

**Голові**  
разової спеціалізованої вченої ради  
Інституту математики НАН України  
доктору фізико-математичних наук,  
заступнику директора з наукових питань  
Інституту математики НАН України

**Василику Віталію Богдановичу**

## ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу

**Міляєва Антона Олександровича** на тему:

*“Machine learning of hydrodynamic reduced order models on nonlinear resonant liquid sloshing”*

*(“Машинне навчання гідродинамічних моделей редукованого порядку нелінійного резонансного коливання рідини в баках” ),*

подану на здобуття ступеня доктора філософії  
у галузі знань 11 Математика та статистика  
за спеціальністю 113 Прикладна математика

Дисертаційна робота А.О. Міляєва присвячена одній з найскладніших і водночас найцікавіших задач математичної гідродинаміки — опису нелінійної динаміки резонансного хлюпання рідини у жорстких баках з урахуванням в'язких дисипативних ефектів. Наукова новизна теми визначається тим, що стандартний мультимодальний метод, історично розвинений від робіт Моїсеєва та Наріманова у 1950-60-х роках до варіаційно-асимптотичної теорії Луковського та сучасних адаптивних систем Фалтінсена-Тимохи, побудований на нев'язкій потенціальній моделі рідини і не здатен описати такі зсув фаз та інші явища, які стають визначальними у нелінійному резонансному режимі.

Автор дисертації не лише чітко сформулював цей концептуальний розрив, але й запропонував методологічне рішення, що логічно поєднує три напрями: (i) класичну асимптотичну теорію типу Наріманова-Моїсеєва, що зберігається як структурна основа модальних рівнянь; (ii) концепцію прихованої фізики, у якій коефіцієнти нелінійного демпфування трактуються як об'єкти ідентифікації з експерименту, а не виведення з перших принципів; (iii) процедури машинного навчання на основі градієнтного спуску, що забезпечують кількісну реалізацію цієї ідентифікації навіть за обмеженої кількості експериментальних замірів.

Такий синтез є нетривіальним і являє собою самостійний методологічний внесок до теорії редукованих моделей гідродинамічних систем з вільною поверхнею.

Дисертація побудована як цілісний науковий виклад, у якому кожен з п'яти розділів виконує чітко окреслену роль у загальній архітектурі дослідження. Така структура дозволяє прочитати роботу як послідовний аргумент — від обґрунтування проблеми до її розв'язання на двох канонічних геометріях — і водночас залишає можливість автономного звернення до окремих технічних результатів.

У **першому розділі** автор здійснює не просто реферативний огляд літератури, а критичну реконструкцію історичної логіки розвитку мультимодального методу — від асимптотичних ідей Моїсеєва-Наріманова, через варіаційне формулювання Луковського і до адаптивних систем Фалтінсена-Тимохи. Особливо цінною є та частина розділу, де автор вичерпно демонструє, чому стандартні інструменти — феноменологічні лінійні декременти демпфування стоячих хвиль Стокса, спекулятивні підбори коефіцієнтів — не розв'язують ані проблеми фазових зсувів (експерименти Bäuerlein & Avila, 2021), ані проблеми напрямку кругової хвилі (Райновський та Тимоха, 2018). Саме на цій підготовленій основі концептуально виокремлюється власна пропозиція автора.

У **другому розділі** наведено струнку математичну постановку задачі про рух рідини з вільною поверхнею в жорсткому баці, виведено нелінійну модальну систему Майлса-Луковського на основі варіаційного принципу Бейтмана-Люка. Цей розділ сприймається як фундамент — автор демонструє повне володіння апаратом варіаційно-асимптотичних методів, а зроблені спрощення є коректно вмотивованими.

У **третьому розділі**, який, на нашу думку, є ідейним центром дисертації, однодомінантну модальну систему Фалтінсена-Тимохи оснащено нелінійними дисипативними членами, структура яких узгоджена з асимптотичним упорядкуванням Моїсеєва. Перша основна теорема розділу встановлює цю структуру — твердження тонке і нетривіальне, оскільки поєднує вимоги асимптотичної однорідності зі збереженням форми модальних рівнянь. Друга основна теорема містить побудову аналітичного асимптотичного періодичного розв'язку, що допускає параметричну форму. Завершує розділ застосування процедури машинного навчання до експериментальних серій Bäuerlein & Avila з амплітудами збурення  $\eta_{2a} = 0.0009, 0.0017, 0.0032$ ; відновлені коефіцієнти  $x_0 \approx 0.00717, y_0 \approx 0.01$  з

хорошою точністю узгоджуються з нижніми теоретичними оцінками декрементів Стокса за Кулеганом (глава 6 монографії Фалтінсена-Тимохи), що є вагомою непрямою валідацією методу.

У **четвертому розділі** методологія, відпрацьована на прямокутній геометрії, поширюється на тривимірний випадок, для кругових хвиль у вертикальному круговому циліндричному баці. Автор послідовно показує, що стандартне введення лінійних коефіцієнтів демпфування не дозволяє узгодити теоретичні передбачення з прецизійними експериментами навіть на рівні напрямку обертання хвилі. Теорема 4.1 конструктивно встановлює існування асимптотичного періодичного розв'язку для модальних рівнянь з нелінійним демпфуванням, а результати машинного навчання коефіцієнтів  $\xi_{0i}$ ,  $\xi_{2i}$ ,  $\xi_0$ ,  $\xi_1$  засвідчують задовільну узгодженість з експериментом. Цей розділ є демонстрацією того, що запропонований підхід не обмежується однією геометрією, а має характер методологічного принципу.

У **п'ятому розділі** автор лаконічно підсумовує здобутки та, що особливо цінно, формулює відкритий перелік невирішених питань — від потреби в адаптивних багатомодових системах для кращого опису амплітудних характеристик до можливості узагальнення підходу на ньютонівські рідини, складні геометрії та гібридні CFD-ROM архітектури. Такий конструктивний погляд на власні результати характеризує зрілість дослідницької позиції автора.

#### **Основними науковими результатами дисертації:**

- доведено, що нелінійне в'язке демпфування може бути введено до модальних рівнянь типу Наріманова-Моїсеєва (у вигляді  $2\sigma_i \mathcal{E}_i \beta_i$  з неперервними функціями  $\mathcal{E}_i$ ) так, що не порушується структура асимптотичного балансу й, водночас, дозволяє відтворити експериментально спостережувані ефекти;
- виконано аналітичне зведення задачі про усталений резонансний розв'язок до параметрично заданої кривої у площині  $(\bar{\sigma}, \theta)$  з явним виразом для безрозмірної частоти та фазового зсуву як функцій амплітудного параметра  $a$  і невідомих коефіцієнтів дисипації — це формулювання є ключовим кроком до коректної постановки задачі машинного навчання;
- знайдено чисельні значення коефіцієнтів лінійної регресії функції дисипації для прямокутного баку за експериментальними даними Bäuerlein-Avila; узгодженість цих величин з нижніми оцінками декрементів затухання стоячих хвиль, отриманими на основі теорії

Кулегана (глава 6 монографії Фалтінсена-Тимохи), є вагомою непрямою валідацією запропонованого методу;

- показано, що для усталеної кругової хвилі у круглому циліндричному баку навчена модель вперше коректно відтворює відповідність між теорією та експериментами для зсуву фаз;
- встановлено два фундаментальні фізичні висновки: (а) в'язке демпфування вищих власних форм не може бути знехтуваним через нелінійний переніс енергії від первинно збудженої моди; (б) демпфування первинно збудженої моди є істотно нелінійною функцією амплітуди резонансної хвилі — обидва висновки мають принципове значення для подальшого розвитку теорії резонансного хлюпання.

Отримані дисертантом наукові результати є новими, вносять значний внесок в розвиток модальної теорії коливання рідини й можуть знайти практичне застосування в гідродинаміці.

Результати дисертації доповідалися на наукових семінарах та пройшла належну апробацію на наукових конференціях. Серед трьох статей автора є стаття у провідному журналі *Journal of Fluid Mechanics*.

Дисертацію оформлено відповідно до вимог, що висуваються до кваліфікаційних робіт на здобуття ступеня доктора філософії. Порушень академічної доброчесності у дисертації та наукових працях А.О. Міляєва не виявлено.

#### Зауваження та побажання до дисертаційної роботи:

- Дисертаційна робота є чітко структурованою та логічно побудованою, однак робота виграла б від окремого розділу (або підрозділу), присвяченого систематичному обговоренню обмежень запропонованого підходу — зокрема, щодо режимів внутрішніх резонансів (критична глибина  $h \approx 0.3368$ , де  $\sigma_3 \approx 3\sigma_1$ ), а також режимів з розривами суцільності вільної поверхні, для яких припущення про неперервність функцій дисипації  $\mathcal{E}_i$  очевидно порушується.
- У дисертації наявні результати, які логічно було б доповнити аналізом чутливості навчених коефіцієнтів до (а) кількості експериментальних точок, (б) амплітуди експериментального збурення, (в) похибок вимірювання фазових зсувів. Це посилює б аргументи на користь того, що запропонована методика є коректною процедурою ідентифікації оберненої задачі, а не формальною апроксимацією.

— У тексті трапляються технічні неточності (поодинокі друкарські помилки, місцями — неузгодженість позначень між формулами та рисунками, нерівномірне форматування списку літератури), які не впливають на наукову цінність роботи, але потребують редакційного доопрацювання.

Висловлені зауваження мають переважно дискусійний характер і не знижують загальної високої оцінки роботи. Публікації автора в журналах *Journal of Fluid Mechanics*, *Journal of Mathematical Sciences* та *Доповіді НАН України*, а також апробація результатів на міжнародних наукових конференціях засвідчують визнання отриманих результатів науковою спільнотою.

Дисертаційна робота і наукові публікації Антона Олександровича Міляєва за актуальністю, практичною цінністю та науковою новизною повністю відповідають спеціальності 113 Прикладна математика та задовольняють вимоги чинного законодавства України, що передбачені постановою № 44 Кабінету Міністрів України від 12 січня 2022 р. «Про затвердження Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», а їх автор заслуговує на присудження ступеня доктора філософії в галузі знань 11 «Математика та статистика» за спеціальністю 113 «Прикладна математика».

**Офіційний опонент:**

Завідувач відділу керованих систем  
Інституту прикладної математики і механіки  
НАН України,  
доктор фізико-математичних наук,  
професор

Дата 22.04.2026 р.



Юрій КОНОНОВ