

Голові  
разової спеціалізованої вченої ради  
Інституту математики НАН України  
доктору фізико-математичних наук,  
заступнику директора з наукових питань  
Інституту математики НАН України

**Василику Віталію Богдановичу**

## РЕЦЕНЗІЯ

на дисертаційну роботу

**Міляєва Антона Олександровича** на тему:

*“Machine learning of hydrodynamic reduced order models on nonlinear resonant liquid sloshing”*

*(“Машинне навчання гідродинамічних моделей редукованого порядку нелінійного резонансного коливання рідини в баках”),*

подану на здобуття ступеня доктора філософії  
у галузі знань 11 Математика та статистика  
за спеціальністю 113 Прикладна математика

Дисертаційна робота А.О. Міляєва присвячена актуальній і досі відкритій проблемі гідродинаміки обмежених об'ємів рідини — кількісному моделюванню в'язкого демпфування у резонансному режимі коливань, коли класична мультимодальна теорія, побудована на нев'язкому потенціальному формалізмі Майлса-Луковського та варіаційному принципі Бейтмана-Люка, принципово не здатна описати експериментально спостережувані фазові зсуви. Автор послідовно обґрунтовує, що введення лінійних членів демпфування з декрементами затухання стоячих хвиль Стокса (які отримуються з теорії Кулегана, викладеної у главі 6 монографії Фалтінсена і Тимохи) не розв'язує проблеми, і пропонує принципово інший підхід — відновлення нелінійних членів демпфування методами машинного навчання за обмеженою кількістю експериментальних даних, що відповідає концепції прихованої фізики.

Центральна ідея роботи полягає у тому, щоб зберегти математичну коректність асимптотичних співвідношень Наріманова-Моїсєєва – де амплітуди вільних координат підкоряються ієрархії  $\beta_1 = O(\varepsilon^{1/3})$ ,  $\beta_2 = O(\varepsilon^2)$ ,  $\beta_3 = O(\varepsilon)$ , — доповнюючи модальні рівняння нелінійними членами, що узгоджує додані члени з порядком асимптотики відповідних рівнянь. Це перетворює задачу прихованої фізики на коефіцієнтну обернену задачу, яка, у свою чергу, зводиться до параметричної задачі про

мінімізацію функціонала відстані між теоретичною кривою та точками експериментальних замірів фазових зсувів.

Дисертація логічно та строго структурована і складається зі вступу, п'яти розділів, висновків та додатку. Кожен з розділів виконує чітко визначену роль у послідовному розгортанні запропонованої методології — від концептуального обґрунтування до експериментальної валідації на двох канонічних геометріях.

**Розділ 1** містить ретельний огляд стану проблеми. Автор простежує еволюцію мультимодального методу від асимптотичних побудов Моїсеєва та Наріманова (1950-60-ті) через варіаційне формулювання Луковського (1970-80-ті) до адаптивних нелінійних модальних систем Фалтінсена-Тимохи (2000-ті і далі). Ключовою тезою розділу є концептуальний розрив: мультимодальний метод, як наслідок потенціальної гідродинамічної нев'язкої постановки, не може з перших принципів описати зсуви фаз, які зафіксовані у прецизійних експериментах Bäuerlein & Avila (2021) для прямокутного баку та ряду французьких та швейцарських експериментаторів для кругової хвилі в круговому циліндрі. Огляд завершується формулюванням авторської концепції — відновлення нелінійного демпфування як задачі прихованої фізики, розв'язуваної засобами машинного навчання.

**Розділ 2** присвячено строгій математичній постановці задачі та її варіаційно-модальній редукції. Вихідну крайову задачу про рух рідини з вільною поверхнею в резервуарі з шістьма ступенями свободи сформульовано у рамках нестисливої нев'язкої потенціальної гідродинаміки без врахування поверхневого натягу; припущення обґрунтовано оцінками чисел Бонда та Галілея. На основі принципу Бейтмана-Люка у формі функціонала дії та модальних розкладів  $\zeta(x,y,t) = \sum \beta_n(t) f_n(x,y)$ ,  $\Phi = v_0 \cdot r + \omega \cdot \Omega_0 + \sum R_n(t) \varphi_n$  виведено нелінійні модальні рівняння Майлса-Луковського. Окремо обговорено стандартні підходи до врахування в'язкого демпфування у лінійній теорії та їх фундаментальну обмеженість.

**Розділ 3** — перший із двох ключових конструктивних розділів дисертації. Для двовимірних течій у прямокутному резервуарі до однодомінантної модальної системи додано нелінійні дисипативні члени  $2\sigma_i \Xi(\beta_i, \beta_i)$ , структуру яких сформульовано та обґрунтовано у першій основній теоремі розділу. У другій основній теоремі побудовано аналітичний асимптотичний періодичний розв'язок, що допускає явну параметричну форму залежностей  $\sigma(a)$  та  $\theta(a)$ . За експериментальними даними Bäuerlein & Avila (2021) з амплітудами збурення  $\eta_{2a} = 0.0009, 0.0017$  та  $0.0032$  градієнтним спуском у комбінації з алгоритмом золотого перетину обчислено коефіцієнти лінійної регресії  $x_0 \approx 0.00717, x_1 \approx 0.00189, y_0 \approx 0.01$ , що якісно узгоджуються з

нижніми оцінками декрементів за теорією Кулегана (глава 6 монографії Фалтінсена-Тимохи). Отримана узгодженість теоретичних кривих з експериментом є суттєво кращою за результати самих експериментаторів, які нехтували нелінійністю в'язкого демпфування.

**Розділ 4** поширює розроблену методологію на тривимірні кругові хвилі у вертикальному круговому циліндричному резервуарі. Переглянуто адаптивну модальну систему Фалтінсена-Локовського-Тимохи (2016), виведену у повністю нев'язкій постановці. Показано, що стандартне введення лінійних коефіцієнтів демпфування на змоченій поверхні не забезпечує узгодження з експериментальними замірами фазового зсуву для усталених кругових хвиль. У межах підходу, запропонованого у розділі 3, модальні рівняння оснащено нелінійними членами демпфування, що ідентифікуються коефіцієнтами  $\zeta_{0i}$ ,  $\zeta_{2i}$ ,  $\zeta_0$ ,  $\zeta_1$ ; теорема 4.1 доводить існування аналітичного асимптотичного періодичного розв'язку. Результати навчання засвідчують задовільне узгодження з експериментом та усунення протиріччя щодо напрямку swirling.

**Розділ 5** узагальнює основні висновки дисертації та формулює чіткий перелік відкритих питань і перспективних напрямів: адаптивні багатомодові системи для підвищення точності опису резонансних частотно-амплітудних характеристик; тривимірні геометрії зі складною формою резервуара; неньютонівські та багатозфазні рідини; побудова фізично-інформованих нейронних мереж для опису екстремальних режимів.

Додаток містить повний перелік публікацій автора та відомості про апробацію результатів на міжнародних наукових конференціях.

**Основними науковими результатами дисертаційної роботи є:**

- побудовано нелінійні модальні рівняння типу Наріманова-Моїсєєва з асимптотично узгодженими членами демпфування для двох канонічних геометрій — вертикального прямокутного баку (двовимірні течії) та кругового циліндричного баку (тривимірні хвилі типу swirling);
- розроблено обчислювальний алгоритм навчання, який поєднує градієнтний спуск за параметрами регресії функцій  $\mathcal{E}_1(a)$  та  $\mathcal{E}_2(a)$  з методом золотого перетину для внутрішньої мінімізації по амплітудному параметру  $a$  в інтервалі  $[a_{\min}, a_{\max}]$ ;
- для експериментальної серії Bäuerlein-Avila (2021) з прямокутним баком отримано оцінки коефіцієнтів лінійної регресії  $x_0 \approx 0.00717$ ,  $x_1 \approx 0.00189$ ,  $y_0 \approx 0.01$ , що якісно узгоджуються з теоретичними нижніми оцінками декрементів згідно теорії Кулегана;

- доведено, що навчена модель Наріманова-Моїсеєва зберігає прогностичну спроможність за межами області даних, на яких вона навчалася, включаючи випадки великої амплітуди збурення, за винятком зон, де застосовність одномодової асимптотики априорі порушується (внутрішні резонанси, критична глибина  $h \approx 0.3368$ );
- сформульовано принципові висновки про те, що в'язке демпфування вищих власних мод коливання рідини не є нехтовно малим, а демпфування первинно збудженої моди є істотно нелінійною функцією амплітуди резонансної хвилі — факт, що знаходить фізичне пояснення у збільшенні товщини в'язкого пограничного шару у нелінійному резонансному режимі.

Отримані наукові результати є новими і можуть знайти застосування у теоретичній гідродинаміці та інженерних дослідженнях. Дисертаційна робота неодноразово доповідалась і пройшла належну апробацію на наукових конференціях і семінарах; а також повною мірою висвітлена у фахових публікаціях.

Дисертацію оформлено відповідно до вимог, що висуваються до кваліфікаційних робіт на здобуття ступеня доктора філософії. Порушень академічної доброчесності у дисертації та наукових працях А.О. Міляєва не виявлено.

#### **Зауваження та побажання до дисертаційної роботи:**

- Обраний спосіб параметризації функцій дисипації у вигляді лінійної регресії  $\mathcal{E}_1(a) = x_0 + x_1 a$ ,  $\mathcal{E}_2(a) = y_0$  є найпростішим, однак у роботі не наведено порівняння з альтернативними регресіями вищих порядків.
- Процедура машинного навчання реалізована без формального аналізу ідентифікованості коефіцієнтів: бажано було б обґрунтувати (хоча б чисельно) єдиність мінімуму функціонала.
- У розділі 4 бажано було б більш детально порівняти отримані коефіцієнти демпфування для кругового баку з теоретичними оцінками, аналогічними наведеним у главі 6 монографії Фалтінсена-Тимохи для прямокутного випадку.
- Перспективним є розширення методології на адаптивні багатомодові системи, неньютонівські рідини та складні геометрії, які сам автор зазначає у висновках; хотілося б бачити в дисертації конкретніший план таких узагальнень з оцінкою обчислювальної складності.

Висловлені зауваження не є принциповими, не зменшують загальну наукову новизну та практичну значимість результатів і не впливають на позитивну оцінку дисертаційної роботи.

Дисертаційна робота і наукові публікації Антона Олександровича Міляєва за актуальністю, практичною цінністю та науковою новизною повністю відповідають спеціальності 113 Прикладна математика та задовольняють вимоги чинного законодавства України, що передбачені постановою № 44 Кабінету Міністрів України від 12 січня 2022 р. «Про затвердження Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», а їх автор заслуговує на присудження ступеня доктора філософії в галузі знань 11 «Математика та статистика» за спеціальністю 113 «Прикладна математика».

**Рецензент:**

Старший науковий співробітник  
відділу математичних проблем  
механіки та теорії керування  
Інституту математики НАН України,  
доктор фізико-математичних наук



Олександр КОНСТАНТИНОВ

21.04.2026 р.

**Документ підписано у сервісі Вчасно (продовження)**

Рецензія Константінова на дисертацію Міляєва.pdf

Документ відправлено (05417207): 22:11 21.04.2026

Документ отримано (05417207): 22:11 21.04.2026

**Відправник документу**

**Електронний підпис**

22:11 21.04.2026

Ідентифікаційний код: 2602810330

КОНСТАНТИНОВ ОЛЕКСАНДР ВОЛОДИМИРОВИЧ

Власник ключа: КОНСТАНТИНОВ ОЛЕКСАНДР ВОЛОДИМИРОВИЧ

Час перевірки КЕП/ЕЦП: 22:11 21.04.2026

Статус перевірки сертифікату: Сертифікат діє

Серійний номер: 5E984D526F82F38F04000000DE710A0127917E07

Тип підпису: удосконалений

Тип сертифікату: кваліфікований