, $\delta\Phi \neq 0$, інтеграл з (2.20) може бути перезаписаним з використанням формул Гріна, теореми Гауса та транспортної теореми Рейнольдза, які мають вигляд

$$\begin{aligned}
\int_{Q(t)} \nabla\Phi \cdot \nabla(\delta\Phi)\,\mathrm{d}Q &= \int_{S(t)+\Sigma(t)} \delta\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial n}\,\mathrm{d}S - \int_{Q(t)} \nabla^2\Phi\,\delta\Phi\,\mathrm{d}Q,\\
\int_{Q(t)} \boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla(\delta\Phi)\,\mathrm{d}Q &= \int_{Q(t)} \nabla(\boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{r}) \cdot \nabla(\delta\Phi)\,\mathrm{d}Q\\
&= \int_{S(t)+\Sigma(t)} \delta\Phi\,(\boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S, \qquad (2.21)\\
\int_{Q(t)} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot \nabla(\delta\Phi)\,\mathrm{d}Q &= \int_{S(t)+\Sigma(t)} \delta\Phi\,\big((\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}\big)\,\mathrm{d}S,\\
\int_{Q(t)} \frac{\partial(\delta\Phi)}{\partial t}\,\mathrm{d}Q &= \frac{d}{dt}\int_{Q(t)} \delta\Phi\,\mathrm{d}Q + \int_{\Sigma(t)} (\delta\Phi)|_{\Sigma(t)} \frac{\partial Z/\partial t}{|\nabla Z|}\,\mathrm{d}S.
\end{aligned}$$

до варіаційної рівності

$$\begin{aligned}
\delta W|_{\delta Z=0} = \rho \int_{t_1}^{t_2} \Bigg(\int_{S(t)} \left[\frac{\partial\Phi}{\partial n} - (\boldsymbol{v_0} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}\right] \delta\Phi\,\mathrm{d}S - \int_{Q(t)} \bigtriangledown^2\Phi\delta\Phi\,\mathrm{d}Q\\
+ \int_{\sum(t)} \left[\frac{\partial\Phi}{\partial n} - (\boldsymbol{v_0} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n} + \frac{\partial Z}{\partial t}/|\bigtriangledown Z|\right] \delta\Phi\,\mathrm{d}S \Bigg)\,\mathrm{d}t\\
- \rho \int_{Q(t)} \delta\Phi\,\mathrm{d}Q|_{t=t_1}^{t=t_2} = 0, \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

де

$$\rho \int_{Q(t)} \delta\Phi\,\mathrm{d}Q|_{t=t_1}^{t=t_2} = 0,$$

не впливає на кінцевий результат через $\delta\Phi = 0$ для $t = t_1, t_2$ відповідно до (2.19). Із варіаційної рівності (2.22) можна вивести кінематичні співвідношення крайової задачі.

2.3. Нелінійні модальні рівняння Майлза-Луковського

Із застосуванням принципу Люка-Бейтмена можна вивести систему нелінійних модальних рівнянь, яка є математично еквівалентна вихідній задачі із вільною поверхнею. Під поняттям модальна система ми розуміємо систему звичайних диференціальних рівнянь відносно узагальне-

них координат та швидкості даної гідродинамічної системи. Мультимодальний метод використовує представлення розв'язків у вигляді функціональних рядів із залежними від часу невідомими коефіцієнтами, які власне й трактуються як узагальнені координати та швидкості даної гідродинамічної системи. Оскільки у нашому випадку функції, які описують вільну поверхню та потенціал швидкостей (Z та Φ), є незалежними, існує необхідність мати два функціональних представлення. Одне з яких для вільної поверхні, а інше для потенціалу швидкостей Φ.

Запишемо рівняння вільної поверхні $\Sigma(t)$ припускаючи вертикальні стінки баку, через нормальну форму $z = \zeta(x, y, t)$ ($Z(x, y, z, t) = z - \zeta(x, y, t) = 0$) та розкладемо у функціональний ряд

$$\zeta(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(t) f_i(x, y), \tag{2.23}$$

де $f_i(x, y)$ – функціональний базис (не обов'язково це набір власних форм коливання рідини). Такий набір базисних функцій $\{f_i\}$ задає незалежні рухи гідродинамічної системи (ступені вільності такої системи). Тому функції $\{\beta_i\}$ тлумачимо як *узагальнені гідродинамічні координати.* Окрім цього, існує необхідна умова що відображає збереження маси рідини

$$\int_{\Sigma_0} f_i(x, y) dx dy = 0, \ \forall i,$$

де Σ_0 – незбурена (гідростатична) вільна поверхня.

Наступним кроком розглянемо представлення у вигляді функціонального ряду для потенціалу швидкостей $\Phi(x, y, z, t)$. Необхідно звернути увагу на те, що потенціал абсолютних швидкостей не є нульовим для "замороженої" вільної поверхні ($\{\beta_i\} = 0$). Це означає, що представлення необхідно має дві компоненти, коли перша (потенціал Кірхгофа) відповідає за рух рідини при нерухомій поверхні, а друга породжена хвилями на цій поверхні,

$$\Phi(x, y, z, t) = \underbrace{\boldsymbol{v_O}(t) \cdot \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}(t) \cdot \boldsymbol{\Omega}(x, y, z, t)}_{K(\boldsymbol{v}_O, \boldsymbol{\omega}, \beta_i\})} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} R_n(t) \varphi_n(x, y, z)}_{\varphi(x,y,z,t)}, \tag{2.24}$$

де функціональний базис $\{\varphi_n\}$ не обов'язково пов'язаний із власними модами (формами) коливання рідини.

Тут функції $R_n(t)$ трактуємо, як узагальнені швидкості, а $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1(x,y,z,t), \Omega_2(x,y,z,t), \Omega(x,y,z,t))^T$ за визначенням – потенціал Стокса–Жуковського, який є функцією просторових координат та узагальнених гідродинамічних координат і задовольняє наступну задачу Неймана

$$\nabla^2 \boldsymbol{\Omega} = 0 \;\; \text{в} \;\; Q(t), \quad \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial n} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n} \;\; \text{на} \;\; S(t) + \Sigma(t), \tag{2.25}$$

де $\boldsymbol{n}$ – зовнішня нормаль на межі області $Q(t)$.

Функціональний базис $\{\varphi_n(x,y,z)\}$ для (2.24) має бути повним для довільних допустимих геометрій об'єму $Q(t)$. Відмітимо, що для практичних застосувань, набір функцій $\{\varphi_n(x,y,z)\}$ зазвичай співпадає з власними формами коливання рідини. Тоді Φ (із рівняння (2.24)) завжди автоматично задовольнятиме рівняння Лапласа та граничні крайові Неймана умови на змоченій поверхні баку. Хоча дві крайові умови на вільній поверхні рідини не задовільняються автоматично.

Через те, що кінетична та динамічна граничні умови є природними у варіаційному формулюванні Люка-Бейтмена, варіаційний формалізм Люка-Бейтмена можна застосувати для отримання звичайних диференціальних рівнянь, що пов'язують залежні від часу узагальнені координати $\beta_i(t)$ та узагальнені швидкості $R_n(t)$. Отримані таким чином диференціальні рівняння, або хоча б їх динамічну складову, можна інтерпретувати як рівняння Ейлера-Лагранжа другого роду відносно β_i та R_n для гідромеханічної системи із нескінченною кількістю ступенів вільності, які відповідають введеним вище узагальненим координатам в представленні (2.23).

Якщо ми підставимо (2.24) в (2.18), то функція Лагранжа в принципі Люка-Бейтмена матиме такий вигляд

$$L = -\rho \int_{Q(t)} \left[\frac{d\boldsymbol{v}_O}{dt} \cdot \boldsymbol{r} + \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}) + \frac{1}{2} \bigtriangledown (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \cdot \bigtriangledown (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}) - \frac{1}{2} \boldsymbol{v}_O^2 \right.$$

$$-\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{r}\times\bigtriangledown(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\Omega}))-\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}_O)-\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{r}\times\bigtriangledown\varphi)+\bigtriangledown(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\Omega})\cdot\varphi\Big]dQ+L_r, \tag{2.26}$$

де

$$L_r=-\rho\int_{Q(t)}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\bigtriangledown\varphi)^2+U_g\right]dQ. \tag{2.27}$$

Інтегральні вирази в (2.26) необхідно спростити, використовуючи тотожності векторної алгебри, теорему Гауса та крайової умови Неймана (2.25). Крім того, два підінтегральні доданки у рівнянні (2.26) скасовують одне одного, тобто

$$\int_{Q(t)}[-(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\cdot\bigtriangledown\varphi+\bigtriangledown(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\Omega})\cdot\bigtriangledown\varphi]dQ$$
$$=\int_{S(t)+\Sigma(t)}\left(\frac{\partial(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\Omega})}{\partial n}-(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}\right)\varphi dS=0. \tag{2.28}$$

Скажемо також декілька слів щодо інших величини, що з'являються в інтегралі рівняння (2.26). Їх можна записати компактно завдяки тензору інерції $J^1=J^1(x,y,z,t)$, компонентами якого є наступні інтеграли відносно потенціалів Стокса-Жуковського (2.25)

$$J^1_{11}=\rho\int_{Q(t)}(y\frac{\partial\Omega_1}{\partial z}-z\frac{\partial\Omega_1}{\partial y})dQ=\rho\int_{S(t)+\Sigma(t)}\Omega_1\frac{\partial\Omega_1}{\partial n}dS,$$
$$J^1_{22}=\rho\int_{Q(t)}(z\frac{\partial\Omega_2}{\partial x}-x\frac{\partial\Omega_2}{\partial z})dQ=\rho\int_{S(t)+\Sigma(t)}\Omega_2\frac{\partial\Omega_2}{\partial n}dS,$$
$$J^1_{33}=\rho\int_{Q(t)}(x\frac{\partial\Omega_3}{\partial y}-y\frac{\partial\Omega_3}{\partial x})dQ=\rho\int_{S(t)+\Sigma(t)}\Omega_3\frac{\partial\Omega_3}{\partial n}dS,$$

$$J^1_{12}=J^1_{21}=\rho\int_{Q(t)}(z\frac{\partial\Omega_1}{\partial x}-x\frac{\partial\Omega_1}{\partial z})dQ=\rho\int_{Q(t)}(y\frac{\partial\Omega_2}{\partial z}-z\frac{\partial\Omega_2}{\partial y})dQ$$
$$=\rho\int_{S(t)+\Sigma(t)}\Omega_1\frac{\partial\Omega_2}{\partial n}dS=\rho\int_{S(t)+\Sigma(t)}\Omega_2\frac{\partial\Omega_1}{\partial n}dS,$$
$$J^1_{13}=J^1_{31}=\rho\int_{Q(t)}(x\frac{\partial\Omega_1}{\partial y}-y\frac{\partial\Omega_1}{\partial x})dQ=\rho\int_{Q(t)}(y\frac{\partial\Omega_3}{\partial z}-z\frac{\partial\Omega_3}{\partial y})dQ$$
$$=\rho\int_{S(t)+\Sigma(t)}\Omega_1\frac{\partial\Omega_3}{\partial n}dS=\rho\int_{S(t)+\Sigma(t)}\Omega_3\frac{\partial\Omega_1}{\partial n}dS,$$

$$J^1_{23} = J^1_{32} = \rho \int_{Q(t)} (x\frac{\partial \Omega_2}{\partial y} - y\frac{\partial \Omega_2}{\partial x})dQ = \rho \int_{Q(t)} (z\frac{\partial \Omega_3}{\partial x} - x\frac{\partial \Omega_3}{\partial z})dQ$$
$$= \rho \int_{S(t)+\Sigma(t)} \Omega_2 \frac{\partial \Omega_3}{\partial n} dS = \rho \int_{S(t)+\Sigma(t)} \Omega_3 \frac{\partial \Omega_2}{\partial n} dS. \quad (2.29)$$

Означення для J^1_{ij} у рівнянні (2.29) було виведено завдяки використанню першої тотожності Гріна та теореми Гауса.

Цікаво, що тензор інерції асоціюється із наступною квадратичною формою

$$-\frac{1}{2}\omega_1^2 J^1_{11} - \frac{1}{2}\omega_2^2 J^1_{22} - \frac{1}{2}\omega_3^2 J^1_{33} - \omega_1\omega_2^2 J^1_{12} - \omega_1\omega_3^2 J^1_{13} - \omega_2\omega_3^2 J^1_{23}$$
$$+ \frac{1}{2}\rho \int_{S(t)+\Sigma(t)} (\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\Omega})\left(\frac{\partial \Omega}{\partial n}\cdot\boldsymbol{\omega}\right)dS =$$
$$= \frac{1}{2}\rho \int_{Q(t)} \left(\frac{1}{2}\bigtriangledown(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\Omega})\cdot\bigtriangledown(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\Omega}) - \boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{r}\times\bigtriangledown(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\Omega}))\right)dQ. \quad (2.30)$$

При детальному розгляді можна побачити, що останній об'ємний інтеграл є частиною рівняння (2.26). Після спрощень, (2.26) матиме вигляд

$$L = -[\dot{v}_{O1}l_1 + \dot{v}_{O2}l_2 + \dot{v}_{O3}l_3 + \dot{\omega}_1 l_{1\omega} + \dot{\omega}_2 l_{2\omega} + \dot{\omega}_3 l_{3\omega} + \omega_1 l_{1\omega t} + \omega_2 l_{2\omega t} + \omega_3 l_{3\omega t}$$
$$- \frac{1}{2}(\omega_1^2 J^1_{11} + \omega_2^2 J^1_{22} + \omega_3^2 J^1_{33}) - \omega_1\omega_2 J^1_{12} - \omega_1\omega_3 J^1_{13} - \omega_2\omega_3 J^1_{23}$$
$$- \frac{1}{2}M_1(v_{O1}^2 + v_{O2}^2 + v_{O3}^2) + (\omega_2 v_{O3} - \omega_3 v_{O2})l_1$$
$$+ (\omega_3 v_{O1} - \omega_1 v_{O3})l_2 + (\omega_1 v_{O2} - \omega_2 v_{O1})l_3] + L_r, \quad (2.31)$$

де M_l – маса рідини та

$$l_{k\omega} = \rho \int_{Qt} \Omega_k dQ;\ l_{k\omega t} = \rho \int_{Qt} \frac{\partial \Omega_k}{\partial t} dQ;$$
$$l_1 = \rho \int_{Q(t)} x dQ;\ l_2 = \rho \int_{Q(t)} y dQ;\ l_3 = \rho \int_{Q(t)} z dQ. \quad (2.32)$$

Вектори $\boldsymbol{l}(t) = (l_1, l_2, l_3)$, $\boldsymbol{l_\omega}(t) = (l_{1\omega}, l_{2\omega}, l_{3\omega})$ та $\boldsymbol{l_{\omega t}}(t) = (l_{1\omega t}, l_{2\omega t}, l_{3\omega t})$ є функціями $\{\beta_i\}$ та $\left\{\dot{\beta}_i\right\}$.

Також відмітимо, що компонента (2.27) повинна враховуватись у

модальному представленні (2.24), тому отримуємо наступне

$$L_r = -\rho \int_{Q(t)} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \dot{R}_n \varphi_n + \frac{1}{2} \sum_{n,k=1}^{\infty} R_n R_k (\bigtriangledown \varphi_n \cdot \bigtriangledown \varphi_k) + U_s \right] dQ$$
$$= -\left[\sum_{n=1}^{\infty} D_n \dot{R}_n + \frac{1}{2} \sum_{n,k=1}^{\infty} D_{nk} R_n R_k - g_1 l_1 - g_2 l_2 - g_3 l_3 - m_1 g \cdot r_0' \right], \tag{2.33}$$

де

$$A_n = \rho \int_{Q(t)} \varphi_n dQ, \;\; A_{nk} = A_{kn} = \rho \int_{Q(t)} (\bigtriangledown \varphi_n \cdot \bigtriangledown \varphi_k) dQ. \tag{2.34}$$

Відмітимо те, що і варіаційний принцип Люка-Бейтмена, і рівняння (2.18) та (2.19), розглядають L як функцію від двох *незалежних* змінних $\zeta(x, y, t)$ та $\Phi(x, y, z, t)$. Підставивши представлення (2.23) та (2.24), функцію Лагранжа L виражаємо через рівняння (2.31) та (2.33) і вона ж стає функцією незалежних узагальнених координат $\{\beta_i\}$ та швидкостей $\{R_n\}$. Інтеграли в рівняннях (2.29), (2.32) та (2.34) є функціями від $\{\beta_i\}$. Тому незалежні варіації функціоналу дії $W = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ (через $\delta\zeta$ та $\delta\Phi$) мають бути пов'язані із незалежними варіаціями $\delta\beta_i$ та δR_n, відповідно. Вищеперелічені фактори дають нам можливість отримати наступну варіаційну рівність

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} \Bigg[\sum_n A_n \delta \dot{R}_n + \sum_n A_{nk} R_k \delta R_n$$
$$+ \left(\sum_n \dot{R}_n \frac{\partial A_n}{\partial \beta_i} + \omega_1 \frac{\partial l_{1\omega t}}{\partial \beta_i} + \omega_2 \frac{\partial l_{2\omega t}}{\partial \beta_i} + \omega_3 \frac{\partial l_{3\omega t}}{\partial \beta_i} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \sum_{n,k} R_n R_k \frac{\partial A_{nk}}{\partial \beta_i} + \dot{\omega}_1 \frac{\partial l_{1\omega}}{\partial \beta_i} + \dot{\omega}_2 \frac{\partial l_{2\omega}}{\partial \beta_i} + \dot{\omega}_3 \frac{\partial l_{3\omega}}{\partial \beta_i} \right.$$
$$+ (\dot{v}_{O1} - g_1 + \omega_2 v_{O3} - \omega_3 v_{O2}) \frac{\partial l_1}{\partial \beta_i} + (\dot{v}_{O2} - g_2 + \omega_3 v_{O1} - \omega_1 v_{O3}) \frac{\partial l_2}{\partial \beta_i}$$
$$+ (\dot{v}_{O3} - g_3 + \omega_1 v_{O2} - \omega_2 v_{O1}) \frac{\partial l_3}{\partial \beta_i} - \frac{1}{2} \omega_1^2 \frac{\partial J_{11}^1}{\partial \beta_i} - \frac{1}{2} \omega_2^2 \frac{\partial J_{22}^1}{\partial \beta_i} - \frac{1}{2} \omega_3^2 \frac{\partial J_{33}^1}{\partial \beta_i}$$
$$\left. - \omega_1 \omega_2 \frac{\partial J_{12}^1}{\partial \beta_i} - \omega_1 \omega_3 \frac{\partial J_{13}^1}{\partial \beta_i} - \omega_2 \omega_3 \frac{\partial J_{23}^1}{\partial \beta_i} \right) \delta \beta_i$$
$$\left. + (\omega_1 \frac{\partial l_{1\omega t}}{\partial \dot{\beta}_i} + \omega_2 \frac{\partial l_{2\omega t}}{\partial \dot{\beta}_i} + \omega_3 \frac{\partial l_{3\omega t}}{\partial \dot{\beta}_i}) \delta \dot{\beta}_i \right] dt = 0, \;\; i \geq 1. \tag{2.35}$$

Очевидно, що доданки, які пропорційні до $\delta\dot{R}_n$ та $\delta\dot{\beta}_i$ в останньому виразі (2.35), можна проінтегрувати за частинами. Таке інтегрування і той факт, що

$$\delta R_n(t_1) = \delta R_n(t_2) = \delta\beta_i(t_1) = \delta\beta_i(t_2) = 0,$$

зводять до виразів де фігурують δR_n та $\delta\beta_i$ замість $\delta\dot{R}_n$ та $\delta\dot{\beta}_i$.

В результаті варіаційна рівність виводить наступну нескінченновимірну систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь (рівняння *Майлза-Луковсъкого*) відносно $\{R_n(t)\}$ та $\{\beta_i(t)\}$

$$\sum_i \frac{\partial A_n}{\partial \beta_i}\dot{\beta}_i - \sum_k R_k A_{nk} = 0,\ n = 1, 2, \dots\ , \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_n \dot{R}_n \frac{\partial A_n}{\partial \beta_i} + \frac{1}{2}\sum_n\sum_k \frac{\partial A_{nk}}{\partial \beta_i} R_n R_k + \dot{\omega}_1 \frac{\partial l_{1\omega}}{\partial \beta_i} + \dot{\omega}_2 \frac{\partial l_{2\omega}}{\partial \beta_i} + \dot{\omega}_3 \frac{\partial l_{3\omega}}{\partial \beta_i} \\
&\quad + \omega_1 \frac{\partial l_{1\omega t}}{\partial \beta_i} + \omega_2 \frac{\partial l_{2\omega t}}{\partial \beta_i} + \omega_3 \frac{\partial l_{3\omega t}}{\partial \beta_i} - \frac{d}{dt}\left(\omega_1 \frac{\partial l_{1\omega t}}{\partial \dot{\beta}_i} + \omega_2 \frac{\partial l_{2\omega t}}{\partial \dot{\beta}_i} + \omega_3 \frac{\partial l_{3\omega t}}{\partial \dot{\beta}_i}\right) \\
&+ (\dot{v}_{O1} - g_1 + \omega_2 v_{O3} - \omega_3 v_{O2}) \frac{\partial l_1}{\partial \beta_i} + (\dot{v}_{O2} - g_2 + \omega_3 v_{O1} - \omega_1 v_{O3}) \frac{\partial l_2}{\partial \beta_i} \\
&\quad + (\dot{v}_{O3} - g_3 + \omega_1 v_{O2} - \omega_2 v_{O1}) \frac{\partial l_3}{\partial \beta_i} - \frac{1}{2}\omega_1^2 \frac{\partial J^1_{11}}{\partial \beta_i} - \frac{1}{2}\omega_2^2 \frac{\partial J^1_{22}}{\partial \beta_i} - \frac{1}{2}\omega_3^2 \frac{\partial J^1_{33}}{\partial \beta_i} \\
&\quad - \omega_1\omega_2 \frac{\partial J^1_{12}}{\partial \beta_i} - \omega_1\omega_3 \frac{\partial J^1_{13}}{\partial \beta_i} - \omega_2\omega_3 \frac{\partial J^1_{23}}{\partial \beta_i} = 0,\ i = 1, 2, \dots .
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Для випадку, коли посудина має вертикальну циліндричну форму в околі незбуреної вільної поверхні Σ_0, значення $\partial l_k/\partial\delta_i$ можна представити таким чином

$$\frac{\partial l_3}{\partial \beta_i} = \rho \int_{\Sigma_0} f_i^2 dS \beta_i = \lambda_{3i}\beta_i;\ \frac{\partial l_2}{\partial \beta_i} = \rho \int_{\Sigma_0} y f_i^2 dS = \lambda_{2i},$$
$$\frac{\partial l_1}{\partial \beta_i} = \rho \int_{\Sigma_0} x f_i^2 dS = \lambda_{1i}. \tag{2.38}$$

Систему із рівнянь (2.36), (2.37) було виведено незалежно Майлзом та Луковським в 1976 році. В подальшому, дану систему ми будемо застосувати у спеціальному вигляді, адаптованому для баку квадратного перерізу.

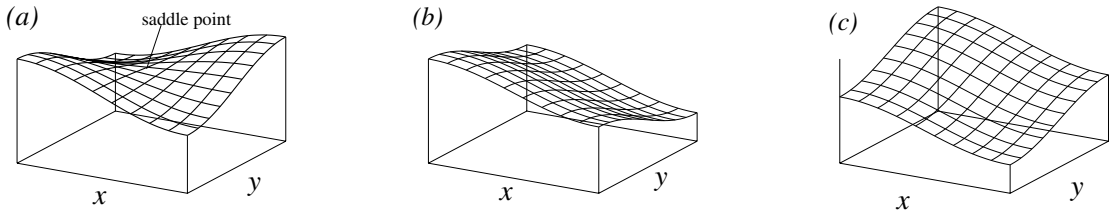

Рис. 2.2. Схематичні зображення тривимірних власних стоячих хвиль, пов'язаними із власними формами (2.41) та (2.42). Тут **(a)** ілюструє (2.41), $S_2^1(x,y)$ та $S_1^1(x,y)$ у (2.42) показано у **(b)** та **(c)** відповідно.

2.4. Модальні системи для посудини квадратного перерізу

2.4.1. Власні частоти і форми. Для баку квадратного перерізу існують точні розв'язки задачі про власні коливання (розв'язки відповідної спектральної задачі), явний вигляд яких у безрозмірному вигляді (L – сторона квадрата є характерні розміром) має вигляд [1, глава 4]

$$\varphi_{i,j}(x,y,z) = f_i^{(1)} f_j^{(2)} \frac{\cosh(\lambda_{i,j}(z+h))}{\cosh(\lambda_{i,j}h)},$$

$$\lambda_{i,j} = \pi\sqrt{i^2+j^2}, \quad \sigma_{i,j}^2 = \frac{g}{L}\lambda_{i,j}\tanh(\lambda_{i,j}h), \quad i,j \geq 0, \quad i+j \neq 0, \quad (2.39)$$

де і $\sigma_{i,j}$ – власні частоти. Проекції $\varphi_{i,j}$ на незбурену вільну поверхню $z=0$ вводять

$$f_{i,j}(x,y) = \varphi_{i,j}|_{z=0},$$

які можна обрати для розкладу розв'язку через функціональний ряд для вільної поверхні, а $\varphi_{i,j}$ використовують у представленні потенціалу швидкостей.

Для квадратного перерізу функції $f_{i,j}$ й відповідні стоячи хвилі можна розділити на підкласи. Перший клас власних форм складається з двовимірних стоячих хвиль типу Стокса у площинах Oxz та Oyz, від відповідає випадку $ij = 0$. Такі хвилі часто називають "плоскими". Відповідні профілі поверхневих хвиль задаються наступними власними фор-

мами

$$\begin{aligned} f_i^{(1)}(x) &= \cos(\pi i(x+1/2)), \quad i \geq 1, \\ f_j^{(2)}(y) &= \cos(\pi j(y+1/2), \quad j \geq 1. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Інший (другий) клас власних форм визначає суттєво тривимірні форми стоячих хвиль

$$f_i^{(1)}(x) \cdot f_j^{(2)}(y), \quad i,j \geq 1. \tag{2.41}$$

Крім того, оскільки $\sigma_{i,0} = \sigma_{0,i}$, $i \geq 1$, подібні перпендикулярні власні форми Стокса характеризуються рівними власними значеннями. Тому можна ввести мішані режими стоячих хвиль, так звані узагальнені хвилі Стокса, наприклад, "діагональні"

$$S_1^i(x,y) = f_i^{(1)}(x) - f_i^{(2)}(y); \quad S_2^i(x,y) = f_i^{(1)}(x) + f_i^{(2)}(y), \tag{2.42}$$

які зображені на Рис. 2.2 (b) та (c) для $i = 1$.

Якщо ж ввести нерівні ненульові вагові коефіцієнти при $f_i^{(1)}$ та $f_i^{(2)}$, наприклад,

$$S(x,y;\bar{a},b) = af_i^{(1)}(x) + bf_i^{(2)}(y), \quad ab \neq 0, \tag{2.43}$$

$|a| \neq |b|$, то відповідні стоячі хвилі також коливаються з частотою $\sigma_{i,0} = \sigma_{0,i}$, $i \geq 1$. Будемо їх називати "майже діагональними".

Таким чином, модальні представлення для баку квадратного перерізу у випадку нормованою на шириною баку мають вигляд

$$\xi(x,y,z,t) = z - f(x,y,t); \quad f(x,y,t) = \sum_{i,j} \beta_{i,j}(t) f_i^{(1)}(x) f_j^{(2)}(y), \tag{2.44}$$

$$\Phi(x,y,z,t) = \boldsymbol{v}_O \cdot \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \sum_{i,j} R_{i,j}(t)\varphi_{i,j}(x,y,z), \tag{2.45}$$

де сумування здійснюється за $i,j \geq 0,\ i+j \neq 0$.

Зазначимо, що $\beta_{i,j}(t)$ та $R_{i,j}(t)$ є невідомими функціями, що залежать від часу і визначають зміни вільної поверхні та потенціалу швидкостей. Також, $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ — потенціал Стокса-Жуковського, який визначено з допомогою відповідної крайової задачі Неймана.

2.4.2. Модальна система Майлза-Луковського. Розглянемо модальну систему Майлса-Луковського для випадку квадратного перерізу та додатково вважаємо що бак рухається коливним чином із малою амплітудою відносно ширини баку L, тобто безрозмірні узагальнені координати, які задають рух баку малі, $\eta_i = O(\epsilon)$. Якщо знехтувати членами $o(\epsilon)$ в модальних рівняннях, спростяться компоненти, які залежать від η_i, й ми отримаємо наступну систему звичайних диференціальних рівнянь, яка містить $\beta_{i,j}$ та $R_{i,j}$ *(крапка над символом позначає похідну за часом)*, виведену з точністю до $O(\epsilon)$

$$\sum_{i,j} \frac{\partial A_{n,k}}{\partial \beta_{i,j}} \dot{\beta}_{i,j} = \sum_{i,j} A_{(n,k)(i,j)} R_{n,k}, \;\; n,k = 0,1,\ldots, \quad n+k \neq 0, \tag{2.46}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} \frac{\partial A_{n,k}}{\partial \beta_{i,j}} \dot{R}_{n,k} + \sum_{n,k,l,m} \frac{1}{2} \frac{\partial A_{(n,k),(l,m)}}{\partial \beta_{i,j}} R_{n,k} R_{l,m} + \dot{\omega}_1 \frac{\partial l_{1\omega}}{\partial \beta_{i,j}}\Big|_0 + \dot{\omega}_2 \frac{\partial l_{2\omega}}{\partial \beta_{i,j}}\Big|_0 \\ + \omega_1 \frac{\partial l_{1\omega t}}{\partial \beta_{i,j}}\Big|_0 + \omega_2 \frac{\partial l_{2\omega t}}{\partial \beta_{i,j}}\Big|_0 - \frac{d}{dt}\left(\omega_1 \frac{\partial l_{1\omega t}}{\partial \dot{\beta}_{i,j}}\Big|_0 + \omega_2 \frac{\partial l_{2\omega t}}{\partial \dot{\beta}_{i,j}}\Big|_0\right) \\ + (\dot{v}_{O1} - g_1) \frac{\partial l_1}{\partial \beta_{i,j}}\Big|_0 + (\dot{v}_{O2} - g_2) \frac{\partial l_2}{\partial \beta_{i,j}}\Big|_0 + (-g_3) \frac{\partial l_3}{\partial \beta_{i,j}^2}\Big|_0 = 0, \\ i,j = 0,1,\ldots, \quad i+j \neq 0,\end{aligned} \tag{2.47}$$

де

$$\begin{aligned} l_{k\omega} &= \int_{Q(t)} \Omega_k dQ; \quad l_{k\omega t} = \int_{Q(t)} \frac{\partial \Omega_k}{\partial t} dQ, \\ l_1 &= \int_{Q(t)} x dQ; \quad l_2 = \int_{Q(t)} y dQ; \quad l_3 = \int_{Q(t)} z dQ, \\ A_{n,k} &= \int_{Q(t)} \varphi_{n,k} dQ; \quad A_{(n,k),(i,j)} = \int_{Q(t)} (\nabla \varphi_{n,k}, \nabla \varphi_{i,j}) dQ \end{aligned} \tag{2.48}$$

є нелінійними функціями від $\beta_{l,m}$, оскільки узагальнені гідродинамічні координати визначають миттєве положення області $Q(t)$.

Незважаючи на те що ми нехтуємо вимушеними членами порядку $o(\epsilon)$, дана система не враховує асимптотичної малості узагальнених координат $\beta_{i,j}$ та $R_{n,k}$. Врахувати їх доведеться після впорядкування відносно амплітуди цих координат на асимптотичній шкалі вимушеної дії $O(\epsilon)$.

2.4.3. Адаптивна модальна система третього порядку. Більшість теоретичних асимптотичних методів для опису тривимірних нелінійних коливань рідини зі скінченною глибиною спираються на залежності третього порядку між амплітудною рідини та збуренням. З цього випливає у найбільш загальному випадку існує нескінченна кількість $\beta_{i,j}$ і $R_{i,j}$, які задовольняють співвідношенню $\beta_{i,j} \lesssim O(\epsilon^{1/3})$, $R_{i,j} \lesssim O(\epsilon^{1/3})$, а значить що найбільш загальна адаптивна модальна система повинна базуватися на асимптотиці [12]

$$\beta_{i,j} \sim R_{i,j} = O(\epsilon^{1/3}), \quad i+j \geq 1 \tag{2.49}$$

на шкалі амплітуди $O(\epsilon)$ зовнішнього збурення, причому члени порядку $o(\epsilon)$ можна відкинути.

Враховуючи (2.49) у (2.46)–(2.48) і дотримуючись співвідношення (2.48) для $O(\epsilon)$ можна вивести наступну нескінченновимірну систему модальних рівнянь, що зв'язує $\beta_{i,j}$

$$\sum_{a,b} \ddot{\beta}_{a,b} \left[\delta_{ia}\delta_{jb} + \sum_{c,d} d^{1,(i,j)}_{(a,b),(c,d)} \beta_{c,d} + \sum_{a,b,c,f} d^{2,(i,j)}_{(a,b),(c,d),(e,f)} \beta^{c,d}\beta^{e,f} \right] + \sigma^2_{i,j}\beta_{i,j}$$
$$+ \sum_{a,b,c,d} \dot{\beta}_{a,b}\dot{\beta}_{c,d} \left[t^{0,(i,j)}_{(a,b),(c,d)} + \sum_{c,d} t^{1,(i,j)}_{(a,b),(c,d),(e,f)} \beta_{e,f} \right] + P^{(2)}_{i,j} \left[\dot{v}_{O2} + S^{(2)}_j \ddot{\psi}_1 + g\psi_1 \right]$$
$$+ P^{(1)}_{i,j} \left[\dot{v}_{O1} - S^{(1)}_i \ddot{\psi}_2 - g\psi_2 \right] = 0, \quad i+j \geq 1, \tag{2.50}$$

де всі коефіцієнти (а саме тензори $\mathsf{d}, \mathsf{t}, \mathsf{P}$ і S) обчислюються в явному вигляді як функції від безрозмірної глибини h,

$$d^{1,(i,j)}_{(a,b),(c,d)} = E^{i,j} V^{2,(i,j)}_{(a,b),(c,d)} + E_{i,j} \frac{\Lambda^{(1)}_{aci}\Lambda^{(1)}_{bdj}}{\Lambda^{(0)}_{ii}\Lambda^{(0)}_{jj}},$$

$$d^{2,(i,j)}_{(a,b),(c,d),(e,f)} = E^{i,j} \bar{V}^{3,(i,j)}_{(a,b),(c,d)(e,f)} + \frac{E_{n,k}E_{i,j}\Lambda^{(1)}_{nei}\Lambda^{(1)}_{kfj} V^{2,(n,k)}_{(a,b),(c,d)}}{\Lambda^{(0)}_{ii}\Lambda^{(0)}_{jj}}$$
$$+ \frac{D_{a,b}E_{i,j}\Lambda^{(2)}_{acei}\Lambda^{(2)}_{bdfj}}{E_{a,b}\Lambda^{(0)}_{ii}\Lambda^{(0)}_{jj}},$$

$$t^{0,(i,j)}_{(a,b),(c,d)} = E^{i,j} V^{2,(i,j)}_{(a,b),(c,d)} + \frac{r E_{i,j}\Pi^{(1)}_{(a,b)(c,d),(i,j)}}{2E_{a,b}E_{c,d}\Lambda^{(0)}_{ii}\Lambda^{(0)}_{jj}},$$

$$t^{1,(i,j)}_{(a,b),(c,d),(e,f)} = 2E^{i,j}\bar{V}^{3,(i,j)}_{(a,b),(c,d)(e,f)} + \frac{E_{i,j}E_{n,k}\Lambda^{(1)}_{nei}\Lambda^{(1)}_{kfj}V^{2,(n,k)}_{(a,b),(c,d)}}{\Lambda^{(0)}_{ii}\Lambda^{(0)}_{jj}}$$
$$+ \frac{E_{i,j}\Pi^{(2)}_{(a,b)(c,d),(i,j)(e,f)}}{E_{a,b}E_{c,d}\Lambda^{(0)}_{ii}\Lambda^{(0)}_{jj}}$$
$$+ \frac{E_{i,j}V^{2,(n,k)}_{(a,b),(e,f)}\Pi^{(1)}_{(n,k)(c,d),(i,j)}}{2E_{c,d}\Lambda^{(0)}_{ii}\Lambda^{(0)}_{jj}} + \frac{E_{i,j}V^{2,(n,k)}_{(c,d),(e,f)}\Pi^{(1)}_{(n,k)(a,b),(i,j)}}{2E_{a,b}\Lambda^{(0)}_{ii}\Lambda^{(0)}_{jj}}$$

та

$$E_{n,k} = \lambda_{n,k}\tanh(\lambda_{n,k}h),\ D_{n,k} = \lambda^2_{n,k}/2,\ \lambda_{n,k} = \pi\sqrt{i^2+j^2}, \qquad (2.51)$$

а також

$$\Pi^{(0)}_{(n,k)(i,j)} = E_{n,k}\Lambda^{(0)}_{ni}\Lambda^{(0)}_{kj},$$
$$\Pi^{(1)}_{(n,k)(i,j),(p,q)} = \Lambda^{(-1)}_{ni,p}\Lambda^{(1)}_{kjq} + r\Lambda^{(-1)}_{kj,q}\Lambda^{(1)}_{nip} + E_{n,k}E_{i,j}\Lambda^{(1)}_{nip}\Lambda^{(1)}_{kjq},$$
$$\Pi^{(2)}_{(n,k)(i,j),(p,q)(a,b)} = \frac{1}{2}\left(\Lambda^{(-2)}_{ni,ap}\Lambda^{(2)}_{kj,bq} + \Lambda^{(-2)}_{kj,bq}\Lambda^{(2)}_{niap}\right)(E_{n,k}+E_{i,j}) +$$
$$+ \Lambda^{(2)}_{niap}\Lambda^{(2)}_{kjbq}(D_{n,k}E_{i,j} + D_{i,j}E_{n,k});$$

$$V^{1,(n,k)}_{(a,b)} = \frac{\delta_{an}\delta_{kb}}{E_{n,k}},$$
$$V^{2,(n,k)}_{(a,b),(c,d)} = \left[E_{n,k}\Lambda^{(1)}_{nca}\Lambda^{(1)}_{kdb} - \frac{\Pi^{(1)}_{(n,k)(a,b),(c,d)}}{E_{a,b}}\right] \Big/ \left(E_{n,k}\Lambda^{(0)}_{nn}\Lambda^{(0)}_{kk}\right),$$
$$V^{3,(n,k)}_{(a,b),(c,d),(e,f)} = \Bigg[D_{n,k}\Lambda^{(2)}_{ncea}\Lambda^{(2)}_{kdfb}$$
$$- \frac{\Pi^{(2)}_{(n,k)(a,b),(c,d)(e,f)}}{E_{a,b}} - \Pi^{(1)}_{(n,k)(i,j),(e,f)}V^{2,(i,j)}_{(a,b),(c,d)}\Bigg] \Big/ \left(E_{n,k}\Lambda^{(0)}_{nn}\Lambda^{(0)}_{kk}\right),$$
$$\bar{V}^{3,(n,k)}_{(a,b),(c,d)(e,f)} = \frac{1}{2}\left[V^{3,(n,k)}_{(a,b),(c,d),(e,f)} + V^{3,(n,k)}_{(a,b),(e,f),(c,d)}\right];$$

тут вводяться допоміжні тензори, включаючи $\Lambda^{(N-2)}_{\underbrace{i\ldots m}_{N}}$, визначені інте-

гралами

$$\Lambda^{(0)}_{ij} = \int_{-1/2}^{1/2} f^{(1)}_i f^{(1)}_j \, dx = \begin{cases} 1, & i = j = 0, \\ 1/2, & i = j \neq 0, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

$$\Lambda^{(1)}_{i,j,k} = \int_{-1/2}^{1/2} f^{(1)}_i f^{(1)}_j f^{(1)}_k \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\Lambda^{(0)}_{|j-i|k} + \Lambda^{(0)}_{|i+j|k}\right), \tag{2.52}$$

$$\ldots$$

$$\Lambda^{(N-2)}_{\underbrace{i\ldots m}_{N}} = \int_{-1/2}^{1/2} \underbrace{f^{(1)}_i \ldots f^{(1)}_m}_{N} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\Lambda^{(N-3)}_{|j-i|\ldots m} + \Lambda^{(N-3)}_{|j+i|\ldots m}\right),$$

а також тензори $\Lambda^{(-N)}_{nm,\underbrace{i\ldots m}_{N}}$, які є симетричними за індексами nm та $i\ldots m$, але кома означає відсутність симетрії між цими групами індексів

$$\Lambda^{(-0)}_{nm} = \int_{-1/2}^{1/2} (f^{(1)}_n)'(f^{(1)}_m)' \, \mathrm{d}x = \pi^2 nm \begin{cases} 0, & nm = 0, \\ 1/2, & n = m \neq 0, \\ 0, & n \neq m, \end{cases}$$

$$\Lambda^{(-1)}_{nm,i} = \int_{-1/2}^{1/2} (f^{(1)}_n)'(f^{(1)}_m)' f^{(1)}_i \, \mathrm{d}x = \pi^2 nm \frac{1}{2}\left(\Lambda^{(0)}_{|n-m|i} - \Lambda^{(0)}_{|n+m|i}\right), \tag{2.53}$$

$$\ldots$$

$$\Lambda^{(-N)}_{nm,\underbrace{i\ldots k}_{N}} = \int_{-1/2}^{1/2} (f^{(1)}_n)'(f^{(1)}_m)' \underbrace{f^{(1)}_i \ldots f^{(1)}_k}_{N} \, \mathrm{d}x$$
$$= \pi^2 nm \frac{1}{2}\Big(\Lambda^{(N-1)}_{|n-m|\underbrace{i\ldots k}_{N}} - \Lambda^{(N-1)}_{|n+m|\underbrace{i\ldots k}_{N}}\Big).$$

Система (2.50) вимагає початкову умови Коші

$$\beta_{i,j} = \alpha^0_{i,j}; \quad \dot\beta_{i,j} = \alpha^1_{i,j}, \quad i + j \geq 1, \tag{2.54}$$

де відомі сталі $\alpha^0_{i,j}$ та $\alpha^1_{i,j}$ описують початкову форму рідини та початкову швидкість рідини відповідно.

У випадку періодичного руху баку можна також застосувати умову періодичності

$$\beta_{i,j}(t+T) = \beta_{i,j}(t); \quad \dot\beta_{i,j}(t+T) = \dot\beta_{i,j}(t), \quad i + j \geq 1, \tag{2.55}$$

де T – період збурення.

Система (2.50) разом з (2.54) (або (2.55)) може бути спрощена і застосована для чисельного аналізу хлюпання рідини, як це прийнято у Перко-подібних методах [183, 184]. Альтернативний підхід [6] полягає у попередньому асимптотичному спрощенні рівняння (2.50) з виділенням провідних за асимптотикою хвильових рухів та з наступним зведенням до простішої нелінійної системи. Цей шлях може призвести до отримання модальної системи меншої точності та забезпечити ефективні аналітичні дослідження усталених рухів. Прикладом такої спрощеної системи є асимптотична модальна система типу Наріманова-Моісєєва, яка була виведена для порожнин прямокутного перерізу в класичній роботі [6].

2.4.4. Модальна асимптотична система типу Наріманова-Моїсеєва. Коливний рух рідини розглядається в інерційній системі координат, пов'язаній із баком $Oxyz$, в якій площина Oxy співпадає із середньою (гідростатичною) вільною поверхнею Σ_0, а вісь Oz проходить через центр Σ_0. Як було описано вище, аби розв'язати задачу вимушених рухів рідини необхідно знайти дві змінні: вільну поверхню $\Sigma(t)$ (її можна записати через нормальне представлення $z = f(x, y, t)$) та абсолютну потенціал швидкостей $\Phi(x, y, z, t)$. Також ми фокусуємося на малих за амплітудою (відносно ширини баку L) періодичних рухах баку, які задаються безрозмірними узагальненими координатами

$$\eta_i(t) \sim O(\epsilon) \ll 1, \ \ i = 1, 2, 4, 5, 6. \tag{2.56}$$

Саме для такого випадку вже була виведена асимптотична третього порядку модальна система (2.50), де відносно узагальнених гідродинамічних координат було висловлено найбільш загальне припущення (2.49).

Задля того, щоб мати можливість застосувати теорію Наріманова-Моїсеєва й перейти до простішої асимптотичної модальної системи, необхідно, щоб виконувалися наступні умови:

По-перше, це умова скінченної (не малої) глибини рідини

$$0.4 \lesssim h, \tag{2.57}$$

де h – безрозмірна глибина баку.

По-друге, вимушена частота коливань контейнера σ є близькою до нижньої (першої) власної частоти коливань рідини $\sigma_1 = \sigma_{0,1} = \sigma_{1,0}$ й задовольняє асимптотичне налаштування Моісеєва

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_1^2} - 1 = O(\epsilon^{2/3}) \;\Leftrightarrow\; \Lambda = \bar{\sigma}_1^2 - 1 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma^2} - 1 = O(\epsilon^{2/3}), \tag{2.58}$$

де $O(\epsilon)$ – асимптотичний порядок амплітуди збурення баку.

По-третє, ми вважаємо, що в нас відсутній вторинний (внутрішній) резонанс в гідродинамічній системі, тобто комбінаторні частоти, зокрема, супер гармоніки $n\sigma$ не наближаються до вищих власних частот коливання рідини (концепція вторинних резонансів детально обговорюється в [1]).

В роботі [6] ці три умови застосовано до адаптивної модальної системи (2.50). Було доведено, що тоді теорія Наріманова-Моісєєва автоматично приводить до наступного представлення вільної поверхні

$$\begin{aligned} z = f(x,y,t) = &\underbrace{a_1(t) f_1^{(1)}(x) + b_1(t) f_1^{(2)}(y)}_{O(\epsilon^{1/3})} \\ &+ \underbrace{a_2(t) f_2^{(1)}(x) + b_2(t) f_2^{(2)}(y) + c_1(t) f_1^{(1)}(x) f_1^{(2)}(y)}_{O(\epsilon^{2/3})} \\ &+ \underbrace{a_3(t) f_3^{(1)}(x) + b_3(t) f_3^{(2)}(y) + c_{21}(t) f_2^{(1)}(x) f_1^{(2)}(y) + c_{12}(t) f_1^{(1)}(x) f_2^{(2)}(y)}_{O(\epsilon)} \\ &+ [\text{lin.}] + o(\epsilon), \end{aligned} \tag{2.59}$$

де $\left[f_i^{(1)}(x)\, f_j^{(2)}(y) \right]$ є вищенаведені власні форми коливань рідини, а узагальнені гідродинамічні координати $a_1(t), b_1(t), a_2(t), b_2(t), c_1(t), a_3(t), b_3(t), c_{21}(t), c_{12}(t)$ відповідають $\beta_{i,j}(t)$.

Далі, якщо нехтувати величинами порядку $o(\epsilon)$ в модальних рівняннях (2.50), ці рівняння спрощуються та можна отримати наступну модальну системи типу Моїсеєва-Наріманова, що складається зі звичайних диференціальних рівнянь

$$\ddot{a}_1 + \underline{2\xi_{1,0}\sigma_{1,0}\dot{a}_1} + \sigma_{1,0}^2 a_1 + d_1(\ddot{a}_1 a_2 + \dot{a}_1 \dot{a}_2) + d_2(\ddot{a}_1 a_1^2 + \dot{a}_1^2 a_1) + d_3 \ddot{a}_2 a_1 + d_6 \ddot{a}_1 b_1^2$$

$$+ d_7(\ddot{b}_1 c_1 + \dot{b}_1 \dot{c}_1) + d_8 \ddot{b}_1 a_1 b_1 + d_9 \ddot{c}_1 b_1 + d_{10} \dot{b}_1^2 a_1 + d_{11} \dot{a}_1 \dot{b}_1 b_1 = -P_{1,0}(\ddot{\eta}_1 - S_{1,0} \ddot{\eta}_5 - g\eta_5), \quad (2.60\text{a})$$

$$\ddot{b}_1 + \underline{2\xi_{0,1}\sigma_{0,1}\dot{a}_1} + \sigma_{0,1}^2 b_1 + d_1(\ddot{b}_1 b_2 + \dot{b}_1 \dot{b}_2) + d_2(\ddot{b}_1 b_1^2 + \dot{b}_1^2 b_1) + d_3 \ddot{b}_2 b_1 + d_6 \ddot{b}_1 a_1^2 + d_7(\ddot{a}_1 c_1 + \dot{a}_1 \dot{c}_1) + d_8 \ddot{a}_1 a_1 b_1 + d_9 \ddot{c}_1 a_1 + d_{10} \dot{a}_1^2 b_1 + d_{11} \dot{a}_1 \dot{b}_1 a_1 = -P_{0,1}(\ddot{\eta}_2 + S_{0,1} \ddot{\eta}_4 + g\eta_4); \quad (2.60\text{б})$$

$$\ddot{a}_2 + \underline{2\xi_{2,0}\sigma_{2,0}\dot{a}_2} + \sigma_{2,0}^2 a_2 + d_4 \ddot{a}_1 a_1 + d_5 \dot{a}_1^2 = 0, \quad (2.61\text{a})$$

$$\ddot{b}_2 + \underline{2\xi_{0,2}\sigma_{2,0}\dot{b}_2} + \sigma_{0,2}^2 b_2 + d_4 \ddot{b}_1 b_1 + d_5 \dot{b}_1^2 = 0, \quad (2.61\text{б})$$

$$\ddot{c}_1 + \underline{2\xi_{1,1}\sigma_{2,0}\dot{c}_1} + \hat{d}_1(\ddot{a}_1 b_1 + \ddot{b}_1 a_1) + \hat{d}_3 \dot{a}_1 \dot{b}_1 + \sigma_{1,1}^2 c_1 = 0; \quad (2.61\text{в})$$

$$\ddot{a}_3 + \underline{2\xi_{3,0}\sigma_{3,0}\dot{a}_3} + \sigma_{3,0}^2 a_3 + \ddot{a}_1(q_1 a_2 + q_2 a_1^2) + q_3 \ddot{a}_2 a_1 + q_4 \dot{a}_1^2 a_1 + q_5 \dot{a}_1 \dot{a}_2 = -P_{3,0}(\ddot{\eta}_1 - S_{3,0} \ddot{\eta}_5 - g\eta_5), \quad (2.62\text{a})$$

$$\ddot{c}_{21} + \underline{2\xi_{2,1}\sigma_{2,1}\dot{c}_{21}} + \sigma_{2,1}^2 c_{21} + \ddot{a}_1(q_6 c_1 + q_7 a_1 b_1) + \ddot{b}_1(q_8 a_2 + q_9 a_1^2) + q_{10} \ddot{a}_2 b_1 + q_{11} \ddot{c}_1 a_1 + q_{12} \dot{a}_1^2 b_1 + q_{13} \dot{a}_1 \dot{b}_1 a_1 + q_{14} \dot{a}_1 \dot{c}_1 + q_{15} \dot{a}_2 \dot{b}_1 = 0, \quad (2.62\text{б})$$

$$\ddot{c}_{12} + \underline{2\xi_{1,2}\sigma_{1,2}\dot{c}_{12}} + \sigma_{1,2}^2 c_{12} + \ddot{b}_1(q_6 c_1 + q_7 a_1 b_1) + \ddot{a}_1(q_8 b_2 + q_9 b_1^2) + q_{10} \ddot{b}_2 a_1 + q_{11} \ddot{c}_1 b_1 + q_{12} \dot{b}_1^2 a_1 + q_{13} \dot{a}_1 \dot{b}_1 b_1 + q_{14} \dot{b}_1 \dot{c}_1 + q_{15} \dot{a}_1 \dot{b}_2 = 0, \quad (2.62\text{в})$$

$$\ddot{b}_3 + \underline{2\xi_{0,3}\sigma_{0,3}\dot{b}_3} + \sigma_{0,3}^2 b_3 + \ddot{b}_1(q_1 b_2 + q_2 b_1^2) + q_3 \ddot{b}_2 b_1 + q_4 \dot{b}_1^2 b_1 + q_5 \dot{b}_1 \dot{b}_2 = -P_{0,3}(\ddot{\eta}_2 + S_{0,3} \ddot{\eta}_4 + g\eta_4), \quad (2.62\text{г})$$

де

$$\sigma_{j,i} = \sigma_{i,j} = \sqrt{g\pi\sqrt{i^2 + j^2}\,\tanh(\pi\sqrt{i^2 + j^2}\,h)} \quad (2.63)$$

є власні частоти коливання рідини,

$$\begin{aligned} P_{i,0} &= P_{0,i} = \frac{2}{\pi i}\tanh(\pi i h)[(-1)^i - 1], \\ S_{i,0} &= S_{0,i} = \frac{2}{\pi i}\tanh(\pi i h/2), \end{aligned} \quad (2.64)$$

і гідродинамічні коефіцієнти при нелінійних членах є функціями безрозмірної глибини h, які обчислюються за формулами

$$d_1 = d^{1,(1,0)}_{(1,0),(2,0)} = t^{0,(1,0)}_{(1,0),(2,0)} + t^{0,(1,0)}_{(2,0),(1,0)}, \quad d_2 = d^{2,(1,0)}_{(1,0),(1,0),(1,0)} = t^{1,(1,0)}_{(1,0),(1,0),(1,0)},$$
$$d_3 = d^{1,(1,0)}_{(2,0),(1,0)}, \quad d_4 = d^{1,(2,0)}_{(1,0),(1,0)}, \quad d_5 = t^{0,(2,0)}_{(1,0),(1,0)}, \quad d_6 = d^{2,(1,0)}_{(1,0),(0,1),(0,1)},$$
$$d_7 = d^{1,(1,0)}_{(0,1),(1,1)} = t^{0,(1,0)}_{(0,1),(1,1)} + t^{0,(1,0)}_{(1,1),(0,1)}, \quad d_8 = d^{2,(1,0)}_{(0,1),(0,1),(1,0)} + d^{2,(1,0)}_{(0,1),(1,0),(0,1)},$$
$$d_9 = d^{1,(1,0)}_{(1,1),(0,1)}, \quad d_{10} = t^{1,(1,0)}_{(0,1),(0,1),(1,0)}, \quad d_{11} = t^{1,(1,0)}_{(1,0),(0,1),(0,1)} + t^{1,(1,0)}_{(0,1),(1,0),(0,1)};$$
$$\hat{d}_1 = d^{1,(1,1)}_{(1,0),(0,1)} = d^{1,(1,1)}_{(0,1),(1,0)}, \quad \hat{d}_3 = t^{0,(1,1)}_{(1,0),(0,1)} + t^{0,(1,1)}_{(0,1),(1,0)};$$
$$q_1 = d^{1,(3,0)}_{(1,0),(2,0)}, \quad q_2 = d^{2,(3,0)}_{(1,0),(1,0),(1,0)}, \quad q_3 = d^{1,(3,0)}_{(2,0),(1,0)}, \quad q_4 = t^{1,(3,0)}_{(1,0),(1,0),(1,0)},$$
$$q_5 = t^{0,(3,0)}_{(1,0),(2,0)} + t^{0,(3,0)}_{(2,0),(1,0)}, \; q_6 = d^{1,(2,1)}_{(1,0),(1,1)}, \; q_7 = d^{2,(2,1)}_{(1,0),(1,0),(0,1)} + d^{2,(2,1)}_{(1,0),(0,1),(1,0)},$$
$$q_8 = d^{1,(2,1)}_{(0,1),(2,0)}, \quad q_9 = d^{2,(2,1)}_{(0,1),(1,0),(1,0)}, \quad q_{10} = d^{1,(2,1)}_{(2,0),(0,1)}, \quad q_{11} = d^{1,(2,1)}_{(1,1),(1,0)},$$
$$q_{12} = t^{1,(2,1)}_{(1,0),(1,0),(0,1)}, \quad q_{13} = t^{1,(2,1)}_{(1,0),(0,1),(1,0)} + t^{1,(2,1)}_{(0,1),(1,0),(1,0)},$$
$$q_{14} = t^{0,(2,1)}_{(1,0),(1,1)} + t^{0,(2,1)}_{(1,1),(1,0)}, \; q_{15} = t^{0,(2,1)}_{(0,1),(2,0)} + t^{0,(2,1)}_{(2,0),(0,1)}.$$

Ці модальні рівняння не містять вертикальних збурень, пов'язаних із узагальненою координатою $\eta_3(t)$. Чому це так для теорій Наріманова-Моісєєва пояснюється в главі 5 книги [1]. В математичному та фізичному плані цікавим фактом є те, що ці асимптотичні модальні рівняння також не містять узагальненої координати $\eta_6(t)$ (гойдання). З цього випливає, що при вимушеному розгойдувальному русі тіла із частотою, близькою до найменшої власної частоти хлюпання $\sigma_1 = \sigma_{0,1} = \sigma_{1,0}$, збурення за цією ступінню вільності впливає тільки на лінійні компоненти хвильових рухів представленні (2.59).

Узагальнені гідродинамічні координати третього порядку є 'driven', тобто (2.60)–(2.61) не залежить від a_3, b_3, c_{12} and c_{21}, але (2.62) містить лише лінійні частини узагальнених гідродинамічних координат. Ці узагальнені координати та рівняння (2.62) є необхідними математичними елементами системи Наріманова-Моїсеєва, які вимагають врахування усіх компонент порядку $O(\epsilon)$.

На відміну від попередніх класичних робіт, пов'язаних із теорією Наріманова-Моісєєва, модальна система містить у собі лінійні члени, які відповідають за демпфування. Їх підкреслено у рівняннях. Демпфува-

ння є важливим для отримання якісних і кількісних результатів, які використовують модальний аналіз для резонансних хвиль. Без врахування демпфування не вдається досягти відповідності експериментальним даним [10, 185]. Саме тому до нелінійної асимптотичної модальної системи типу Наріманова-Моісєєва було додано лінійні члени демпфування, які не випливають із загальної схеми модального моделювання та системи Майлза-Луковського. Ці члени містять коефіцієнти демпфування $\xi_{i,j}$, які формально асоціюються із декрементами затухання двох нижчих власних мод коливання рідини, але насправді введені, аби моделювати вплив на демпфування різноманітних фізичних факторів, які включають в себе ламінарні в'язкі граничні шари на змоченій поверхні баку [1, Eqs. (6.139)].

Отже, наші асимптотичні модальні рівняння типу Наріманова-Моїсеєва містять лише лінійні члени демпфування з коефіцієнтами демпфування $\xi_{i,j}$. Коефіцієнти накопичують інтегральний ефект демпфування, спричинений різноманітними явищами в'язкості, які утримують компоненти вихору локалізованими у відносно невеликих частках області, так що, в цілому, хлюпання задовільно описується в рамках модальної теорії, яка передбачає ідеальну рідину з безвихровими потоками. Лінійне демпфування в чистому резервуарі детально розглядається в [1, Chapter 6]. Там коефіцієнти демпфування $\xi_{i,j}$ визначаються лінійним граничним шаром на змоченій поверхні резервуара. Книга [1, Eq. (6.140)] наводить асимптотичне наближення коефіцієнтів демпфування

$$\xi_{i,j}^{layer} = \sqrt{\frac{\nu}{2L^2\sigma_{i,j}}}\left[3 + 2\pi\frac{\sqrt{i^2+j^2}\,(0.5-h)}{\sinh(2\pi\sqrt{i^2+j^2}\,h)}\right] < \xi_{i,j} \tag{2.65}$$

за умови, що $\sqrt{\nu/(2L^2\sigma_{i,j})} \ll 1$, де ν — коефіцієнт кінематичної в'язкості.

Як обговорювалося в [1, Sect. 6.3.1], (2.65) надає досить точну оцінку коефіцієнтів демпфування для нижніх власних форм коливання рідини у відносно великому прямокутному резервуарі для лінійного наближення. Коли $L \lesssim 0,2$ м, експериментальні коефіцієнти демпфування можуть бути більшими за це теоретичне значення, що можна пояснити ефектом динамічного кута контакту (меніску). Книга [1, рис. 6.6] ілюструє цей

факт шляхом порівняння коефіцієнтів демпфування для басейнів із люциту та скла, які явно відрізняються та є більшими за оцінку (2.65). Коефіцієнти демпфування $\xi_{i,j}^{layer}$ наближаються до нуля зі збільшенням горизонтального розміру резервуара L. Однак це не означає, що інтегральні коефіцієнти демпфування $\xi_{i,j}$ суттєво зменшуються для цієї межі, особливо для резонансних хвиль. Причиною цього є те, що резонансне хлюпання викликає специфічні локальні явища на вільній поверхні. Стаття [186] обговорює це стосовно кругових резервуарів. Фактичне значення $\xi_{0,1} = \xi_{1,0}$ має бути принаймні удвічі більшим за $\xi_{1,0}^{layer} = \xi_{0,1}^{layer}$ для нелінійних резонансних хлюпань.

Для резонансних збурень рідини коефіцієнти демпфування $\xi_{i,j}$ розглядаються на асимптотичній шкалі модальної системи Наріманова-Моісєєва. В роботі [185], аби мати аргументи відносно того, що демпфуванням вищих форм можна було знехтувати й зосередитися виключно на інтегральному впливу демпфування на поведінку усталених рухів, постулювалося

$$\xi_{i,j} = \xi_{j,i} = O(\epsilon^{2/3}). \tag{2.66}$$

Саме тоді, базуючись на асимптотичних співвідношеннях Наріманова-Моїсеєва, вплив такого роду коефіцієнтів демпфування на нерезонансні рухи вищих форм (рівняння (2.61) and (2.62) мають порядок величини $O(\epsilon^{4/3})$ та $O(\epsilon^{5/3})$. Відповідно ними можна знехтувати при розгляді періодичних розв'язків для a_2, b_2, c_1 та a_3, b_3, c_{12}, c_{21}. Зауважимо, що припущення (2.66) дійсно дозволяє досить точно описати якісний та кількісний вплив демпфування на характер усталених хвиль та їх амплітудні характеристики. В той же час, він не спроможний ефективно моделювати зсуви фаз між хвилею та збуреннями [176]. Останній випадок вимагає враховувати нелінійний характер демпфування та втрати енергії. Тому в даній дисертаційній роботі ми зосереджуємося виключно на амплітудних характеристиках.

2.5. Висновки до розділу

В даному розділі, виходячи зі варіаційної постановки задачі у формі Бейтмена-Люка та загальної нелінійної модальної системи типу Майлза-Луковського, формується та виводиться (описана загальна схема) адаптивна слабко-нелінійна адаптивна модальна система, а згодом й асимптотична модальна система типу Наріманова-Моісєєва для вертикального контейнера квадратного перерізу [8]. До цієї системи інкорпоровано лінійні члени, які відповідають на демпфування власних форм коливань (їх логарифмічних декрементів затухань), постулювавши, (2.66), де малий параметр ϵ асоціюється із безрозмірною амплітудою збурення контейнера, причому $O(\epsilon^{1/3})$ характеризує безрозмірну домінантну амплітуду усталеної резонансної хвилі.

Припущення відносно асимптотичного порядку (2.66) в контексті природи та математики асимптотичної модальної системи типу Наріманова-Моісєєва фактично означає, що аналіз нехтує демпфуванням недомінантних власних форм (узагальнених гідродинамічних координат), а також нелінійністю демпфування взагалі. Всі в'язкі дисипативні втрати асоціюється із демпфуванням виключно двох домінантних власних форм коливань, пов'язаних у побудованій модальній системі із узагальненими гідродинамічними координатами $a_1(t)$ та $b_1(t)$. Таке припущення показало свою ефективність для якісного та кількісного аналізу амплітудних параметрів усталених резонансних хвиль.

Ця нелінійна модальна система типу Наріманова-Моісєєва має досить просту аналітичну структуру, що дозволяє будувати її аналітичні періодичні розв'язки та досліджувати їх властивості, включаючи стійкість. Таким чином, використовуючи виведену модальну систему, можна поставити та розв'язати задачу класифікації всіх можливих усталених резонансних режимів, що виникають у випадку довільних періодичних непараметричних (без вертикальних) збурень баку із частотою σ, близькою до першої власної частоти коливання рідини. Така класифікація резонансних режимів буде проведена у наступному розділі.

Класифікація усталених періодичних розв'язків та відповідних резо-

нансних нелінійних хвиль передбачає декілька кроків.

По-перше, будуть побудовані у самому загальному вигляді періодичні асимптотичні розв'язки нелінійної асимптотичної модальної системи. Вони мають період $T = 2\pi/\sigma$.

По-друге, буде встановлена взаємно однозначна відповідність між такими розв'язками, відповідними типами хвильового руху рідини, а також типами збурень (бо за визначенням бак рухається довільно періодично з малою амплітудою).

По-третє, буде досліджено амплітудно-частотні характеристики усталених розв'язків, на яких можна буде побачити як зміна безрозмірного частотного параметра σ/σ_1, а також інших вхідних параметрів гідромеханічної системи можуть призводити до переходів між різними режимами хвиль, включаючи симетричні та несиметричні хвильові патерни. Аналіз таких переходів є важливим для розуміння нелінійної динаміки системи та прогнозування її поведінки в умовах резонансу. Буде виявлено випадки мультистійкості (два чи більше усталених хвильових рухів співіснують для тих самих вхідних параметрів), хаосу (не існує жодного усталеного розв'язку), різного типу біфуркації.

Ключову роль у задачі класифікації відіграють параметри, що характеризують геометрію та кінематику руху контейнера. Оскільки в розділі 3 буде доведено, що в асимптотичному сенсі будь-який періодичний рух можна звести до еквівалентного еліптичного поступального горизонтального збурення контейнера, хвилі повинні бути класифіковані відносно параметрів такої еліптичної орбітальної траєкторії. До таких параметрів, зокрема, належить коефіцієнт півосі $0 \leq |\delta_1| \leq 1$, який визначає форму горизонтальної проєкції еліптичного руху бака, а також його кутове положення і напрям. Буде встановлено, що значення цього параметра суттєво впливає на структуру хвильових режимів та їхню стійкість. При тому, особливий інтерес становить граничний випадок $\delta_1 = 0$, який відповідає виродженій конфігурації руху. Цей випадок було детально проаналізовано теоретично, а також підтверджено експериментально з використанням результатів роботи [10]. Узгодженість теоретичних і екс-

перименталь них результатів у цьому випадку свідчить про адекватність запропонованої моделі та коректність прийнятих припущень.

Розділ 3

Усталені резонансні хвилі та їх класифікація: аналітичні асимптотичні розв'язки та їх стійкість

Модальна асимптотична система Наріманова-Моісеєва (2.60)–(2.62) може бути використана для класифікації усталених (періодичних) резонансних хвиль у випадку довільного збурення бака малої амплітуди з частотою, близькою до першої власної частоти коливань. Така класифікація передбачає на першому етапі побудову всіх можливих аналітичних періодичних розв'язків цієї модальної системи, бо саме періодичні розв'язки описують відповідні усталені хвилі, а також дослідження стійкості та біфуркацій побудованих розв'язків.

Далі процедура передбачає аналіз залежності цих розв'язків від вхідних параметрів системи, що дозволить тоді визначити які типи усталених хвиль реалізуються залежно від значення цих параметрів. Це стосується типів періодичних рухів баку та частоти. Важливою складовою є також визначення стійкості побудованих розв'язків, а також ідентифікація вхідних параметрів, для яких існує декілька стійких усталених хвиль (особливо це цікаво, якщо це хвилі різного типу) чи не існує взагалі жодної стійкої усталеної хвилі, а, отже, може реалізовуватися хаос.

Необхідність застосування саме аналітичних методів і підходів до класифікації усталених резонансних хвиль через побудову аналітичних розв'язків зумовлена тим, що, як показують експериментальні дослідження, існують діапазони хаотичних хвиль, а також можливе існування кількох стійких розв'язків задачі за однакових вхідних параметрів. Це було, зокрема, показано в класичній вже статті [6], як теоретично, так в експериментах. Мультистійкість як і хаос важко однозначно виявити завдяки чисельним експериментам із модальною системою шляхом пере-

бору початкових умов (початкових сценаріїв) для всіх допустимих класів вхідних параметрів, які характеризують збурення баку.

3.1. Асимптотичні аналітичні періодичні розв'язки системи (2.60)–(2.62) та їх стійкість

Асимптотична схема побудови узагальнених $T = 2\pi/\sigma$-періодичних розв'язків системи диференціальних рівнянь (2.60)–(2.62), розв'язків, які описують усталені хвилі при періодичних резонансних збуреннях бака, була запропонована ще в класичній роботі [6], але лише для поступальних рухів баку уздовж стінок та діагоналі. Поставлена перед дисертантом задача вимагала узагальнення цієї процедури для довільних T-періодичних узагальнених координат $\eta_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Згідно асимптотичних співвідношень Наріманова-Моісєєва, лише перші дві узагальнені гідродинамічні координати мають найнижчий асимптотичний порядок. Більш того, згідно аналізу в роботі [6], для періодичних розв'язків цей найнижчий порядок має лише перша Фурьє гармоніка. Це означає, що можна зразу постулювати для єдиної в системі компоненти найнижчого порядку

$$\begin{aligned} a_1(t) &= a\cos\sigma t + \bar{a}\sin\sigma t + O(\epsilon), \\ b_1(t) &= \bar{b}\cos\sigma t + b\sin\sigma t + O(\epsilon), \end{aligned} \tag{3.1}$$

де є введено чотири амплітуди найменшого порядку $a, \bar{a}, b, \bar{b} \sim O(\epsilon^{1/3})$.

Далі, використовуючи анзатц (3.1) та підставляючи його в (2.61), можна аналітично визначити компоненти асимптотичного розв'язку порядку $O(\epsilon^{2/3})$. Такі компоненти виникають лише для узагальнених координат $a_2(t)$, $b_2(t)$ та $c_1(t)$, які стають квадратичними функціями від безрозмірних домінантних амплітуд $a, \bar{a}, \bar{b}, b$. Відповідні явні вирази для цих узагальнених гідродинамічних координат мають вигляд

$$\begin{aligned} a_2 &= p_0(a^2 + \bar{a}^2) + h_0(a^2 - \bar{a}^2)\cos 2\sigma t + 2h_0 a\bar{a}\sin 2\sigma t + o(\epsilon), \\ b_2 &= p_0(\bar{b}^2 + b^2) + h_0(\bar{b}^2 - b^2)\cos 2\sigma t + 2h_0\bar{b}b\sin 2\sigma t + o(\epsilon), \\ c_1 &= p_1(a\bar{b} + \bar{a}b) + h_1(a\bar{b} - \bar{a}b)\cos 2\sigma t + h_1(\bar{a}\bar{b} + ab)\sin 2\sigma t + o(\epsilon); \end{aligned} \tag{3.2}$$

де коефіцієнти h_0, h_1 та p_0 обчислюються за формулами

$$p_0 = \frac{d_4 - d_5}{2\bar{\sigma}^2_{2,0}},\ h_0 = \frac{d_4 + d_5}{2(\bar{\sigma}^2_{2,0} - 4)},\ p_1 = \frac{2\hat{d}_1 - \hat{d}_3}{2\bar{\sigma}^2_{1,1}},\ h_1 = \frac{2\hat{d}_1 + \hat{d}_3}{2(\bar{\sigma}^2_{1,1} - 4)}; \quad (3.3)$$

тут, як вже було визначено,

$$\bar{\sigma}^2_{i,j} = \frac{\sigma^2_{i,j}}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2_{i,j}}{\sigma^2_1} + O(\epsilon^{2/3}), \quad (3.4)$$

де асимптотичне наближення пов'язується із налаштуванням Моісєєва (2.58) при побудові модальної системи Наріманова-Моісєєва. Останнє наближення (3.4) означає, що в рамках теорії Наріманова-Моісєєва при побудові асимптотичних розв'язків можна підставляти $\sigma = \sigma_{1,0} = \sigma_{0,1} = \sigma_1$ у вирази для коефіцієнтів таких розв'язків.

Після підстановки наближення другого порядку (3.2) разом із наближенням першого порядку (3.1) в рівняння для перших двох узагальнених координат (2.60) виникають, з урахуванням налаштування Моісєєва (2.58) виключно члени порядку $O(\epsilon)$ (та вищі, якими ми нехтуємо), які містять лише першу та третю гармоніки Фур'є. За результатами, для кожного з двох рівнянь (2.60) можна згрупувати чотири і тільки чотири компоненти, пропорційні $\sin\sigma t$, $\cos\sigma t$, $\sin 3\sigma t$ та $\cos 3\sigma t$. Коефіцієнти при цих гармоніках повинні бути нулями. Самі ж коефіцієнти є складними виразами відносно чотирьох домінантних амплітудних параметрів $a, \bar{a}, \bar{b}$ і b.

Прирівнюючи ці коефіцієнти до нуля в двох рівняннях (2.60) при перших гармоніках $\sin\sigma t$ та $\cos\sigma t$ породжує, відповідно чотири рівняння, які по своїй суті є "секулярними", бо виникають як необхідна умова існування періодичного розв'язку. Ця умова існування виводить рівняння відносно $a, \bar{a}, b, \bar{b}$, які мають вигляд

$$\begin{cases} ① \ a\left[\Lambda + m_1(a^2 + \bar{a}^2) + m_2\bar{b}^2 + m_3 b^2\right] + \bar{a}\left[(m_2 - m_3)\bar{b}b + \xi\right] = \epsilon_x, \\ ② \ \bar{a}\left[\Lambda + m_1(a^2 + \bar{a}^2) + m_2 b^2 + m_3\bar{b}^2\right] + a\left[(m_2 - m_3)\bar{b}b - \xi\right] = \bar{\epsilon}_x, \\ ③ \ b\left[\Lambda + m_1(b^2 + \bar{b}^2) + m_2\bar{a}^2 + m_3 a^2\right] + \bar{b}\left[(m_2 - m_3)\bar{a}a - \xi\right] = \epsilon_y, \\ ④ \ \bar{b}\left[\Lambda + m_1(b^2 + \bar{b}^2) + m_2 a^2 + m_3\bar{a}^2\right] + b\left[(m_2 - m_3)\bar{a}a + \xi\right] = \bar{\epsilon}_y, \end{cases} \quad (3.5)$$

де безрозмірні коефіцієнти m_1, m_2 та m_3 є функціями безрозмірної глибини рідини h, які обчислюються за формулами

$$\begin{aligned} m_1 &= -\tfrac{1}{2}d_2 - d_1(p_0 - \tfrac{1}{2}h_0) - 2h_0 d_3, \\ m_2 &= -\tfrac{3}{4}d_6 + \tfrac{1}{4}d_{10} - \tfrac{3}{4}d_8 + \tfrac{1}{4}d_{11} - d_7 p_1 - h_1(\tfrac{1}{2}d_7 + 2d_9 - d_{12}), \\ m_3 &= -\tfrac{1}{4}d_6 + \tfrac{3}{4}d_{10} - \tfrac{1}{4}d_8 - \tfrac{1}{4}d_{11} - h_1(\tfrac{1}{2}d_7 + 2d_9 - d_{12}), \\ \xi &= 2\xi_{0,1} = 2\xi_{1,0}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

причому, як показують обчислення,

$$m_2 < m_1 < 0, \quad 0 < m_3, \quad m_1 + m_3 > 0 \quad \text{для } h_* > 0.3368\ldots, \tag{3.7}$$

($h_* = 0.3368\ldots$ є так званою критичною глибиною [187]).

Розглянемо тепер систему алгебраїчних рівнянь третього порядку (3.5). Права частина цих секулярних рівнянь – безрозмірні амплітуди збурення $\epsilon_x, \bar{\epsilon}_x, \epsilon_y, \bar{\epsilon}_y = O(\epsilon)$, пов'язані з основною гармонікою Фур'є правих частин рівнянь (2.60), тобто вони обчислюються за формулою

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{\sigma^2}\frac{\sigma}{\pi}\int_0^{2\pi/\sigma} \cos\sigma t\, K_x(t)\,\mathrm{d}t; \quad \bar{\epsilon}_x = \frac{1}{\sigma^2}\frac{\sigma}{\pi}\int_0^{2\pi/\sigma} \sin\sigma t\, K_x(t)\,\mathrm{d}t, \\ \bar{\epsilon}_y &= \frac{1}{\sigma^2}\frac{\sigma}{\pi}\int_0^{2\pi/\sigma} \cos\sigma t\, K_y(t)\,\mathrm{d}t; \quad \epsilon_y = \frac{1}{\sigma^2}\frac{\sigma}{\pi}\int_0^{2\pi/\sigma} \sin\sigma t\, K_y(t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{3.8}$$

де

$$\begin{aligned} K_x(t) &= -P_{1,0}(\ddot{\eta}_1 - S_{1,0}\ddot{\eta}_5 - g\eta_5), \\ K_y(t) &= -P_{0,1}(\ddot{\eta}_2 + S_{0,1}\ddot{\eta}_4 + g\eta_4). \end{aligned}$$

Важливо, що ці праві частини не залежать від вищих гармонік. Це буде використано надалі для класифікації зовнішніх збурень. Оскільки основним об'єктом дослідження є резонансні збурення найменшої власної частоти коливання рідини, то принаймні одна з амплітуд збурення $\epsilon_x, \bar{\epsilon}_x, \bar{\epsilon}_y$ та ϵ_y не дорівнює нулю.

Ліва частина секулярної системи рівнянь (3.5) сформульована відносно безрозмірних амплітуд $a, \bar{a}, b, \bar{b}$, а також безрозмірним частотним параметром Λ, визначеним в (2.58). Знайшовши ці амплітудні параметри з (3.5), можна визначити амплітудні компоненти першого порядку малості для усталених хвиль у термінах узагальнених гідродинамічних

координат (3.1), а також зразу записати наближення другого порядку (3.2), пов'язані з узагальненими координатами a_2, b_2 і c_1.

Зазначимо, що узагальнені гідродинамічні координати третього порядку $a_3(t), b_3(t), c_{12}(t)$ та $c_{21}(t)$ не входять до підсистеми (2.60)–(2.61); їх отримують із підсистеми (2.62). Це пояснює чому асимптотичні компоненти порядку $O(\epsilon)$ періодичного розв'язку не впливають на амплітудні параметри $a, \bar{a}, b, \bar{b}$. В той же час, знаючи наближення порядку $O(\epsilon^{1/3})$ та $O(\epsilon^{2/3})$, легко вивести наближення порядку $O(\epsilon)$, розглянувши коефіцієнти при гармоніках $\sin 3\sigma t$ та $\cos 3\sigma t$ в усіх дев'яти рівняннях модальної системи Наріманова-Моісєєва. Процедура описана в класичній роботі [6]. Наближення третього порядку не є предметом детального розгляду даної дисертаційної роботи, бо характер усталених хвиль визначається розв'язком секулярних рівнянь, а, отже, залежить лише від першого та другого наближення.

Для дослідження стійкості (усталених) періодичних розв'язків може бути застосовано лінійний метод Ляпунова та метод розділення швидкого та повільного часів. Важливо, що процедура дослідження стійкості також залежить виключно від першого та другого наближення, пов'язаного з безрозмірними амплітудними параметрами $a, \bar{a}, \bar{b}$ і b.

Отже, для дослідження стійкості введемо змінну $\tau = \frac{1}{2}\epsilon^{2/3}\bar{\sigma}t$, яка описує повільну часову шкалу. Порядок цієї змінної обрано відповідно до налаштування Моісеєва $\bar{\sigma}^{-2} - 1 = O(\epsilon^{2/3})$. На першому кроці представимо збурені періодичні розв'язки подамо у вигляді

$$\begin{aligned} a_1 &= (a + \alpha(\tau))\cos\bar{\sigma}t + (\bar{a} + \bar{\alpha}(\tau))\sin\bar{\sigma}t + o(\epsilon^{1/3}), \\ b_1 &= (\bar{b} + \bar{\beta}(\tau))\cos\bar{\sigma}t + (b + \beta(\tau))\sin\bar{\sigma}t + o(\epsilon^{1/3}), \end{aligned} \tag{3.9}$$

що, фактично, описує модульовані (відносно строго періодичних) хвилі, в яких збурена амплітуда змінюється за повільним часом.

Підставляючи (3.9) в модальну систему Наріманова-Моісєєва (2.60)–(2.61), виділяючи члени найменшого порядку та зберігаючи лише лінійні за $\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}$ члени, отримуємо лінійну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\mathbf{s}' + \xi\mathbf{s} + \mathcal{S}\,\mathbf{s} = 0, \tag{3.10}$$

де $\mathbf{s} = (\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta})^T$, штрих означає диференціювання за τ, а матриця $\mathcal{S}$ має такі елементи

$$
\begin{aligned}
&s_{11} = -2m_1 a\bar{a} - (m_2 - m_3)b\bar{b}; \quad s_{12} = -\Lambda - m_1 a^2 - 3m_1\bar{a}^2 - m_2 b^2 - m_3\bar{b}^2,\\
&s_{13} = -2m_2\bar{a}b - (m_2 - m_3)a\bar{b}; \quad s_{14} = -2m_3\bar{a}\bar{b} - (m_2 - m_3)ab,\\
&s_{21} = \Lambda + 3m_1 a^2 + m_1\bar{a}^2 + m_2\bar{b}^2 + m_3 b^2; \quad s_{22} = 2m_1 a\bar{a} + (m_2 - m_3)b\bar{b},\\
&s_{23} = 2m_3 ab + (m_2 - m_3)\bar{a}\bar{b}; \quad s_{24} = 2m_2 a\bar{b} + (m_2 - m_3)\bar{a}b,\\
&s_{31} = 2m_2 a\bar{b} + (m_2 - m_3)b\bar{a}; \quad s_{32} = 2m_3\bar{a}\bar{b} + (m_2 - m_3)ab,\\
&s_{33} = 2m_1 b\bar{b} + (m_2 - m_3)a\bar{a}; \quad s_{34} = \Lambda + m_1 b^2 + 3m_1\bar{b}^2 + m_2 a^2 + m_3\bar{a}^2,\\
&s_{41} = -2m_3 ab - (m_2 - m_3)\bar{a}\bar{b}; \quad s_{42} = -2m_2\bar{a}b - (m_2 - m_3)a\bar{b},\\
&s_{43} = -\Lambda - 3m_1 b^2 - m_1\bar{b}^2 - m_2\bar{a}^2 - m_3 a^2; \quad s_{44} = -2m_1 b\bar{b} - (m_2 - m_3)a\bar{a}.
\end{aligned}
$$

Фундаментальний розв'язок $\mathbf{s} = \exp(\lambda\tau)\mathbf{a}$ системи диференціальних рівнянь (3.10) визначається спектральною задачею для матриці $[(\lambda + \xi)I + \mathcal{S}]\mathbf{a} = 0$, де λ — власні значення, а $\mathbf{a}$ — відповідні власні вектори. Відносно прості аналітичні викладки приводять до характеристичного біквадратного рівняння

$$(\lambda + \xi)^4 + s_1(\lambda + \xi)^2 + s_0 = 0, \tag{3.11}$$

де s_0 — визначник матриці $\mathcal{S}$, а s_1 — складна функція від її елементів.

Власні значення λ можна подати у вигляді

$$\lambda = -\xi \pm \sqrt{x_{1,2}},$$

де

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-s_1 \pm \sqrt{s_1^2 - 4s_0}\right)$$

розв'язки квадратного рівняння $x^2 + s_1 x + s_0 = 0$.

Таким чином, асимптотичний розв'язок, пов'язаний з $a, \bar{a}, b$ і $\bar{b}$ та Λ, є асимптотично стійким (тобто $\alpha, \bar{\alpha}, \beta$ і $\bar{\beta}$ експоненціально спадають за τ) тоді і тільки тоді, коли дійсна частина λ є від'ємною. Умова стійкості

може бути записана у такому вигляді

$$\begin{aligned} & s_1^2 - 4s_0 \geq 0 \quad \wedge \quad -s_1 + \sqrt{s_1^2 - 4s_0} \leq 0 \\ & \qquad (\Leftrightarrow s_0 \geq 0 \quad \wedge \quad s_1 \geq 0)\,, \\ \text{або} \quad & s_1^2 - 4s_0 \geq 0 \quad \wedge \quad -s_1 + \sqrt{s_1^2 - 4s_0} > 0 \\ & \qquad \wedge \quad \sqrt{\frac{1}{2}\left(-s_1 + \sqrt{s_1^2 - 4s_0}\right)} < \xi, \\ \text{або} \quad & s_1^2 - 4s_0 < 0 \quad \wedge \quad \sqrt{2\sqrt{s_0} - s_1} < \xi. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Це ще раз підтверджує, що стійкість за Ляпуновим побудованого асимптотичного періодичного розв'язку залежить виключно від параметрів $a, \bar{a}, b, \bar{b}$ та Λ.

3.2. Класифікація зовнішніх збурень: еквівалентні орбітальні рухи бака в рамках асимптотичної теорії Наріманова-Моісєєва

У попередньому параграфі було показано, що наближення першого та другого порядку визначають характер усталених хвиль та їх стійкість за Ляпуновим. При тому все визначається розв'язками секулярних рівнянь (3.5), де у лівій частині присутні кубічні алгебраїчні рівняння відносно безрозмірних амплітудних параметрів (домінантна компонента асимптотичного розв'язку), а у правій частині стоять чотири амплітудних параметрів зовнішнього збурення $\epsilon_x, \bar{\epsilon}_x, \bar{\epsilon}_y$ та ϵ_y, які є по суті коефіцієнтами Фур'є розкладу правої частини рівнянь (2.60), коефіцієнтами при нижчих гармоніках. Виходить так, що лише ці нижчі гармоніки збурення двох основних власних форм коливання рідини визначають характер та стійкість усталених резонансних хвиль для першого та другого наближення.

Наш подальший аналіз концентрується лише на наближеннях першого та другого порядку та стійкості Ляпунова відповідних усталених хвильових режимів. А також на чотирьох амплітудних параметрах зовні-

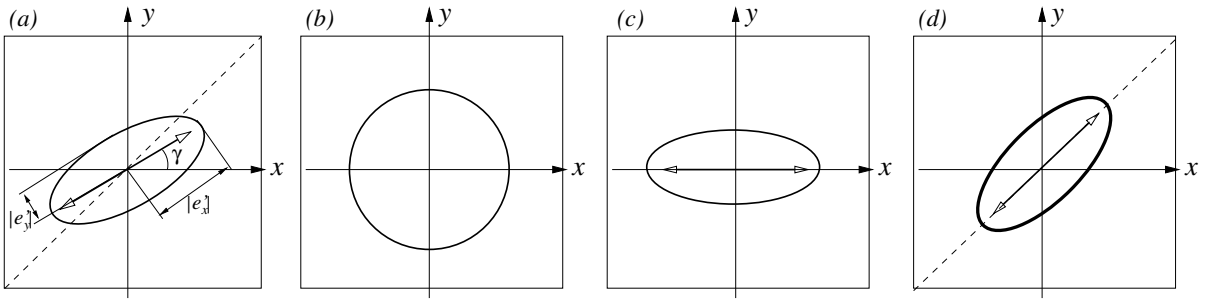

Рис. 3.1. Траєкторія еліптичного руху бака може бути задана за допомогою двох півосей $|e'_x|$ та $|e'_y|$ (без втрати загальності вважаємо, що $0 \le |e'_y| \le |e'_x| \ne 0$), кута γ між головною віссю еліпса та віссю Ox, а також напряму руху (за або проти годинникової стрілки), як схематично показано на (a). Панель (b) відповідає коловому руху ($e'_x = e'_y$). Панелі (c) та (d) ілюструють частинні випадки, коли головна вісь еліпса є паралельною до осей симетрії. Двосторонні стрілки відповідають зворотно-поступальним гармонічним збуренням бака.

шнього збурення $\epsilon_x, \bar\epsilon_x, \bar\epsilon_y$ та ϵ_y, що з'являються у правій частині (2.60)в рамках теорії Наріманова-Моісєєва, яка дозволяє однозначно визначити ці перше і друге асимптотичні наближення. Вважаємо, що ми знаємо лише $\epsilon_x, \bar\epsilon_x, \bar\epsilon_y$ та ϵ_y замість оригінальних рухів баку (збивань, крену, тангажу та рискування) та розглянемо горизонтальний рух резервуара за законом

$$\begin{aligned}
&\eta_1^*(t) = e_x \cos\sigma t + \bar e_x \sin\sigma t, \quad \eta_2^*(t) = \bar e_y \cos\sigma t + e_y \sin\sigma t,\\
&\eta_4^*(t) = \eta_5^*(t) \equiv 0,\\
&\epsilon_x = P_1 e_x, \quad \bar\epsilon_x = P_1 \bar e_x, \quad \bar\epsilon_y = P_1 \bar e_y, \quad \epsilon_y = P_1 e_y,\\
&P_1 = P_{1,0} = P_{0,1} < 0.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Тепер застосуємо асимптотичну теорію Наріманова—Моісеєва до системи, в якій резонансне збурення баку визначається (3.13). Очевидно, воно приводить до ідентичної секулярної системи (3.5). Отже, введений нами горизонтальний рух баку приводить до ідентичних (з точністю до компонент третього порядку малості) усталених хвиль на поверхні рідини. Тому (3.13) можна розглядати як *асимптотично еквівалентний* збурювальний резонансний рух бака.

Такий підхід (перехід від складного оригінального до еквівалентного горизонтального) дозволяє ефективно досліджувати усталений хвильовий рух і його стійкість. Можливість обмежитися лише першими гармоніками Фур'є узагальненого періодичного збуреного руху є важливою перевагою асимптотичної теорії Наріманова—Мойсеєва.

Розглянемо приклад. Нехай бак рухається по лемніскаті Бернуллі в горизонтальній площині з безрозмірною шириною l_a:

$$\eta_1(t) = \frac{l_a \cos \sigma t}{1 + \sin^2 \sigma t} = 2l_a(\sqrt{2} - 1) \cos \sigma t + \dots,$$

$$\eta_2(t) = \frac{l_a \sin \sigma t \cos \sigma t}{1 + \sin^2 \sigma t} = 2l_a(3 - 2\sqrt{2}) \sin 2\sigma t + \dots$$

Відповідно до наведеного аналізу, таке збурення за лемніскатою Бернуллі є асимптотично еквівалентним поздовжньому збуренню баку за законом

$$\eta_1(t) = 2l_a(\sqrt{2} - 1) \cos \sigma t.$$

Різниця між усталеним хлюпанням, спричиненим рухом по лемніскаті Бернуллі, та поздовжнім рухом визначається лише компонентами вищого порядку $O(\epsilon)$, які не впливають на гідродинамічну стійкість. Все, що було раніше зроблено для випадку поздовжних збурень, зразу переноситься на випадок лемніскати Бернуллі.

Важливо зазначити, що така еквівалентність має місце тоді, коли амплітуда збурення є асимптотично меншою за амплітуду коливань рідини, а частота близька до першої. У лінійній апроксимації (тобто для неперіодичних хвиль) її (еквівалентності) не існує.

Отже, у тривимірному випадку будь-який резонансний рух із частотою, близькою до першої власної частоти, має еквівалентну орбіту (3.13). Можна показати, що така орбіта визначається чотирма параметрами $e_x, \bar{e}_x, \bar{e}_y, e_y$, з яких лише три є незалежними. Аналіз зводиться до двох випадків.

Випадок перший: коли виконується умова $e_x e_y - \bar{e}_x \bar{e}_y = 0$, тоді (3.13) описує гармонічний зворотно-поступальний рух (поздовжній, діагональний або під кутом).

Випадок другий: $e_x e_y - \bar{e}_x \bar{e}_y \neq 0$ – бак здійснює поступальний рух вздовж орбіти, що описується рівнянням

$$(e_y^2 + \bar{e}_y^2)\, x^2 + (e_x^2 + \bar{e}_x^2)\, y^2 - 2(e_x \bar{e}_y + \bar{e}_x e_y)\, xy = (e_x e_y - \bar{e}_x \bar{e}_y)^2, \qquad (3.14)$$

яке є рівнянням центрованого еліпсу (легко встановити, використовуючи фундаментальні інваріанти).

Будь-яка центрована еліптична траєкторія повністю визначається:
(i) її півосями $|e'_x|$ та $|e'_y|$ (без втрати загальності $0 \le |e'_y| \le |e'_x| \neq 0$),
(ii) кутом γ між головною віссю та віссю Ox,
(iii) напрямом руху (за або проти годинникової стрілки).

Траєкторії (орбіти) еліптичного руху баку схематично показано на Рис. 3.1 (а). Пам'ятаючи (i)–(iii), розглянемо як відомі величини $|e'_x|$, $|e'_y|$ і γ. Тоді орбітальний рух баку визначається параметрично через

$$\begin{aligned} \eta_1^*(t) &= [e'_x \cos\gamma] \cos\sigma t - [e'_y \sin\gamma] \sin\sigma t, \\ \eta_2^*(t) &= [e'_x \sin\gamma] \cos\sigma t + [e'_y \cos\gamma] \sin\sigma t. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Представлення (3.15) є еквівалентним (3.13) з точністю до фазового зсуву за часом t. При цьому ми вважаємо $e'_x \neq 0$, а знак e'_y визначає напрям руху за законом

$$\begin{aligned} e'_x e'_y > 0 \quad &\text{— проти годинникової стрілки,} \\ e'_x e'_y < 0 \quad &\text{— за годинниковою стрілкою,} \\ e'_x e'_y = 0 \quad &\text{— зворотно-поступальний рух.} \end{aligned} \tag{3.16}$$

Оскільки фазовий зсув $t := t + \theta'/\sigma$ є інваріантом центрованої еліптичної орбіти, представлення (3.13) можна спростити, поклавши $\bar{e}_x = 0$. Аналогічне спрощення можна виконати й для руху бака під кутом (3.15). В останньому випадку фазовий зсув θ' визначається з виразів

$$\cos\theta' = \frac{e'_x \cos\gamma}{\sqrt{e'^2_x \cos^2\gamma + e'^2_y \sin^2\gamma}}, \tag{3.17}$$

$$\sin\theta' = \frac{e'_y \sin\gamma}{\sqrt{e'^2_x \cos^2\gamma + e'^2_y \sin^2\gamma}}. \tag{3.18}$$

Тоді горизонтальну траєкторію збурення (3.15) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \eta_1^*(t) &= \underbrace{|e'_x| \sqrt{\cos^2\gamma + \delta_1^2 \sin^2\gamma}}_{\epsilon_x/P_1} \cos\sigma t, \\ \eta_2^*(t) &= \underbrace{|e'_x| \frac{\cos\gamma \sin\gamma\,(1-\delta_1^2)}{\sqrt{\cos^2\gamma + \delta_1^2 \sin^2\gamma}}}_{\bar{\epsilon}_y/P_1} \cos\sigma t + \underbrace{\frac{|e'_x|\,\delta_1}{\sqrt{\cos^2\gamma + \delta_1^2 \sin^2\gamma}}}_{\epsilon_y/P_1} \sin\sigma t, \end{aligned} \tag{3.19}$$

де

$$-1 \le \delta_1 = \frac{e'_y}{e'_x} \le 1. \tag{3.20}$$

Критерій (3.16) набуває тоді вигляду

$$\begin{cases} \delta_1 > 0 & \text{— проти годинникової стрілки,} \\ \delta_1 < 0 & \text{— за годинниковою стрілкою,} \\ \delta_1 = 0 & \text{— зворотно-поступальний рух.} \end{cases} \tag{3.21}$$

3.3. Амплітудно-фазова форма секулярних рівнянь та методи їх розв'язування

Підставляючи (3.19) у секулярну систему (3.5) та застосовуючи такі лінійні комбінації $\bar{a}\,①-a\,②$, $\bar{b}\,③-b\,④$, $a\,①+\bar{a}\,②$, $b\,③+\bar{b}\,④$, дозволяє переписати секулярну систему (3.5) у вигляді

$$\begin{cases} \boxed{1}: & A\left[\Lambda + m_1 A^2 + (m_3 - F)B^2\right] = \epsilon_x \cos\psi, \\ \boxed{3}: & A\left[DB^2 + \xi\right] = \epsilon_x \sin\psi, \\ \boxed{2}: & B\left[\Lambda + m_1 B^2 + (m_3 - F)A^2\right] \\ & = \epsilon_y \sin\varphi + \bar{\epsilon}_y \cos\varphi = \Upsilon_y \sin(\varphi + \theta''), \\ \boxed{4}: & B\left[DA^2 - \xi\right] \\ & = \epsilon_y \cos\varphi - \bar{\epsilon}_y \sin\varphi = \Upsilon_y \cos(\varphi + \theta''), \end{cases} \tag{3.22}$$

де

$$\begin{aligned} &A = \sqrt{a^2 + \bar{a}^2}, \quad B = \sqrt{\bar{b}^2 + b^2}; \\ &a = A\cos\psi, \quad \bar{a} = A\sin\psi, \quad \bar{b} = B\cos\varphi, \quad b = B\sin\varphi, \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\Upsilon_y = \sqrt{\epsilon_y^2 + \bar{\epsilon}_y^2}, \quad \cos\theta'' = \frac{\epsilon_y}{\Upsilon_y}, \quad \sin\theta'' = \frac{\bar{\epsilon}_y}{\Upsilon_y}, \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned} F &= F(\alpha) = (m_3 - m_2)\cos^2\alpha = \frac{m_3 - m_2}{1 + C^2}, \\ D &= D(\alpha) = (m_3 - m_2)\sin\alpha\,\cos\alpha = \frac{(m_3 - m_2)C}{1 + C^2}, \\ \alpha &= \varphi - \psi, \quad C = \tan\alpha. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Переписавши систему до вигляду (3.22), ми звели її до визначення інтегральних компонент *амплітуд хвиль* (A, B) вздовж осей Ox та Oy та

відповідних *зсувів фаз* (ψ, φ). Такий запис до деякої міри є більш природнім ніж оригінальна секулярна система. Хоч обидві секулярні системи (3.5) та (3.22) залишаються складними для аналітичного дослідження та чисельних обчислень.

Секулярні системи (3.5) та (3.22) є *математично еквівалентними*: знаючи Λ, A, B, ψ, φ із (3.22), можна обчислити Λ, $a, \bar{a}, b, \bar{b}$ і навпаки.

3.3.1. Альтернативні форми системи (3.22). Альтернативний запис секулярної системи можна отримати, виконавши певні перетворення. Першим кроком є операції $\boxed{1}^2+\boxed{3}^2$ та $\boxed{2}^2+\boxed{4}^2$, що приводить до системи двох рівнянь

$$\begin{cases} EQ1 = A^2\Big[(\Lambda + m_1A^2 + (m_3 - F(\alpha))B^2)^2 \\ \qquad\qquad + (D(\alpha)B^2 + \xi)^2\Big] - \epsilon_x^2 = 0, \\ EQ2 = B^2\Big[(\Lambda + m_1B^2 + (m_3 - F(\alpha))A^2)^2 \\ \qquad\qquad + (D(\alpha)A^2 - \xi)^2\Big] - \Upsilon_y^2 = 0. \end{cases} \tag{3.26}$$

Ці рівняння залежать від двох амплітуд та різниці фаз α

Щоб отримати третє рівняння, яке зв'язує лише амплітуди та різницю фаз, підставимо $\varphi = \psi + \alpha$ у $\boxed{2}$ і $\boxed{4}$, а також використаємо вирази для $(\epsilon_x \cos\psi)$ і $(\epsilon_x \sin\psi)$ з $\boxed{1}$ і $\boxed{3}$. У результаті маємо однорідну систему лінійних рівнянь відносно ненульових амплітудних параметрів $[\Upsilon_y A/\epsilon_x]$ та $[B]$,

$$\begin{cases} B\left(\Lambda + m_1B^2 + (m_3 - F)A^2\right) \\ \quad - \left(\dfrac{\Upsilon_y A}{\epsilon_x}\right)\Big[\cos(\alpha + \theta'')(DB^2 + \xi) \\ \qquad + \sin(\alpha + \theta'')\big(\Lambda + m_1A^2 + (m_3 - F)B^2\big)\Big] = 0, \\ B\left(DA^2 - \xi\right) \\ \quad - \left(\dfrac{\Upsilon_y A}{\epsilon_x}\right)\Big[\cos(\alpha + \theta'')\big(\Lambda + m_1A^2 + (m_3 - F)B^2\big) \\ \qquad - \sin(\alpha + \theta'')(DB^2 + \xi)\Big] = 0. \end{cases} \tag{3.27}$$

Із необхідної умови розв'язності цієї системи отримуємо третє рівняння

$$\begin{aligned} EQ3 = \xi(A^2-B^2)\Big[(m_1-m_3)\epsilon_y \sin\alpha + (m_1-m_2)\bar{\epsilon}_y\cos\alpha\Big] \\ + \epsilon_y\cos\alpha\Big[\xi^2 + (\Lambda + m_1(A^2+B^2))(\Lambda+m_2(A^2+B^2)) \\ + (m_1-m_2)^2A^2B^2 - \sin^2\alpha(m_2-m_3)^2A^2B^2\Big] \\ - \bar{\epsilon}_y\sin\alpha\Big[\xi^2 + (\Lambda + m_1(A^2+B^2))(\Lambda+m_3(A^2+B^2)) \\ + (m_1-m_3)^2A^2B^2 - \cos^2\alpha(m_2-m_3)^2A^2B^2\Big] = 0. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Таким чином, система трьох рівнянь (3.26),(3.33) містить чотири параметри Λ, A^2, B^2 і α. Очевидно, що $(\Lambda, A, B, -\pi \le \alpha = \varphi - \psi \le \pi)$ задовольняють (3.22). Крім того, легко показати, що вони задовольняють і (3.26) та (3.33). Однак, на відміну від (3.22), функції $EQ1$, $EQ2$, $EQ3$ є π-періодичними за α. Тому в системах (3.26)–(3.33) неможливо однозначно визначити різницю фаз α, тобто існує інваріантність щодо підстановки $\alpha = \alpha_0 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, де без втрати загальності можна вважати $-\pi/2 \le \alpha_0 \le \pi/2$. Щоб відновити дійсні значення параметра α, зазначимо, що $F(\alpha)$ та $D(\alpha)$ у лівій частині системи (3.22) також є π-періодичними функціями. Звідси випливає, що підстановка $\alpha = \alpha_0 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ залишає $F(\alpha)$ та $D(\alpha)$ інваріантними. Оскільки при $\epsilon_x \Upsilon_y \neq 0$ можна відновити фазові зсуви φ і ψ із (3.22), то відповідно можна визначити і різницю фаз $-\pi \le \alpha = \varphi - \psi \le \pi$. Отже, альтернативні секулярні системи (3.26), (3.33) є *математично еквівалентними* системі (3.22).

3.3.2. Чисельні методи розв'язування секулярної системи. Для знаходження A, B та α розроблено обчислювальний метод, що базується на виключенні тригонометричних доданків від α та їх подальшій заміні на C із рівняння (3.25). Очевидно, що дослідження тривимірного випадку збурення такої секулярної системи є більш складною задачею. Більше того, тривимірне збурення ускладнює як саму систему, так і її розв'язки.

Чисельні експерименти показали, що можливі ситуації, коли існує множина різних розв'язків із малим, але ненульовим C, і водночас для

тих самих параметрів система може мати скінченні, але дуже великі значення C. Отже, задача точного визначення параметра C є чисельно складною.

Зрештою, при обчисленнях усе одно необхідно замінити тригонометричні функції від α. Для цього введемо перетворення

$$0 \le \beta = \cos\alpha_0 \le 1, \quad \sin\alpha_0 = \pm\sqrt{1-\beta^2}, \quad -\pi/2 \le \alpha_0 \le \pi/2. \tag{3.28}$$

Використовуючи це представлення, можна виключити всі тригонометричні функції із систем (3.26), (3.33) та звести їх до системи рівнянь

$$EQ1_{\pm}(\Lambda, A^2, B^2, \beta) = A^2\Big[\left(\Lambda + m_1A^2 + \left(m_3[1-\beta^2] + m_2\beta^2\right)B^2\right)^2 + \left(\pm(m_3-m_2)\beta\sqrt{1-\beta^2}A^2 + \xi\right)^2\Big] - \epsilon_x^2 = 0, \tag{3.29а}$$

$$EQ2_{\pm}(\Lambda, A^2, B^2, \beta) = B^2\Big[\left(\Lambda + m_1B^2 + \left(m_3[1-\beta^2] + m_2\beta^2\right)A^2\right)^2 + \left(\mp(m_3-m_2)\beta\sqrt{1-\beta^2}A^2 + \xi\right)^2\Big] - \Upsilon_y^2 = 0, \tag{3.29б}$$

$$\begin{aligned} EQ3_{\pm}(\Lambda, A^2, B^2, \beta) &= \xi(A^2-B^2) \\ &\left[\pm(m_1-m_3)\delta_1\sqrt{1-\beta^2} + \tfrac{1}{2}(m_1-m_2)\sin 2\gamma\,(1-\delta_1^2)\beta\right] \\ &+ \delta_1\beta[\,\xi^2 + (\Lambda + m_1(A^2+B^2))(\Lambda + m_2(A^2+B^2)) + (m_1-m_2)^2A^2B^2 \\ &- (1-\beta^2)\,(m_2-m_3)^2A^2B^2] \\ &\mp \tfrac{1}{2}\sin 2\gamma\,(1-\delta_1^2)\sqrt{1-\beta^2}[\,\xi^2 + (\Lambda + m_1(A^2+B^2))(\Lambda + m_3(A^2+B^2)) \\ &+ (m_1-m_3)^2A^2B^2 - \beta^2\,(m_2-m_3)^2\,A^2B^2] = 0. \end{aligned} \tag{3.29в}$$

Для аналітичних і чисельних досліджень застосуємо альтернативну форму секулярної системи (3.29). Розглянемо два випадки.

Перший випадок відповідає умовам

$$\begin{aligned} D &= D(\beta) = (m_3-m_2)\beta\sqrt{1-\beta^2} \ge 0, \\ F &= F(\beta) = (m_3-m_2)\beta^2 \ge 0, \end{aligned} \tag{3.30}$$

де невідомі параметри A, β і B належать тривимірній криволінійній трапеції

$$\begin{gathered} 0 < A < \frac{|\epsilon_x|}{\xi}, \quad 0 < \beta \leq 1, \\ 0 < B^2 \leq \min \left[\frac{1}{D(\beta)} \left(\frac{|\epsilon_x|}{A} - \xi \right), \frac{\Upsilon_y^2}{(D(\beta)A^2 - \xi)^2} \right]. \end{gathered} \tag{3.31}$$

Параметри A та β є фіксованими (і не залежать від B), тоді як верхня межа для B залежить від A та β. Розв'яжемо аналітично рівняння $EQ1_{\pm} = 0$ відносно параметра Λ для $(A^2, \beta; B^2) \in (3.31)$:

$$\Lambda = \Lambda_{\pm}^{+}(A^2, \beta; B^2) = -m_1 A^2 - (m_3 - F(\beta))B^2 \pm \sqrt{\frac{\epsilon_x^2}{A^2} - (D(\beta)B^2 + \xi)^2}. \tag{3.32}$$

Підставляючи (3.32) у (3.29б) та (3.29в), отримуємо систему

$$\begin{aligned} EQ2_{+}(\Lambda_{\pm}^{+}(A^2, \beta; B^2), A^2, B^2, \beta) = 0, \\ EQ3_{+}(\Lambda_{\pm}^{+}(A^2, \beta; B^2), A^2, B^2, \beta) = 0, \end{aligned} \tag{3.33}$$

з невідомими A^2, β та B^2, що належать (3.31). Необхідно знайти A^2 та B^2 як функції β.

Розглянемо тепер другий випадок, коли $EQ1_{-} = EQ2_{-} = EQ3_{-} = 0$,

$$\begin{aligned} D = D(\beta) = -(m_3 - m_2)\beta\sqrt{1 - \beta^2} < 0, \\ F = F(\beta) = (m_3 - m_2)\beta^2 > 0. \end{aligned} \tag{3.34}$$

де невідомі належать тривимірній криволінійній трапеції

$$\begin{gathered} 0 < B < \frac{\Upsilon_y}{\xi}, \quad 0 \leq \beta \leq 1, \\ 0 < A^2 \leq \min \left[-\frac{1}{D(\beta)} \left(\frac{\Upsilon_y}{B} - \xi \right), \frac{\epsilon_x^2}{(D(\beta)B^2 + \xi)^2} \right]. \end{gathered} \tag{3.35}$$

Із рівняння (3.29б) випливає

$$\Lambda = \Lambda_{\pm}^{-}(B^2, \beta; A^2) = -m_1 B^2 - (m_3 - F(\beta))A^2 \pm \sqrt{\frac{\Upsilon_y^2}{B^2} - (D(\beta)A^2 - \xi)^2}. \tag{3.36}$$

Отже, необхідно розв'язати систему

$$\begin{aligned} EQ1_{-}\left(\Lambda_{\pm}^{-}(A^2,\beta;B^2),A^2,B^2,\beta\right)=0,\\ EQ3_{-}\left(\Lambda_{\pm}^{-}(A^2,\beta;B^2),A^2,B^2,\beta\right)=0. \end{aligned} \tag{3.37}$$

і знайти змінні A^2, β та B^2, що належать (3.35). Ця система визначає A^2 і B^2 як функції β.

Слід зазначити, що запропонований метод обчислення дозволяє знаходити *усі допустимі розв'язки*, які належать криволінійним тривимірним трапеціям (3.31) та (3.35). Оскільки досліджуються криві амплітудно-частотних характеристик, цей підхід дає змогу ефективно знаходити всі корені, не пропускаючи ні неперервні області розв'язків, ні локальні гілки петльового типу, які, як показали обчислення, можуть виникати з однієї точки для фіксованих вхідних параметрів.

3.4. Класифікація типів усталених хвиль

Базуючись на розв'язках секулярних рівнянь, можна визначитися із типами резонансних усталених поверхневих хвиль. В першому наближенні, таки усталені хвилі представляються через комбіновані хвилі Стокса (2.43) формулою

$$z = S(x,y;a,\bar{b})\cos\sigma t + S(x,y;\bar{a},b)\sin\sigma t + o(\epsilon^{1/3}). \tag{3.38}$$

Використання (3.38) дозволяє визначити *типи* відповідних усталених хвиль за першим наближенням.

Перший тип – режим *стоячої хвилі* (окремі випадки — планарна, діагональна та квадратоподібна/майже діагональна). Цей режим виникає, коли поверхневі патерни $S(x,y;a,\bar{b})$ та $S(x,y;\bar{a},b)$ у (3.38) є геометрично подібними, тобто

$$\exists\, C_1, C_2\ (C_1^2+C_2^2\neq 0) \text{ такі що } C_1 S(x,y;a,\bar{b}) + C_2 S(x,y;\bar{a},b) = 0, \tag{3.39}$$

і, отже, компонента найнижчого порядку в (3.38) набуває такого вигляду

$$z = S(x,y;\gamma_1,\gamma_2)\cos(\sigma t + t_0) + o(\epsilon^{1/3}), \quad \gamma_1,\gamma_2 = O(\epsilon^{1/3}). \tag{3.40}$$

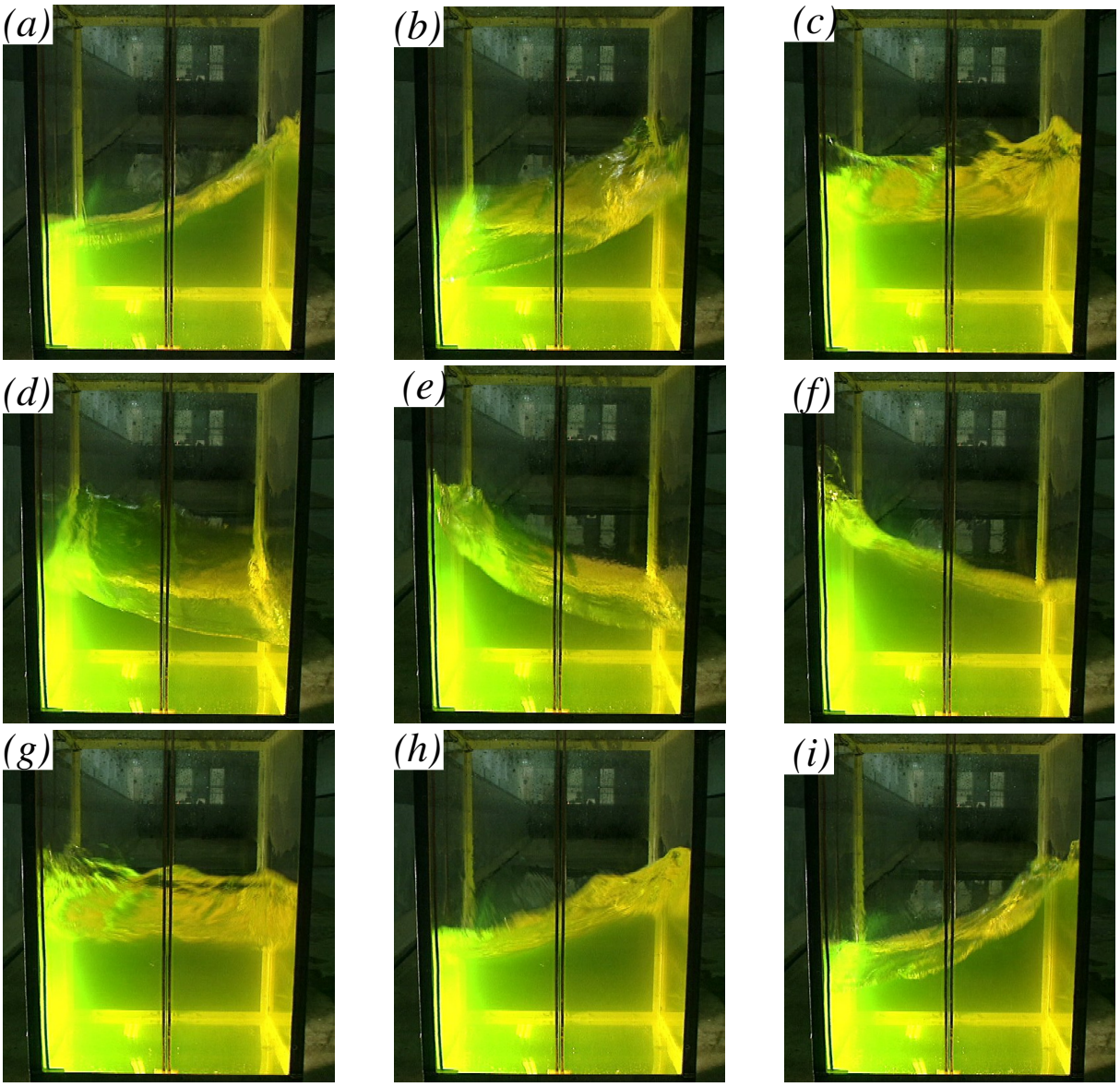

Рис. 3.2. Знімки (від (a) до (i), [6]), що демонструють кругову хвилі проти годинникової стрілки (вигляд зверху) у резервуарі з квадратною основою для безрозмірної глибини рідини $h = 0.508$ при поздовжньому збуренні з амплітудою $\eta_{1a} = 0.0078$. Частота збудження дорівнює найменшій власній частоті системи.

Коли умова (3.39) не виконується, представлення

$$z = S(x, y; a, \bar{b}) \cos \sigma t + S(x, y; \bar{a}, b) \sin \sigma t$$

визначає режим *кругової* хвилі, тобто азимутально-поширювану (бігучу) хвилю, що біжить у напрямку *за годинниковою або проти годинникової стрілки* навколо Oz.

Кругова хвиля для резервуара з квадратною основою дещо відрізняється від кругової хвилі для кругового циліндричного резервуару, коли наближення найнижчого порядку, аналогічне (3.38), може бути переза-

писане в математичній формі, яка чітко ідентифікує азимутальне поширення хвилі. Режим кругової хвилі для резервуара з квадратною основою описує ситуацію, коли «майже плоский гребінь обходить кожну з чотирьох сторін, тоді як майже плоска западина знаходиться на протилежній стороні». Цю хвилю продемонстровано на Рис. 3.2.

Математичний аналіз режиму кругової хвилі може бути здійснений шляхом розгляду вузлової лінії в першому наближенні, тобто залежної від часу кривої на Σ_0, неявно визначеної рівнянням

$$S(x, y; a, \bar{b}) \cos \sigma t + S(x, y; \bar{a}, b) \sin \sigma t = 0.$$

Нерухома вузлова лінія відповідає стоячій хвилі. Коли умова (3.39) не виконується, вузлова лінія змінюється з часом. Більше того, елементарний аналіз показує, що вузлова лінія рівномірно обертається (з деформаціями) навколо осі Oz, а напрямок обертання залежить від знаку

$$\Xi = ab - \bar{a}\bar{b} = AB \sin \alpha, \tag{3.41}$$

так що, оскільки $A, B > 0$, можна розрізнити обертання проти годинникової/за годинниковою стрілкою та стоячі хвилі таким чином

$$\begin{aligned} &\sin \alpha > 0 \ - \text{проти годинникової стрілки,} \\ &\sin \alpha < 0 \ - \text{за годинниковою стрілкою,} \\ &\sin \alpha = 0 \ - \text{стояча,} \end{aligned} \tag{3.42}$$

де α – різниця двох фаз, визначена за формулою (3.25).

Щоб пояснити експериментальні спостереження з роботи [10] та врахувати асимптотичний характер (3.38), необхідно також ввести режим *майже стоячої* хвилі. З математичної точки зору, він виникає, коли $S(x, y; a, \bar{b})$ та $S(x, y; \bar{a}, b)$ визначають подібні поверхневі патерни на прийнятій асимптотичній шкалі $O(\epsilon^{1/3})$, тобто

$$\exists\, C_1, C_2 : \ C_1^2 + C_2^2 = O(1) \text{ такі що } C_1 S(x, y; a, \bar{b}) + C_2 S(x, y; \bar{a}, b) = O(\epsilon^{2/3}) \tag{3.43}$$

і, як наслідок, компонента найнижчого порядку в (3.38) набуває вигляду

$$z = S(x, y; \gamma_1, \gamma_2) \cos(\sigma t + t_0) + S(x, y; \gamma_1', \gamma_2') \cos(\sigma t + t_0') + o(\epsilon^{1/3}), \tag{3.44}$$

де

$$\gamma_1, \gamma_2 = O(\epsilon^{1/3}), \quad \gamma_1', \gamma_2' = O(\epsilon^{2/3}), \text{ і, загалом, } t_0 \neq t_0'. \tag{3.45}$$

З урахуванням останнього типу хвиль, резонансні усталені хвилі розподіляються на режими суто стоячої та майже стоячої хвиль, режим кругової (обертової) хвилі, що реалізується як за годинниковою, так і проти годинникової стрілки, а також нерегулярні хвилі (всі нестійкі усталені хвильові режими реалізуються як хаотичні, модульовані тощо). Такі нерегулярні хвилі були виявлені в експериментах [6, 10]; вони також чисельно підтверджені із застосуванням теорій Нариманова-Моісеєва та адаптивних модальних теорій для випадків поздовжнього та діагонального збудження.

Наступний критерій допомагає ідентифікувати вищенаведені типи усталених хвиль:

$$\begin{aligned}
&O(\epsilon^{1/3}) \lesssim \sin\alpha > 0 && \Leftrightarrow \text{ кругова проти годинникової стрілки,}\\
&O(\epsilon^{1/3}) = \sin\alpha && \Leftrightarrow\ 1-\beta = O(\epsilon^{2/3}) \ \Leftrightarrow \text{ майже стоячі хвилі,}\\
&\sin\alpha = 0 && \Leftrightarrow\ \beta = 1 \ \Leftrightarrow \text{ стоячі хвилі,}\\
&O(\epsilon^{1/3}) \lesssim \sin\alpha < 0 && \Leftrightarrow \text{ кругова за годинниковою стрілкою,}\\
&\text{усі усталені хвилі нестійкі} && \Leftrightarrow \text{ іррегулярні (хаотичні) хлюпання.}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Режими усталених хвиль символічно класифіковано на Рис. 3.3, де, з урахуванням (3.21) та (3.46), можна ввести поняття кругової хвилі, що є співнапрямленою або протилежно напрямленою відносно еліптичної орбіти збурення баку. Відповідний критерій має вигляд

$$\begin{aligned}
&\delta_1 \ \sin\alpha > 0 \text{ – співнапрямлена,}\\
&\delta_1 \ \sin\alpha < 0 \text{ – протилежно напрямлена.}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Подальший аналіз усталених станів оперує амплітудно-частотними кривими у просторі $(\sigma/\sigma_1, A, B)$. Різні типи ліній позначають стійкі та нестійкі розв'язки, а критерії (3.46) та (3.47) використовуються для визначення та аналізу напрямку кругової хвилі. Рис. 3.3 доповнює класифікацію типів хвиль.

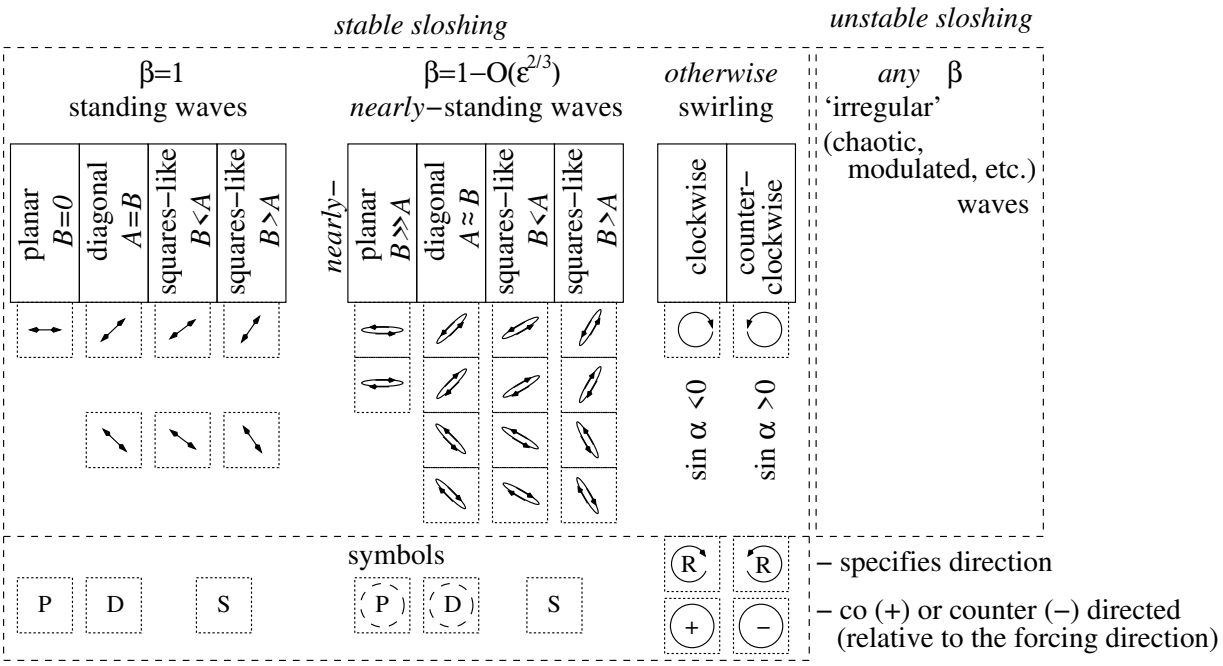

Рис. 3.3. Символічна класифікація режимів усталених хвиль із використанням (3.46). Критерій (3.47) дозволяє розрізнити співнапрямлені та протилежно напрямлені (відносно орбітального руху резервуара) кругові хвилі. Введені символи надалі використовуються як маркери на кривих відгуку амплітуди хвилі.

3.5. Висновки до розділу

В рамках нелінійної асимптотичної модальної теорії Наріманова-Моісєєва показано, що довільний періодичний резонансний рух бака квадратного перерізу з малою амплітудою, включаючи складні просторові траєкторії, може бути асимптотично зведений, з точністю до членів третього порядку малості, до еквівалентного горизонтального орбітального руху контейнера. Цей висновок стосується виключно резонансного збурення першої власної частоти та усталених резонансних хвиль. Таким чином тривимірний резонансний рух бака може бути повністю охарактеризований центрованою еліптичною орбітою, яка задається півосями, кутом нахилу та напрямом руху. Введення трьох параметрів дозволяє не лише параметризувати типи збурення, але й здійснити природну їх класифікацію на зворотно-поступальні та еліптичні орбітальні (за або проти годинникової стрілки). Це має принципове значення для встановлення зв'язку між геометрією збурення та типами хвильових режимів у рідині. Показано, що вищі гармоніки Фур'є у збуренні контейнера впливають

лише на члени вищих порядків малості $O(\epsilon)$ і не визначають якісну структуру усталеного хвильового руху та його стійкість.

При виводі асимптотичних періодичних розв'язків модальної системи типу Наріманова-Моісєєва було виведено секулярну систему (умову існування розв'язків), яка зв'язує амплітуди основних гармонік зовнішнього збурення та чотири домінантні (першого порядку малості) амплітуди усталеної хвилі. Отримано еквівалентні форми секулярних рівнянь, сформульовані відносно двох амплітудних параметрів A та B, а також відповідних зсувів фаз ψ та φ.

Розроблено ефективний чисельний метод розв'язування секулярної системи, який базується на параметричному представленні розв'язків та аналітичному виключенні частини змінних. Показано, що цей метод дозволяє знаходити всі допустимі розв'язки, включаючи як гладкі гілки, так і локальні петльові структури, які можуть виникати внаслідок нелінійної взаємодії мод.

Отримано аналітичне представлення усталеної хвилі у вигляді комбінованих мод Стокса, що дозволяє описати поверхневі коливання рідини як суперпозицію двох таких мод із різними фазовими зсувами. На цій основі введено поняття майже стоячих хвиль, які виникають у випадку близькості відповідних мод та характеризуються специфічною структурою коливань. У результаті запропоновано узагальнену класифікацію усталених резонансних хвильових режимів, яка включає стоячі хвилі, майже стоячі хвилі, кругові хвилі (за та проти годинникової стрілки), а також іррегулярні (нестійкі) режими. Встановлено аналітичні критерії переходу між цими режимами, які формулюються через параметри α (різниця зсувів фаз) та δ_1 (відношення осей еліпса збурення) і дозволяють пов'язати тип хвильового руху з параметрами збурення.

Розділ 4

Амплітудно-частотні характеристики резонансних усталених хвиль

Як показано в останньому параграфі попереднього розділу, ефективні діапазони існування та стійкості трьох типів усталених резонансних хвиль (стоячих, майже стоячих та кругових), стійких чи не стійких, а також іррегулярних хвильових рухів (хаосу) залежать від розв'язків секулярної системи (3.5). Іншими словами, хвильові резонансні режими, які демонструє Рис. 3.3, залежать від значень амплітуд A, B, частотного параметра Λ та кута α (параметра β), які визначаються з секулярної системи (3.29), альтернативних записів секулярної системи (3.5) чи (3.22). Критерії теоретичної ідентифікації цих хвиль за першим наближенням виведено в параграфі 3.4.

Розв'язки секулярної системи (3.29) в свою чергу залежать від значення частоти збурення σ/σ_1 (частотного параметра Λ), а також значень коефіцієнтів m_1, m_2 та m_3. Останні є функціями безрозмірної глибини заповнення баку h. Ці коефіцієнти як функції h досліджувалися в класичній роботі [6], де було показано, що вони мало змінюються для $0.4 \lesssim h$, нерівності, яка є умовою застосовності нелінійної модальної теорії Наріманова-Моісєєва (2.57).

Отже, для практичного аналізу можливих усталених резонансних хвиль достатньо зосередитися на одному репрезентативному значенню глибини рідини $h > 0.4$. Таким значенням може бути $h = 0.6$, для якої проведена серія ґрунтовних експериментів в роботі [10], де досліджувалися усталені коливання рідини для *зворотно-поступальних* (поздовжніх, діагональних та під кутом) гармонічних збурень бака. В тих експериментах також була фіксована безрозмірна амплітуда збурення, проводилися експериментальні оцінки значення коефіцієнту демпфування. Цю

амплітуду можна також зафіксувати у подальших дослідженнях цього розділу.

Крім того, розв'язки секулярної системи залежать від типу збурення. Математично – від значень правих частин $\epsilon_x, \bar{\epsilon}_x, \bar{\epsilon}_y$ та ϵ_y в (3.5). Насправді, як показано у параграфі 3.2, оскільки в рамках нашої асимптотичної теорії для будь-якого періодичного руху баку можна знайти еквівалентний горизонтальний еліптичний орбітальний рух, розв'язки залежать від розміру більшої вісі еліпса збурення $2|e'_x|$, відношення півосей $-1 \leq \delta_1 \leq 1$ (тут знак визначає напрямок руху за (3.21)) та кутом γ між більшою віссю та Ox (див. позначення на Рис. 3.1).

Рис. 3.1 виділяє також окремі найбільш цікаві типи орбітальних збурень, які бажано дослідити, починаючи від кругового, а також граничний випадок $\delta_1 = 0$, який відповідає зворотно-поступальним горизонтальним гармонічним коливанням контейнера.

В даному розділі обираються вхідні параметри з роботи [10], де доповідаються експериментальні результати для поступальних збурень, й виконуються

$$h = 0.6 \;\Rightarrow\; (m_1 = -2.208338,\, m_2 = -3.4721902875,\, m_3 = 3.7126173325),$$
$$|e'_x| = 0.00727 \;\Rightarrow\; (O(\epsilon) = |P_1|\,|e'_x| = 0.00884),\; \xi = 0.0256. \quad (4.1)$$

Такі вхідні параметри використовувалися також в роботі [11], де використовувалася модальна система Наріманова-Моісєєва з метою описати експериментальні результати [10]. Було показано хорошу відповідність між теорією та експериментальними замірами. Тим самим було підтверджено застосовність асимптотичної теорії Наріманова-Моісєєва.

В цьому розділі, зафіксувавши набір вхідних параметрів (4.1), було побудовано амплітудно-частотні криві $(\sigma/\sigma_1, A, B)$ для стійких і нестійких усталених резонансних хвиль (періодичних розв'язків), аби проаналізувати біфуркації, а також діапазони стійкості всіх усталених режимів як функції параметрів δ_1 (співвідношення півосей, а також напрямок орбітального еліптичного збурення), а також кута γ.

4.1. Кругові орбітальні збурення бака

З математичної точки зору, коли бак рухається поступально горизонтально вздовж кругової орбіти (Рис. 3.1 (b) схематично ілюструє цю кругову траєкторію), виконуються наступні співвідношення

$$\begin{aligned} &\delta_1 = \pm 1 \text{ (проти або за годинниковою стрілкою)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bar{\epsilon}_y = 0,\ \epsilon_x = P_1|e'_x|,\ \epsilon_y = \delta_1 P_1|e'_x|,\ \Upsilon_y^2 = \epsilon_x^2 = (P_1 e'_x)^2, \end{aligned} \tag{4.2}$$

у рівняннях (3.19) і (3.29а), (3.29б), де $|e'_x|$ є безрозмірним радіусом орбіти руху бака.

Якщо виконується умова (4.2), третє секулярне рівняння (3.29в) спрощується і набуває вигляду

$$\begin{aligned} EQ3_{\pm}(\Lambda, A^2, B^2, \beta) = \pm(m_1 - m_3)\sqrt{1-\beta^2}\,\xi(A^2 - B^2) \\ + \beta[\,\xi^2 + (\Lambda + m_1(A^2+B^2))(\Lambda + m_2(A^2+B^2)) + (m_1 - m_2)^2 A^2 B^2 \\ - (1-\beta^2)\,(m_2 - m_3)^2 A^2 B^2], \end{aligned} \tag{4.3}$$

звідки легко бачити, що співвідношення (4.2) приводить секулярну систему (3.29а), (3.29б), (4.3) до такої форми, що вона не залежить від знака δ_1.

Це означає, що відповідні розв'язки секулярної системи та амплітудно-частотні криві у просторі $(\sigma/\sigma_1, A, B)$ не залежать від напрямку руху бака за колом. В той же час, застосування (3.22) разом із (4.2) в процедурі відновлення зсувів фаз φ і ψ показує, що різниця фаз α потенційно впливає на знак δ_1. Отже, в цьому параграфі без втрати загальності можна покласти $\delta_1 = 1$ для демо обчислень, використовуючи критерій (3.47) для визначення напрямку руху кругової хвилі (за або проти годинникової стрілки).

Підставивши (4.2) у секулярну систему (3.29а), (3.29б), (4.3), отримуємо частинний аналітичний розв'язок

$$\begin{aligned} 1 > \Lambda = -(m_1 + m_3)A^2 \pm \sqrt{\frac{\epsilon_x^2}{A^2} - \xi^2}, \\ 0 < A \le \frac{|\epsilon_x|}{\xi}, \qquad \underbrace{\beta = 0}_{\alpha = \pm\pi/2 + \pi k}, \quad A = B, \end{aligned} \tag{4.4}$$

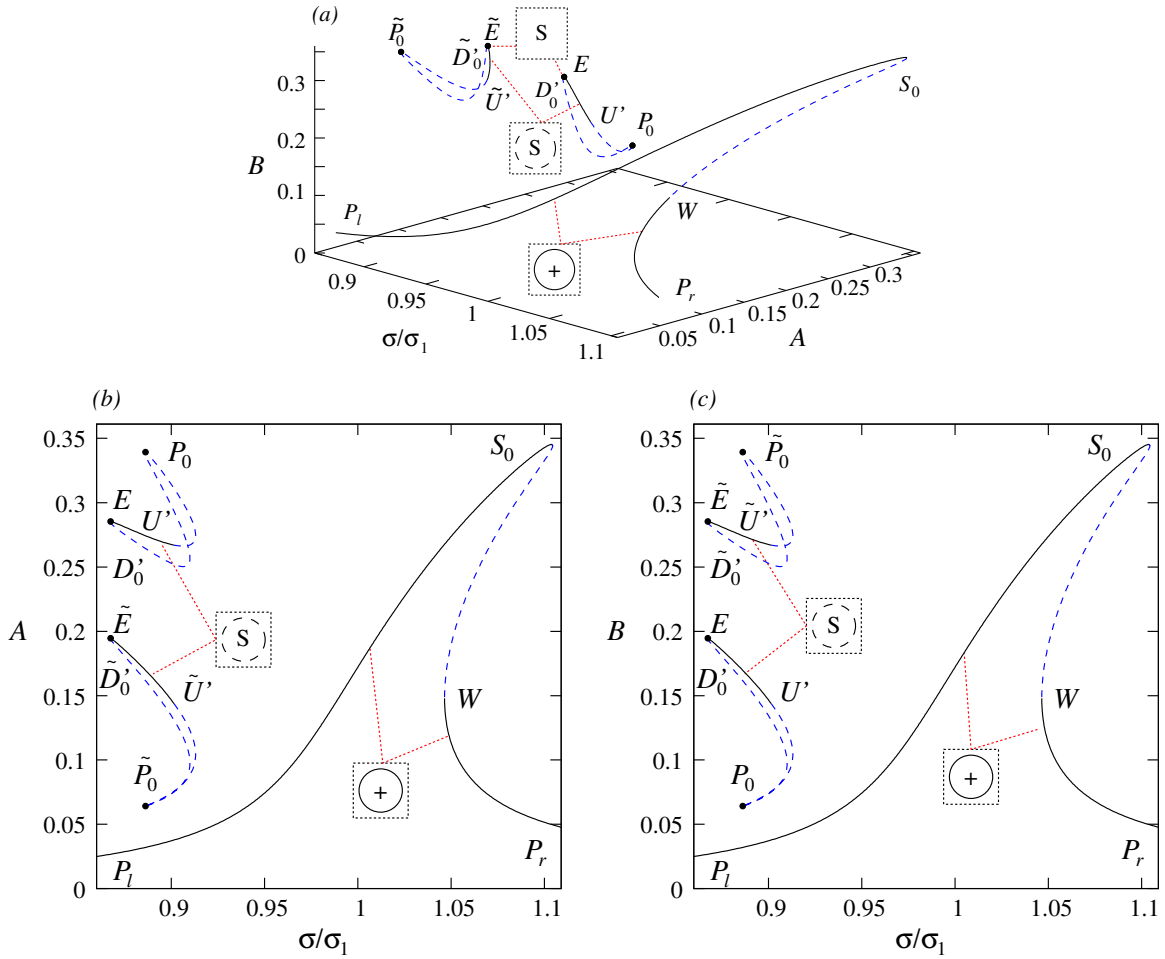

Рис. 4.1. Амплітудно-частотні криві, пов'язані усталеними резонансними хвилями на поверхні рідини, які є результатом кругових орбітальних рухів баку (відповідає Рис. 3.1 (b)). Суцільні лінії позначають стійки розв'язки, а штрихові — нестійки. На панелі (a) наведено тривимірні криві у просторі $(\sigma/\sigma_1, A, B)$, а на панелях (b) та (c) — їх проєкції на площини $(\sigma/\sigma_1, A)$ та $(\sigma/\sigma_1, B)$ відповідно. Область $P_l S_0 W P_r$ відповідає круговим хвилям, причому напрям розповсюдження цих хвиль збігається з напрямком орбіти баку. Класифікацію виконано відповідно до позначень на Рис. 3.3 та критеріїв (3.46), (3.47).

який в (3.22) (для визначення зсувів фаз φ та ψ), отримуємо, що відповідно до (3.46) і (3.47) усталені хвилі за виразами (4.4) є *круговими*, а їх напрям розповсюдження (напрямок кругової хвилі) збігається з напрямком руху баку уздовж орбіти.

Чисельний аналіз системи (3.29а), (3.29б), (4.3) за умови (4.2) при $\beta \neq 0$ дозволяє знайти розв'язки з $A \neq B$ та $\beta \neq 0$. Цей результат є протилежним до зафіксованого в роботі [186] для циліндричних баків кругового перерізу. Можна показати, що такі розв'язки для кругового баку не існують, оскільки для відповідних секулярних рівнянь виконується умова $m_2 = m_3$. В класичній статті [6] показано, що остання рівність

ніколи не виконується для баків квадратного перерізу за умов немалих значень глибини заповнення.

Застосування запропонованого в попередньому розділі чисельного методу дозволило знайти розв'язки $A \neq B$ у вузькому діапазоні значень $0.995 < \beta \leq 1$, де $1 - \beta \lesssim O(\epsilon^{2/3})$. У нашій асимптотичній шкалі для вхідних параметрів (4.1) отримані чисельні розв'язки відповідають стоячим ($\beta = 1$) або майже стоячим хвилям. Зауважимо, що у роботі [188] такі розв'язки для кругових орбітальних збурень не були виявлені, оскільки, скоріш за все, там використовувалися не такі точні чисельні схеми. Водночас у цій роботі чисельно підтверджено аналітичний розв'язок (4.4). Слід зазначити, що через надзвичайно вузький інтервал значень фазових зсувів, у якому існують такі розв'язки, їх чисельний пошук був дуже складною пошуковою задачею.

Рис. 4.1 демонструє відповідні амплітудно-частотні криві для кругового збурення баку для вхідних параметрів (4.1). Панель (a) містить тривимірні криві в просторі $(\sigma/\sigma_1, A, B)$, а панелі (b) і (c) — проєкції цих кривих на площини $(\sigma/\sigma_1, A)$ та $(\sigma/\sigma_1, B)$ відповідно. Кожна точка амплітудно-частотної кривої відповідає одному розв'язку з амплітудами A і B, що характеризують домінантні компоненти хвиль у напрямках Ox та Oy. Суцільні лінії відповідають стійким розв'язкам, а штрихові — нестійким.

Кругові хвилі (що відповідають аналітичному розв'язку (4.4)) розташовані на неперервній кривій $P_l S_0 W P_r$, яка лежить у площині $A = B$ простору $(\sigma/\sigma_1, A, B)$. Ця крива демонструє так звану жорстку нелінійність для демпфованого осцилятора. Зі зменшенням коефіцієнта демпфування ξ точка S_0 прямує до нескінченності. Як то характерно для жорсткої нелінійності, стійкі кругові хвилі відповідають відрізкам $P_l S_0$ та $W P_r$. Це означає, що для певного діапазону частот збурення можуть існувати дві різні стійкі кругові хвилі. У відповідності із (3.47), кругова хвиля на $P_l S_0 W P_r$ співнаправлена із напрямком кругової орбіти.

Стоячі (точки $P_0, \tilde{P}_0$ та $E, \tilde{E}$, де $\beta = 1$) і майже стоячі хвилі представлені двома замкненими кривими $EU'P_0D_0'E$ ($B < A$) і $\tilde{E}\tilde{U}'\tilde{P}_0\tilde{D}_0'\tilde{E}$

($A < B$). Ці криві є симетричними відносно площини $A = B$ у просторі $(\sigma/\sigma_1, A, B)$. Така симетрія відповідає інваріантності майже стоячих хвиль відносно повороту координатної системи Oxy на $\pi/2$ навколо осі Oz.

Таким чином, існує чотири або вісім розв'язків секулярної системи (що видно з панелей (b) та (c)), які відповідають майже стоячим хвилям у діапазоні $\sigma/\sigma_1 < 1$. Проте лише два з них є стійкими. Положення точок $P_0\,(\tilde{P}_0)$ і $D_0'\,(\tilde{D}_0')$ залежить від коефіцієнта демпфування ξ, і ці точки можуть прямувати до нескінченності коли $\xi \to 0$.

В *підсумку*, кругове орбітальне збудження завжди викликає стійку резонансну усталену кругову хвилю, кутове поширення якої (навколо Oz) збігається з напрямком збудження (за годинниковою стрілкою або проти неї). Для $\sigma/\sigma_1 > 1$ два різних режими кругової хвилі можуть співіснувати в певному діапазоні частот, верхня межа якого залежить від демпфування. Для $\sigma/\sigma_1 < 1$ кругова хвиля співіснує (у локальному діапазоні частот) з двома стійкими майже стоячими хвилями квадратного типу. Хвилі квадратного типу характеризуються відносно великою амплітудою порівняно з амплітудою співіснуючої стійкої кругової хвилі. В роботі [6, Рис. 10] було виявлено аналогічну ситуацію для поздовжнього збудження, коли хвилі квадратного типу більшої амплітуди співіснували зі стійкою плоскою хвилею меншої амплітуди. Спроби виявити ці хвилі квадратного типу в експериментальних модельних випробуваннях (з майже нульовими початковими умовами) виявились невдалими, за винятком випадку $h = 0.34$. Останнє стало можливим, оскільки менші глибини рідини призводять до вузького діапазону частот, у якому стійкими є лише хвилі квадратного типу (плоска хвиля є нестійкою). На жаль, такий діапазон частот є неможливим для кругового збудження, навіть при менших глибинах. Стійка кругова хвиля завжди співіснує з хвилями квадратного типу для будь-яких резонансних частот при $\sigma/\sigma_1 < 1$. Як наслідок, єдиний спосіб експериментально виявити майже стоячі хвилі квадратного типу при круговому збудженні — це застосувати нестандартні ненульові початкові умови. Організувати це досить складно. З

цієї точки зору, стійкі майже стоячі хвилі на EU' та $\tilde{E}\tilde{U}'$ можна вважати до деякої міри нефізичними; ймовірність їх експериментального спостереження виглядає дуже низькою.

4.2. Еліптичні орбіти збурення канонічного типу

Розглянемо канонічне (осі еліпсу паралельні осям координат) положення еліптичної орбіти збурення як зображено на Рис. 3.1 (c). Математично це означає, що

$$-1 < \delta_1 < 1, \quad \gamma = 0 \Rightarrow \bar{\epsilon}_y = 0,\ \epsilon_x = P_1|e'_x|,\ \epsilon_y = \delta_1\epsilon_x,\ \Upsilon_y^2 = \epsilon_y^2 \qquad (4.5)$$

у рівняннях (3.19), (3.29а), (3.29б), де $|e'_x|$ є великою піввіссю еліпса. У цьому випадку рівняння (3.29в) набуває вигляду

$$EQ3_{\pm}(\Lambda, A^2, B^2, \beta) = \pm\sqrt{1-\beta^2}\,\xi\,(m_1 - m_3)(A^2 - B^2)$$
$$+ \beta\left[\xi^2 + (\Lambda + m_1(A^2+B^2))(\Lambda + m_2(A^2+B^2)) + (m_1 - m_2)^2A^2B^2\right.$$
$$\left.-(1-\beta^2)\,(m_2 - m_3)^2A^2B^2\right] = 0. \qquad (4.6)$$

Секулярна система (3.29а), (3.29б), (4.6) залежить лише від $|\delta_1|$ (тобто від відношення осей) і не залежить від його знака. Це означає, що $(\Lambda, A^2, B^2, \beta)$ та відповідні криві відгуку в просторі $(\sigma/\sigma_1, A, B)$ не залежать від напрямку збудження (проти годинникової стрілки або за годинниковою стрілкою), але, оскільки фактичні фазові зсуви φ, ψ та їхня різниця α залежать від знаку, результати щодо режиму кругової хвилі слід інтерпретувати за допомогою критерію (3.47), тобто необхідно розрізняти зустрічно спрямовані та співспрямовані кругові хвилі. Символи з Рис. 3.3 будуть використані для позначення цієї особливості на кривих відгуку.

Перетворення ("метаморфоза") амплітудно-частотних кривих залежить від відношення осей $0 \le |\delta_1| < 1$ як показано на Рис. 4.2 та 4.3. У розрахунках використовувались вхідні дані (4.1). Суцільні лінії відповідають стійким усталеним розв'язкам, тоді як штрихові (темно-сині) лінії позначають нестійкість. Усі інші позначення запозичені (з незначни-

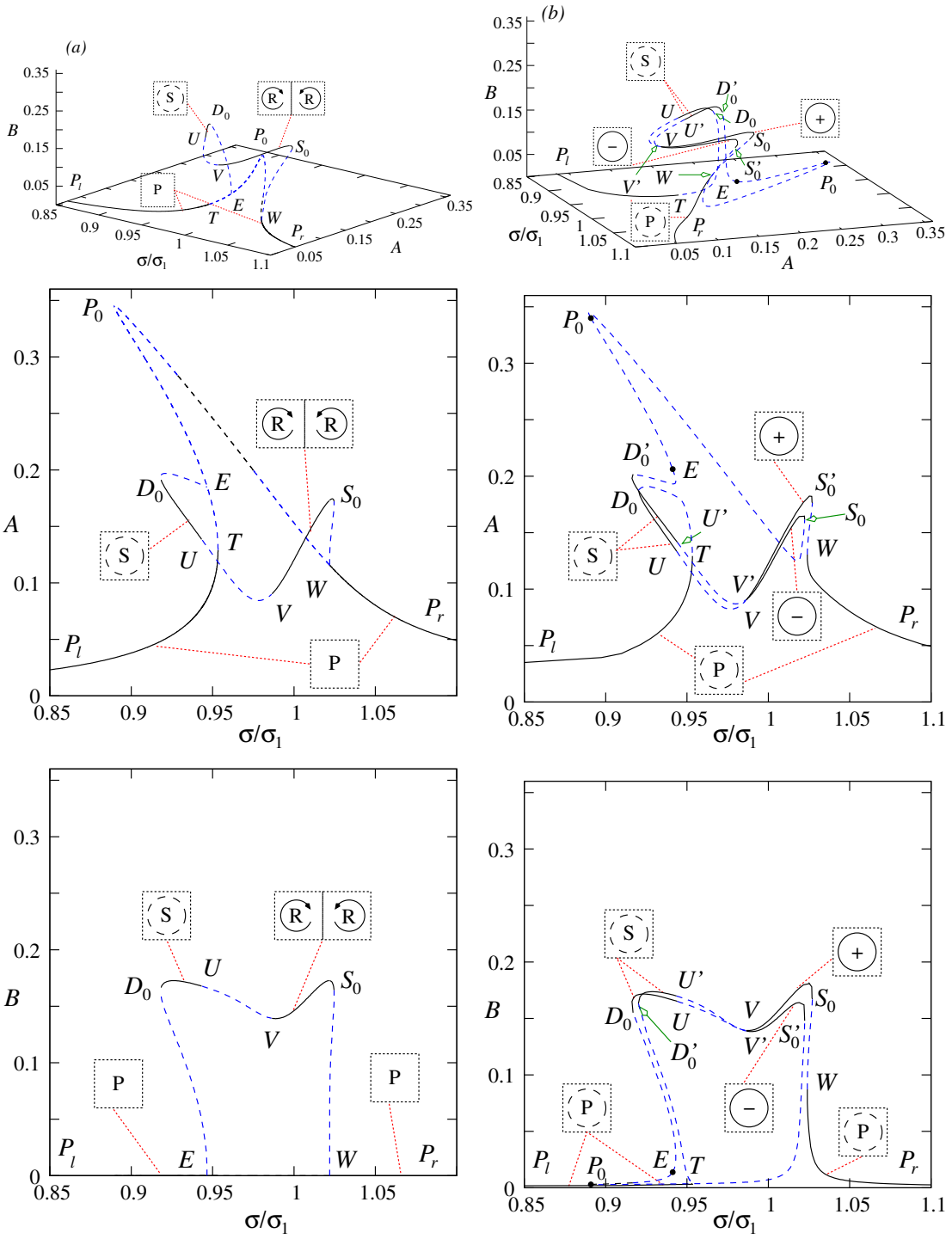

Рис. 4.2. Суцільні лінії відповідають стійким розв'язкам, штрихпунктирні — нестійким. На панелі (a) наведено випадок поздовжніх збурень ($|\delta_1| = 0$). Крива $P_lTEP_0WP_r$ відповідає плоским стоячим хвилям (стійкі на відрізках P_lT і WP_r). Криві ED_0UVS_0W описують майже стоячі хвилі (D_0U) та кругові хвилі (VS_0), які відрізняються лише напрямком обертання. У діапазоні між T і V розв'язки нестійкі, і очікується хаотичний режим. На панелі (b) наведено результати для $|\delta_1| = 0.05$ (мале відношення півосей). Криві з (a) розщеплюються на дві незв'язні області $P_lTD_0UVS_0P_r$ та петлеподібну область $EP_0S_0'V'D_0'E$. Стоячі хвилі зникають, за винятком точок E і P_0 (які є нестійкими). Стійкі майже плоскі хвилі пов'язані з відрізками P_lT і WP_r. Кругові хвилі поділяються на співнапрямлені (VS_0) та протинапрямлені ($V'S_0'$). Стійкі майже діагональні хвилі відповідають точкам D_0U та $D_0'U'$. Діапазон іррегулярних (хаотичних) хвиль залишається між T і V.

ми доповненнями) з роботи [11]. Символи з Рис. 3.3 визначають стійкі усталені режими хлюпання рідини.

Початковою точкою на Рис. 4.2 є амплітудно-частотні криві для хвилі при поздовжних гармонічних збуреннях резервуара ($\delta_1 = 0$). В роботі [11] отримано аналітичний розв'язок для цього випадку. Згідно з цим результатом, поздовжнє збудження породжує плоскі стоячі ($\beta = 1$, $B = 0$), кругові та майже стоячі (майже діагональні) хвилі; існує непорожній діапазон частот, де реалізуються іррегулярні хвилі (хаос). Розгалуження амплітуди хвилі [10, що відповідає експериментам] відтворено на Рис. 4.2 (а). Воно чисельно (але не візуально) ідентичне результату [11, Рис. 4 а]. Рис. 4.2 (а) містить тривимірні амплітудно-частотні криві у просторі $(\sigma/\sigma_1, A, B)$ та дві проекції на площини $(\sigma/\sigma_1, A)$ та $(\sigma/\sigma_1, B)$ відповідно. Криві складаються з гілки $P_l T E P_0 W P_r$ (яка належить площині $(\sigma/\sigma_1, A)$) та дугоподібної гілки $E D_0 U V S_0 E$. Вони пов'язані між собою в точках біфуркації E та W. Гілка $P_l T E P_0 W P_r$ відповідає за плоскі хвилі; вона демонструє м'яку нелінійність для нелінійного осцилятора.

Стійкі розв'язки на дугоподібній гілці $E D_0 U V S_0 W$ відповідають або круговим ($V S_0$), або майже стоячим ($D_0 U$) усталеним хвилям. Важливо зазначити, що кожна точка на цій гілці відповідає *двом* Ox-симетричним хвилям (на відміну від $P_l T E P_0 W P_r$). Для $V S_0$ ця симетрія означає, що існують дві фізично ідентичні кругові хвилі, що поширюються у протилежних напрямках (за годинниковою стрілкою або проти неї).

Дві стійкі Ox-симетричні майже стоячі (майже діагональні) хвилі для кожної точки на $D_0 U$ (розрахунки дають $1 \neq 1 - \beta \leq 0.95 \lesssim O(\epsilon^{2/3})$ з (4.1)) можна інтерпретувати як два асимптотичні розв'язки (3.44) з $\gamma_1, \pm\gamma_2$ (і, загалом, різними t_0). Плоскі (стоячі) хвилі є нестійкими між абсцисами T та W, де очікуються стійкі кругові (пов'язані з $V S_0$) та іррегулярні хвилі. Режим плоскої хвилі співіснує з круговою хвилею в діапазоні частот, визначеному точками W та S_0, але майже діагональні хвилі реалізуються між абсцисами D_0 та T (теорія та експерименти в [6] показали, що U переміщується в зону між T та W при $h \lesssim 0.4$).

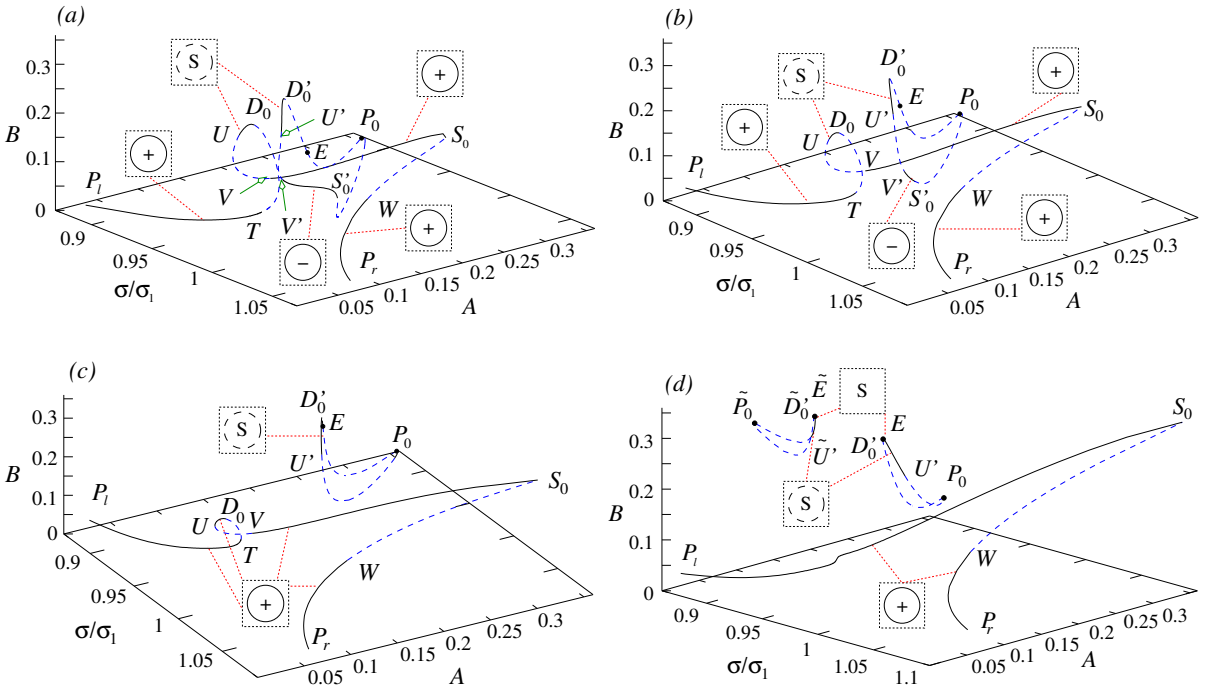

Рис. 4.3. Амплітудно-частотні криві усталених хвиль у просторі $(\sigma/\sigma_1, A, B)$ для вхідних параметрів (4.1) та різних значень відношення півосей $|\delta_1| = O(1)$ на прийнятій асимптотичній шкалі. Вхідні параметри, основні позначення, математична та фізична інтерпретація розгалужень та пов'язаних усталених режимів хвиль пояснені на Рис. 4.2 (b). Панелі (a-c) показують, що зустрічно спрямована (відносно орбіти резервуара) кругова хвиля (пов'язана з $V'S'_0$) зникає зі збільшенням $|\delta_1|$, але майже стоячі хвилі $(U'D'_0)$ існують для всіх перевірених значень $|\delta_1|$. Коли орбіта резервуара стає майже круговою (панель d), з'являється (з "єдиної точки") додаткова петлеподібна гілка, відповідальна за майже стоячі хвилі. Зокрема, точки E та E' відповідають стійкому режиму стоячих (квадратного типу) хвиль. У розрахунках використовувались $|\delta_1| = 0.30$ (a), $= 0.50$ (b), $= 0.70$ (c) та $= 0.95$ (d).

Коли коефіцієнт демпфування ξ прямує до нуля, точки D_0 та S_0 йдуть на нескінченність. Це може теоретично розширити згадані вище зони стійкості для режимів майже стоячих та кругових хвиль.

Рис. 4.2 (b) ілюструє метаморфозу кривих відгуку зі стовпця (a), коли відношення півосей $|\delta_1|$ є відносно малим, але не нульовим. Нам не вдалося знайти аналітичні (навіть часткові) розв'язки для цього випадку. Чисельну схему з попереднього розділу було реалізовано для розв'язання секулярної системи рівнянь (3.29а), (3.29б), (4.6), доповненої (4.5). Обчислення показали, що $\beta \neq 0$ при $0 < |\delta_1| < 1$ (підстановка $\beta = 0$ у (4.6) $\Rightarrow A = B \Rightarrow |\delta_1| = 1$ з (3.29а), (3.29б) з (4.5)), але $\beta = 1$ (стоячі хвилі) допускалося.

Криві відгуку на Рис. 4.2 (b) побудовано для вхідних даних (4.1).

Вони показують, що перехід до $|\delta_1| = 0.05$ розщеплює зв'язану криву зі стовпця (a) на дві незв'язані гілки: $P_lTD_0UVS_0WP_r$, що неперервно простягається від P_l до P_r, та петлеподібну гілку $EP_0S_0'V'U'D_0'E$. Відмінність між (a) та (b) полягає в тому, що кожна точка на $P_lTD_0UVS_0WP_r$ та $EP_0S_0'V'U'D_0'E$ у (b) відповідає єдиному періодичному розв'язку і, отже, описує лише одну усталену хвилю. Справді, кожна точка на дугоподібній гілці ED_0UVS_0E у стовпці (a) відповідає парі Ox-симетричних усталених хвиль, але ненульове $|\delta_1|$ (перехід до еліптичної орбіти резервуара) порушує цю симетрію. Як наслідок, стовпець (b) має справу з двома різними стійкими майже стоячими ($1 - \beta \leq 0.95 = O(\epsilon^{2/3})$ у розрахунках з (4.1)) хвилями на D_0U та $D_0'U'$ і, звичайно, двома стійкими круговими хвилями на VS_0 та $V'S_0'$ відповідно. Ці кругові хвилі мають не лише різні напрямки кутового поширення, але й різні амплітуди. Аналогічне розщеплення на співспрямовані та зустрічно спрямовані кругові хвилі було виявлено в обчисленнях [188] для резервуара з квадратною основою, а також описано в [186] для резервуара з круговим перерізом. Однак хвилі рідини в резервуарі з круглою основою не допускає стійких майже стоячих хвиль. Точки на P_lT та WP_r були пов'язані зі стійкими плоскими стоячими хвилями у стовпці (a), але у стовпці (b) вони стають відповідальними за майже стоячі (майже плоскі) хвилі. Положення точок T та W слабо залежить від ненульового $|\delta_1| = 0.05$, і тому діапазон частот іррегулярних хвиль залишається практично незмінним. Границя $\xi \to 0$ зміщує точки P_0, $D_0(D_0')$ та $S_0(S_0')$ далеко від зони первинного резонансу.

Збільшення відношення півосей до $|\delta_1| = O(1)$ (на обраній асимптотичній шкалі) перетворює майже стоячі хвилі на P_lT та WP_r на співспрямовані кругові хвилі. Рис. 4.3 містить чотири панелі, які демонструють цю та інші метаморфози амплітудних кривих відгуку. Показано лише тривимірні випадки. Значення $|\delta_1| = 0.3, 0.5, 0.7$ та 0.95 використовуються як такі, що представляють найбільш вражаючі особливості кривих відгуку. Позначення, математична та фізична інтерпретації "стійких" гілок та відповідних усталених режимів хвиль запозичені з Рис. 4.2 (b). Дві

криві відгуку на панелях (a-c) виглядають топологічно ідентичними до тих, що зображені у стовпці (b) Рис. 4.2, тобто існують неперервна гілка $P_lTD_0UVS_0WP_r$, що проходить через всю резонансну зону, та петлеподібна гілка $D_0'EP_0U'D_0'$. Відмінності між цими панелями стають очевидними при відстеженні типів та діапазонів стійкості усталених хвиль. Як зазначалося вище, майже стоячі (плоскі) хвилі на P_lT та WP_r стають неможливими при $|\delta_1| = O(1)$. Періодичні розв'язки на P_lT та WP_r, а також D_0U (майже стоячі хвилі) перетворюються тоді на стійкі кругові хвилі, співспрямовані з еліптичною орбітою резервуара.

Зустрічно спрямована кругова хвиля зникає, коли відношення півосей $|\delta_1|$ перевищує 0.5 для заданих вхідних даних (те саме критичне значення було оцінено в чисельних експериментах [186] для резервуара з круглою основою). Зокрема, наслідком цього факту є те, що діапазон частот нерегулярних хвиль (TV) звужується зі збільшенням $|\delta_1|$; цей діапазон стає порожнім на панелі (d), побудованій для $|\delta_1| = 0.95$ (орбіта резервуара близька до кола). Розгалуження тоді топологічно ідентичне тому, що зображено на Рис. 4.1. Його принципова "новизна" відносно (a-c) полягає у петлеподібній гілці $\tilde{D}_0'\tilde{E}\tilde{P}_0\tilde{U}$, відповідальній за режим майже стоячих хвиль (стійких для точок на $\tilde{D}_0'\tilde{U}'$). Ця гілка виникає "з єдиної точки" при $|\delta_1| = 0.8$ (для вхідних даних (4.1)). Стаття [188] наводить кілька розрахунків для канонічних еліптичних орбіт та демонструють, як енергетичний параметр $\sqrt{E}$ змінюється залежно від частотного параметра. Якісно ці розрахунки призводять до подібного розгалуження (для $\sqrt{E}$), але відрізняються від наших результатів при наближенні $|\delta_1|$ до одиниці. Ця відмінність обговорювалася для кругової орбіти як можливо недостатня точність розрахунків в [188], оскільки розв'язок у вигляді майже стоячої хвилі існує в дуже вузькому діапазоні за β.

На закінчення зазначимо, що перехід від гармонічного поздовжнього зворотно-поступального руху до еліптичних (канонічних) орбіт резервуара у площині Oxy (Рис. 3.1 b), *по-перше*, порушує Ox-симетрію режимів майже стоячих та кругових хвиль, так що, зокрема, кругові хвилі мають різні амплітуди залежно від напрямку їхнього кутового поширення. *По-*

друге, подальше збільшення відношення півосей $|\delta_1|$ усуває, починаючи з критичного значення $|\delta_1|$ (оціненого як ≈ 0.5 для перевірених вхідних даних), кругові хвилі, кутове поширення яких є протилежним до орбіти резервуара [186, аналогічно резервуару з круглою основою, дослідженому]. *По-третє*, співспрямовані кругові хвилі стають стійкими у всій резонансній зоні і, як наслідок, нерегулярні хвилі не передбачаються, коли траєкторія резервуара наближається до кола. Остання границя топологічно змінює розгалуження, породжуючи додаткову петлеподібну гілку, що виникає з "єдиної точки" у просторі $(\sigma/\sigma_1, A, B)$. *Нарешті*, стійкі майже стоячі (квадратного типу) хвилі є можливими для всіх значень $0 \leq |\delta_1| \leq 1$, і цей режим хвиль співіснує з іншими. Це означає, що експериментальне виявлення майже стоячих хвиль потребує специфічних початкових умов, які дозволяють відрізнити їх від інших стійких режимів хвиль, що співіснують.

4.3. Еліптичні орбіти із віссю уздовж діагоналі

Бак квадратної форми рухається вздовж еліптичної орбіти, велика вісь якої збігається з діагоналлю бака, як показано на Рис. 3.1 (d). Покладемо $\gamma = \pi/4$ та зведемо (3.29) до такого вигляду:

$$EQ1_{\pm}(A^2, B^2, \beta) = A^2 \left[(\Lambda + m_1 A^2 + (m_3 - (m_3 - m_2)\beta^2)\, B^2)^2 + (\beta\sqrt{1-\beta^2}B^2 \pm \xi)^2\right] = \epsilon_x^2 = \tfrac{1}{2}P_1^2\, {e'_x}^2(1+\delta_1^2), \quad (4.7\text{а})$$

$$EQ2_{\pm}(A^2, B^2, \beta) = B^2 \left[(\Lambda + m_1 B^2 + (m_3 - (m_3 - m_2)\beta^2)\, A^2)^2 + (\beta\sqrt{1-\beta^2}A^2 \mp \xi)^2\right] = \Upsilon_y^2 = \epsilon_x^2 = \tfrac{1}{2}P_1^2\, {e'_x}^2(1+\delta_1^2), \quad (4.7\text{б})$$

$$\begin{aligned} EQ3_{\pm}(A^2, B^2, \beta) &= \xi(A^2 - B^2) \\ &\times \left[\pm 2\delta_1(m_1 - m_3)\sqrt{1-\beta^2} + (m_1 - m_2)(1-\delta_1^2)\beta\right] \\ &+ 2\beta\delta_1 \left[\xi^2 + (\Lambda + m_1(A^2+B^2))(\Lambda + m_2(A^2+B^2)) + (m_1 - m_2)^2 A^2 B^2\right. \\ &\left.-(m_2 - m_3)^2(1-\beta^2)A^2B^2\right] \mp \sqrt{1-\beta^2}(1-\delta_1^2)\left[\xi^2 - \beta^2(m_2 - m_3)^2\, A^2B^2\right. \\ &\left.+ (\Lambda + m_1(A^2+B^2))(\Lambda + m_3(A^2+B^2)) + (m_1 - m_3)^2 A^2 B^2\right] = 0. \quad (4.7\text{в}) \end{aligned}$$

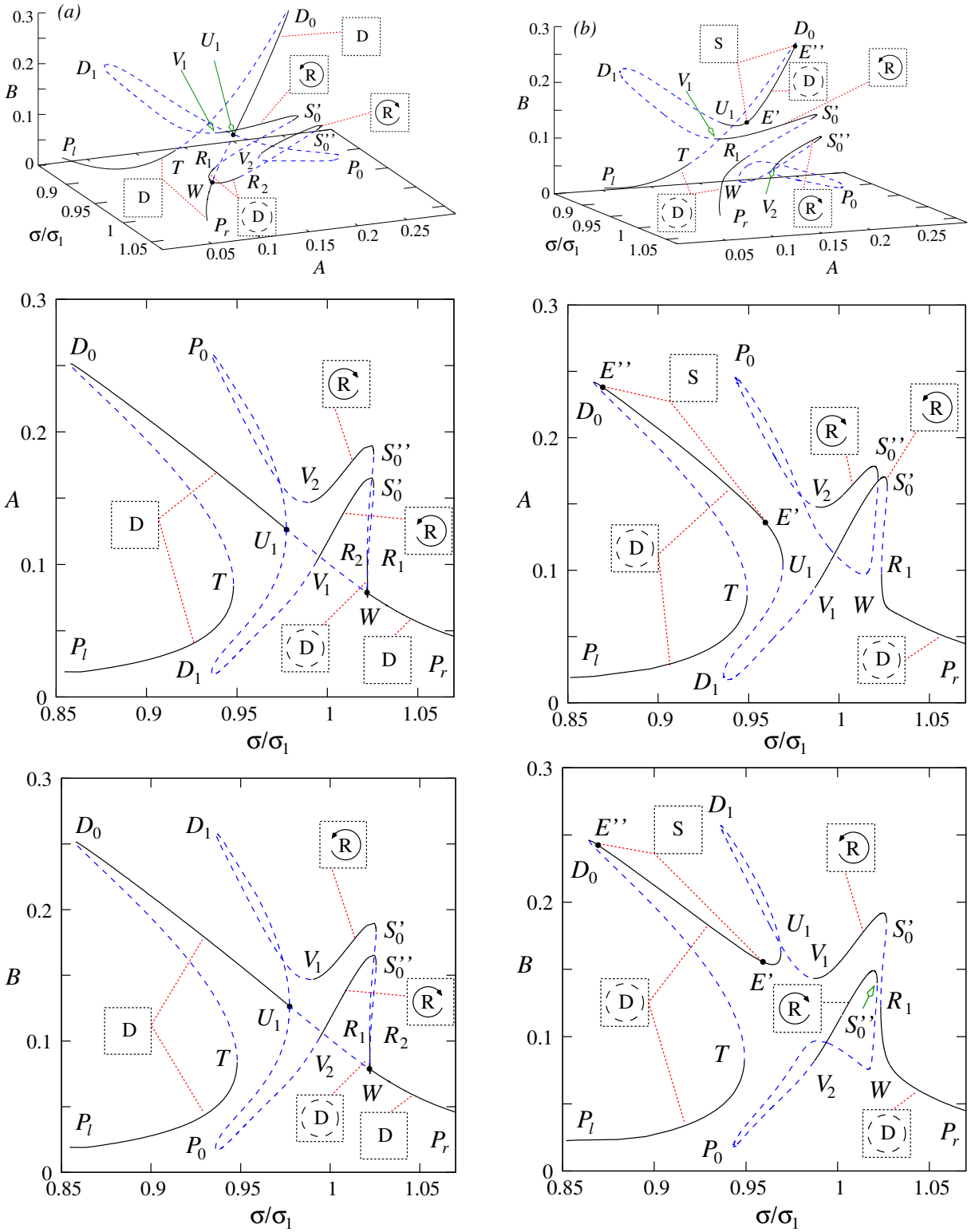

Рис. 4.4. Амплітудно-частотні криві для діагонального руху баку ($\gamma = \pi/4$, $\delta_1 = 0$, (a)) та діагонального еліптичного збурення ($\gamma = \pi/4$, $\delta_1 = 0.05$, (b)) з (4.1). У колонці (a) крива $P_l D_0 U_1 W P_r$ відповідає стоячим діагональним хвилям ($A = B$). Області $U_1 D_1 V_1 S_0' R_1 W$ та $U_1 P_0 V_2 R_2 W$ відповідають круговим хвилям проти та за годинниковою стрілкою. Через демпфування хвилі характеризуються різними амплітудами на перпендикулярних стінках [10]. Хаос між U_1 та $V_{1,2}$. У колонці (b) при ненульовому $\delta_1 = 0.05$ спостерігається розщеплення розв'язків: гілку $P_l D_0 E'' E' D_1 U_1 V_1 S_0' R_1 P_r$ та петлеподібну $W S_0'' V_2 P_0 W$. У першій: стійкі кругові хвилі проти годинникової стрілки ($V_1 S_0'$), майже стоячі хвилі ($P_l T$, $D_0 U_1$, $R_1 P_r$), а також стоячі майже діагональні хвилі (точки E' та E''). У другій ($W S_0'' V_2 P_0 W$) – стійкі кругові рухи за годинниковою стрілкою ($V_2 S_0''$). Хаос між точками U_1 та V_1.

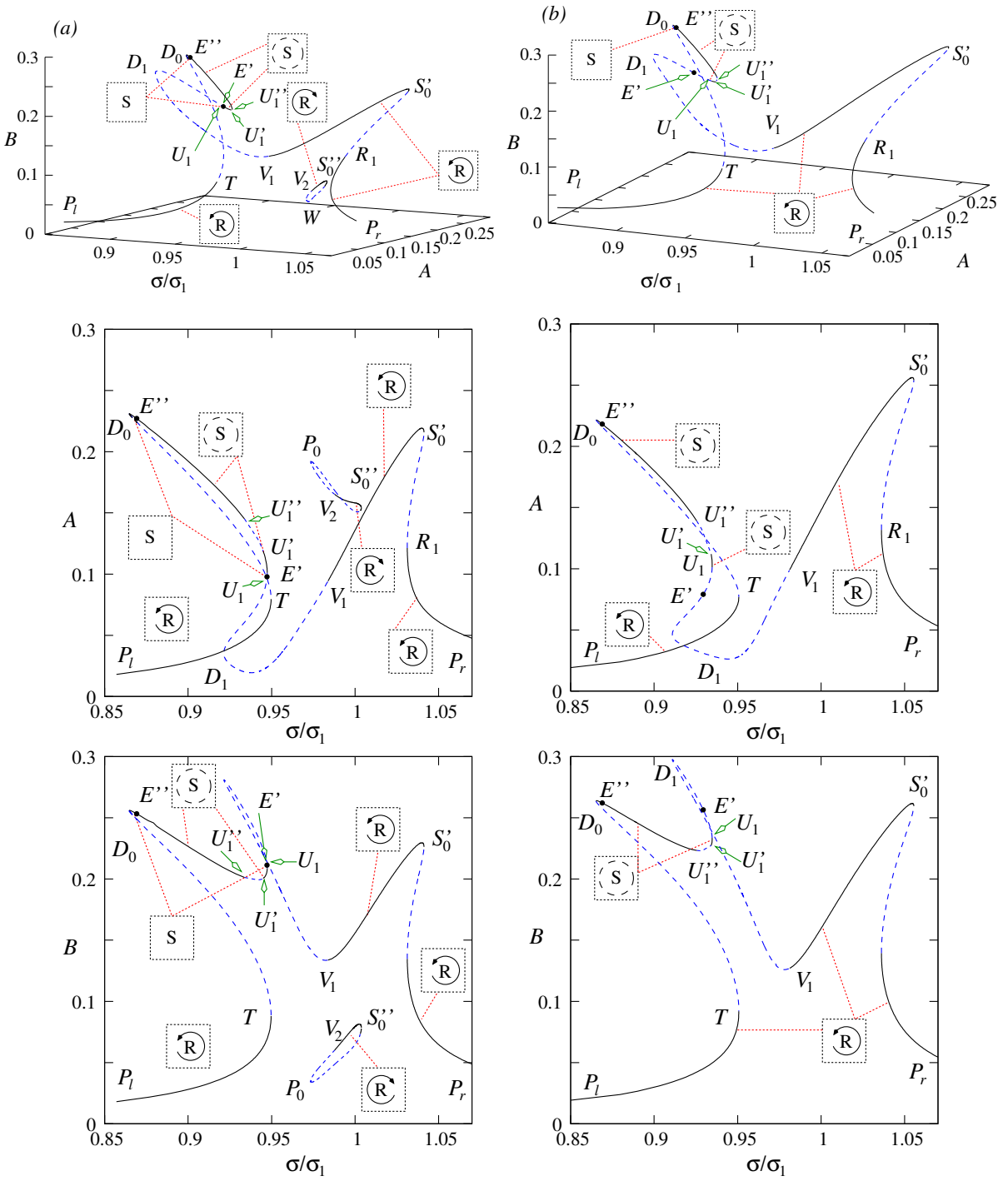

Рис. 4.5. Амплітудно-частотні криві для діагонального еліптичного орбітального збурення ($\gamma = \pi/4$) проти годинникової стрілки для $\delta_1 = 0.3$ (a) та $\delta_1 = 0.5$ (b). Позначення та параметри відповідають Рис. 4.4 (b). Точки E' та E'' відповідають стоячим хвилям. Ділянка D_0U_1'' та малий інтервал $U_1'U_1$ відповідають стійким майже стоячим хвилям. Розв'язки на ділянках P_lT та R_1P_r переходять у стійку кругову хвилю проти годинникової стрілки, яка також реалізується на V_1S_0'. Нерегулярні хвилі можливі між U_1 та V_1, а також на інтервалі TU_1'. Кругові хвилі за годинниковою стрілкою, що спостерігаються при $\delta_1 = 0.3$, зникають при $\delta_1 = 0.5$.

На відміну від випадків в параграфах 4.1 та 4.2, секулярна система залежить від знаку δ_1, або, іншими словами, напрямок орбіти (за

годинниковою стрілкою чи проти) впливає на амплітудно-частотні криві. З іншого боку, секулярна система (4.7) має наступний особливий вид симетрії: якщо $(A^2, B^2, \beta; \delta_1, \pm)$ є розв'язком секулярної системи, то $(B^2, A^2, \beta; -\delta_1, \mp)$ також є її розв'язком. Це означає, що, знаючи криві для, наприклад, діагонального типу еліптичного збудження проти годинникової стрілки, підстановка $A \to B$, $B \to A$ дає криві для діагонального типу еліптичного збудження за годинниковою стрілкою. Завдяки цій симетрії (відносно діагональної площини), подальший аналіз може, *без втрати загальності*, зосередитися на орбітах резервуара *проти годинникової стрілки* ($0 < \delta_1 \leq 1$). Існують два граничні випадки діагонального типу еліптичного збудження, які пов'язані з $\delta_1 = 0$ та $\delta_1 = 1$ (кругове збудження було проаналізовано у параграфі 4.1).

У роботі [11] було розглянуто суперечність між експериментальними дослідженнями [10] та теоретичними результатами, наведеними в [6]. Аналіз теоретичних недемпфованих хвиль у [6] виявив дві фізично ідентичні (з точністю до кутового напряму поширення) кругові хвилі, які завдяки чотирьом площинам симетрії ($x = 0$, $y = 0$, $y = x$ і $y = -x$) мають рівні амплітуди біля перпендикулярних стінок, тобто $A = B$ у наближенні найнижчого порядку. Однак експерименти [10] не підтвердили цієї рівності. Експериментальні дані вказують на те, що $B > A$ для кругової хвилі проти годинникової стрілки, а $A > B$ — у випадку, коли хвиля поширюється за годинниковою стрілкою. У роботі [11] ці нерівності було пояснено та кількісно оцінено шляхом введення ненульового демпфування в модальну теорію коливань Наріманова—Мойсеєва.

Отримані в [11, Рис. 8 (b)] амплітудно-частотні криві у просторі $(\sigma/\sigma_1, A, B)$ з проєкціями на площини $(\sigma/\sigma_1, A)$ та $(\sigma/\sigma_1, B)$ практично ідентично відтворено на Рис. 4.4 (а). Для розрахунків використано ті самі вхідні дані (4.1) та ті самі позначення. Криві складаються зі зв'язної частини з двома точками біфуркації U_1 і W, де вітка $P_l D_0 U_1 W P_r$, що лежить у площині $A = B$, з'єднана з двома вітками $U_1 D_1 V_1 S_0' R_1 W$ і $U_1 P_0 V_2 R_2 W$. Точки на кривій $P_l D_0 U_1 W P_r$ відповідають діагональним (стоячим) хвилям, як стійким, так і нестійким. Цю криву отримано за

допомогою такого аналітичного розв'язку

$$1 > \Lambda = -(m_1 + m_2)A^2 \pm \sqrt{\frac{\epsilon_x^2}{A^2} - \xi^2},\ 0 < A \le \frac{|\epsilon_x|}{\xi},\ \beta = 1,\ A = B. \quad (4.8)$$

Криві $U_1 D_1 V_1 S_0' R_1 W$ та $U_1 P_0 V_2 R_2 W$ було обчислено за допомогою секулярної системи (4.7). Стійкі періодичні розв'язки на цих вітках відповідають круговим хвилям проти та за годинникової стрілки відповідно. Іррегулярні хвилі (хаос) спостерігаються в діапазоні частот між U_1 і V_1.

Рис. 4.4 (b) демонструє, що відбувається з розгалуженням амплітуд хвиль у стовпці (a), коли δ_1 не дорівнює нулю, але залишається відносно малим ($\delta_1 = 0.05$ у цих обчисленнях). Стовпець (b) показує розщепле-

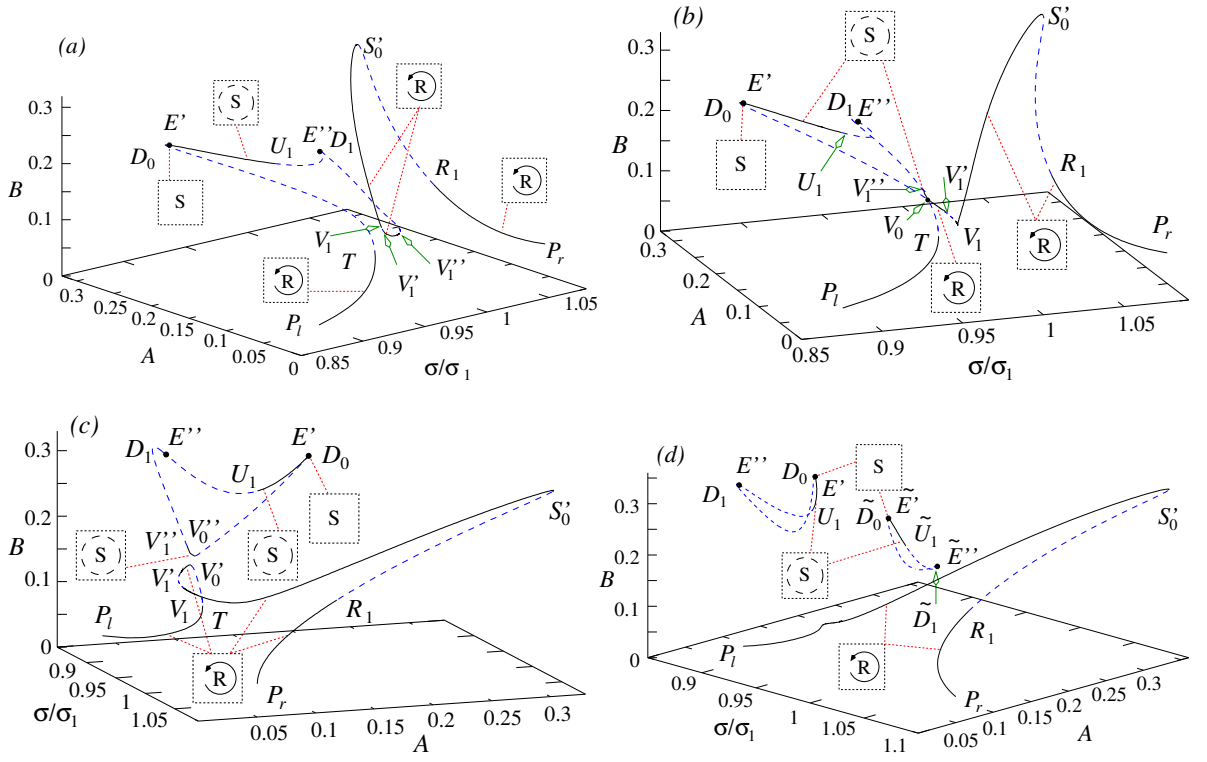

Рис. 4.6. Метаморфози амплітудно-частотних кривих для діагонального типу ($\gamma = \pi/4$) еліптичного збурення проти годинникової стрілки при δ_1: (a) 0.75, (b) 0.785, (c) 0.786 і (d) 0.95. Порівняння панелі (a) з Рис. 4.5 (b) вказує на зникнення стійкого "острівця" $U_1' U_1$ (майже стоячі хвилі) та появу "острівця" $V_1' V_1''$ (стійкі кругові хвилі проти годинникової стрілки). Область іррегулярних хвиль при цьому не розширюється. Панелі (b) і (c) демонструють появу однієї з двох петлеподібних віток, що передбачаються в границі $\delta_1 \to 1$. При $\delta_1 = 0.785$ на панелі (b) "острівець" $V_1' V_1''$ торкається TD_0, де виникає точка біфуркації V_0. Подальше збільшення δ_1 (панель (c), $\delta_1 = 0.786$) відокремлює розгалуження в цій точці біфуркації та приводить до виникнення неперервної кривої $P_l T V_0' V_0'' V_1 S_0' R_1 P_r$ (кругова хвиля тут відбувається проти годинникової стрілки) та петлеподібного відгалуження $D_1 E'' U_1 E' D_0 V_0'' D_1$ (майже стійка кругова хвиля, за винятком точки E'', де очікується суто стійка стояча хвиля). Панель (d) демонструє, що розгалуження наближається до випадку, зображеного на Рис. 4.1, коли δ_1 прямує до одиниці (кругова орбіта бака).

ння початково неперервного розгалуження зі стовпця (a). Перша гілка $P_l D_0 E'' E' D_1 U_1 V_1 S_0' R_1 P_r$ є неперервною кривою, що проходить через всю резонансну зону, тоді як друга, $P_0 W S_0'' V_2 P_0$, має форму петлі. Інтервали $P_l T$, $D_0 U_1$ та $W P_r$ у стовпці (a) відповідають діагональним (стоячим) хвилям. У стовпці (b) вони перетворюються на майже стоячі (майже діагональні) хвилі (за винятком точок E' та E'', що відповідають (суто) майже-діагональним хвилям у резервуарі). Інтервал $V_1 S_0'$ на кривій $P_l D_0 E'' E' D_1 U_1 V_1 S_0' R_1 P_r$ відповідає стійким усталеним розв'язкам, які описують кругову хвилю проти годинникової стрілки; $V_2 S_0''$ на петлеподібній кривій $W S_0'' V_2 P_0 W$ відповідає стійкій круговій хвилі за годинниковою стрілкою. Частотний діапазон іррегулярних хвиль (визначений точками U_1 та V_1) залишається приблизно однаковим за розташуванням і шириною на панелях (a) і (b).

Коли відношення півосей δ_1 збільшується до порядку $O(1)$ на прийнятій асимптотичній шкалі (4.1), амплітудні криві зазнають метаморфоз, які проілюстровано на Рис. 4.5 та 4.6. На Рис. 4.5 обчислення виконано при $\delta_1 = 0.3$ (a) та 0.5 (b). Зображено як тривимірні версії, так і проекції на площини $(\sigma/\sigma_1, A)$ та $(\sigma/\sigma_1, B)$. Рисунок встановлює такі загальні тенденції: зникнення петлеподібної гілки $P_0 V_2 S_0''$, внаслідок чого стійка кругова хвиля за годинниковою стрілкою стає неможливою ($0.38 \lesssim \delta_1$ для заданих вхідних даних), розширення частотного діапазону іррегулярних хвиль (нижня межа пов'язана з точкою T), поява стійкого режиму майже стоячої хвилі (на малому "острівці" $U_1' U_1$) і, нарешті, перетворення режиму майже стоячої хвилі на кругову хвилю проти годинникової стрілки на $P_1 T$ та $R_1 P_r$. Розгалуження амплітуд хвиль на Рис. 4.5 (б) є типовим для відношень півосей $0.38 \lesssim \delta_1 \lesssim 0.75$ (принаймні для вхідних параметрів (4.1)). Розгалуження складається з єдиної амплітудної кривої $P_l T D_0 E'' U_1'' U_1' U_1 E' D_1 V_1 S_0' R_1 P_r$. Стійкі та нестійкі зони періодично чергуються вздовж цієї кривої. [188] наводить два приклади у площині (частота збудження, безрозмірна енергія) для діагонального типу збудження, що відповідають $\delta_1 = 0$ та 0.364. Результати якісно узгоджуються з нашим аналізом.

Рис. 4.6 демонструє геометричні та топологічні метаморфози амплітудно-частотних кривих для відношень осей $0.75 \lesssim \delta_1 < 1$. Особлива увага приділяється тому, як крива $P_l T D_0 E'' U_1'' U_1' U_1 E' D_1 V_1 S_0' R_1 P_r$ розривається при $\delta_1 = 0.785$, утворюючи одну неперервну криву у всій резонансній зоні та петлеподібну гілку. Деталі цього перетворення пояснено на панелях (a-c). Панель (a) показує, як "острівець" стійкості $U_1' U_1$ (що відповідає майже стоячим хвилям) зникає, але стійкий режим кругової хвилі проти годинникової стрілки стає можливим для точок на інтервалі $V_1' V_1''$. Розгалуження все ще складається з єдиної неперервної кривої. Подальше збільшення δ_1 спричиняє перетин $V_1' V_1''$ та $T D_0$, що породжує точку біфуркації V_0 (панель b). Параметр β далекий від одиниці поблизу V_1', але $\beta \approx 0.93$ у точці V_1'', так що стійкі усталені хвилі змінюють свій тип вздовж малого інтервалу $V_1'' V_0 V_1$ — від режиму майже стоячої хвилі у точці V_1'' до кругової хвилі проти годинникової стрілки у точці V_1'. Панель (c) демонструє розщеплення зв'язаних амплітудних кривих на гілку $P_l V_0' V_1' V_1 S_0' R_1 P_r$ (кругова хвиля проти годинникової стрілки) та петлеподібну гілку $D_1 E'' U_1 E' D_0 V_0'' V_1'' D_1$ (майже стоячі хвилі). Для цих значень δ_1 нерегулярні хвилі можливі лише у вузькому частотному діапазоні між V_1' та V_1. Цей тип хвиль повністю зникає при $\delta_1 = 0.95$ на панелі (d). Остання панель також містить додаткову петлеподібну гілку $\tilde{D}_0 \tilde{E}' \tilde{U}_1 \tilde{E}'' \tilde{D}_0$, яка виникає з одиничної точки при $\delta_1 = 0.88$.

Підсумовуючи, перехід від зворотно-поступального до еліптичного діагонального типу збудження спричиняє якісно подібні метаморфози амплітудно-частотних кривих та пов'язаних усталених режимів з тих, що описані у параграфі 4.2 для симетричного відносно стінки положення еліптичної орбіти. Це включає перетворення стійких (діагональних) стоячих хвиль на режим кругової хвилі (у напрямку орбіти), звуження та зникнення частотного діапазону нерегулярних хвиль, зникнення кругової хвилі у протилежному напрямку, а також постійно існуючу зону стійкого режиму майже стоячої хвилі. З іншого боку, початкові ($\delta_1 = 0$) та проміжні ($0 < \delta_1 < 1$) форми кривих відповіді під час їхніх метаморфоз зі збільшенням відношення півосей відрізняються від тих, що

розглянуто у параграфі 4.2.

4.4. Еліптичні орбіти руху бака під кутом до стінок (косий тип еліптичного збурення)

Після вивчення поздовжнього ($\gamma = 0$, параграф 4.2) та діагонального ($\gamma = \pi/4$, параграф 4.3) положень еліптичних орбіт і з'ясування типових перетворень кривих амплітудно-частотної відповіді хвиль *залежно від* відношення півосей $0 \leq |\delta_1| \leq 1$, можна нарешті зосередитися на найбільш загальному кутовому положенні еліптичної орбіти на Рис. 3.1 (а), яке називатиметься косим типом еліптичного збудження. Цей випадок виявився значно складнішим, потребуючи незалежного розгляду еліптичних орбіт у напрямку та проти напрямку, а також необхідності представити результати для двох пробних "косих" кутів $\gamma = \pi/6$ та $\pi/12$. Результати наведено на Рис. 4.7–4.13.

Спочатку зосередимося на математичних та фізичних аспектах і допустимих розв'язках розглянутих секулярних рівнянь (3.29). Вибравши відповідне положення системи координат Oxy і, таким чином, використовуючи симетрію відносно діагональних площин, можна вважати, що кут γ на Рис. 3.1 (а) належить інтервалу

$$-\pi/4 \leq \gamma \leq \pi/4.$$

Крім того, Υ_y^2 і, відповідно, $EQ1_\pm$ та $EQ2_\pm$ у (3.29а) та (3.29б) не залежать від знаків γ та δ_1. Однак аналіз $EQ3_\pm$ у (3.29в) показує, що амплітудно-частотні криві та пов'язані усталені режими є різними для $(\gamma\,\delta_1) > 0$ (цей випадок передбачає або траєкторію проти годинникової стрілки при додатному γ, або траєкторію за годинниковою стрілкою при від'ємному γ) та $(\gamma\,\delta_1) < 0$ (або траєкторія за годинниковою стрілкою при додатному γ, або траєкторія проти годинникової стрілки при від'ємному γ). Ця властивість є наслідком симетрії відносно вертикальних координатних площин Oxz та Oyz, яка зберігає незмінним знак $(\gamma\,\delta_1)$ (достатньо розглянути симетричні відносно Ox еліпси на Рис. 3.1 (а) для різних напрямків орбіт!). Інших симетрій квадрата не існує, тому

для опису всіх можливих усталених хвильових рухів при косому типі еліптичного збудження необхідно незалежно аналізувати $(\gamma\,\delta_1) > 0$ та $(\gamma\,\delta_1) < 0$. У цьому розділі приймається додатний кут $0 < \gamma < \pi/4$, але розглядаються орбітальні рухи резервуара проти годинникової стрілки $(0 < \delta_1 < 1)$ та за годинниковою стрілкою $(-1 < \delta_1 < 0)$.

Автору не вдалося побудувати жодних аналітичних розв'язків секулярної системи (3.29) для косого типу збудження резервуара, і тому подальший аналіз буде проведено із використанням обчислювальної схеми з розділу 3.

Числові приклади використовуватимуть пробний кут $\gamma = \pi/6$ та $\pi/12$ і вхідні дані (4.1). Необхідність розглядати два різних пробних кути та будувати велику кількість ілюстративних графіків на Рис. 4.7–4.13 зумовлена, як показали наші числові експерименти, суттєво різними метаморфозами (зі зміною $0 < |\delta_1| < 1$) кривих для $0 < \gamma \lesssim \pi/8$ та $\pi/8 \lesssim \gamma < \pi/4$. Обмеження одним пробним кутом $0 < \gamma < \pi/4$ зробило б аналіз усталених режимів неповним.

4.4.1. Еліптичне збурення проти годинникової стрілки. Рис. 4.7 (a) відтворює результати з [11] щодо амплітудно-частотних кривих для косого гармонічного (зворотно-поступального) збудження резервуара з $\gamma = \pi/6$. На рисунку збережено незмінні основні позначення гілок та точок біфуркації згідно з [11, Fig. 6 (b)]. Суцільні лінії відповідають стійким розв'язкам (режимам хвилювання), тоді як штрихові (темно-сині) лінії позначають нестійкі. У цьому випадку застосовність модальної теорії типу Нариманова–Моісеєва та відповідного асимптотичного аналізу усталених режимів була підтверджена спостереженнями та вимірюваннями у [10]. Експерименти також підтвердили різні максимальні підйоми хвиль біля перпендикулярних стінок (нерівність $A \neq B$) для кругових хвиль проти годинникової стрілки та за годинниковою стрілкою при однаковій частоті збудження σ/σ_1.

Амплітудно-частотні криві у стовпці (a) містить неперервну криву $P_l T D_0 U V S_0 W W_0 P_r$, що проходить через всю резонансну зону, та петлеподібну криву $P_0 S_0' V' P_0$, яка існує лише у первинній резонансній зо-

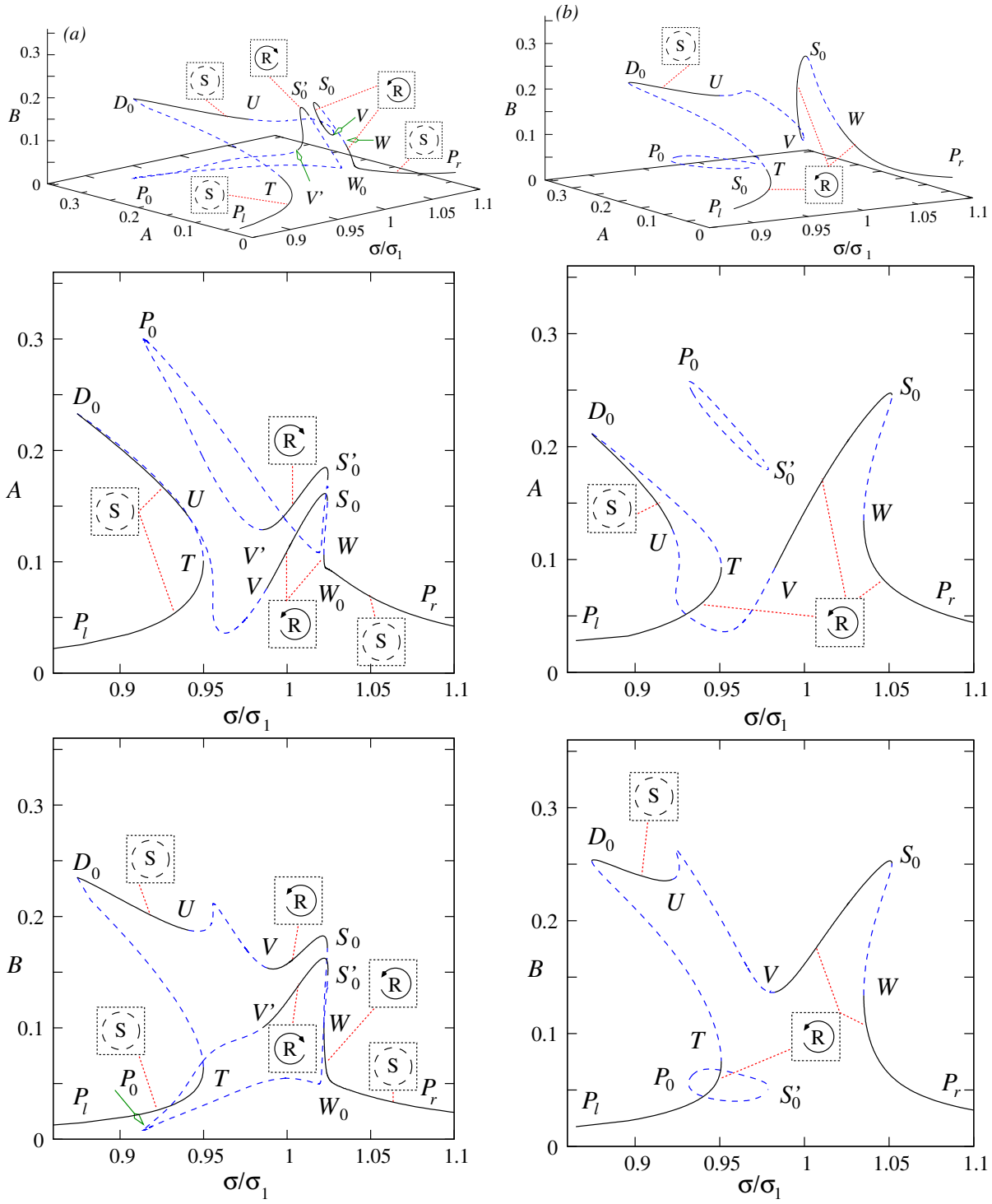

Рис. 4.7. Криві для косого еліптичного збурення з $\gamma = \pi/6$ проти годинникової стрілки для $\delta_1 = 0$ (a) та $\delta_1 = 0.45$ (b). Суцільні лінії – стійкі режими, а штрихові (темно-сині) — нестійкі. Панель (a) демонструє, що косе зворотно-поступальне збурення з $0 < \gamma < \pi/4$ породжує $P_l T D_0 U V S_0 W W_0 P_r$ (стійка кругова хвиля проти годинникової стрілки) в $V S_0$ і $W W_0$) та майже стоячі хвилі в $P_l T$, $W_0 P_r$ і $D_0 U$. Стійка кругова хвиля за годинниковою стрілкою на $V' S_0'$ з петлеподібній $P_0 S_0' V' P_0$. У діапазоні UV – іррегулярні хвилі. Крім того, при $\delta_1 = O(1)$ відрізки $P_l T$ і $W_0 P_r$ відповідають стійкій круговій хвилі проти годинникової стрілки.

ні. Стійка кругова хвиля проти годинникової стрілки (точки на VS_0 та WW_0) пов'язана із зазначеною неперервною кривою, тоді як стійка кругова хвиля за годинниковою стрілкою ($V'S'_0$) — з петлеподібною гілкою $P_0S'_0V'P_0$. Всі інші стійкі усталені хвилі належать до типу майже стоячих (точки на P_lT, W_0P_r та D_0U). У частотному діапазоні між абсцисами точок U та V очікуються іррегулярні хвилі. Криві не містять точок, що відповідають (суто) стоячим хвилям ($\beta = 1$ або $\sin\alpha = 0$), навіть поза первинною резонансною зоною на P_lT та W_0P_r, де могла б застосовуватися лінійна теорія хвилювання. У [11] це та інші специфічні особливості теоретично пояснено ненульовим демпфуванням у гідродинамічній системі. Справді, при $\xi = 0$ точки на P_lT та W_0P_r відповідають майже–діагональній стоячій хвилі.

Слід звернути увагу на інтервал стійкості WW_0P_r. При наближенні до P_r (точки поза первинною резонансною зоною) β стає дуже близьким, але не рівним одиниці ($\beta \approx 0.9999$ для вхідних даних (4.1)), тобто, як зазначалося вище, виникає майже стояча хвиля. Однак при переході від P_r до W значення β швидко зменшується, досягаючи $O(\epsilon^{1/3}) \lesssim 1 - \beta$ в околі W_0 і, далі, $1 - \beta = O(1)$, $\sin\alpha > 0$ в локальному околі W. Це означає, що майже стоячі хвилі для точок на P_rW_0 переходять у стійку кругову хвилю проти годинникової стрілки на W_0W.

Перехід від нульового до додатного, але відносно малого значення δ_1 зберігає топологічно ідентичне розгалуження. Як і на Рис. 4.7 (a), розгалуження складається з неперервної кривої $P_lTD_0UVS_0WW_0P_r$ та петлеподібної гілки $P_0S'_0V'P_0$. Однак петлеподібна гілка зменшується зі збільшенням δ_1 і, врешті-решт, зникає при відношенні півосей, що перевищує критичне значення (≈ 0.5 для вхідних даних (4.1)). При наближенні до цього критичного значення знизу петлеподібна гілка $P_0S'_0V'P_0$ позбавляється точок, що відповідають стійкій круговій хвилі за годинниковою стрілкою. У цих обчисленнях це відбувається приблизно при $\delta_1 = 0.4$. Рис. 4.7 (b) демонструє криві амплітудно-частотної відповіді хвиль для косого типу еліптичного збудження проти годинникової стрілки з $\delta_1 = 0.45$. Вони підтверджують зазначену особливість. Порівняння

стовпців (a) та (b) на Рис. 4.7 показує, що точки на P_lT та $W(W_0)P_r$ починають відповідати стійкій круговій хвилі проти годинникової стрілки (тут — у напрямку орбіти), як це спостерігалося раніше для інших положень еліптичної орбіти при $\delta_1 = O(1)$. Іррегулярні хвилі (хаос), як і раніше, прогнозуються у частотному діапазоні, визначеному точками T та V. Крім того, стовпець (b) демонструє зменшення D_0U (майже стоячі хвилі), збільшення VS_0 (кругова хвиля проти годинникової стрілки) та зміщення W праворуч.

Рис. 4.8 (a) показує, що петлеподібна гілка справді зникає при $\delta_1 = 0.5$ (як на Рис. 4.5 (b) для діагонального типу збудження), а гілка $P_lTD_0UVS_0WP_r$ зберігає свою структуру та чергування стійких/нестійких інтервалів. Стійка кругова хвиля за годинниковою стрілкою (у протилежному до орбіти резервуара напрямку) є неможливою, однак кругова хвиля проти годинникової стрілки (у напрямку орбітального збудження) виникає у частотних діапазонах, подібних до тих, що зображені на Рис. 4.7 (b).

Панелі (b-f) на Рис. 4.8 демонструють метаморфози амплітудно-частотних кривих при $0.75 \leq \delta_1 \leq 0.95$ (випадки подібні до тих, що на Рис. 4.6, але для іншого γ). Розгалуження має досягти геометричної форми, зображеної на Рис. 4.1, коли δ_1 наближається до одиниці. Порівняння панелей (a) та (b) ($\delta_1 = 0.5$ та 0.75 відповідно) показує загалом незначні геометричні зміни неперервної кривої $P_lD_0\tilde{E}U\tilde{E}'VS_0WP_r$; єдина відмінність — дві точки $\tilde{E}$ та $\tilde{E}'$, які відповідають майже-діагональним стоячим хвилям. Разючою є поява малої петлеподібної гілки D_0', яка народжується з "одиничної точки" приблизно при $\delta_1 = 0.746$.

Граничний випадок з $\delta_1 = 1$ також потребує другої петлеподібної гілки. Три панелі (c-e) ілюструють, як ця гілка ($D_0\tilde{E}U\tilde{V}''V_0''D_0$) "відбруньковується" від неперервної кривої $P_lD_0\tilde{E}U\tilde{E}'VS_0WP_r$. Обчислення на панелях виконано при $\delta_1 = 0.796, 0.7972$ та 0.798 відповідно. Еволюція розгалуження аналогічна до тієї, що спостерігалася на Рис. 4.6 (a-c). Вона має ті самі три обов'язкові стадії. Перша — новий (і відносно малий) "острівець" $V''(V_0)V'$, що виникає на $P_lD_0\tilde{E}U\tilde{E}'VS_0WP_r$ (панель c),

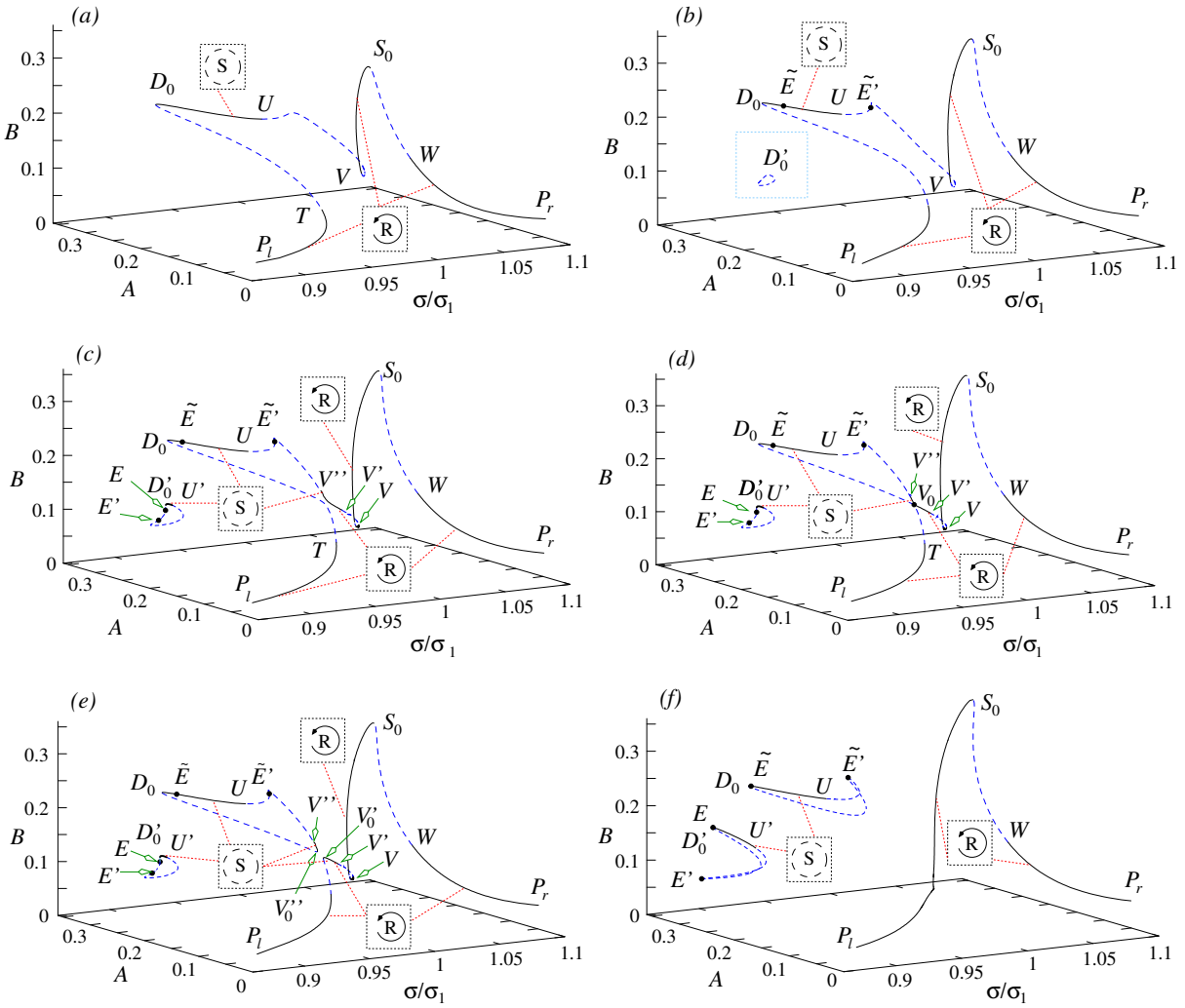

Рис. 4.8. Амплітудно-частотні криві для косого еліптичного збурення при $\gamma = \pi/6$ проти годинникової стрілки для $\delta_1 \geq 0.5$. Розрахунки виконано для $\delta_1 = 0.5$ (a), 0.75 (b), 0.796 (c), 0.7972 (d), 0.798 (e) і 0.95 (f) з використанням параметрів (4.1). Порівняння панелі (a) з Рис. 4.7 (b) показує зникнення петлі $P_0 S_0'$ при $\delta_1 = 0.5$. Для $0.47 \lesssim \delta_1 \lesssim 0.75$ реалізуються лише кругові хвилі проти годинникової стрілки, майже стоячі хвилі та іррегулярні. Панелі (b–f) демонструють випадок $0.75 \lesssim \delta_1 < 1$. Петлеподібна гілка ($B < A$) виникає з однієї точки і розширюється зі зростанням δ_1, формуючи область існування майже стоячих хвиль. Інша петлеподібна гілка ($A < B$) пов'язана з дотиком $V'V''$ і TD_0 та відповідною біфуркацією. Іррегулярні хвилі відсутні для $\delta_1 \gtrsim 0.8$ (панелі (e), (f)).

так що β швидко змінюється вздовж нього, спричиняючи режим майже стоячої хвилі в околі кінцевої точки V'' та кругову хвилю проти годинникової стрілки в околі кінцевої точки V'. По-друге, відрізок $V''(V_0)V'$ торкається TD_0, утворюючи точку біфуркації V_0 (панель (d), $\delta_1 = 0.7972$). І, нарешті, петлеподібна гілка $D_0\tilde{E}U\tilde{V}''V_0''D_0$ відривається з подальшим збільшенням δ_1, як показано на панелі (e). При $0.8 \lesssim \delta_1 \leq 1$ стійка кругова хвиля проти годинникової стрілки (у напрямку траєкторії збудження)

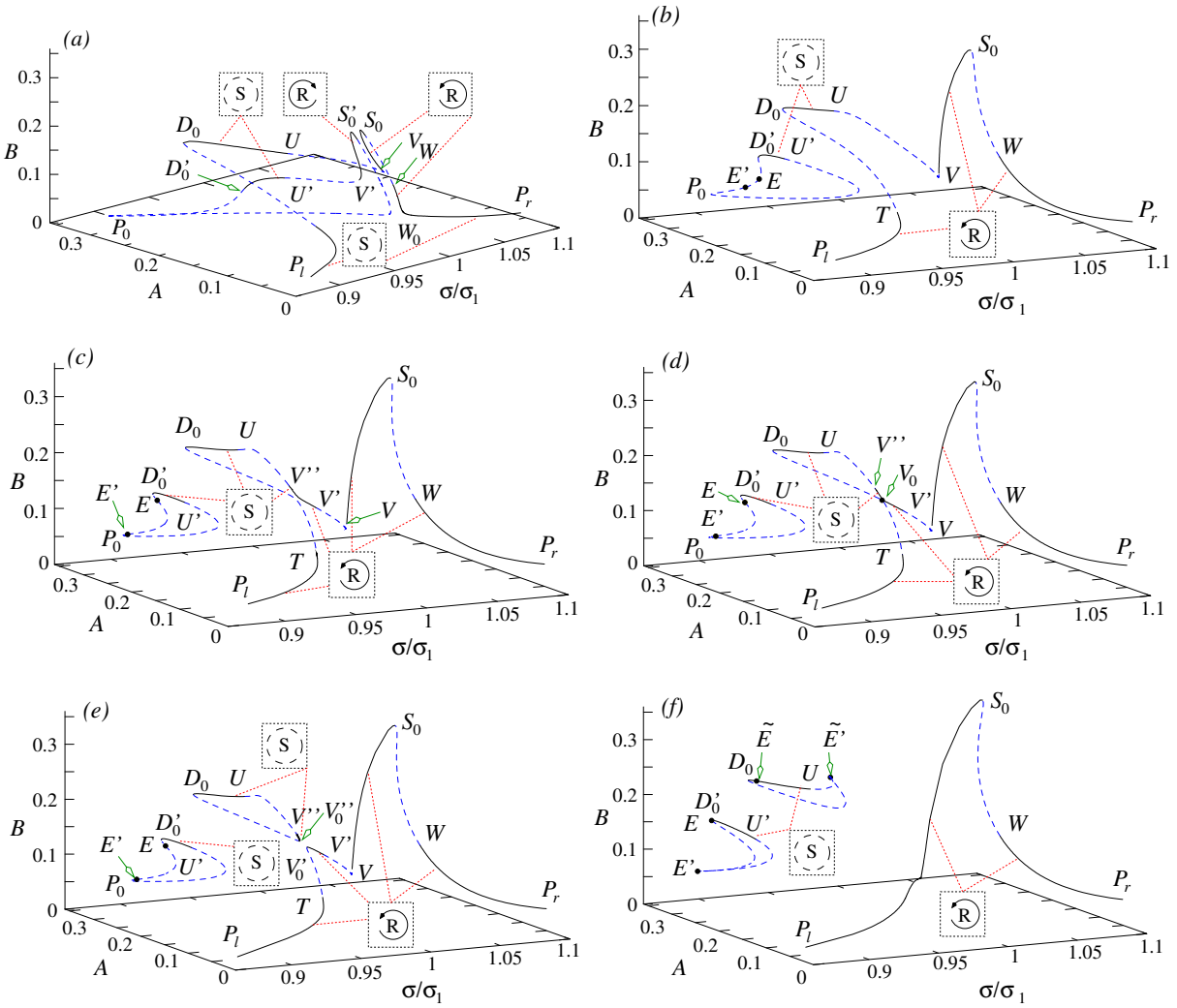

Рис. 4.9. Те саме, що й на Рис. 4.7 та 4.8, але для $\gamma = \pi/12$. Відношення півосей δ_1 дорівнює 0 (a), 0.6 (b), 0.743 (c), 0.744 (d), 0.745 (e) та 0.9 (f). Вхідні параметри (4.1). Панелі якісно відтворюють метаморфози амплітудно-частотних кривих, показані на Рис. 4.7 та 4.8. Відмінність полягає в тому, що гілка $D_0'U'P_0D_0'$ не виникає з однієї точки, як у випадку $\gamma = \pi/6$. Це означає, що для всіх $0 \le \delta_1 \le 1$ існують дві стійкі майже стоячі хвильові моди (ділянки D_0U і $D_0'U'$).

існує у всій резонансній зоні. Дві стійкі майже стоячі хвилі співіснують зі стійкою круговою хвилею у певному частотному діапазоні. Хаос (коли всі усталені режими є нестійкими) не прогнозується.

Рис. 4.9 демонструє зміни амплітудно-частотних кривих, коли γ відрізняється від пробного значення $\pi/6$ ($\gamma = \pi/12$ у цих обчисленнях). Якісно розгалуження подібне до тих, що зображені на Рис. 4.7 та 4.8. Принципова відмінність полягає у петлеподібній гілці $P_0S_0'V'U'D_0'P_0$ ($P_0D_0'U'P_0$). При $\gamma = \pi/6$ ця гілка зникала при $\delta_1 = 0.45$, але пізніше знову виникала з одиничної точки при $\delta_1 = 0.746$. Рис. 4.9 показує, що ця гілка існує (не зникає для певних значень δ_1) при всіх $0 < \delta_1 < 1$,

коли $\gamma = \pi/12$. З фізичної точки зору цей факт означає наявність двох стійких майже стоячих хвиль (D_0U та $D_0'U'$) на Рис. 4.9 для довільних відношень півосей.

Робота [188] наводить одне розгалуження у площині частота–енергія для орбіти проти годинникової стрілки з $\gamma = \pi/6$ та $\delta_1 = 0.364$. Результати якісно узгоджуються з нашими обчисленнями. Вони виявляють одну неперервну гілку, що проходить через всю резонансну зону, та петлеподібну гілку з інтервалом, що відповідає режиму кругової хвилі у протилежному напрямку.

4.4.2. Еліптичне збурення за годинниковою стрілкою. Рис/ 4.7 (а) та 4.9 (а) показують, що косе гармонічне зворотно-поступальне збудження резервуара з $0 < \gamma < \pi/4$ породжує дві незв'язані гілки: неперервну криву $P_lD_0UVS_0WW_0P_r$ та петлеподібну гілку $P_0V'S_0'V'(U'D_0')P_0$. Перша гілка містить точки, що відповідають стійкій круговій хвилі проти годинникової стрілки (VS_0), а друга має інтервал $V'S_0'$, який відповідає стійкому режиму кругової хвилі за годинниковою стрілкою. Іншими словами, косе гармонічне збудження не може призводити до фізично ідентичних, але протилежно спрямованих кругових хвиль, як це відбувалося при поздовжньому збудженні. Щоб досягти граничного розгалуження амплітуд хвиль на Рис. 4.1 при $|\delta_1| \to 1$, криві відповіді мають пройти через дуже специфічні метаморфози, які супроводжуються, зокрема, зникненням стійкої кругової хвилі проти годинникової стрілки з гілки $P_lD_0UVS_0WW_0P_r$. Те, як це може відбуватися, демонструється на двох ілюстративних прикладах для $\gamma = \pi/6$ та $\pi/12$ при $-1 < \delta_1 < 0$.

Розглянемо косе гармонічне зворотно-поступальне збудження резервуара з кутом $\gamma = \pi/6$ та відповідні амплітудно-частотні криві на Рис. 4.7 (а). Після цього злегка збуримо $\delta_1 < 0$, що фізично означає еліптичні рухи резервуара за годинниковою стрілкою з малим відношенням півосей. Рис. 4.10 (а) представляє перший цікавий результат для $\delta_1 = -0.015$. Криві для цього відношення справді виглядають досить цікаво. Можна побачити, що дві початково (при $\delta_1 = 0$) незв'язані гілки

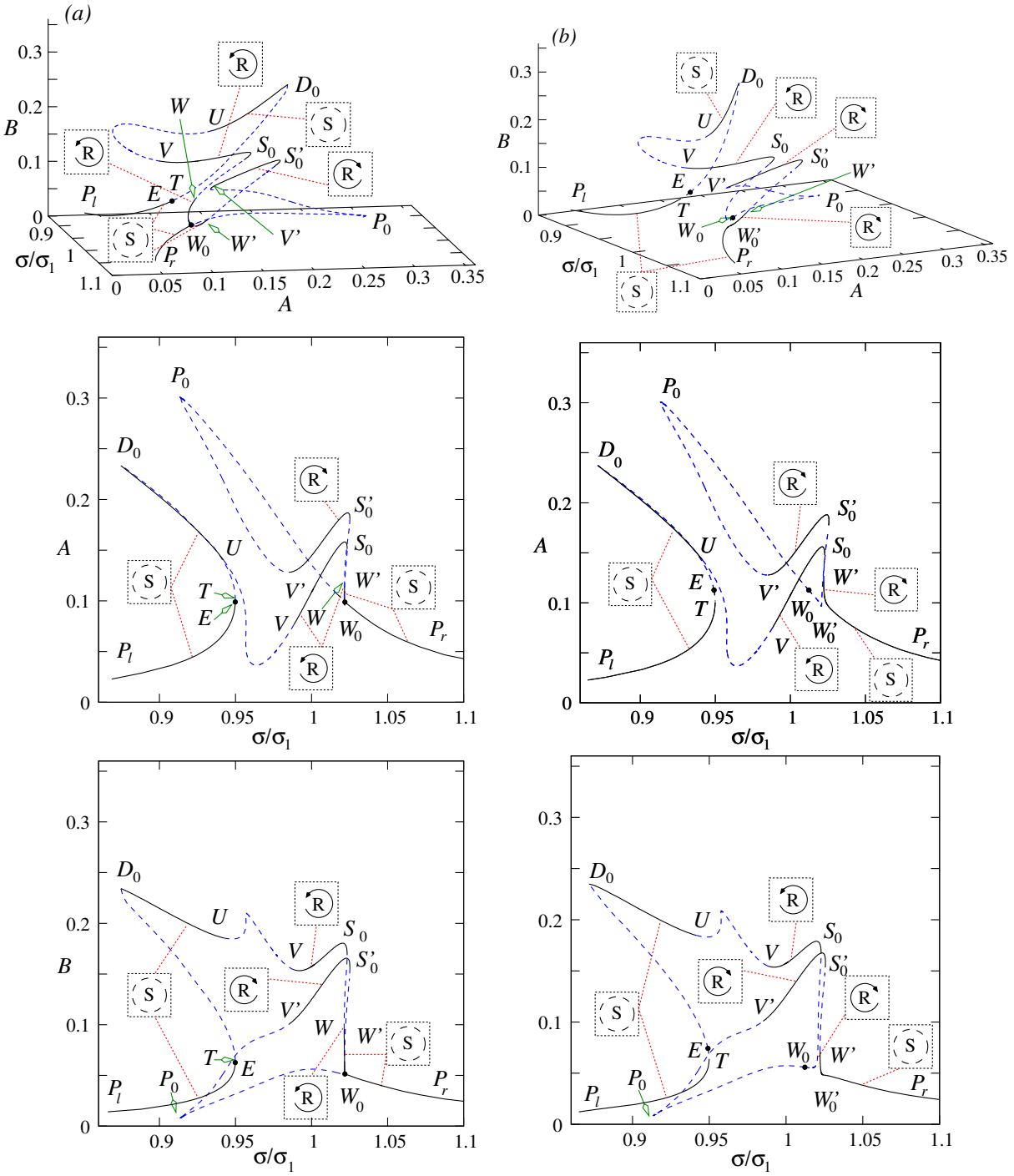

Рис. 4.10. Амплітудно-частотної криві, спричинені косим еліптичним збудженням за годинниковою стрілкою з $\gamma = \pi/6$. Тут $\delta_1 = -0.015$ (a) та $= -0.025$ (b). Вхідні дані (4.1), позначення з Рис. 4.7 (a) (косе гармонічне збудження, $\delta_1 = 0$). Два стовпці демонструють зміни у розгалуженнях, коли орбіта резервуара має мале відношення півосей. Зворотно-поступальне збудження породжує дві незв'язані гілки на Рис. 4.7 (a). Стовпець (a) показує, що ці криві з'єднуються у точці біфуркації W_0, що відповідає режиму стоячої хвилі, (при $\delta_1 = -0.015$). Інша стояча хвиля пов'язана з точкою E, яка збігається з T. Коли відношення півосей продовжує збільшуватися, це розгалуження відривається у точці W_0 (точка біфуркації "стрибає" до P_0S_0). Стовпець (b) ($\delta_1 = -0.025$) демонструє, що розгалуження складається з єдиної неперервної кривої $P_lTED_0UVS_0W_0P_0V'S_0'W_0'P_r$. Розташування частотних діапазонів для стійкої кругової хвилі, майже стоячих та нерегулярних хвиль практично ідентичне тому, що зображено на Рис. 4.7 (a), за винятком вузької зони W_0W', яка визначає стійку кругову хвилю за годинниковою стрілкою (у напрямку збудження).

$P_l D_0 U V S_0 W W_0 P_r$ та $P_0 S_0' U D_0$ торкаються одна одної та утворюють точку перетину (біфуркації) W_0. Зокрема, точка біфуркації W_0 відповідає стоячій (майже-діагональній) хвилі ($\beta = 1$, див. Рис. 3.3). Існує також друга стояча хвиля, пов'язана з точкою E, яка збігається з точкою T. Оскільки відношення півосей $|\delta_1| = 0.015$ має порядок $O(\epsilon)$ на асимптотичній шкалі (4.1), частотні діапазони стійких усталених хвиль залишаються майже ідентичними до тих, що на Рис. 4.7 (a), де $\delta_1 = 0$. Виняток становить відрізок (інтервал) $W_0 W'$, який виходить з точки біфуркації W_0. Точки на $W_0 W'$ відповідають стійким майже стоячим хвилям.

Рис. 4.10 (b) ілюструє зміни амплітудно-частотних кривих внаслідок подальшого збільшення відношення півосей (обчислення виконано при $\delta_1 = -0.025$). Після роз'єднання у точці W_0 розгалуження стає єдиною неперервною кривою $P_l T E D_0 U V S_0 W_0 P_0 V' S_0' W_0' P_r$, де E та W_0 залишаються відповідальними за нестійкі (суто) стоячі хвилі. Зокрема, точка E переміщується вздовж цієї кривої з "периферії" до первинної резонансної

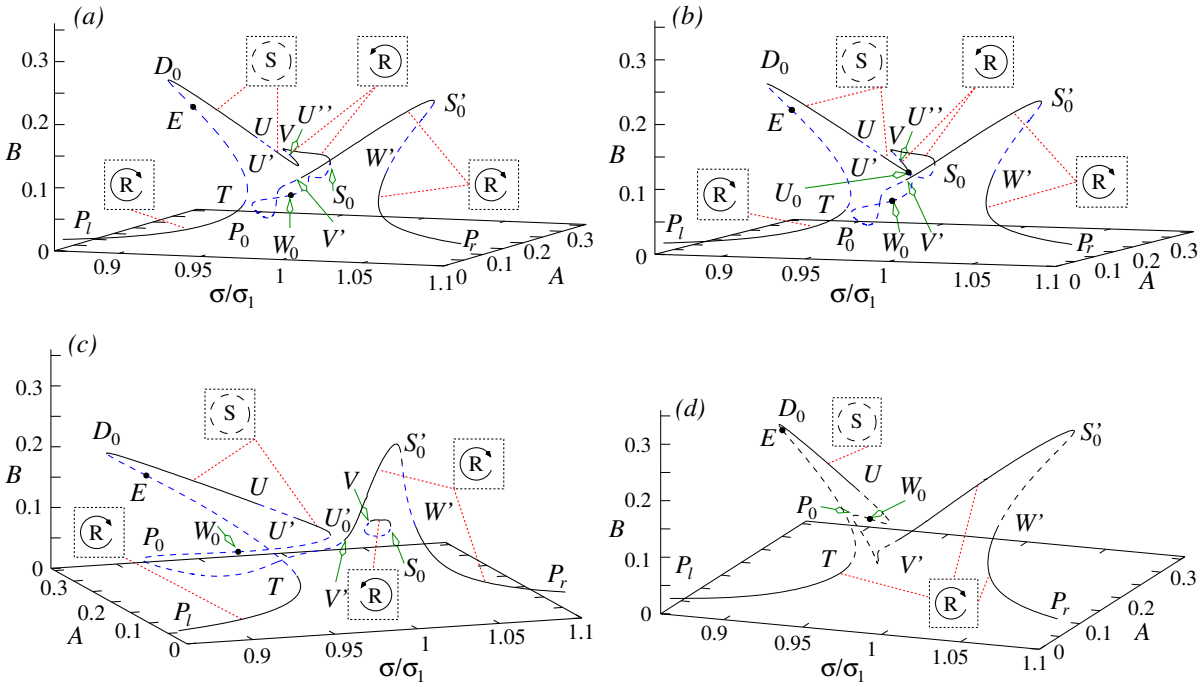

Рис. 4.11. Амплітудно-частотні криві для косого еліптичного збурення за годинниковою стрілкою при $\gamma = \pi/6$ і значеннях $\delta_1 = -0.275$ (a), $\delta_1 = -0.280$ (b), $\delta_1 = -0.290$ (c) та $\delta_1 = -0.5$ (d). Вхідні параметри з (4.1). Позначення відповідають Рис. 4.10. Рисунок демонструє поступове зменшення області кругової хвилі проти годинникової стрілки (спрямованої проти орбітального збурення), що приводить до появи точки біфуркації V' (b), подальшого відокремлення петлеподібної гілки VS_0 (панелі (b), (c)) та її повного зникнення (d).

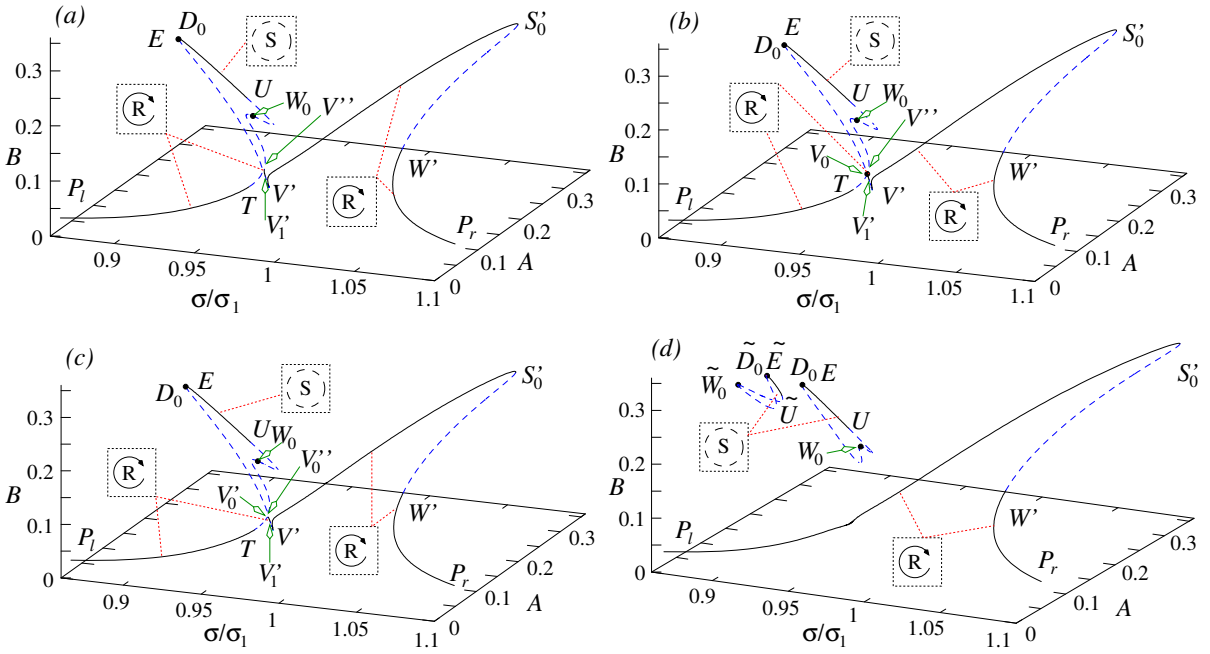

Рис. 4.12. Те саме, що й на Рис. 4.11, але для значень $\delta_1 = -0.702$ (a), $\delta_1 = -0.7029$ (b), $\delta_1 = -0.704$ (c) та $\delta_1 = -0.95$ (d). Панелі демонструють формування петлеподібних гілок, характерних для кругового орбітального збурення, зі збільшенням модуля відношення півосей $|\delta_1|$.

зони, тоді як W_0 «стрибає» на інтервал P_0S_0. Відношення $|\delta_1| = 0.025$ залишається порядку $O(\epsilon)$ і, отже, амплітуди усталених хвиль та частотні діапазони стійких усталених режимів (див. проекції на $(\sigma/\sigma_1, A)$ та $(\sigma/\sigma_1, B)$) незначно змінюються у стовпці (b). Однак існують якісні відмінності в околі колишньої точки біфуркації W_0. На панелі (a) W_0W відповідає стійкій круговій хвилі проти годинникової стрілки, а W_0W' — стійким майже стоячим хвилям. Оскільки W_0 стрибає на P_0S_0 у панелі (b), інтервал W_0W зникає, але, оскільки β швидко зменшується вздовж W_0W', у локальному околі W' прогнозується стійка кругова хвиля за годинниковою стрілкою (у напрямку орбіти резервуара).

Подальші метаморфози амплітудно-частотних кривих для косого типу еліптичного збудження за годинниковою стрілкою зі збільшенням $|\delta_1| = O(1)$ на асимптотичній шкалі (4.1) продемонстровано на Рис. 4.11 та 4.12. Рис. 4.10 (b, $\delta_1 = -0.025$) та 4.11 (a, $\delta_1 = -0.275$) відображають топологічно еквівалентне розгалуження, яке складається з єдиної неперервної кривої, що проходить від P_l до P_r через первинну резонансну зону. Однак Рис. 4.11 (a) виявляє такі відмінності: (i) точки E та W_0 неперервно зміщуються у первинну резонансну зону вздовж кривої від-

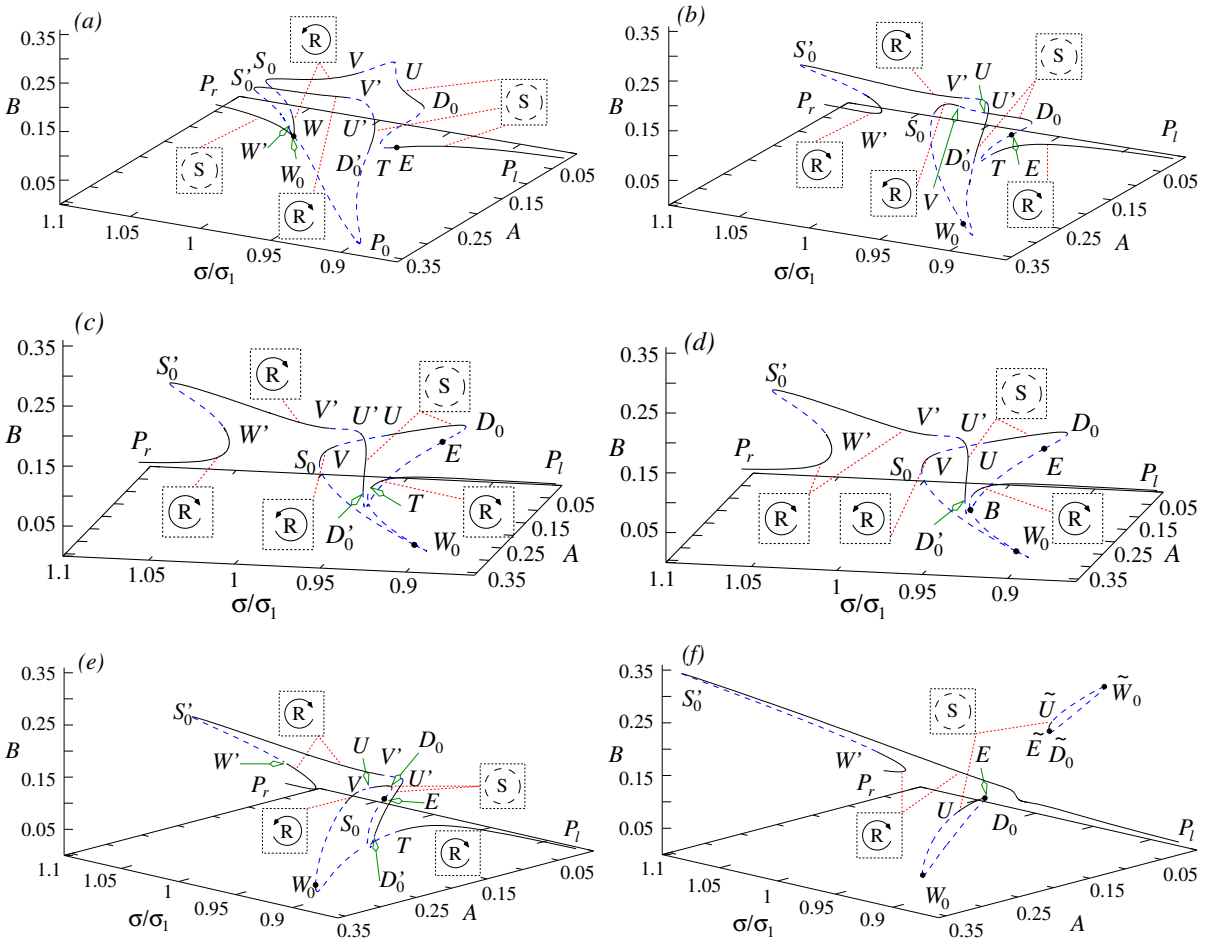

Рис. 4.13. Те саме, що й на Рис. 4.10–4.12, але для косого еліптичного збурення за годинниковою стрілкою при $\gamma = \pi/12$. Відношення півосей δ_1 дорівнює -0.0138 (a), -0.4 (b), -0.465 (c), -0.4658 (d), -0.469 (e) та -0.95 (f).

повіді, (ii) точки на P_lT та P_rW' починають відповідати стійкій круговій хвилі за годинниковою стрілкою (у напрямку еліптичних орбіт резервуара), (iii) інтервал VS_0, на якому відбувається стійка кругова хвиля проти годинникової стрілки, зменшується, тоді як $V'S_0'$ (кругова хвиля за годинниковою стрілкою, у напрямку орбіти) збільшується, (iv) з'являється новий інтервал $U'U''$, вздовж якого β швидко змінюється, спричиняючи режим майже стоячої хвилі у точці U' та кругову хвилю проти годинникової стрілки в околі U''.

Збільшення відношення півосей $|\delta_1|$ на панелях (b-d) Рис. 4.11 "видавлює" стійкий режим кругової хвилі проти годинникової стрілки (у протилежному напрямку) з резонансної зони. Пов'язані топологічні метаморфози виглядають досить привабливо. По-перше, відрізок гілки $U'U''$ торкається P_0S_0 та утворює точку біфуркації V', як показано на пане-

лі (b) ($\delta_1 = -0.28$). По-друге, подальше збільшення відношення півосей спричиняє відрив петлі $V'S_0VV'$ (панель c), що супроводжується швидким зменшенням VS_0 (стійка кругова хвиля проти годинникової стрілки) зі збільшенням $|\delta_1|$. Петлеподібна гілка зникає при $\delta_1 \approx -0.3$ (для заданих вхідних даних). Панель (d, $\delta_1 = -0.5$) демонструє розгалуження, подібне до того, що зображено на Рис. 4.8 (a). Виняток становить наявність (суто) стоячих хвиль, пов'язаних з точками E та W_0. Подібне розташування та розміри ефективних (для стійких усталених хвиль) частотних діапазонів і нерегулярних хвиль очікуються для обох напрямків (за годинниковою та проти годинникової стрілки) косих еліптичних орбіт резервуара, коли відношення півосей близьке до ≈ 0.5.

Ри. 4.12 досліджує амплітудно-частотні криві та пов'язані усталені хвилі, коли траєкторія косого еліптичного збудження за годинниковою стрілкою наближається до кола. Обчислення виконано при $\delta_1 = -0.702$ (панель a), $= -0.7029$ (b), $- = 0.704$ (c) та $= -0.95$ (d) і $\gamma = \pi/6$. Формування петлеподібної гілки $D_0EUW_0D_0$ ($B > A$) подібне до того, що зображено на Рис. 4.8 (c-e). В обох випадках стійкий режим кругової хвилі у напрямку орбіти існує у всій резонансній зоні (нерегулярні хвилі стають неможливими) починаючи з відношення півосей $|\delta_1| = 0.75$. Рис. 4.13 показує криві для косого типу еліптичного збудження за годинниковою стрілкою при $\gamma = \pi/12$. Початкова ситуація зображена на Рис. 4.9 (a), що відповідає гармонічному косому зворотно-поступальному збудженню ($\delta_1 = 0$).

Рис. 4.13 (a) демонструє, як дві незв'язані гілки на Рис. 4.9 (a) з'єднуються між собою та утворюють точку біфуркації W_0 (як на Рис. 4.10 b). Панелі (b-c) демонструють формування єдиної кривої відповіді, стійкі та нестійкі інтервали якої чергуються між собою. Як і в попередніх прикладах, кругова хвиля проти годинникової стрілки зникає при відношенні півосей ≈ 0.5. Справді, відповідний інтервал S_0V є відносно малим у випадках (c-e) і повністю зникає при $0.5 \lesssim |\delta_1|$. Панелі (d-e) показують, по-перше, перетин кривої відповіді у точці B з наступним розривом у точці біфуркації, що призводить до петлеподібної гілки

$W_0UED_0W_0$. Інша петлеподібна гілка $\tilde{W}_0\tilde{U}\tilde{E}\tilde{D}_0\tilde{W}_0$ виникає з одиничної точки, коли $|\delta_1|$ наближається до одиниці.

Підсумовуючи, косий тип еліптичного збудження спричиняє широке різноманіття кривих амплітудно-частотної відповіді, топологія та геометрія яких суттєво залежать від відношення півосей і, особливо, від напрямку орбіти резервуара. Метаморфози кривих розгалуження є дуже цікавими при $(\gamma\,\delta_1) < 0$ (або траєкторія за годинниковою стрілкою при додатному γ, або траєкторія проти годинникової стрілки при від'ємному γ). Особливо це стосується випадку $0 < |\delta_1| \lesssim 0.5$ (верхня межа залежить від фізичних вхідних даних). При $|\delta_1| \approx 0.5$ кругова хвиля у протилежному до орбіти резервуара напрямку, як правило, зникає. Крім того, розташування та частотні діапазони стійких майже стоячих хвиль, кругових хвиль у напрямку орбіти, а також нерегулярних хвиль залишаються подібними для відношень півосей $0.5 \lesssim |\delta_1| \lesssim 0.75$. Подальше збільшення відношення півосей ($0.75 \lesssim |\delta_1|$) перетворює криві амплітудно-частотної відповіді на ті, що характерні для кругового орбітального збудження.

4.5. Висновки до розділу

У даному розділі було проведено систематичний чисельний аналіз усталених резонансних хвильових режимів у квадратному контейнері, відповідних амплітудно-частотних характеристик для широкого спектру орбітальних рухів баку з частотою, близькою до найнижчою власної частоти коливання рідини. Аналіз базується на результатах попереднього розділу 3, де було доведено, що довільне резонансне збурення першої власної частоти з точністю до членів вищого асимптотичного порядку малості теорії Наріманова–Моісеєва зводиться до розглянутих тут еліптичних горизонтальних збурень. Чисельні результати враховують демпфування та інші вхідні дані, що використані в експериментах роботи [10] для поступальних гармонічних коливань баку. Для цих вхідних даних робота [11] довела застосовність асимптотичної модальної теорії Наріманова-Моісєєва.

Показано, що характер амплітудно-частотних кривих і відповідних

усталених хвильових режимів визначається геометрією орбітального руху бака, зокрема співвідношенням півосей еліптичної орбіти δ_1 та кутом її орієнтації γ. При цьому різні типи збурення (кругові, поздовжні, діагональні та косі еліптичні) призводять до якісно відмінних топологій кривих відгуку у просторі $(\sigma/\sigma_1, A, B)$ та можуть суттєво залежати від напрямку орбітальних збурень (за чи проти годинникової стрілки).

Для кругових орбітальних збурень встановлено, що амплітудно-частотні криві не залежать від напряму орбітального руху бака. Показано існування у всій зоні основного резонансу аналітичного розв'язку, що відповідає стійким круговим хвилям з однаковими амплітудами $A = B$, а також можливість співіснування двох різних стійких кругових хвиль у певному діапазоні частот (мультистабільність). Водночас чисельно виявлено існування майже стоячих хвиль у вузькому інтервалі параметрів. Такі стоячі хвилі співіснують зі круговою хвилею меншої амплітуди, тож їх здається буде важко виявити експериментально.

Для еліптичних орбіт канонічного положення, коли осі еліпса паралельні стінкам квадратного баку (цей випадок визначається кутом нахилу півосі $\gamma = 0$) встановлено, що навіть незначне відхилення типу збурення від поздовжнього (відношення півосей стає ненульовим $\delta_1 \neq 0$) призводить до руйнування симетрії амплітудно-частотних кривих та зникненню стоячих (плоских) хвиль. У цьому випадку виникають складні розгалуження в просторі $(\sigma/\sigma_1, A, B)$, що визначають майже стоячі та кругові хвилі, а також області нестійких (іррегулярних) режимів, тобто таких, які демонструють хаос.

Для діагональних еліптичних збурень (півосі еліпса направлені уздовж діагоналі квадратного перерізу, $\gamma = \pi/4$) встановлено залежність структури розв'язків від знака параметра δ_1, тобто від напряму руху бака. Показано, що демпфування відіграє ключову роль у порушенні симетрії між амплітудами хвиль ($A \neq B$), що узгоджується з експериментальними спостереженнями [10]. Виявлено складні топологічні метаморфози амплітудно-частотних кривих, включаючи розщеплення гілок, появу та зникнення петлеподібних розгалужень і зміну типів хвильових режимів.

Для косих еліптичних орбіт (найбільша вісь еліпса знаходиться під кутом $0 < \gamma < \pi/4$ до Ox) показано, що поведінка усталених резонансних хвиль, їх амплітудно-частотні криві, істотно залежать від знака добутку $(\gamma\,\delta_1)$, що визначає їх залежність від того чи співнаправлені або протинаправлені орбітальні рухи та кругові хвилі. Встановлено, що у випадку співнапрямленого руху домінують стійкі кругові хвилі, тоді як протиспрямований рух призводить до складних метаморфоз амплітудно-частотних розгалужень. Показано, що зі зростанням $|\delta_1|$ розгалуження поступово переходять до характерних для кругового орбітального збурення. Цей перехід супроводжується складними біфуркаційними процесами, включаючи утворення та зникнення петлеподібних гілок, зміни областей стійкості та зникнення іррегулярних режимів (хаосу).

У результаті чисельних досліджень амплітудно-частотних кривих встановлено, що:

- усталені хвильові режими дійсно можуть бути класифіковані як стоячі, майже стоячі, кругові та хаотичні, причому всі з них існують для певних вхідних параметрів;

- існування та стійкість цих режимів визначається параметрами $-\leq \delta_1 \leq 1$ (відношення осей еліпса збурення із урахуванням напряму орбіти), γ (нахилом головної осі еліпсу до осі Ox), коефіцієнтом демпфування ξ та безрозмірною частотою σ/σ_1;

- мультистійкість (існування декількох стійких усталених розв'язків) та хаос (відсутність будь-яких стійких розв'язків) є типовим явищем для практично усіх вхідних параметрів окрім кругової орбіти, коли хаотичні рухи не прогнозуються.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв'язано актуальну задачу теорії резонансних поверхневих хвиль в тривимірному резервуарі квадратного перерізу: класифікацію всіх можливих типів усталених хвильових рухів рідини для довільних тривимірних періодичних рухів резервуару малої амплітуди із частотою, близькою до першої власної частоти коливання рідини.

1. Згідно із класичною роботою [6] початково-крайова задача з вільною поверхнею про резонансні коливання рідини у контейнері квадратного перерізу зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь, яка зв'язує узагальнені гідродинамічні координати, що описують відхилення власних форм коливання рідини. Контейнер коливається із малою амплітудою (у порівнянні із лінійними розмірами вільної поверхні) та частотою, близькою до найнижчої власної частоти коливання рідини. Тоді, використовуючи асимптотичний модальний підхід Наріманова–Моїсєєва, задачу можна звести до скінченновимірної системи з дев'яти зв'язаних нелінійних рівнянь, у яких нелінійність лише поліноміального типу. Аби врахувати якісний вплив в'язкого демпфування на резонансні хвилі, зокрема феномен Ікеди [10], до системи типу Наріманова-Моісєєва необхідно додати лінійні в'язкі члени. Останні виникають в даній роботі лише в рівняннях відносно асимптотично домінантних (нижчого порядку) узагальнених гідродинамічних координат. Дисертація розв'язує проблему класифікації усіх усталених резонансних хвиль за умови довільного типу резонансного руху баку, доповнюючи відомі до робіт автора результати, де розглядалися виключно зворотно-поступальні збурення контейнера [6, 10, 12, 185].

2. Отримано аналітичні асимптотичні періодичні розв'язки системи типу Наріманова-Моісєєва, які описують усталені резонансні хвильові режими для довільного періодичного руху контейнера малої

амплітуди. Виведено умову існування такого розв'язку (секулярну систему), яка приймає вигляд чотирьох алгебраїчних третього порядку рівнянь, які пов'язують чотири домінантні амплітуди резонансної хвилі, безрозмірну частоту збурення, а також чотири коефіцієнти при старших гармоніках Фур'є розкладу зовнішнього збурення. Аналізуючи секулярну систему та асимптотичний розв'язок, який випливає з її розв'язків, доведено, що

- стійкість асимптотичних розв'язків однозначно визначається першим наближенням, яке описується чотирма амплітудами із секулярної системи;
- для кожного довільного резонансного збурення баку існує еквівалентне у формі поступального еліптичного горизонтального (із тією ж самою частотою), яке приводить з точністю до членів найвищого порядку до аналогічних усталених резонансних хвиль;
- показано, що існує лише чотири типи усталених хвиль: стоячі, майже стоячі, кругові та хаотичні (жодний із попередніх типів хвиль нестійкий):
- дано чіткі критерії реалізації однієї з цих усталених хвиль (класифікація) в залежності від значень інтегральних амплітуд A (компонента хвилі уздовж вісі Ox), B (компонента хвилі уздовж вісі Oy), а також різниці зсувів фаз α компонент.

3. Виведена альтернативна форма секулярної системи, яка зв'язує A, B та α, а також вхідні параметри еліптичного збурення: найбільша вісь, відношення меншої та більшої осей $-1 \leq \delta_1 \leq 1$ (від'ємний знак відповідає траєкторії збурення за годинниковою стрілкою, додатній – проти), а також кутом γ між основною віссю та Ox. Розроблено ефективний чисельний метод розв'язування альтернативної секулярної системи, який базується на параметричному представленні розв'язків та аналітичному виключенні частини змінних. Показано, що цей метод дозволяє знаходити всі допустимі розв'язки,

включаючи як гладкі гілки, так і локальні петльові структури, які можуть виникати внаслідок нелінійної взаємодії мод.

4. На основі виведеної альтернативної секулярної системи проведено систематичний чисельний аналіз усталених резонансних хвильових режимів у квадратному контейнері, відповідних амплітудно-частотних характеристик для широкого спектру орбітальних рухів баку з частотою, близькою до найнижчої власної частоти коливання рідини. Встановлено:

   - Для кругових орбітальних збурень показано існування у всій зоні основного резонансу стійкого аналітичного розв'язку, що відповідає стійким круговим хвилям за напрямком збурення. Водночас виявлено існування майже стоячих хвиль у вузькому інтервалі параметрів, що співіснують зі круговою хвилею меншої амплітуди.
   - Для еліптичних орбіт канонічного положення (півосі еліпса паралельні стінкам квадратного баку, $\gamma = 0$) встановлено, що зміна збурення від поздовжнього ($\delta_1 \neq 0$) призводить до руйнування симетрії амплітудно-частотних кривих та зникнення стоячих хвиль. Виникають складні розгалуження в просторі $(\sigma/\sigma_1, A, B)$, що визначають майже стоячі та кругові хвилі, а також області нестійких (хаос) режимів.
   - Для діагональних еліптичних збурень ($\gamma = \pi/4$) встановлено залежність структури розв'язків від знака δ_1, тобто від напряму руху бака. Показано, що демпфування відіграє ключову роль у порушенні симетрії між амплітудами хвиль ($A \neq B$), що узгоджується з експериментальними спостереженнями [10]. Виявлено складні топологічні метаморфози амплітудно-частотних кривих, включаючи розщеплення гілок, появу та зникнення петлеподібних розгалужень і зміну типів хвильових режимів.
   - Для косих еліптичних орбіт ($0 < \gamma < \pi/4$) показано, що поведінка усталених резонансних хвиль, їх амплітудно-частотні

криві істотно залежать від знака добутку ($\gamma\,\delta_1$), що визначає їх залежність від того чи співнаправлені або протинаправлені орбітальні рухи та кругові хвилі. Встановлено, що у випадку співнапрямленого руху домінують стійкі кругові хвилі, тоді як протиспрямований рух призводить до складних метаморфоз амплітудно-частотних розгалужень. Показано, що зі зростанням $|\delta_1|$ розгалуження поступово переходять до характерних для кругового орбітального збурення. Цей перехід супроводжується складними біфуркаційними процесами, включаючи утворення та зникнення петлеподібних гілок, зміни областей стійкості та зникнення іррегулярних режимів (хаосу).

5. Систематичний аналіз амплітудно-частотних кривих встановив, що для еліптичних збурень реалізуються:

   - Стоячі, майже стоячі, кругові та хаотичні, причому всі з них існують та співіснують для певних вхідних параметрів.
   - Існування та стійкість цих режимів визначається параметрами $-\leq\delta_1\leq 1$ (відношення осей еліпса збурення із урахуванням напряму орбіти), γ (нахилом головної осі еліпсу до осі Ox), коефіцієнтом демпфування ξ та безрозмірною частотою σ/σ_1.
   - Мультистійкість (існування декількох стійких усталених розв'язків) та хаос (відсутність будь-яких стійких розв'язків) є типовим явищем для практично усіх вхідних параметрів крім кругової орбіти, коли хаотичні рухи не прогнозуються.

Таким чином, у дисертаційній роботі сформовано цілісний підхід до дослідження усталених хвильових режимів, який поєднує асимптотичні методи, модальний аналіз та ефективні чисельні процедури. Отримані результати не лише узагальнюють відомі теоретичні підходи, але й створюють основу для подальших досліджень складних нелінійних ефектів у задачах гідродинаміки та механіки рідин у рухомих контейнерах.

Бібліографія

1. Faltinsen OM, Timokha AN. Sloshing. Cambridge University Press; 2009.

2. Rebouillat S, Liksonov D. Fluid-structure interaction in partially filled liquid cotainers: A comparative review of numerical approaches. Computers & Fluids. 2010;39:739-46.

3. Shvets A, Sirenko V. Peculiarities of transition to chaos in nonideal hydrodynamics systems. Chaotic Modeling and Simulation. 2012;2:303-10.

4. Krasnopolskaya TS, Shvets AY. Dynamical chaos for a limited power supply for fluid oscillations in cylindrical tanks. Journal of Sound and Vibration. 2009;322:532-53.

5. Lukovsky IA. Nonlinear Dynamics: Mathematical Models for Rigid Bodies with a Liquid. De Gruyter.; 2015.

6. Faltinsen OM, Rognebakke OF, Timokha AN. Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square base basin. Journal of Fluid Mechanics. 2003;487:1-42.

7. Faltinsen OM, Rognebakke OF, Timokha AN. Classification of three-dimensional nonlinear sloshing in a square-base tank with finite depth. Journal of Fluids and Structures. 2005;20(1):81-103.

8. Faltinsen OM, Rognebakke OF, Timokha AN. Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square base basin. J Fluid Mech. 2005;487:1-42.

9. Faltinsen OM, Rognebakke OF, Timokha AN. Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square base basin. Part 3. Base ratio perturbation. J Fluid Mech. 2006;551:93-116.

10. Ikeda T, Ibrahim RA, Harata Y, Kuriyama T. Nonlinear liquid sloshing in a square tank subjected to obliquely horizontal excitation. J Fluid Mech. 2012;700:304-28.

11. Faltinsen OM, Timokha AN. Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square-base basin. Part 4. Oblique forcing and linear viscous damping. Journal of Fluid Mechanics. 2017;822:139-69.

12. Faltinsen OM, Rognebakke OF, Timokha AN. Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square base basin. Part 2. Effect of higher modes. Journal of Fluid Mechanics. 2005;523:199-218.

13. Faltinsen OM, Lagodzinskyi OE, Timokha AN. Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square base basin. Part 5. Three-dimensional non-parametric tank forcing. Journal of Fluid Mechanics. 2020;894:A10.

14. Ostrogradsky MA. Mémoire sur la propagation des ondes dans un bassin cylindrique. Mémoires a l'Academie Royale des Sciences, De l'Institut de France. 1832;**III**:23-44.

15. Craik AD. The origin of water wave theory. Annual Review of Fluid Mechanics. 2004;36:1-28.

16. Фещенко СФ, Луковский ИА, Рабинович БИ, Докучаев ЛВ. Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. Киев: Наук. думка; 1969.

17. Hutton RE. An investigation of nonlinear, nonplanar oscillations of fluid in cylindrical container: Tech. rep. NASA; D-1870. NASA; 1963.

18. Faltinsen OM, Timokha AN. Coupling between resonant sloshing and lateral motions of a two-dimensional rectangular tank. Journal of Fluid Mechanics. 2021;916(A60):1-41.

19. Abramson HN. The dynamics behavior of liquid in moving containers with applications to space vehicle technology: Tech. Rep. NASA, SP-106. NASA, Washington, D.C.; 1966.

20. Cooper RM. Dynamic of liquid in moving containers. ARS Journal. 1960;30(8):725-9.

21. Fontenot LL. Dynamic stability of space vehicles. Vol. 7. The dynamics of liquid in fixed and moving containers: Tech. Rep. NASA, CR-941. Washington: NASA.; 1968.

22. Stofan A, Armsted A. Analytical and experimental investigation of forces and frequencies resulting from liquid sloshing in a spherical tank: Tech. Rep. D-1281: NASA. Lewis Research Center, Cleveland, Ohio; 1962.

23. Sumner IE. Experimental investigations of stability boundaries for planar and nonplanar sloshing in spherical tanks: Tech. rep.: NASA, TN D-3210. Lewis Research Center, Cleveland, Ohio; 1966.

24. Sumner IE, Stofan AJ. An experimental investigation of the viscous damping of liquid sloshing in spherical tanks: Tech. rep.: NASA, TN D-1991. Lewis Research Center, Cleveland, Ohio; 1963.

25. Абгарян КА. Рапорт И.М. Динамика ракет. Москва: Машиностроение; 1969.

26. Колесников КС. Жидкостная ракета как обьект регулирования. М.: Машиностроение; 1969.

27. Kubenko VD, Koval'chuk PS. Nonlinear problems of the dynamics of elastic shells partially filled with a liquid. International Applied Mechanics. 2000;36(4):421-48.

28. Микишев ГН, Рабинович БИ. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненным жидкостью. М.: Машиностроение; 1968.

29. Микишев ГН, Рабинович БИ. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. М.: Машиностроение; 1971.

30. Moiseev N. Variational problems in the theory of oscillations of a liquid and a body with a liquid. Moscow; 1962.

31. Моисеев НН, Петров АА. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного обьема жидкости. М.: ВЦ АН СССР; 1966.

32. Moiseyev N, Rumyantsev V. Dynamic Stability of Bodies Containing Fluid. Applied Physics and Engineering. 1968;6:251-306.

33. Рабинович БИ. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. Москва: Машиностроение; 1975.

34. Богомаз И, Сирота СА. Колебания жидкости в баках (методы и результаты экспериментальных исследований). Днепропетровск: НАН Украины и НКА Украины, Институт технической механики; 2002.

35. Богоряд ИБ. Колебания вязкой жидкости в полости твердого тела: некоторые математические модели и количественные оценки. Томск: Томский Государственный Университет; 1999.

36. Богоряд И, Дружинин ІА, Дружинина ГЗ, Либин ЭЕ. Введение в динамику сосудов с жидкостью. Томск: изд. ТГУ; 1977.

37. Narimanov G. Motions of a solid body whose cavity is partl filled by a liquid. Applied Mathematics and Mechanics (PMM). 1956;20(1):21-38.

38. Okhotsimskii D. On the theory of a body motions when there is a vacity partly filled by a liquid. Applied Mathematics and Mechanics (PMM). 1956;20(1):3-20.

39. Rabinovich B. Equations of perturbed motions of a solid body with a cylingdrical cavity partly filled by a liquid. Applied Mathematics and Mechanics (PMM). 1956;20(1):39-49.

40. Луковский ІА, Барняк МЯ, Комаренко МЯ. Приближенные методы решения задач динамики ограниченного обьема жидкости. Киев: Наук. думка; 1984.

41. Faltinsen OM, Timokha AN. A multimodal method for liquid sloshing in a two-dimensional circular tank. Journal of Fluid Mechanics. 2010;665:457-79.

42. Kolaei A, Rakheja S, Richard MJ. Effects of tank cross-section on dynamic fluid slosh loads and roll stability of a partly-filled tank truck. European Journal of Mechanics B/Fluids. 2014;46:46-58.

43. Kolaei A, Rakheja S, Richard MJ. A coupled multimodal and boundary-element method for analysis of anti-slosh effectiveness of partial baffles in a partly-filled container. Computers & Fluids. 2015;107:43-58.

44. Yan-Sheng Y, Xing-Rui M, Ben-Li W. Multidimensional modal analysis of liquid Nonlinear sloshing in right circular cylindrical tank. Applied Mathematics and Mechanics. 2007;28(8):1997-2018.

45. Жуковский НЕ. О движении твердого тела, имеющегося полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Журнал Российского Физико-Математичесного общества. 1885;**XVI**:30-85.

46. Eastham M. An eigenvalue problem with parameter in the boundary condition. Quarterly Journal of Mathematics. 1962;13:304-20.

47. Morand J, Ohayon R. Fluid structure interaction. Applied numerical methods. Chichester-New York-Brisbane-Toronto-Singapore: John Wiley & Sons; 1995.

48. Kopachevsky N, Klein S. Operator aproach to linear problems of hydrodynamics. Volume 2: Nonself-adjoint problems for viscous fluid. Basel-Boston-Berlin: Birkhauser Verlag.; 2003.

49. Klein SG. Oscillations of a viscous fluid in a container. Doklady Akademii Nauk SSSR. 1964;159:262-5.

50. Черноусько ФЛ. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. Москва: Наука; 1968.

51. Chernous'ko FL. On free oscillations of a viscous fluid in a vessel. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1966;30(5):990-1003.

52. Myshkis A, Babskii V, Kopachavskii A. Low-gravity fluid mechanics: Mathematical theory of capillary phenomena. Berlin and New York: Springer-Verlag; 1987.

53. Kopachevsky ND, Klein SG. Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Volume 1: self-adjoint problems for an ideal fluid. Basel-Boston-Berlin: Birkhauser Verlag.; 2003.

54. Луковский ИА, Троценко ВА, Усюкин АН. Взаимодействие тонкостенных упругих элементов с жидкостью в подвижных полостях. Киев: Наукова думка; 1989.

55. Кононов ЮН. О колебании физического маятника, содержащего двухслойную жидкость, разделенную упругой мембраной // Механика твердого тела. Межвед. сб. науч. тр. —2001. — Вип. 31. — С. 105–110; 2001.

56. Кононов ЮН, Русаков ВФ, Джуха ЮА. Осесимметричные колебания упругих оснований и идеальной жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре. Вісник Запорізького національного університету Фізико-математичні науки. 2015;(2):106-15.

57. Budiansky B. Sloshing of liquid in circular canals and spherical tanks. Journal of Aerospace Sciences. 1960;27(3):161-72.

58. Faltinsen OM, Timokha AN. Natural sloshing frequencies and modes in a rectangular tank with a slat-type screen. Journal of Sound and Vibration. 2011;330:1490-503.

59. Faltinsen OM, Timokha AN. Analytically approximate natural sloshing modes for a spherical tank shape. Journal of Fluid Mechanics. 2012;703:391-401.

60. Faltinsen OM, Timokha AN. On sloshing modes in a circular tank. Journal of Fluid Mechanics. 2012;695:467-77.

61. Faltinsen OM, Timokha AN. Analytically approximate natural sloshing modes and frequencies in two dimensional tanks. European Journal of Mechanics B/Fluids. 2014;47:176-87.

62. Gavrilyuk I, Lukovsky I, Trotsenko Y, Timokha A. Sloshing in a vertical circular cylindrical tank with an annular baffle. Part 1. Li-

near fundamental solutions. Journal of Engineering Mathematics. 2006;54:71-88.

63. Penny W, Price A. Finite periodic stationary waves in a perfect liquid. Philosophical Transactions of the Royal Society. 1952;244:254-84.

64. Moiseev NN. On the theory of nonlinear vibrations of a liquid of finite volume. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1952;22(5):860-72.

65. Нариманов ГС. О колебаниях жидкости в подвижных полостях. Изв АН СССР, ОТН. 1957;№ 10:71-4.

66. Moore R, Perko L. Inviscid fluid flow in an accelerating cylindrical container. J Fluid Mech. 1964;22:305-20.

67. Perko L. Large-amplitude motions of liquid-vapour interface in an accelerating container. J Fluid Mech. 1969;35:77-96.

68. Bryant PJ. Nonlinear progressive waves in a circular basin. J Fluid Mech. 1989;205:453-67.

69. Faltinsen OM, Timokha AN. Adaptive multimodal approach to nonlinear sloshing in a rectangular tank. Journal of Fluid Mechanics. 2001;432:167-200.

70. Faltinsen OM, Timokha AN. Asymptotic modal approximation of nonlinear resonant sloshing in a rectangular tank with small fluid depth. J Fluid Mech. 2002;470:319-57.

71. Wu GX. Second-order resonance of sloshing in a tank. Ocean Engineering. 2007;34:2345-9.

72. Faltinsen OM. A nonlinear theory of sloshing in rectangular tanks. Journal of Ship Research. 1974;18(4):224-41.

73. Ockendon J, Ockendon H. Resonant surface waves. Journal of Fluid Mechanics. 1973;59:397-413.

74. Bauer HF, Eidel W. Non-linear liquid motion in conical container. Acta Mechanica. 1988;464:11-31.

75. Maggio OD, Rehm A. Nonlinear free oscillations of a perfec fluid in a cylindrical container. AIAA Symposium on Structural Dynamics and Aeroelasticity. 1965;30:156-61.

76. Solaas F, Faltinsen O. Combined numerical and analytical solution for sloshing in two-dimensional tanks of general shape. Journal of Ship Research. 1997;41(2):118-29.

77. Miles J. Internally resonant surface waves in circular cylinder. J Fluid Mech. 1984;149:1-14.

78. Miles J. Internally resonant surface waves in circular cylinder. J Fluid Mech. 1984;149:15-31.

79. Bateman H. Partial differential equations of mathematical physics. Cambridge University Press.; 1932.

80. Hargneaves R. A pressure-integral as kinetic potencial. Phisosophical Magazine. 1908;16:436-44.

81. Luke JG. A variational principle for a fluid with a free surface. J Fluid Mech. 1967;27:395-7.

82. Holmes P. Chaotic motions in a weakly nonlinear model for surface waves. J Fluid Mech. 1986;162:365-88.

83. Miles JW. Resonantly forces surface waves in circular cylinder. Journal of Fluid Mechanics. 1984;149:15-31.

84. Funakoshi M, Inoue S. Surface waves due to resonant oscillation. J Fluid Mech. 1988;192:219-47.

85. Funakoshi M, Inoue S. Bifurcations in resonantly forced water waves. European Journal of Mechanics B/Fluids. 1991;10:31-6.

86. Henderson DM, Miles JW. Faraday waves in 2:1 resonance. J Fluid Mech. 1991;222:449-70.

87. Miles J. Parametrically excited, progressive cross-waves. J Fluid Mech. 1988;186:129-46.

88. Miles J. Parametrically excited, standing cross-waves. J Fluid Mech. 1988;186:119-27.

89. Miles J. On Faraday waves. Journal of Fluid Mechanics. 1993;248:671-83.

90. Miles J. Faraday waves: rolls versus squares. Journal of Fluid Mechanics. 1994;269:353-71.

91. Miles J. On Faraday waves. Journal of Fluid Mechanics. 1994;269:372-2.

92. Solaas F. Analytical and numerical studies of sloshing in tanks: Ph.D. thesis. Norwesian Institute of Technology; 1995.

93. Buldakov E. Lagrangian modelling of fluid sloshing in moving tanks. Journal of Fluids and Structures. 2014;45:1-14.

94. Elahi R, Passandideh-Fard M, Javanshir A. Simulation of liquid sloshing in 2D containers using the volume of fluid method. Ocean Engineering. 2015;96:226-44.

95. Guo L, Morita K. Numerical simulation of 3D sloshing in a liquid-solid mixture using particle methods. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2013;95(9):771-90.

96. Sun P, Ming F, Zhang A. Numerical simulation of interactions between free surface and rigid body using a robust SPH method. Ocean Engineering. 2015;98:23-49.

97. Wang L, Wang Z, Li Y. A SPH simulation on large-amplitude sloshing for fluids in a two-dimensional tank. Earthquake Engineering and Engineering Vibration. 2013;12(1):135-42.

98. Zhang C. Application of an improved semi-Lagrangian procedure to fully-nonlinear sloshing in right circular cylindrical tank. Applied Ocean Research. 2015;51:74-92.

99. Zhang C, Li Y, Meng Q. Fully nonlinear analysis of second-order sloshing resonance in a three-dimensional tank. Computers & Fluids. 2015;116:88-104.

100. Ovsyannikov L, Makarenko N, Nalimov V. Nonlinear problems of the theory of surface and internal waves. Novosibirsk: Nauka; 1985.

101. Stolbetsov V. Nonsmall liquid oscillations in a right circular cylinder. Fluid Dynamics. 1967;2(2):41-5.

102. Stolbetsov V. Oscillations of liquid in a vessel in the form of a rectangular parallelleiped. Fluid Dynamics. 1967;2(1):44-9.

103. Stolbetsov V. Equations of nonlinear oscillations of a container partially filled with a liquid. Fluid Dynamics. 1969;4(2):95-9.

104. Stolbetsov V, Fishkis V. Equations of nonlinear oscillations of a container partially filled with a liquid. Fluid Dynamics. 1968;3(5):79-81.

105. Луковский ИА. Нелинейные колебания жидкости в сосудах сложной геометрической формы. Киев: Наук. думка; 1975.

106. Луковский ИА. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость. Киев: Наук. думка; 1990.

107. Нариманов ГС, Докучаев ЛВ, Луковский ИА. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. Москва: Машиностроение; 1977.

108. Gavrilyuk I, Lukovsky I, Trotsenko Y, Timokha A. Sloshing in a vertical circular cylindrical tank with an annular baffle. Part 2. Nonlinear resonant waves. Journal of Engineering Mathematics. 2007;57:57-78.

109. Lukovskii IA. Variational formulation of nonlinear dynamic boundary problems of a finite liquid volume performing specified spatial motion. Soviet Applied Mechanics. 1980;16(2):164-9.

110. Lukovskii IA. Approximate method of solution of nonlinear problems in the dynamics of a liquid in a vessel executing a prescribed motion. Soviet Applied Mechanics. 1981;17(2):172-8.

111. Lukovskii IA. Variational methods of solving dynamic problems for fluid-containing bodies. International Applied Mechanics. 2004;40(10):1092-128.

112. Seliger E, Whitham GB. Variational principles in continuum mechanics. Proceedings of the Royal Society. 1968;305:1-25.

113. Whitham GB. Non-linear despersion of water waves. Journal of Fluid Mechanics. 1967;27:399-412.

114. Whitham GB. Linear and nonlinear waves. New York: Interscience; 1974.

115. Miles J. Nonlinear surface waves in closed basins. Journal of Fluid Mechanics. 1976;75(3):419-48.

116. Луковский ИА. Вариационный метод в нелинейных задачах динамики ограниченного обьема жидкости со свободной поверхностю. Колебания конструкций с жидкостью. Москва: ЦНТИ "Волна 1976. С. 260–264; 1976.

117. Faltinsen OM, Rognebakke OF, Lukovsky IA, Timokha AN. Multidimensional modal analysis of nonlinear sloshing in a rectangular tank with finite water depth. Journal of Fluid Mechanics. 2000;407:201-34.

118. Faltinsen OM, Timokha AN. Multimodal analysis of weakly nonlinear sloshing in a spherical tank. Journal of Fluid Mechanics. 2013;719:129-64.

119. Gavrilyuk I, Lukovsky MHI. Weakly-nonlinear sloshing in a truncated circular conical tank. Fluid Dynamics Research. 2013;45:1-30.

120. Lukovsky I, Timokha A. Modal modeling of nonlinear sloshing in tanks with non-vertical walls. Non-conformal maping technique. International Journal of Fluid Mechanics Research. 2002;29(2):216-42.

121. Lukovsky IA. A mathematical problem of wave liquid motions in reservoir with inclined walls. Збірник праць Інституту математики НАН України. 2005;2(1):227-53.

122. Луковский ИА. Применение вариационного принципа к выводу нелинейных уравнений возмущенного движения системы тело-жидкость. Динамика космических аппаратов и иследование космического пространства. Москва, 1986. С. 182–194; 1986.

123. Hermann M, Timokha A. Modal modelling of the nonlinear resonant sloshing in a rectangular tank I: A single-dominant model. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2005;15(9):1431-58.

124. Lukovsky I, Ovchynnykov D, Timokha A. Asymptotic nonlinear multimodal method for liquid sloshing in an upright circular cylindrical tank. Part 1: Modal equations. Nonlinear Oscillations. 2012;14(4):512-25.

125. Lukovsky I, Timokha A. Combining Narimanov–Moiseev' and Lukovsky–Miles' schemes for nonlinear liquid sloshing. Journal of Numerical and Applied Mathematics. 2011;105(2):69-82.

126. Богоряд И, Дружинин И, Чахлов С. Исследование переходных процессов при больших возмущениях свободной поверхности жидкости в замкнутом отсеке. Динамика космических аппаратов и исследование космического пространства. — М., 1986. — С. 194–203; 1986.

127. Дружинин ИА, Чахлов СВ. Расчет нелинейных колебаний жидкости в сосуде (Задача Коши). Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. Труды IV семинара. Томск: изд-во Томск, ун-та, 1981, с.85–91; 1981.

128. Limarchenko OS. Direct method for solution of nonlinear dynamic problem on the motion of a tank with fluid. Dopovidi Akademii Nauk Ukrains'koi RSR, Series A. 1978;11(11):99-102.

129. Limarchenko OS. Variational-method investigation of problems of nonlinear dynamics of a reservoir with a liquid. Soviet Applied Mechanics. 1980;1(16):74-9.

130. Limarchenko OS. Application of a variational method to the solution of nonlinear problems of the dynamics of combined motions of a tank with fluid. Soviet Applied Mechanics. 1983;11(19):1021-5.

131. Limarchenko OS. Direct method of solving problems on the conbined spatial motions of a body-fluid system. Soviet Applied Mechanics. 1983;8(19):715-21.

132. Limarchenko OS. Specific features of aplication of perturbation techniques in roblems of nonlinear oscillations of a liquid with free surface in cavities of noncylindrical shape. Ukrainian Mathematical Journal. 2007;59:45-69.

133. Лимарченко ОС, Ясинский ВВ. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. Киев: КПИ; 1996.

134. Ружицький І. Математична модель поведінки рідинних вантажів при транспортуванні. Ринки та товари. 2013;149:15-31.

135. La Rocca M, Scortino M, Boniforty MA. A fully nonlinear model for sloshing in a rotating container. Fluid Dynamics Research. 2000;27:25-229.

136. Shankar P, Kidambi R. A modal method for finite amplitude, nonlinear sloshing. Pramana. 2002;59(4):631-51.

137. Faltinsen OM, Firoozkoohi R, Timokha AN. Effect of central slotted screen with a high solidity ratio on the secondary resonance henomenon for liquid sloshing in a rectangular tank. Physics of Fluids. 2011;23:Art. No. 062106.

138. Faltinsen OM, Rognebakke OF, Timokha AN. Transient and steady-state amplitudes of resonant three-dimensional sloshing in a square base tank with a finite fluid depth. Physics of Fluids. 2006;18:Art. No. 012103.

139. Limarchenko OS. Nonlinear properties for dynamic behavior of liquid with a free surface in a rigid moving tank. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation. 2000;1(2):105-18.

140. Limarchenko OS. Nonlinear wave generation on a fluid in a moving parabolic tank. International Applied mechanics. 2011;46(8):864-8.

141. Love JS, Tait MJ. Nonlinear simulation of a tuned liquid damper with damping screens using a modal expansion technique. Journal of Fluids and Structures. 2010;26(7–8):1058-77.

142. Love JS, Tait MJ. Non-linear multimodal model for tuned liquid dampers of arbitrary tank geometry. International Journal of Non-Linear Mechanics. 2011;46(8):1065-75.

143. Love JS, Tait MJ. Nonlinear multimodal model for TLD of irregular tank geometry and small fluid depth. Journal of Fluids and Structures. 2013;43:83-99.

144. Forbes LK. Sloshing of an ideal fluid in a horizontally forced rectangular tank. Journal of Engineering Mathematics. 2010;66(4):395-412.

145. Hermann M, Timokha A. Modal modelling of the nonlinear resonant fluid sloshing in a rectangular tank II: Secondary resonance. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2008;18(11):1845-67.

146. Ikeda T. Nonlinear parametric vibrations of an elastic structure with a rectangular liquid tank. Nonlinear Dynamics. 2003;33(1):43-70.

147. Ikeda T. Autoparametric resonances in elastic sructures carrying two rectangular tanks partially filled with liquid. Journal of Sound and Vibration. 2007;302(4–5):657-82.

148. Ikeda T, Nakagawa N. Nonlinear vibrations of a structure caused by water sloshing in a rectangular tank. Journal of Sound and Vibration. 1997;201(1):23-41.

149. Lee DY, Choi HS, Faltinsen OM. A study on the sloshing effect on the motion of 2d boxes in regular waves. Journal of Hydrodynamics. 2010;22(5):429-33.

150. Lee DY, Jo GN, Kim YH, Choi HS, Faltinsen OM. The effect of sloshing on the sway motions of 2D rectangular cylinders. Journal of Marine Science and Technology. 2011;16(3):323-30.

151. Rognebakke OF, Faltinsen OM. Coupling of sloshing and ship motions. Journal of Ship Research. 2001;47(3):208-21.

152. Timokha AN. In: Scheichl B, editor. Understanding Sloshing as Complex Asymptotically Reduced Dynamical System. Cham: Springer Nature Switzerland; 2025. p. 29-78. Available from: https://doi.org/10.1007/978-3-031-78764-5_2.

153. Fultz D. An experimental note on finite-amplitude standing gravity waves. J Fluid Mech. 1962;13(2):192-212.

154. Ockendon H, Ockendon JH, Johnson AD. Resonant sloshing in shallow water. J of Fluid Mech. 1986;167:465-79.

155. Ockendon JR, Ockendon H, Waterhouse DD. Multi-mode resonance in fluids. J of Fluid Mech. 1996;315:317-44.

156. Case KM, Parkinson WC. Damping of surface waves in an incompressible liquid. J Fluid Mech. 1957;2:172-84.

157. Keulegan G. Energy dissipation in standing waves in rectangular basins. Journal of Fluid Mechanics. 1959;6:33-50.

158. Martel A, Nicolas JA, Vega JM. Surface-wave damping in a brimful circular cylinder. Journal of Fluid Mechanics. 1998;360:213-28.

159. Miles JW. A note on interior vs. boundary-layer damping of surface waves in a circular cylinder. Journal of Fluid Mechanics. 1998;364:319-23.

160. Utsumi M. Theoretical determination of modal damping ratio of sloshing using a variational method. Journal of Pressure Vessel Technology. 2011;133(Art. No. 011301-1):1-10.

161. Chester W. Resonant oscillation of water waves I. Theory. Proceeding if Royal Society, London. 1968;308:5-22.

162. Chester W, Bones JA. Resonant oscillation of water waves. II. Experiment. Proceeding if Royal Society, London. 1968;306:23-30.

163. Antuono M, Bouscasse B, Colagrossi A, Lugni C. Two-dimensional modal method for shallow-water sloshing in rectangular basins. J Fluid Mech. 2012;700:419-40.

164. Faltinsen OM, Rognebakke OF. Sloshing. In: NAV 2000: International Conference on Ship and Shipping Research: 13th Congress, 19-22 September 2000, Venice (Italy): Proceedings, 2000.; 2000. .

165. Faltinsen OM, Firoozkoohi R, Timokha AN. Analytical modeling of liquid sloshing in a two-dimensional rectangular tank with a slat screen. Journal of Engineering Mathematics. 2011;70(1-2):93-109.

166. Faltinsen OM, Firoozkoohi R, Timokha AN. Steady-state liquid sloshing in a rectangular tank with a slat-type screen in the middle: quasi-linear modal analysis and experiments. Physics of Fluids. 2011;23:Art. No. 042101.

167. Blevins RD. Applied Fluid Dynamics. Krieger Publishing Company, Malabar, FL; 1992.

168. Hamelin JA, Love JS, Tait MJ, Wilson JC. Tuned liquid dampers with a Keulegen-Carpenter. Journal of Fluids and Structures. 2013;43:271-86.

169. Love JS, Tait MJ. Parametric depth ratio study on tuned liquid dampers: Fluid modelling and experimenta work. Computers & Fluids. 2013;79:13-26.

170. Bridges TJ. On secondary bifurcation of three-dimensional standing waves. SIAM Journal of Applied Mathematics. 1986;47:40-59.

171. Bridges TJ. Secondary bifurcation and change of type for type three dimensional standing waves in finite depth. Journal of Fluid Mechanics. 1987;179:137-53.

172. Faltinsen OM, Rognebakke OF, Timokha AN. Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square base basin. Part 2. Effect of higher modes. J Fluid Mech. 2005;523:199-218.

173. Faltinsen OM, Lukovsky IA, Timokha AN. Resonant sloshing in an upright annular tank. Journal of Fluid Mechanics. 2016;804:608-45.

174. Timokha A, Raynovskyy I. Damped steady-state resonant sloshing in a circular base container. Fluid Dynamics Research. 2018;50(No. 4. Paper ID 045502):1-27.

175. Marcotte A, Gallaire Fmc, Bongarzone A. Swirling against the forcing: Evidence of stable counterdirected sloshing waves in orbital-shaken reservoirs. Phys Rev Fluids. 2023 Aug;8:084802. Available from: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevFluids.8.084802.

176. Miliaev A, Timokha A. Viscous damping of steady-state resonant sloshing in a clean rectangular tank. Journal of Fluid Mechanics. 2023;965(R1):1-11.

177. Miliaev A, Timokha A. damping of the swirling wave mode. Journal of Mathematical Sciences. 2025;295(4):726-238.

178. Raynovskyy I, Timokha A. Sloshing in upright circular containers: Theory, analytical solutions, and applications. CRC Press/Taylor & Fransis group; 2021.

179. Raynovskyy I, Timokha A. Damped resonant steady-state sloshing in an upright circular tank. Збірник Праць Інституту математики НАН України. 2017;14(2):180-204.

180. Timokha A, Raynovskyy I. The damped sloshing in an upright circular tank due to an orbital forcing. Доповіді НАН України. 2017;(№ 2):48-53.

181. Faltinsen OM, Lukovsky IA, Timokha AN. Resonant sloshing in an upright annular tank. Journal of Fluid Mechanics. 2016;804:608-45.

182. Lukovsky IA, Timokha AN. Variational method in nonlinear problems of the dymanics of a limited liquid volume. Kiev: Institute of Mathematics of NASU.; 1995.

183. La Rocca M, Mele P, Armenio V. Variational approach to the problem of sloshing in a moving container. Journal of Theoretical and Applied Fluid Mechanics. 1997;1(4):280-310.

184. Shankar PN, Kidambi R. A modal method for finite amplitude, nonlinear sloshing. Pramana. 2002;59(4):631-51.

185. Faltinsen OM, Timokha AN. Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square-base basin. Part 4. Oblique forcing and linear viscous damping. Journal of Fluid Mechanics. 2017;822:139-69.

186. Raynovskyy I, Timokha A. Damped steady-state resonant sloshing in a circular base container. Fluid Dynamics Research. 2018;50:Article ID 045502.

187. Hermann M, Timokha A. Modal modelling of the nonlinear resonant fluid sloshing in a rectangular tank II: Secondary resonance. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2008;18:1845-67.

188. Hiramitsu A, Funakoshi M. Surface waves in a square container due to its resonant horizontal elliptic motion. Fluid Dynamics Research. 2015;47:1-25.

Додаток А: Список публікацій та апробація результатів

У цьому додатку наведено список публікацій здобувача за темою дисертації, а також інформацію про апробацію результатів дисертаційного дослідження.

Наукові праці, в яких опубліковано наукові результати дисертації:

1. Faltinsen O. M., Lagodzinskyi O. E., Timokha A. N. Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square-base basin. Part 5. Three-dimensional non-parametric tank forcing. *Journal of Fluid Mechanics* **894** (2020), A10, https://doi.org/10.1017/jfm.2020.253, (Scopus/WoS – Q1)

2. Lagodzinskyi O. E., Timokha A. N. Counter- and co-directed swirling-type waves due to orbital excitations of a square-base tank. *Доповіді Національної академії наук України*, № 6 (2021), 45–51, https://doi.org/10.15407/dopovidi2021.06.045, (фахове видання, категорія Б).

3. Timokha O. M., Lagodzinskyi O. E. Steady-state sloshing in an orbitally forced square-base tank. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics*, № 1 (2019), 210–213, https://doi.org/10.17721/1812-5409.2019/1.49, (фахове видання – А, індексується Scopus)

4. Lagodzinskyi, O., Timokha, A. Swirling-Type Sloshing in Square Base Tank Due to Orbital Excitations. In: Timokha, A. (eds) Analytical and Approximate Methods for Complex Dynamical Systems. *Understanding Complex Systems*, (2025), Springer Cham, ISSN 1860-0832, https://doi.org/10.1007/978-3-031-77378-5_1, (Scopus – Q4)

Наукові праці, що засвідчують апробацію результатів дисертації:

1. Lahodzinskyi O. Resonant three-dimensional steady-state resonant sloshing in square-base tank for arbitrary periodic nonparametric forcing. *International Conference of Young Mathematicians*, June 3–5, 2021, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine (online), Kyiv, Ukraine, https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2021/Abstracts_2021.pdf.

2. Lahodzinskyi O., Timokha A. N. Resonant three-dimensional steady-state oscillations of a liquid in a container with a square-cross section under arbitrary periodic nonparametric disturbances. *VI International Scientific Conference "MODERN PROBLEMS OF MECHANICS"*, August 30–31, 2021, Kyiv, Ukraine, https://lcwf.univ.kiev.ua/wp-content/uploads/2021/08/PROGRAM_MPM_2021_UKR.pdf.

3. Лагодзінський О. Є. Резонансні тривимірні усталені коливання рідини в контейнері квадратного перерізу. *Міжнародна наукова конференція "СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МЕХАНІКИ ТА МАТЕМАТИКИ – 2023"*, 23–25 травня 2023 р., Львів, Україна, https://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_06.pdf.

4. Лагодзінський О. Є. Деякі характеристики резонансних тривимірних усталених коливань рідини в контейнері квадратного перерізу. *VII International Scientific Conference "Modern Problems of Mechanics"*, 28–29 August 2021, Kyiv, Ukraine, https://lcwf.univ.kiev.ua/wp-content/uploads/2023/08/ABSTRACTS_MPM_2023_UKR.pdf.

5. Lahodzinskyi O. Swirling-type sloshing in square base tank due to orbital excitations. *Workshop "Complex Dynamical Systems – 2023"*, October 2–4, 2023, Kyiv, Ukraine, https://events.imath.kiev.ua/event/1451/.

Апробація результатів дисертації.

Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на таких наукових заходах:

- семінарі відділу математичних проблем механіки та теорії керування (м. Київ, 2020–2026 рр.);
- International Conference of Young Mathematicians (2021);
- VI International Scientific Conference “Modern Problems of Mechanics” (2021);
- Workshop “Complex Dynamical Systems – 2023” (2023);
- Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми механіки та математики – 2023”, 23–25 травня 2023 р., м. Львів, Україна;
- VII International Scientific Conference “Modern Problems of Mechanics”;
- XX Міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука, 17–20 листопада 2025 р.