Національна академія наук України
Інститут математики

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

ІСКРА Олег Зіновійович

УДК 517.9

Крайові задачі та керування в еволюційних системах

111 Математика
11 Математика та статистика

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

________________ О.З. Іскра

Науковий керівник:
Доктор фізико-математичних наук
ПОКУТНИЙ Олександр Олексійович

Київ — 2026

Анотація

Іскра О.З. Крайові задачі та керування в еволюційних системах. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика. — Інститут математики НАН України, Київ, 2026.

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню крайових задач та моделюванню динамічних процесів, які описуються зв'язаною системою операторних рівнянь Ріккаті, Сильвестра та нелінійною системою операторно-диференціальних рівнянь. Методи дослідження для широкого класу диференціальних, інтегральних рівнянь досліджувалися М. Боголюбовим, Ю. Митропольським, А.Самойленком [36]. Системи звичайних диференціальних рівнянь і періодичні крайові задачі розглядалися А. Мишкісом та іншими дослідниками. Розв'язність інтегро-диференціальних рівнянь вивчалася Ю. Ландо. В класичній теорії операторних рівнянь зазвичай досліджуються задачі, які мають єдиний розв'язок, тобто оператор вихідної задачі має обернений. Такі задачі знаходять застосування в теорії оптимального керування, теорії ігор, теорії стійкості руху. Останнім часом досліджуються випадки, коли порушується єдиність розв'язку. Це так звані резонансні або критичні задачі. Вони стали широко відомими після робіт А. Тихонова, А. Самойленка, О. Бойчука та інших математиків [36]. У нелінійному випадку з допомогою операторного рівняння для породжуючих операторів знайдено необхідні та достатні умови існування розв'язків і побудовано відповідні ітеративні збіжні алгоритми для їх знаходження.

У першому розділі роботи наведено теоретичні відомості та основні теореми, з допомогою яких отримано основні результати дисертації. Це основні поняття з теорії топологічних та векторних просторів, твердження відносно узагальнено-обернених, псевдообернених за Муром–Пенроузом операторів та розв'язності операторних рівнянь з нормально-розв'язними, d-нормальними, n-нормальними, нетеровими та фредгольмовими операторами.

У другому розділі досліджується крайова задача для системи операторно-диференціальних рівнянь зі значеннями у просторі Гільберта

$$\begin{cases} \varphi'(t,\varepsilon) = \varphi(t,\varepsilon) + \psi(t,\varepsilon) + \varepsilon f_1(t,\varphi(t,\varepsilon),\psi(t,\varepsilon),\varepsilon) + g_1(t), \\ \psi'(t,\varepsilon) = \varphi(t,\varepsilon) + \varepsilon f_2(t,\varphi(t,\varepsilon),\psi(t,\varepsilon),\varepsilon) + g_2(t). \quad t \in J \end{cases} \tag{1}$$

Шукається пара розв'язків $\varphi(t,\varepsilon), \psi(t,\varepsilon)$, які при $\varepsilon = 0$ перетворюються на один із розв'язків $\varphi_0(t,c), \psi_0(t,c)$ породжуючої лінійної операторної системи. Отримано необхідні та достатні умови розв'язності такої системи. Слід зауважити, що основною новизною цього розділу є те, що отримана теорія працює навіть у тому випадку, коли відповідний породжуючий оператор лінійної системи може мати незамкнену множину значень. Результати проілюстровано прикладами найпростіших лінійних крайових задач. Розв'язність поставленої крайової задачі еквівалентна до розв'язності операторного рівняння

$$Qc = \alpha - l\int_0^{\cdot} U(\cdot)U^{-1}(\tau)g(\tau)d\tau,$$

де $U(t)$ - еволюційний оператор, $Q = lU(\cdot) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_1$.

У третьому розділі досліджується зв'язана система операторних рівнянь Ріккаті

$$A_{ii}X_i(\varepsilon) + X_i(\varepsilon)B_{ii} + \varepsilon\sum_{j=1, j\neq i}^{n} X_j(\varepsilon)C_{ij}X_j(\varepsilon) = D_i, \quad i = \overline{1,n},$$

де $A_{ii}, B_{ii}, C_{ij}, D_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), i = \overline{1,n}$ - множина лінійних та обмежених операторів. Отримано необхідні та достатні умови розв'язності розглянутої системи у гільбертовому просторі. Побудовано ітераційні алгоритми для знаходження наближених розв'язків. У першій частині розглянуто лініньу незбурену породжуючу систему, яка складається з незалежних рівнянь. Для неї доведено лему, яка є критерієм розв'язності такої системи, та побудовано відповідну множину розв'язків. Наведено приклади лінійно збурених зв'язаних систем матричних рівнянь Сильвестра, що ілюструють у тому числі отриману лему. Розв'язок збуреної системи будується з допомогою матричного ряду за степенями параметра ε. У другій частині розглянуто нелінійно збурену зв'язану систему операторних рівнянь Ріккаті. Необхідна умова встановлюється теоремою 2.1, яка отримується з допомогою так званого операторного рівняння для породжуючих операторів. Суть задачі полягає в тому, що шукається розв'язок $X_i(\varepsilon)$ збуреної системи, який при $\varepsilon = 0$ перетворється на один із розв'язків $X_i^0(H_1, H_2, ..., H_n)$ незбуреної лінійної операторної системи. Для отримання достатньої умови у вихідній системі робиться заміна змінних $X_i(\varepsilon) = Y_i(\varepsilon) + X_i^0(H_1, H_2, ..., H_n)$, де оператори $H_1, H_2, ..., H_n$ задовольняють операторне рівняння для породжуючих операторів. При отриманні достатньої умови отримується операторно-блочна матриця B_0, діагональ якої складається з нульових операторів. Достатня умова полягає в тому, що

$$P_{N(B_0^*)} \begin{bmatrix} P_{N(\mathbf{L}_1^*)} \\ P_{N(\mathbf{L}_2^*)} \\ ... \\ P_{N(\mathbf{L}_n^*)} \end{bmatrix} = 0,$$

де $P_{N(B_0^*)}$ - проєктор на нуль-простір оператора B_0^*, спряженого до оператора B_0 , що є блочною операторною матрицею вигляду

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & B_0^{12} & B_0^{13} & ... & B_0^{1n} \\ B_0^{21} & 0 & B_0^{23} & ... & B_0^{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ B_0^{n1} & B_0^{n2} & ... & B_0^{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тут B_0^{ij} - лінійні та обмежені оператори.

Оператори $\mathbf{L}_i$ є лінійними операторами, що породжують незбурену систему та мають наступний вигляд:

$$\mathbf{L}_i X_i^0 := A_{ii} X_i^0 + X_i^0 B_{ii} = D_i.$$

У четвертому розділі досліджується слабко лінійно збурена система

$$\begin{cases} A_{11}X_1(\varepsilon) + X_1(\varepsilon)B_{11} + \varepsilon\big(A_{12}X_2(\varepsilon) + A_{13}X_3(\varepsilon) + \cdots + A_{1n}X_n(\varepsilon)\big) + \\ \quad + C_1U_1 = H_1 + \varepsilon\overline{H}_1, \\ A_{22}X_2(\varepsilon) + X_2(\varepsilon)B_{22} + \varepsilon\big(A_{21}X_1(\varepsilon) + A_{23}X_3(\varepsilon) + \cdots + A_{2n}X_n(\varepsilon)\big) + \\ \quad + C_2U_2 = H_2 + \varepsilon\overline{H}_2, \\ \cdots \\ A_{nn}X_n(\varepsilon) + X_n(\varepsilon)B_{nn} + \varepsilon\big(A_{n1}X_1(\varepsilon) + A_{n2}X_2(\varepsilon) + \cdots + A_{nn-1}X_{n-1}(\varepsilon)\big) + \\ \quad + C_nU_n = H_n + \varepsilon\overline{H}_n \end{cases} \tag{2}$$

з крайовими умовами

$$\ell_i X_i(\varepsilon) = \alpha_i. \tag{3}$$

Тут $A_{ik}, B_{ii}, H_i, C_i, \overline{H}_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ $\big(i = \overline{1,n}, k = \overline{1,n}\big)$ — лінійні та обмежені оператори, які діють із простору Гільберта $\mathcal{H}$ у себе, $U_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ — керування. Лінійні та обмежені оператори ℓ_i переводять розв'язки (4.1) у простір Гільберта $\mathcal{H}_1$, $\alpha_i \in \mathcal{H}_1$. операторних рівнянь із керуваннями та додатковими крайовими умовами. Достатня умова розв'язності такої системи отримується з використанням розв'язності набору операторних систем

$$DR^{l-1} = F_{l-1},$$

$$D = \begin{bmatrix} D^0 \\ D^1 \end{bmatrix},$$

$$D^0 = \begin{pmatrix} 0 & B^0_{12} & B^0_{13} & \cdots & B^0_{1n} \\ B^0_{21} & 0 & B^0_{23} & \cdots & B^0_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B^0_{n1} & B^0_{n2} & B^0_{n3} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad D^1 = \begin{pmatrix} 0 & B^1_{12} & B^1_{13} & \cdots & B^1_{1n} \\ B^1_{21} & 0 & B^1_{23} & \cdots & B^1_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B^1_{n1} & B^1_{n2} & B^1_{n3} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

з коефіцієнтами, що визначаються відповідними формулами. Для простоти розглянуто випадок, коли оператор D нормально-розв'язний. Тоді достатня умова розв'язності набуває вигляду

$$P_{N(D^*)} \begin{bmatrix} P_{N(\mathbf{L}_1^*)} \\ P_{N(\mathbf{L}_2^*)} \\ \vdots \\ P_{N(\mathbf{L}_n^*)} \\ P_{N(G_1^*)} \\ P_{N(G_2^*)} \\ \vdots \\ P_{N(G_n^*)} \end{bmatrix} = 0,$$

де $P_{N(D^*)}$ - проєктор на ядро спряженого оператора D^*. Оператори $G_i = \ell_i P_{N(\mathbf{L}_i)}$ визначаються таким чином.

Додаток містить список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Основні результати, які визначають наукову новизну дисертації:

- отримано необхідні та достатні умови існування розв'язків лінійних та нелінійних крайових задач у просторах Банаха та Гільберта;

- представлено збіжні ітераційні процедури для знаходження розв'язків у нелінійному випадку;

- отримано необхідні та достатні умови розв'язності операторної зв'язаної системи рівнянь Ріккаті в гільбертовому просторі;

- побудовано ітераційні алгоритми для знаходження наближених розв'язків;

- отримано умови розв'язності для зв'язаних систем рівнянь Сильвестра з крайовими умовами та керуваннями;

- отримано збіжні алгоритми, що мінімізують заданий функціонал.

Ключові слова: псевдообернені за Муром-Пенроузом оператори, рівняння Сильвестра, рівняння Ріккаті, крайові задачі, квазірозв'язки, рівняння для породжуючих операторів, розгалуження розв'язків.

ABSTRACT

Iskra O.Z. Boundary-value problems and control in evolution systems. — Qualification scientific work in the form of a manuscript.

Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy in specialty 111 "Mathematics" – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2026.

The dissertation work is devoted to the study of boundary value problems and modeling of dynamic processes including the interconnected system of Riccati and Sylvester operator equations and the nonlinear system of operator-differential equations. Research methods for a wide class of differential and integral equations were studied by M. Bogolyubov, Yu. Mitropolsky, A. Samoilenko. Systems of ordinary differential equations and periodic boundary value problems were considered by A. Myshkis and other researchers. The solvability of integro-differential equations was studied by Yu. Lando. In the classical theory of operator equations, as a rule, problems are studied that have a unique solution, that is, the operator of the original problem has an inverse. Such problems are used in the theory of optimal control, game theory, and stability of motion. Cases are studied when the uniqueness of the solution is violated. These are the so-called resonant or critical problems, which became widely known after the works of A. Tikhonov, A. Samoilenko, O. Boichuk and other mathematicians [36]. In the nonlinear case, using the operator equation for generating operators, necessary and sufficient conditions for the existence of solutions were found and corresponding iterative convergent algorithms were constructed for finding them. In the case of periodic problems, these equations are called equations for generating amplitudes.

The first section presents theoretical information and basic theorems with the help of which the main results of the dissertation are obtained. These are basic concepts from the theory of topological and vector spaces, statements regarding generalized inverse, pseudoinverse Moore–Penrose operators and solvability of operator equations. Among the latter, equations with normally solvable, d-normal, n-normal, Fredholm with zero and nonzero index.

In the second section, a boundary value problem for a system of operator-differential equations with values in Hilbert space is investigated. A pair of solutions $\varphi(t,\varepsilon), \psi(t,\varepsilon)$ is sought, which at $\varepsilon = 0$ transform into one of the solutions

$\varphi_0(t,c), \psi_0(t,c)$ of the generating linear operator system. Necessary and sufficient conditions for the solvability of such a system are obtained. It should be noted that the main novelty of this section is that the obtained theory works even in the case when the corresponding generating operator of the linear system can have an open set of values. The results are illustrated by examples of the simplest linear boundary value problems. The solvability of the given boundary value problem is equivalent to the solvability of the operator equation

$$Qc = \alpha - l\int_0^{\cdot} U(\cdot)U^{-1}(\tau)g(\tau)d\tau,\ Q = lU(\cdot) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_1.$$

In the third section, a coupled system of Riccati operator equations is investigated. Necessary and sufficient conditions for the solvability of the considered system in Hilbert space are obtained. Iterative algorithms for finding approximate solutions are constructed. In the first part, a linear unperturbed system is considered. In this case, we have a system of independent equations for which a lemma is proved, which is a criterion for the solvability of such a system, and the corresponding set of solutions is constructed. Examples of linearly perturbed coupled systems of matrix Sylvester equations are given, illustrating the obtained lemma. The solution of the perturbed system is constructed using a matrix series in powers of the parameter ε. In the second part, a nonlinearly perturbed coupled system of Riccati operator equations is considered. The necessary condition is established in Theorem 2.1, which is obtained using the so-called operator equation for generating operators. The essence of the problem is that a solution $X_i(\varepsilon)$ of the perturbed system is sought, which at $\varepsilon = 0$ will turn into one of the solutions $X_i^0(H_1, H_2, ..., H_n)$ of the unperturbed linear operator system. To obtain a sufficient condition in the original system, the variables are replaced by $X_i(\varepsilon) = Y_i(\varepsilon) + X_i^0(H_1, H_2, ..., H_n)$, where the operators $H_1, H_2, ..., H_n$ satisfy the operator equation for the generating operators. When a sufficient condition is obtained, an operator block matrix B_0 appears, the diagonal of which consists of zero operators. A sufficient condition is that

$$P_{N(B_0^*)} \begin{bmatrix} P_{N(\mathbf{L}_1^*)} \\ P_{N(\mathbf{L}_2^*)} \\ \dots \\ P_{N(\mathbf{L}_n^*)} \end{bmatrix} = 0,$$

where B_0 is the operator matrix of the form

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & B_0^{12} & B_0^{13} & ... & B_0^{1n} \\ B_0^{21} & 0 & B_0^{23} & ... & B_0^{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ B_0^{n1} & B_0^{n2} & ... & B_0^{nn-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

The operators $\mathbf{L}_i$ are linear operators that generate an unperturbed system and have the following form

$$\mathbf{L}_i X_i^0 := A_{ii} X_i^0 + X_i^0 B_{ii} = D_i.$$

In the fourth section, a weakly linearly perturbed system of operator equations with controls and additional boundary conditions is investigated. Problems of this kind are encountered in practice in machine learning, namely reinforcement learning. If we look at control as reinforcement, that is, the system will receive reinforcement in the form of control in order to reach a given regime (satisfy the boundary conditions). Such problems also appear when studying the conditions of the input to the state introduced by Sontag (see [80], [81]). A sufficient condition for the solvability of such a system is obtained using the solvability of the set of operator systems

$$DR^{l-1} = F_{l-1},$$

$$D = \begin{bmatrix} D^0 \\ D^1 \end{bmatrix},$$

$$D^0 = \begin{pmatrix} 0 & B_{12}^0 & B_{13}^0 & \cdots & B_{1n}^0 \\ B_{21}^0 & 0 & B_{23}^0 & \cdots & B_{2n}^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1}^0 & B_{n2}^0 & B_{n3}^0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad D^1 = \begin{pmatrix} 0 & B_{12}^1 & B_{13}^1 & \cdots & B_{1n}^1 \\ B_{21}^1 & 0 & B_{23}^1 & \cdots & B_{2n}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1}^1 & B_{n2}^1 & B_{n3}^1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

with coefficients determined by the corresponding formulas. For simplicity we consider the case when the operator D is normally solvable. Then the sufficient solvability condition takes the form

$$P_{N(D^*)} \begin{bmatrix} P_{N(\mathbf{L}_1^*)} \\ P_{N(\mathbf{L}_2^*)} \\ \vdots \\ P_{N(\mathbf{L}_n^*)} \\ P_{N(G_1^*)} \\ P_{N(G_2^*)} \\ \vdots \\ P_{N(G_n^*)} \end{bmatrix} = 0,$$

where the operators $G_i = \ell_i P_{N(\mathbf{L}_i)}$.

The appendix contains a list of publications on the topic of the dissertation and information on the approval of the dissertation results.

The main results that determine the scientific novelty of the dissertation:

- necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of linear and nonlinear boundary value problems in Banach and Hilbert spaces are obtained.

- convergent iterative procedures for finding solutions in the nonlinear case are presented.

- necessary and sufficient conditions for the solvability of an operator-coupled system of Riccati equations in Hilbert space are obtained.

- iterative algorithms for finding approximate solutions are constructed.

- solvability conditions for coupled systems of Sylvester equations with boundary conditions and controls are obtained.

- convergent algorithms that minimize the given functional were obtained.

Keywords: pseudoinverse Moore-Penrose operators, Sylvester equations, Riccati equation, boundary-value problems, quasisolutions, equation for the generating operators, branching of solutions.

Список публікацій здобувача за темою дисертації

1. **Іскра О. З.**, Офіцеров А. В. Зв'язані системи операторних рівнянь Ріккаті. *Нелінійні коливання* **27**, No. 3 (2024), с. 362–367. https://doi.org/10.3842/nosc.v27i3.1482.
2. **Iskra O. Z.**, Pokutnyi O. O. Boundary-value problems for the system of operator-differential equations in Banach and Hilbert spaces. *J. Math. Sci.* **27**, No. 3 (2021), с. 329 -335. https://doi.org/10.1007/s10958-023-06412-2.
3. **Iskra O. Z.** Interconnected System for the Lyapunov Equation with Control and Boundary Conditions. In: Timokha, A. (eds). Analytical and Approximate Methods for Complex Dynamical Systems. Understanding Complex Systems. Springer, Cham (2025), p. 329–341. https://doi.org/10.1007/978-3-031-77378-5_19.
4. Pokutnyi O. O., **Iskra O. Z.** Branching solutions for the interconnected system of Lyapunov equations with control, PDMU-2024 (Problems of decision making under uncertainties), XXXIX International Conference, p. 111.
5. Boichuk A. A., Pokutnyi O. O., Feruk V. A., **Iskra O. Z.** Weakly nonlinear hyperbolic differential equations of the second order in the Hilbert space, International scientific conference "Applied mathematics and information technology", 22–24 September 2022, Chernivtsi, Ukraine.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{Z}^n$) — n-вимірний евклідів простір (із цілочисельними координатами);

J — відрізок на дійсній прямій (скінченний або нескінченний);

$BC(J, \mathcal{H})$ — банахів простір неперервних та обмежених на J вектор-функцій зі значеннями у просторі Гільберта $\mathcal{H}$;

$\mathcal{L}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ — банахів простір лінійних обмежених операторів, що діють із простору Банаха $\mathbf{B_1}$ у простір Банаха $\mathbf{B_2}$;

$SGI(\mathbf{B_1}, \mathbf{B_2})$ — простір лінійних сильно узагальнено-оборотних операторів, що діють із простору Банаха $\mathbf{B_1}$ у простір Банаха $\mathbf{B_2}$;

$GI(\mathbf{B_1}, \mathbf{B_2})$ — простір лінійних узагальнено-оборотних операторів, що діють з простору Банаха $\mathbf{B_1}$ в простір Банаха $\mathbf{B_2}$;

$PI(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ — простір лінійних псевдообернених за Муром–Пенроузом операторів, що діють із простору Гільберта $\mathcal{H}_1$ у простір Гільберта $\mathcal{H}_2$;

$R(L)$ — множина значень оператора L;

$N(L)$ — ядро оператора L;

$(G[\cdot])(t)$ — узагальнений оператор Гріна;

L^- — узагальнено-обернений до оператора L;

$\overline{L}^+$ — сильний псевдообернений за Муром–Пенрозуом до оператора L;

$P_Y(\mathcal{P}_Y)$ — проєктор (ортопроєктор) на підпростір Y;

простору Банаха (Гільберта);

$C^1(J, \mathcal{H})$ — банахів простір неперервно-диференційовних вектор-функцій на відрізку $J \subset \mathbb{R}$ зі значеннями у просторі Гільберта $\mathcal{H}$.

ВСТУП

Актуальність теми. Дисертацію присвячено дослідженню крайових задач для систем операторно-диференціальних рівнянь, зв'язаних систем операторних рівнянь Ріккаті та Сильвестра з керуванням. Рівняння Ріккаті використовується в теорії оптимального керування, теорії ігор [36] та стійкості руху [36], [39]. Зв'язані системи рівнянь Ріккаті застосовуються при дослідженні деяких класів нейронних мереж [40], зв'язаних систем та є важливими інструментами в чисельному й аналітичному моделюванні різних фізичних та інженерних процесів [36]. Вони використовуються в багатьох прикладних науках, наприклад, у задачах моделювання еволюції та стійкості динамічних систем [39].

Рівняння Ріккаті можуть застосовуватися для аналізу динамічних систем, включаючи системи керування, де вивчається стійкість, біфуркації або зміна поведінки в залежності від зміни параметрів. Одним із прикладів застосування є оцінка стійкості та біфуркацій у динаміці траєкторії керування рухом літального об'єкту під час його польоту, коли вхідні параметри системи змінюються в часі (наприклад, при зміні кута або швидкості) [111].

Рівняння Ріккаті дозволяють розв'язувати як лінійні, так і нелінійні задачі оптимального керування, що має важливе значення у складних динамічних системах.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Роботу виконано у відділі диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України в рамках державної науково-дослідної роботи "Конструктивні та якісні методи аналізу функціонально-диференціальних, імпульсних та різницевих систем", № 0120U100191.

Мета і завдання дослідження. *Метою роботи* є дослідження крайових задач для систем операторно-диференціальних рівнянь, зв'язаних систем операторних рівнянь Ріккаті та Сильвестра, знаходження необхідних та достатніх умов розв'язності.

Об'єкт дослідження: крайові задачі, зв'язані системи операторних рівнянь Ріккаті та Сильвестра.

Завдання дослідження:

- дослідити необхідні та достатні умови розв'язності крайових задач для нелінійних систем операторно-диференціальних рівнянь із оператором, що може мати не завжди замкнену множину значень;

- отримати необхідні та достатні умови розв'язності для зв'язаних систем операторних рівнянь Ріккаті;

- отримати необхідні та достатні умови розв'язності для зв'язаних систем операторних рівнянь Сильвестра з керуванням;

- побудувати ітеративні збіжні алгоритми наближених розв'язків, що прямують до точних розв'язків вихідної задачі.

Методи дослідження. У роботі використано методи диференціальних рівнянь та функціонального аналізу.

Наукова новизна одержаних результатів.

Основні результати, які визначають наукову новизну та винесені на захист:

- отримано необхідні та достатні умови існування розв'язків крайової задачі для системи операторно-диференціальних рівнянь;

- показано, що крайова задача для системи операторно-диференціальних рівнянь може бути розв'язаною і в тому випадку, коли лінійний породжуючий оператор має незамкнену множину значень;

- знайдено необхідні та достатні умови існування розв'язків зв'язаної системи операторних рівнянь Ріккаті, незбурена частина яких є системою незалежних рівнянь Сильвестра;

- побудовано ітеративні збіжні алгоритми для знаходження наближених розв'язків таких систем;

- отримано умови розв'язності для зв'язаних систем рівнянь Сильвестра з крайовими умовами та керуванням.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані в ній результати можуть бути використаними в дослідженнях диференціальних рівнянь та нейронних мереж.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану досліджень та постановка задач належать науковому керівнику. Основні результати здобувачем отримано самостійно, а в роботах, які опубліковано у співавторстві, внесок усіх авторів є рівноцінним.

Апробація результатів. Результати дисертації доповідались та обговорювались на таких конференціях та семінарах:

Семінар відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України від 24 лютого 2025 року;

International conference PDMU-2024, Problems of decision making under uncertainties, XXXIX International Conference, Brno (Chech Republic), 9–10 September 2024;

International scientific conference "Applied mathematics and information technology", Ukraine, Chernivtsi, 22-24 September 2022.

Публікації.

Основні результати дисертації опубліковано у двох статтях у фахових наукових журналах [110], [111] та одній колективній монографії [112]. Роботи [110], [112] індексовано в міжнародній науковометричній базі даних Scopus.

Також результати роботи представлено в матеріалах конференцій [113], [114].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі списку публікацій автора, змісту, переліку умовних позначень, анотації (двома мовами), списку публікацій автора, змісту, переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що складається з 225 джерел та додатку. Загальний обсяг дисертації — 137 сторінки, з яких список використаних джерел та додаток займають 17 та 1 сторінку відповідно.

Подяка. Автор висловлює глибоку вдячність своєму науковому керівнику, доктору фізико-математичних наук О. О. Покутному за надані поради та рекомендації, терпіння, інструкції та коментарі протягом усього навчання в аспірантурі. Завдяки його безцінному досвіду, розумінню та великій підтримці автор подолав цей важливий крок. Вдячність науковцям й керівнику відділу диференціальних рівнянь Інституту математики НАН України за їхні важливі і влучні коментарі до моїх виступів на семінарах кафедри й цінні зауваження. Окрема подяка всім учасникам семінарів відділу диференціальних рівнянь і теорії коливань за розширення світогляду й отримання нових знань. А також світлій пам'яті покійного академіка Національної академії наук України О. А. Бойчука, одного з перших вчених, що розвинув напрямок крайових задач теорії диференціальних рівнянь.

РОЗДІЛ 1
ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

На сьогодні добре відомою є теорія нормально-розв'язних операторних рівнянь. Це рівняння з оператором, який має замкнену множину значень. Для таких операторів за умови доповнювальності ядра та множини значень у вихідних просторах існують або узагальнено-обернені (для банахових просторів), або псевдообернені за Муром–Пенроузом оператори (в гільбертових просторах).

У розділі 1 наведено відомі необхідні для досліджень основні означення та твердження теорії топологічних просторів та псевдообернениз операторів.

У розділі 2 розвинуто теорію для розв'язання крайової задачі для системи операторно-диференціальних рівнянь і в тому випадку, коли відповідний оператор має незамкнену множину значень. Для дослідження таких рівнянь використовується означення сильного псевдооберненого за Муром–Пенрозуом оператора, введеного у роботах О. Бойчука та О. Покутного [38], [39]. З допомогою цього оператора поставлену задачу вдається повністю дослідити.

У розділі 3 розглянуто систему зв'язаних операторних рівнянь Ріккаті. Встановлено необхідні та достатні умови розв'язності. Побудовано рівняння для породжуючих операторів, за допомогою якого досліджується відповідна задача. Розвинено ітеративний метод, який дозволяє отримати послідовність наближень, що збігаються до точного розв'язку. Більше того, показано, що такі задачі мають прикладне застосування.

У розділі 4, присвяченому дослідженню зв'язаної системи рівнянь Сильвестра з керуванням, отримано умови за яких збурена система має розв'язки.

Наведемо деякі факти з теорії крайових задач, що являють собою окремий історичний інтерес та використовуються при отриманні основних результатів дисертації.

1.1. Крайові задачі

Теорія крайових задач для операторно-диференціальних рівнянь бере свої початки з класичних робіт із функціонального аналізу та інтегральних рівнянь типу Вольтерри. Такі задачі моделюють багато природних, фізичних, технічних, економічних, соціальних процесів. Розроблення конструктивних методів аналізу лінійних та нелінійних крайових задач для широкого класу диференціальних, інтегральних, функціонально-диференціальних, інтегро-диференціальних систем, систем із запізненням та імпульсом займає одне з центральних місць у якісній теорії диференціальних рівнянь. У періодичному випадку такі задачі вивчалися М. Боголюбовим, Ю. Митропольським, А. Самойленком [36], [39]. Системи звичайних диференціальних рівнянь з імпульсним впливом і періодичні крайові задачі для них вивчалися А. Мишкісом та іншими. Періодичні крайові задачі для систем диференціальних рівнянь із запізненням досліджувалися А. Самойленком, Ю. Митропольським, Д. Мартинюком, Дж. Хейлом [106]. Слід зазначити, що методи їх дослідження почали виокремлюватися ще до появи методів функціонального аналізу. Теорія крайових задач для операторних рівнянь застосовується при дослідженні інтегро-диференціальних рівнянь із відхиленим аргументом. Розв'язність інтегро-диференціальних рівнянь та крайових задач для них вивчалась Ю. Ландо, О. Бойчуком, В. Журавльовим. Зазначені вище крайові задачі в основному досліджувалися у так званому регулярному (нерезонансному) випадку. Це випадок, коли операторне рівняння $Qz = f$ цих крайових задач має розв'язки при будь-якій правій частині, тобто оператор Q вихідної задачі має обернений Q^{-1} (де в оператор Q можуть входити також й крайові умови). Це гарантує єдиність розв'язку поставленої задачі. У нерегулярному, критичному (резонансному) випадку для розв'язання таких типів рівнянь почала активно застосовуватися теорія псевдообернених за Муром-Пенроузом матриць та узагальнено-обернених операторів, яким присвячено класичні роботи Е. Мура [170], Р. Пенроуза [200], [201], статті М. Нашеда [179], Г. Вотруби [180] та інших математиків.

Дослідження операторно-диференціальних рівнянь у банахових та гільбертових просторах пов'язано з розвитком теорії напівгруп операторів. Основними фундаментальними результатами є роботи Е. Хілле, Р. Філіпса [107]. Окремий інтерес становлять роботи, де досліджуються диференціальні рівняння зі сталими операторними коефіцієнтами.

Крайові задачі для диференціальних рівнянь мають велике значення в різних галузях науки та техніки. Проблеми такого типу виникають у механіці, фізиці, теорії керування, а також у економіці та біології. Однак багато з цих задач є некоректними, тобто їх не можна розв'язати за допомогою стандартних методів обернення операторів. Псевдообернені оператори дозволяють розв'язувати крайові задачі, навіть коли оператори є виродженими.

Класичні крайові задачі, такі як задача Діріхле або Неймана, вимагають точного знання початкових чи граничних умов. Проте на практиці ці умови часто відомі приблизно або містять шум. Саме тут псевдообернені оператори показали свою силу як інструмент регуляризації.

Зокрема, у роботах деяких відомих вчених [36] розглядалися задачі з некоректною постановкою, для яких псевдообернений оператор забезпечував розв'язок, навіть якщо класичне обернення призводило до експоненціального накопичування похибок.

Інтегральні рівняння з виродженими ядрами [48] та задачі, що включають сингулярні точки або гіперболічні та еліптичні рівняння з виродженнями, стали об'єктом численних досліджень у другій половині XX століття. Псевдообернені оператори виявилися надзвичайно корисними в побудові псевдорозв'язків для таких задач. Зокрема, у випадку, коли класичний інтегральний оператор має нескінченну кількість нульових власних значень, підхід із використанням псевдообернених операторів дозволяє побудувати проєктор на підпростір узагальнених розв'язків.

У сучасній математичній фізиці крайові задачі формулюються в абстрактних просторах — таких як гільбертові або банахові простори. Тут ключову роль відіграють нескінченновимірні оператори, які можуть бути нелінійними або незамкненими. У такому контексті псевдообернені оператори слугують аналогом обернених операторів для незамкнених зі щільною областю визначення, що дозволяє застосовувати варіаційні методи.

Псевдообернені оператори природно можуть бути сформульовані як розв'язки варіаційних задач, де шукається мінімум певного функціонала. У цьому контексті псевдообернений оператор часто застосований як регуляризований градієнт або узагальнений лінійний солвер [39], [225]. Такі підходи є ключовими в методі скінченних елементів, особливо при розв'язанні задач зі змінними коефіцієнтами або складною геометрією.

Окрема увага приділяється класу операторів Фредгольма, для яких псевдообернення має особливо привабливу структуру. Відомо, що для Фредгольмового оператора Q з індексом нуль існує псевдообернений оператор Q^+. У цьому випадку проєкції QQ^+ і Q^+Q відіграють роль проєкторів на образ і ядро відповідно, що дозволяє чітко описати структуру розв'язків крайових задач.

У теорії оптимального керування псевдообернені оператори застосовуються до задач зі зворотним зв'язком, де треба мінімізувати функціонал витрат при обмеженнях у вигляді крайових задач або диференціальних рівнянь.

Ці підходи активно використовуються в авіаційній техніці, моделюванні траєкторій дронів та супутників, де крайові умови формулюють геометричні або кінематичні обмеження, а псевдообернені оператори забезпечують точну та стійку оборотність навіть при неточностях або недовизначеностях у даних.

Сучасна ера штучного інтелекту відродила інтерес до псевдообернених матриць та операторів завдяки їх використанню в лінійній регресії, SVM (машини опорних векторів), регуляризованих методах (наприклад, регуляризація за Тихоновим), а також при тренуванні нейронних мереж із малими даними [40]. Псевдообернений оператор слугує аналітичним засобом при розв'язанні задач перенавчання та систем із високою кореляцією ознак або з виродженою матрицею Грама.

У квантовій теорії псевдообернені оператори застосовуються для формалізації необоротних процесів, для побудови проєкторів у системах із вимірюванням, а також для опису динаміки у відкритих квантових системах. Відомі приклади застосування псевдообернених операторів для опису станів квантових систем зі втратами або шумом, де класична еволюція не може бути зворотною.

Підсумовуючи вищесказане, можна стверджувати, що псевдообернені оператори стали не лише засобом для розв'язання некоректних задач, але й потужною універсальною концепцією, яка дозволяє формулювати нові підходи у фундаментальних та прикладних науках. Майбутні дослідження, ймовірно, будуть зосереджені на нелінійних узагальненнях псевдообернення, адаптивних псевдоінверсіях, а також на побудові псевдообернених у категоріях вищих абстрактних структур — наприклад, у функторних категоріях.

Перейдемо тепер до питання розвитку теорії крайових задач для інтегральних, диференціальних та операторно-диференціальних рівнянь.

Крайові задачі — один із центральних об'єктів у теорії диференціальних та інтегральних рівнянь. Вони виникають природно при моделюванні фізичних, інженерних та біологічних процесів. Їхній розвиток тісно пов'язаний із загальним розвитком математичного аналізу, математичної фізики, функціонального аналізу та сучасної теорії операторів.

Зародження поняття крайових задач припадає приблизно на XVIII – XIX ст. Перші задачі з крайовими умовами з'явилися у зв'язку з вивченнями фізичних явищ — зокрема, задачі про коливання струни (Даламбер, Ойлер), теплообміну (Фур'є), потенціалу (Лаплас). У класичних диференціальних рівняннях ці задачі часто мали вигляд:

$$Qu = f, \quad lu = \alpha,$$

де Q — диференціальний оператор, l — крайовий оператор (наприклад, значення функції або її похідної на границі). Для таких рівнянь із певними диференціальними операторами досить ефективною виявилася апріорна техніка.

Ж. Фур'є запровадив метод розкладу у тригонометричні ряди для задач теплопровідності, що дало початок спектральній теорії та розгляду власних значень крайових задач.

Класична теорія крайових задач для звичайних та частинних диференціальних рівнянь з'явилася у XIX – поч. XX ст.

У другій половині XIX ст. класична теорія крайових задач стала формалізованою і відбулася класифікація за типами крайових умов. Тут слід зазначити роботи Штурма–Ліувілля для задачі на власні значення з симетричними операторами, що забезпечили базу для гармонічного аналізу.

Наступний крок — роботи Пуанкаре, Рімана, що стосуються задач із частинними диференціальними рівняннями на площині, зокрема задача Діріхле для рівняння Лапласа. Задача Коші для гіперболічних рівнянь з'явилася у зв'язку з вивченням хвильових явищ (Гадамар, Лоренц). Формалізація умов існування та єдиності розв'язків започаткувала вивчення добре поставлених задач.

Розглянемо етапи розвитку теорії інтегральних рівнянь та крайових задач для них.

Під впливом фізики та нових аналітичних методів виникла потреба у розв'язанні крайових задач для інтегральних рівнянь, що беруть свої початки ще від робіт Е. Фредгольма (1903) (теорія лінійних інтегральних рівнянь), Д. Гільберта (зв'язок інтегральних операторів із операторною теорією).

Для задач Діріхле–Неймана розроблялись інтегральні представлення через потенціали одиничного та подвійного шару (Пуанкаре, Нейман, Ганкер). Застосування граничних інтегральних рівнянь дозволяло знижувати розмірність задачі (з області — на її межу).

Соболєв увів простори узагальнених функцій (тепер названі на його честь), що дозволило розглядати крайові задачі в слабкому сенсі. Це мало вирішальне значення для теорії еліптичних, гіперболічних і параболічних рівнянь (узагальнені розв'язки, простори Соболєва та Шварца, Гільберта та Банаха). Добре відомі класичні теореми Лакса–Мільграма. Розвиток узагальнених функцій уможливив побудову фундаментальних розв'язків для задач Коші, задач з імпульсними джерелами, а також обернених задач.

Наступним кроком в історії крайових задач стали операторно-диференціальні рівняння (1950–1980-ті). Почалося активне вивчення крайових задач в абстрактних просторах, особливо гільбертових та банахових, що дало початок розвитку для операторно-диференціальних рівнянь:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + f(t),$$

де $A(t)$ — не обов'язково обмежені оператори в гільбертовому просторі.

Розвиток теорії напівгруп (Хілле, Гаусдорф, Пазі) та спектральної теорії операторів (Стоун, Данфорд, Шварц) забезпечив фундамент для дослідження крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. Особлива увага приділялася задачам еволюційного типу. Серед них — задачі типу Коші–Діріхле для рівнянь із частинними похідними, задачі з операторними коефіцієнтами, що описують складні системи з пам'яттю, запізненням, тертям. Сучасні напрямки розвитку теорії крайових задач було започатковано в 1990-х роках.

Розвиток обчислювальних методів та застосування до складних фізичних систем сприяв вивченню таких напрямків:

1. Нелінійні крайові задачі (рівняння з виродженням, зсувом, запізненням).

2. Сингулярні крайові задачі, включаючи ті, де крайові умови містять параметри або зв'язок.

3. Крайові задачі з інтегро-диференціальними умовами, що моделюють розподілені системи керування.

4. Задачі з динамічними умовами на межі — актуальні для біомеханіки, теплопереносу з фазовими переходами.

5. Крайові задачі мовою псевдообернених операторів.

Сучасна тенденція — вивчення крайових задач через призму псевдообернених за Муром–Пенроузом операторів. Це особливо ефективно при неєдиності розв'язку або якщо крайова задача є перевизначеною.

6. Задачі з недовизначеними або перевизначеними умовами (наприклад, із лінійними залежними крайовими умовами).

7. Моделі з обмеженнями, в яких класичний оператор не має оберненого.

8. Використання множини норм як критерію вибору серед оптимально можливих розв'язків.

9. Використання псевдообернених операторів дозволяє будувати аналітичні або чисельні розв'язки в умовах некоректної постановки задачі, що є ключовим у багатьох обернених та некласичних задачах.

Зі сказаного вище можемо зробити такі висновки.

Історія крайових задач — це шлях від геометричних і фізичних інтуїцій до глибоких узагальнень у функціональному аналізі та теорії операторів. Вивчення крайових задач для інтегральних, диференціальних та операторно-диференціальних рівнянь продовжує залишатися активною й глибоко міждисциплінарною галуззю. Сучасні дослідження охоплюють дедалі більше класів задач із застосуванням сучасної алгебри, геометрії, топології та чисельного аналізу.

Наведемо стислу історію розвитку крайових задач для операторно-диференціальних рівнянь.

Класична теорія бере свої початки від задач Діріхле, Неймана, Зоммерфельда. Стосовно задачі Діріхле було сказано вище. Витоки задачі Діріхле лежать у теорії потенціалу та електростатики. Вперше вона була сформульована в роботах Рімана та Діріхле як задача знаходження гармонічної функції за її значенням на межі області. Розвиток задачі був тісно пов'язаний із побудовою фундаментального розв'язку рівняння Лапласа та методів відбиття. Метод Пуанкаре (кін. XIX ст.) використав інтегральні представлення для аналізу розв'язків, що стало переходом до теорії сингулярних інтегральних рівнянь.

Наступним кроком є задача Зоммерфельда. Вона постала у контексті хвильових рівнянь — особливо в акустиці, оптиці та радіофізиці. Ця задача формулюється таким чином. Необхідно встановити умови на нескінченності, що забезпечує правильну поведінку хвиль. Теорія Зоммерфельда ідеально лягла в рамки методу функції Ґріна та інтегралів над нескінченними контурами. У XX столітті відбувся перехід до задач зі складними контурами та хвильовими фронтами, особливо у дифракційній теорії.

Наступним кроком у розвитку крайових задач є поява узагальнених постановок крайових задач в певних функціональних просторах.

Основна революція відбулася з появою гільбертових і банахових просторів. Розв'язки задач почали розглядати в сенсі узагальнених функцій (Діріхле, Соболєв). У 1930–1950-х роках з'являється поняття слабкого розв'язку крайової задачі (варіаційний метод).

Розглянемо слабку постановку у просторі Соболєва. Необхідно знайти

$$u \in H_1(\Omega)$$

таку, що для всіх

$$v \in H_0^1(\Omega) \quad \int_\Omega \Delta u \Delta v dx = \int_\Omega f v dx.$$

Це варіаційна форма задачі Діріхле. Саме в такій формі вона стала основою чисельних методів (сіткові, метод скіченних елементів).

Наступним кроком розвитку крайових задач є задачі для інтегро-диференціальних рівнянь та рівнянь із запізненням. Одним із прикладів є рівняння з пам'яттю.

Відокремимо також фізичні моделі. Серед них — тепло з ефектами пам'яті, в'язкопружні середовища. Однією з таких задач є наступне рівняння:

$$u_t(x,t) = \Delta u(x,t) + \int_0^t K(t-s)\Delta u(x,s)ds + f(x,t).$$

Такі задачі потребують додаткових умов сумісності для ядер інтеграла та коректної постановки на границі. Наступним прикладом задачі є еволюційне рівняння з запізненням

$$u'(t) = Au(t) + Bu(t-\tau).$$

Постановка крайових умов пов'язана з фазовим простором (функції на відрізку $[t-\tau, t]$), що вимагало розвитку спеціальних просторів станів (1970–90-і). Серед них операторні рівняння в гільбертових просторах. Ідея редукції крайової задачі до рівняння в абстрактному вигляді

$$Qu = f, \quad u \in D(Q) \subset H,$$

з крайовими умовами, які реалізуються через розширення області визначення оператора Q. Однією з задач Гільберта–Шмідта є встановлення компактності обернених операторів у задачах Діріхле–Неймана — фундамент теорії інтегральних рівнянь. Це започаткувало так звану теорію операторних напівгруп. Засновниками вважаються Хілле, Йосіда, Феллер. Теорія C_0-напівгруп дозволила формалізувати еволюційні задачі типу

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad u(0) = u_0.$$

Сучасні крайові задачі формулюють як задачі на генератори напівгруп із нелокальними або узагальненими крайовими умовами (Фаторіні, Пазі). Ще одним поштовхом у теорії крайових задач є задачі для диференціальних рівнянь із частинними похідними (PDE) у складних геометріях. Тут можуть виникати геометричні ускладнення. Це задачі з кутовими областями, конічними точками та розривами, межі яких вимагають особливих функціональних просторів (вважені Соболєвські простори). Розробка теорії здійснювалася Ліонсом, Кондратьєвим (1970-і — 2000-і). Серед сучасних напрямків можна відзначити такі, як теорія граничного шару — в гідродинаміці для описання тонких областей зі швидкою зміною розв'язку.

Задачі передачі — задачі з різними рівняннями в підобластях (наприклад, теплопровідність із матеріалами з різною провідністю). Ще одним кроком при дослідженні таких задач стало розуміння важливості використання нерівностей. Серед останніх можна відзначити нерівності типу Фрідріхса та їх роль у коректності крайових задач. Важливе місце в історії займає розвиток енергетичних оцінок. Саме ці нерівності стали ключем до доведення єдиності та стійкості слабких розв'язків.

Наступним кроком є крайові задачі у динамічних, стохастичних системах вигляду

$$du = (Au + f)dt + BdW.$$

Вони виникають у задачах фільтрації, фінансах, теплопровідності з випадковими коливаннями. Крайові умови — часто у вигляді відбиття процесів (стохастичні крайові умови типу Неймана). Умови на границі самі мають часову динаміку — наприклад, у задачах теплообміну з інерційною оболонкою.

Опишемо деякі кроки розвитку крайових задач для рівнянь із операторним коефіцієнтом. Еволюційні системи та оператори в системах із розподіленими параметрами розвивалися в 1930–1950-і роки.

У задачах математичної фізики природно виникали системи рівнянь, де коефіцієнти були матричними або операторними (наприклад, система теплопровідності в анізотропному середовищі). Однією з перших постановок була задача Коші із необмеженим оператором у гільбертовому просторі. Поступово стало зрозуміло, що крайові задачі для диференціальних рівнянь у частинних похідних із операторними коефіцієнтами вимагають нових підходів. Слід зазначити також задачі зі скалярним аргументом та операторним коефіцієнтом, формульовані в абстрактних просторах. Із розвитком функціонального аналізу (Шаудер, Соболєв, Ліонс) від постановок задач у класичному розумінні з'явилася можливість перейти до постановок задач в узагальненому вигляді. Основними труднощами, з якими зіткнулися дослідники, стали випадки з несамоспряженим оператором питання дослідження спектру таких задач, встановлення аналогів теореми Штурма–Ліувілля (немає аналогів). Прорив у цьому напрямку відбувся завдяки роботі Вішика (1960-і роки). Роботи Марка Вішика та його школи (1960–1970-і) започаткували теорію еліптичних крайових задач із операторними коефіцієнтами. Формулювання задач у гільбертових просторах із застосуванням у фізичних процесах із розподіленими параметрами стало можливим завдяки рівнянням у частинних похідних. Для таких задач важливими питаннями стали регулярність крайових умов, еліптичність у сенсі Агмона–Дугліса–Ніренберга, побудова оберненого оператора з оцінками у функціональних просторах. Окремого розвитку набули нелокальні крайові умови та умовні обмеження. Тут можна згадати класичну задачу Діріхле з крайовими умовами на кінцях відрізку

$$u(0) = u(1) = 0,$$

що було змінено на змішану крайову умову типу

$$\alpha u(0) + \beta u(1) = \gamma.$$

Окремого розвитку набула спектральна теорія та квазірозв'язки для такого типу задач. При вироджених операторних коефіцієнтах виникає потреба в псевдообернених розв'язках. Теорія Мура–Пенроуза, побудова узагальненого оберненого оператора стала основою для розв'язання вироджених задач.

Перейдемо тепер до основних означень та тверджень із теорії топологічних та векторних просторів, які знадобляться при отриманні основних результатів.

1.2. Топологічні та векторні простори

Наведемо стандартні означення векторного та топологічного просторів [39].

Означення 1.1. *Векторний (лінійний) простір E над полем Φ ($\Phi = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) дійсних (комплексних) чисел – це множина з операціями додавання та множення на скаляри ($x, y \in E \to x + y \in E$; $x \in E, \lambda \in \Phi \to \lambda x \in E$) з наступними властивостями:*

1) $x + y = y + x$;

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$;

існує нульовий елемент θ:

3) $\theta : x + \theta = \theta + x = x$;

для довільного елемента x існує елемент $-x$ (обернений до елемента x):

4) $x + (-x) = \theta$;

5) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$;

6) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;

7) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;

8) $1 \cdot x = x$.

Топологічний простір — це множина, наділена структурою відкритих множин, яка дає можливість розглядати збіжність та неперервність.

Означення 1.2. *Топологічний простір — це множина, S з виділеною родиною підмножин $\mathcal{T} \subset 2^S$, які називаються відкритими множинами й задовольняють наступні властивості:*

(i) $\mathcal{T}$ замкнена відносно скінченних перетинів, тобто якщо $A, B \in \mathcal{T}$, то $A \bigcap B \in \mathcal{T}$;

(ii) $\mathcal{T}$ замкнена відносно довільних об'єднань, тобто якщо $A_\alpha \in \mathcal{T}$ для всіх α з деякої множини індексів I, то $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \mathcal{T}$;

(iii) $\emptyset, S \in \mathcal{T}$.

$\mathcal{T}$ називається топологією в S.

Означення 1.3. *Множина $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ називається базою топології $\mathcal{T}$, якщо довільна $T \subset \mathcal{T}$ має вигляд $T = \bigcup_\alpha B_\alpha$ для деякої сім'ї $\{B_\alpha\} \subset \mathcal{B}$.*

Нехай x — точка топологічного простору S. Множина N називається *околом* точки x, якщо існує відкрита множина U така, що $x \in U \subset N$.

Множину $\mathcal{N}$ підмножин топологічного простору S називають *базою околів* точки x, якщо кожна з $N \in \mathcal{N}$ є околом точки x і для довільного околу M

точки x існує така множина $N \in \mathcal{N}$, що $N \subset M$. Поширеною є також назва *фундаментальна система околів.*

Означення 1.4. *Нехай* $< S, \mathcal{T} >$ *та* $< T, \mathcal{U} >$*—два топологічних простори. Функція* $f : S \to T$ *називається неперервною, якщо* $f^{-1}[A] \in \mathcal{T}$ *для кожної* $A \in \mathcal{U}$*, тобто прообраз довільної відкритої множини є відкритою множиною.*

Функція f називається *відкритою*, якщо $f[B]$ відкрита для кожної $B \in \mathcal{T}$. Якщо f відкрита й неперервна, вона називається *взаємно неперервною.* Взаємно неперервна бієкція називається *гомеоморфізмом.*

Гомеоморфізми—це ізоморфізми топологічних просторів.

Означення 1.5. *Нехай* $< S, \mathcal{T} >$ *– топологічний простір, та нехай* $A \subset S$*. Індукована (відносна) топологія на* A *визначається сім'єю множин* $\mathcal{T}_A = \{O \bigcap A | O \in \mathcal{T}\}$*. Підмножина* $B \subset A$ *називається відкритою в індукованій топології, якщо* $B \in \mathcal{T}_A$*.*

Топологічний простір називається *віддільним* або *гаусдорфовим*, якщо довільні дві його різні точки мають неперетинні околи. Важливий клас топологічних просторів утворюють метричні простори. За базу топології в ньому можна обрати сім'ю його куль.

Нехай E—векторний простір над полем Φ ($\Phi = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) дійсних або комплексних чисел. Кажуть, що топологія $\mathcal{T}$ в E узгоджується з алгебраїчною структурою, якщо алгебраїчні операції в E неперервні, тобто $x + y$ є неперервною функцією пари змінних x, y та λx—неперервна функція пари змінних λ, x. *Топологічний векторний простір* над Φ— це векторний простір над Φ, наділений топологією, що узгоджується з його алгебраїчною структурою.

Означення 1.6. *[91] Покриттям множини* $\mathcal{T}$ *називають родину* Σ *(або іноді родину* (A_i)*) підмножин у* X*, об'єднання яких співпадає з* X*. Покриття* Σ' *називається підпокриттям покриття* Σ*, якщо кожна з множин системи* Σ' *належить* Σ*.*

Покриття Σ топололгічного простору $\mathcal{T}$ називається відкритим [91], якщо кожна множина з Σ вдкрита в $\mathcal{T}$.

Систему Σ (або іноді сім'ю (A_i)) підмножин множини $\mathcal{T}$ називають центрованою, якщо кожна непорожня скінченна підсистема в (A_i) має непорожній перетин.

Нехай $\mathcal{T}$ - топологічний простір. Відомо [91], що наступні твердження є еквівалентними:

(a) Кожне відкрите покриття простору $\mathcal{T}$ містить скінченне підпокриття;

(b) Якщо система Σ (або сім'я (A_i)) замкнених множин простору $\mathcal{T}$ центрована, то перетин всіх множин системи Σ (або сім'ї (A_i)) непорожній.

(c) Кожна сітка точок із $\mathcal{T}$ має в $\mathcal{T}$ граничну точку.

(d) Кожна сітка точок із $\mathcal{T}$ містить збіжну підсітку.

Означення 1.7. *[91] Топологічний простір $\mathcal{T}$ називається компактним, якщо він володіє топологією (і відповідно кожною) із вказаних вище властивостей (a)–(d).*

Бурбакі називають компактними простори, які не тільки задовольняють наведене означення, а є й гаусдорфовими.

У кожному топологічному векторному просторі існує базис урівноважених околів. У найбільш важливих топологічних векторних просторах існує також базис опуклих околів. Такі простори називають *локально-опуклими.*

Нехай E—локально-опуклий простір, M та N— векторні підпростори простору E, які перетинаються лише в нулі. *Прямою (алгебраїчною) сумою* просторів M та N називається множина всіх векторів $x_1 + x_2,\ \ x_1 \in M,\ x_2 \in N$, якщо вони породжують весь простір E (це означає виконання умов $M + N = E, M \cap N = \emptyset$). Позначається: $E = M \dot{+} N$. Якщо, крім того, M та N є замкненими підпросторами (наділеними відповідною індукованою топологією), то кажуть про розклад у пряму (топологічну) суму замкнених підпросторів та пишуть $E = M \oplus N$. У цьому випадку підпростір M називають *топологічним прямим доповненням* підпростору N у E. Підпростір, для якого існує топологічне пряме доповнення, називається *топологічно доповнювальним.* Кожним двом таким підпросторам можна поставити у відповідність відображення $P_M \in \mathcal{L}(E, M)$, $P_N \in \mathcal{L}(E, N)$. Більше того,

$$P_M + P_N = 1, \quad P_M^2 = P_M, \quad P_N^2 = P_N.$$

Таким чином, кожне з цих відображень є *проєктором* (тобто лінійним та ідемпотентним відображенням). Відображення P_N називається проєкцією простору E на підпростір N *паралельно* підпростору M.

На жаль, пряма сума двох підпросторів може не бути підпростором (тобто може бути незамкненою).

Далі наведемо твердження стосовно доповнювальності та розкладу в топологічні суми підпросторів вихідного простору.

Теорема 1.1. *[39] Нехай B—банахів простір, B_1 та B_2 —два його підпростори, які перетинаються лише в нулі. Для того, щоб пряма сума $B_1 \oplus B_2$ була підпростором, необхідно та достатньо, щоб існувала така стала $k \geq 0$, така, що:*

$$||x_1 + x_2|| \geq k(||x_1|| + ||x_2||), \quad x_1 \in B_1, x_2 \in B_2.$$

Якщо $B = H$—простір Гільберта, то довільний його підпростір має пряме доповнення, за яке можна обрати ортогональне доповнення до підпростору.

Теорема 1.2. *1. Якщо B_1—n-вимірний підпростір простору Банаха B, то для B_1 існує замкнене доповнення, яке може бути заданим за допомогою n лінійно незалежних функціоналів.*

2. Якщо B_2 – замкнений підпростір у просторі Банаха B, заданий скінченним набором з n лінійно незалежних функціоналів

$$B_2 = \{x : f_i(x) = 0, \ i = 1, ..., n\},$$

то для B_2 існує доповнення розмірності n.

Проблема доповнювальності банахових підпросторів пов'язана з відомою проблемою Банаха (див., наприклад, оглядову статтю М. Попова).

Один із найперших прикладів недоповнювального підпростору був побудований Р. Філіпсом. Відомо, що простори c_0 (збіжних до нуля послідовностей) та l_∞ (обмежених послідовностей) є банаховими відносно норми $||\xi||_\infty := sup\{|\xi_k| k \in \mathbb{N}\}$ $(\xi = (\xi_1, \xi_2, ...))$, причому c_0—замкнений підпростір простору l_∞ корозмірності 1. Філіпсом було доведено, що підпростір c_0 в l_∞ недоповнювальний. Цей результат на той час був досить нетривіальним. Насправді виконується така теорема.

Теорема 1.3. *(Лінденштраус, Цафрірі). [107] Наступні властивості банахового простору E еквівалентні:*

(i) будь-який підпростір у E має топологічне пряме доповнення;

(ii) простір E топологічно ізоморфний деякому гільбертовому простору.

Насправді питанням доповнювальності займалося дуже багато математиків в 70-і роки. Є результати, схожі на ті, які анонсує теорема Лінденштрауса–Цафрірі, але в банахових просторах. Такі результати було отримано харківською школою математиків та польськими колегами [107]. Є приклади банахових просторів, у яких усі їх доповнювальні підпростори ізометрично ізоморфні вихідному.

Для локально-опуклих просторів справджуються наступні теореми відносно розкладу простору в топологічні прямі суми підпросторів.

Теорема 1.4. *Нехай локально опуклий простір E є алгебраїчною прямою сумою власних векторних підпросторів M та N, p та q—проєкції E на M та N, а h та k—канонічні відображення E на E/M та E/N. Тоді наступні твердження рівносильні:*

1) E є топологічною сумою підпросторів M та N;

2) p—неперервне;

3) q—неперервне;

4) h—ізоморфізм N на E/M;

5) k—ізоморфізм M на E/N.

Теорема 1.5. *Векторний підпростір M локально-опуклого простору E є доповнювальним тоді й тільки тоді, коли існує неперервний лінійний проєктор p простору E в себе такий, що $p(E) = M$ і $p^2 = p$.*

Наприкінці цієї частини не можна не відзначити, що простір Фреше має й щодо доповнювальності переваги над іншими локально-опуклими просторами. Справедливе наступне твердження.

Теорема 1.6. *Якщо простір Фреше є алгебраїчною прямою сумою двох власних векторних підпросторів, то він є їх топологічною сумою.*

1.3. Узагальнено-обернені та псевдообернені оператори

Розглянемо історію розвитку теорії узагальнено-обернених та псевдообернених операторів більш детально.

Останнім часом це є одним із основних інструментів функціонального аналізу, який дозволяє розв'язувати задачі, де традиційні методи обернення операторів не застосовуються. Псевдообернені оператори за Муром–Пенроузом є ключовим інструментом у аналізі операторних рівнянь, зокрема для задач із некоректними даними, коли звичайне обернення не існує або не є стійким. Ці оператори з'являються при аналізі вироджених матриць та лінійних операторів у нескінченних просторах. Ідея псевдообернених матриць була вперше сформульована американським математиком Е. Муром у 1920-х роках. Е.

Мур звернув увагу на проблему виродження матриць при розв'язуванні лінійних рівнянь і запропонував новий спосіб обчислення обернених елементів для матриць, що не мають звичайного обернення. Роджер Пенроуз у 1955 році розвинув ідеї Е. Мура і ввів теоретичне визначення псевдооберненого оператора для матриць і операторів на гільбертових просторах. Р. Пенроуз сформулював чотири важливі умови для псевдообернених операторів, які повинні задовольняти матриці або лінійні оператори в даному контексті. Це визначення стало основою для подальших досліджень у теорії лінійних операторів. У наступні десятиліття поняття псевдооберненого оператора було розширене й адаптоване до більш складних математичних структур, таких як нескінченновимірні простори та операції в контексті квантової механіки та машинного навчання. Нехай Q — матриця або лінійний оператор у просторі $\mathbb{R}^n$ або $\mathbb{C}^n$. Псевдообернена матриця Q^+ визначається як така, що задовольняє чотири умови:

$$\begin{aligned} &QQ^+Q = Q, \\ &Q^+QQ^+ = Q^+, \\ &(QQ^+)^* = QQ^+, \\ &(Q^+Q)^* = Q^+Q. \end{aligned}$$

Ці умови дозволяють знайти псевдообернену матрицю навіть у виродженому випадку.

Псевдообернена матриця може бути виражена через її сингулярний розклад. Для матриці Q він виглядає так:

$$Q = U\Sigma V^*,$$

де U та V — ортогональні матриці, а Σ — діагональна матриця. Псевдооберна матриця виражається через розклад як

$$Q^+ = V\Sigma^+U^*,$$

де Σ^+ — діагональна матриця, яка отримана інверсією всіх ненульових елементів Σ.

При розв'язанні крайових задач, зокрема при аналізі диференціальних рівнянь, часто з'являються ситуації, коли оператор не має звичайного оберненого. У таких випадках використовуються псевдообернені оператори для знаходження розв'язків або наближених розв'язків, що узагальнюють поняття псевдооберненої за Муром-Пенроузом матриці. Розглянемо класичну задачу Діріхле для одновимірного диференціального рівняння:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Вона може бути записана у вигляді операторного рівняння $Qu = f$, де $Q = -\frac{d^2}{dx^2}$ є лінійним оператором. Псевдообернення оператора Q дозволяє знайти розв'язок навіть тоді, коли оператор є виродженим або некоректним. Останнім часом також активно використовуються ітераційні методи для наближеного обчислення псевдообернених операторів, зокрема методи на основі градієнтного спуску та методи, що базуються на дослідженні власних значень. У галузі машинного навчання псевдообернені оператори використовуються для обчислення важливих характеристик у регресії та класифікації. Наприклад, метод найменших квадратів можна реалізувати через псевдообернення для розв'язання системи лінійних рівнянь. У квантовій механіці псевдообернення використовуються для розв'язання задач, що стосуються спектрального аналізу операторів Гамільтона, які можуть бути виродженими або не мають стандартних обернених. Псевдообернені оператори є важливою частиною функціонального аналізу, й їхнє використання в математичних задачах та фізиці має глибоке коріння. Їхній розвиток був обумовлений необхідністю оброблення й розв'язання задач, де традиційні методи обернення операторів не застосовні через виродження, невизначеність або нестійкість розв'язків. Концепція псевдообернених операторів зародилася з теорії псевдообернених матриць яка, як вже зазначалося, бере початок з роботи Е. Мура 20-х років минулого століття. Е. Мур вивчав системи лінійних рівнянь і звернув увагу на проблеми, пов'язані з виродженими або невизначеними матрицями. Однією з його основних цілей було знайти методи для оброблення таких систем, де звичайне обернення не можна застосувати. Він запропонував поняття *псевдооберненої матриці*, що дозволяє знайти наближення "оберненого" елемента для вироджених матриць.

У 1960–1970-х роках розвиток теорії псевдообернених операторів отримав новий імпульс завдяки роботам, присвяченим узагальнено оберненим операторам. Одним із важливих кроків було введення загальних принципів для визначення псевдообернених операторів у більш складних контекстах, зокрема для операторів, що діють у нескінченновимірних просторах.

У 1970-х роках з'явилися перші дослідження, які стосуються псевдообернених операторів на нескінченновимірних просторах, зокрема для операторів, що виникають у теорії крайових задач для диференціальних рівнянь. У цих роботах було розглянуто застосування псевдообернених до задач із некоректними даними, де традиційні методи обернення не могли бути застосовані.

У XXI столітті дослідження в галузі псевдообернених операторів продовжуються, зокрема в контексті застосування в інженерії, фізиці та машинному навчанні. Псевдообернені оператори активно використовуються для чисельних методів, які дозволяють ефективно розв'язувати граничні задачі для операторів, які не мають стандартного оберненого оператора [36].

Застосування псевдообернених операторів у сучасних методах машинного навчання, зокрема в алгоритмах регресії та класифікації, також стало важливою темою досліджень. Одним із основних застосувань є використання псевдообернених операторів для розв'язання задач лінійної регресії через метод найменших квадратів, де псевдообернений оператор дозволяє обчислити наближений розв'язок.

Псевдообернені оператори використовуються в квантовій механіці для аналізу спектральних властивостей гамільтоніанів, які можуть бути виродженими або мати складну структуру власних значень. У теорії керування вони застосовуються для моделювання систем, де існують невизначеності, що не дозволяють застосовувати звичайні методи обернення.

У XXI столітті псевдообернені оператори знайшли широке застосування в різних галузях науки. Вони стали важливим інструментом для розв'язання задач у квантовій механіці, теорії поля, а також у теорії керування та оптимізації. У багатьох фізичних задачах, зокрема у спектральному аналізі, використовуються псевдообернені оператори для знаходження власних значень і розв'язків рівнянь, що описують фізичні процеси.

Крім того, псевдообернені оператори активно застосовуються в теорії машинного навчання. Вони використовуються для розв'язання задач регресії, оптимізації та апроксимації, особливо коли маємо справу з виродженими або некоректними даними. Зазначимо, що розвиток теорії псевдообернених операторів є досить активним і перспективним [114]. Це стосується подальшого вдосконалення методів для розв'язання складних крайових задач, що виникають у нелінійних та багатовимірних системах. Також велике значення має їх застосування в аналізі та синтезі складних систем, де виникають невизначеності та нестійкості. Розвиток методів псевдообернених операторів є важливим кроком до вдосконалення чисельних методів, зокрема для розв'язання крайових задач для диференціальних рівнянь, що виникають у фізиці та інженерії. Розвиток теорії псевдообернених операторів має значний вплив на багато галузей науки та техніки. Від початкових робіт Мура та Пенроуза до сучасних застосувань у інженерії, фізиці та машинному навчанні, псевдообернені оператори дозволяють розв'язувати складні задачі з виродженими або нестійкими операторами. Теоретичні та практичні досягнення в цій галузі відкривають нові можливості для досліджень і розв'язання реальних задач.

У цій частині мова йтиме всюди тільки про лінійні перетворення та оператори. Дані означення з'являються ще в роботах Е. Дойча [83].

Нехай V і W—векторні простори над довільним полем, $\mathcal{L}(V,W)$—множина всіх лінійних перетворень, що діють із одного векторного простору V в інший векторний простір W. Для лінійного перетворення $A \in \mathcal{L}(V,W)$ через $R(A)$ й $N(A)$ позначатимемо відповідно образ (множину значень перетворення A) та ядро A (множина елементів x: $AX = \theta$).

Означення 1.8. *[83]. Нехай $A \in \mathcal{L}(V,W)$. Лінійне перетворення $B \in \mathcal{L}(W,V)$ називається напівоберненим для A, якщо $ABA = A$.*

Означення 1.9. *[83]. Нехай $A \in \mathcal{L}(V,W)$. Лінійне перетворення $B \in \mathcal{L}(W,V)$ називається рефлексивно напівоберненим для A, якщо $ABA = A$ й одночасно $BAB = B$.*

Означення 1.10. *[83]. Нехай $A \in \mathcal{L}(V,W)$, $\mathcal{H}$—підпростір V такий, що $V = \mathcal{H} \oplus N(A)$, й нехай $\mathcal{J}$ підпростір W такий, що $W = R(A) \oplus \mathcal{J}$. Тоді пара $(\mathcal{H}, \mathcal{J})$ називається A-допустимою парою.*

Наявність пар $(\mathcal{H}, \mathcal{J})$ для будь-якого лінійного перетворення над векторними просторами випливає з того факту, що будь-який підпростір векторного простору має алгебраїчне доповнення.

Означення 1.11. *[83]. Нехай $A \in \mathcal{L}(V,W)$ й $(\mathcal{H}, \mathcal{J})$—$A$-допустима пара. Тоді відображення*

$$A^{+}_{\mathcal{H},\mathcal{J}} : W \to V,$$

$$A^+_{\mathcal{H},\mathcal{J}}y = A^{-1}_{\mathcal{H}}y_1, \quad y = y_1 + y_2, \quad y_1 \in R(A), y_2 \in \mathcal{J}$$

називається $(\mathcal{H}, \mathcal{J})$*-псевдооберненим до* A.

У цьому означенні відображення $A_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to R(A)$ діє за наступним правилом: $A_{\mathcal{H}}x = Ax, \quad x \in \mathcal{H}$. Згідно з теоремою 12 [83] це відображення має лінійне обернене $A^{-1}_{\mathcal{H}}$.

Будь-яке псевдообернене відображення є також і рефлексивно напівоберненим. Для будь-якого лінійного відображення над векторними просторами існує псевдообернене. Таким чином, у нас є зв'язок між узагальненооборотними перетвореннями та відповідними підпросторами просторів V та W.

Узагальнення цих результатів на випадок просторів із додатковою геометричною структурою не завжди можливо й потребує додаткових вимог.

Наприклад, у гільбертовому просторі для того, щоб множина значень лінійного оператора була підпростором, вона повинна бути замкненою. У такому випадку існує ортогональне доповнення до цього підпростору. У банаховому просторі навіть умова замкненості підпростору виявляється не достатньою для існування топологічного доповнення до всього простору (про це йшла мова й попередній частині). Наявність скалярного добутку робить таку задачу більш прозорою й конструктвиною. У сепарабельному гільбертовому просторі з ортонормованим базисом $\{e_i\}$ можна в аналітичному вигляді будувати ортогональні доповнення до підпросторів і відповідні оператори ортогонального проєктування.

Оскільки замкненість множини значень є суттєвою умовою, то серед класу операторів, що діють із одного банахового простору в інший, виділяють нормально-розв'язні. Існують декілька еквівалентних означень цього класу операторів.

Означення 1.12. *Щільно визначений оператор* Q*, що діє з одного банахового простору* B_1 *в інший* B_2*, називається нормально-розв'язним, якщо його множина значень замкнена:* $R(Q) = \overline{R(Q)}$.

Надалі $\mathcal{L}(B_1, B_2)$ позначатимемо простір лінійних неперервних операторів, що діють із одного простору Банаха в інший.

Для множини M у банаховому просторі $\mathbf{B}$ та множини N у його спряженому просторі $\mathbf{B}^*$ виділяють наступні поняття ортогональності:

$$M^{\perp} = \{f \in \mathbf{B}^* : < x, f >= 0, \ \forall x \in M\};$$

$$^{\perp}N = \{x \in \mathbf{B} : < x, f >= 0, \ \forall f \in N\}.$$

У теорії векторних просторів над деяким полем $\mathbb{K}$ відомі такі факти [91].
Теорема 1.7. *Нехай E—векторний простір над $\mathbb{K}$, $(f_i)_{1 \le i \le n}$—скінченна лінійно-незалежна система форм на E^*. Лінійна форма f є лінійною комбінацією лінійних форм $(f_i)_{1 \le i \le n}$ тоді й тільки тоді, коли*

$$N(f) \supset \cap\{N(f_i) : 1 \le i \le n\}.$$

Зокрема, якщо $\cap\{N(f_i) : 1 \le i \le n\} = \{0\}$, то форми $(f_i)_{1 \le i \le n}$ породжують простір E^*; відповідно в цьому випадку $dim\ E^* \le n$ та $dim\ E \le n$.

Для рівнянь вигляду $Qx = y$ з нормально-розв'язним оператором існують необхідні й достатні умови розв'язності.
Теорема 1.8. *Для того, щоб замкнений щільно визначений оператор $Q \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$, у якого $R(Q) \ne B_2$, був нормально розв'язним, необхідно й достатньо, щоб виконувалась одна з наступних умов:*

а) $^{\perp}N(Q^*) = R(Q)$;

б) рівняння $Qx = y$ розв'язне лише для тих $y \in B_2$, що задовольняють умову

$$\phi(y) = 0,$$

де ϕ —будь-який розв'язок однорідного спряженого рівняння

$$Q^*\phi = 0.$$

Але ця теорема дає тільки умови розв'язності. Загальний розв'язок таких рівнянь можна визначити не завжди.

У випадку банахового простору оператор $Q \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ називається *узагальнено оборотним*, якщо існує оператор $X \in \mathcal{L}(B_2, B_1)$ такий, що $QXQ = Q$ [36]. Зауважимо, що у випадку лінійних векторних просторів такий оператор мав назву напівоберненого. Оператор X називається узагальнено-оберненим до оператора Q й позначається Q^-. Зауважимо, що зі множини узагальнено-оборотних до Q операторів можна виділити такий Y, що буде виконуватися додаткова умова $YQY = Y$. Якщо оператор має узагальнено-обернений, тоді можна побудувати загальний розв'язок операторного рівняння $Qx = y$. За певних додаткових умовах нормально-розв'язний оператор є узагальнено-оборотним. А саме, є вірним такий критерій.

Теорема 1.9. *Для того, щоб оператор $Q \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ був узагальнено-оборотним, необхідно й достатньо, щоб:*

1. Q був нормально-розв'язним оператором;

2. Підпростір $N(Q)$ мав пряме доповнення в B_1;

3. Підпростір $R(Q)$ мав пряме доповнення в B_2.

Лема 1.1. *[36]. Якщо $Q \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$—замкнений оператор та існує замкнений лінійний підпростір M простору B_2 такий, що*

$$B_2 = M \oplus R(Q),$$

то Q є нормально-розв'язним оператором.

Якщо оператор Q відображає простір B у себе, то справджується таке твердження.

Теорема 1.10. *[91] Нехай L—векторний підпростір векторного простору E. Всі його алгебраїчні доповнення в E ізоморофні, оскільки кожне з них ізоморфне факторпростору E/L.*

Розмірність факторпростору E/L називається *корозмірністю* (або *факторрозмірністю*) підпростору L та позначають як корозмірність або розмірність коядра ($codim\ L$ або $coker\ L$).

Теорема 1.11. *Нехай векторний простір E є прямою сумою векторних підпросторів L та M. Тоді*

$$(i) \qquad dim\ E = dim\ L + dim\ M,$$

якщо

$$(ii) \qquad dim\ L(E/L) < +\infty,$$

то

$$dim\ E/L = dim\ E - dim\ L \ \ (dim\ L = dim\ E - dim\ E/L).$$

Означення 1.13. *[36]. Замкнений щільно визначений оператор $Q : B \to B$ називається зведено оборотним, якщо*

$$B = N(Q) \oplus R(Q).$$

Звичайно, що в гільбертовому просторі нормальна розв'язність еквівалентна узагальненій оборотності. Будь-який скінченновимірний оператор є узагальнено-оборотним (1 - 3 випливає з теореми 1.9).

Якщо оператор $Q \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ діє з простору Гільберта H_1 у простір Гільберта H_2, то зі множини узагальнено-обернених операторів $Q^- \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ можна обрати єдиний, що задовольняє властивості:

$$1.\ \ QQ^-Q = Q; \qquad 2.\ \ Q^-QQ^- = Q^-;$$

$$3.\ \ (QQ^-)^* = QQ^-; \qquad 4.\ \ (Q^-Q)^* = Q^-Q.$$

Такий оператор називають псевдоoберненим за Муром–Пенроузом [200] оператором і позначають Q^+. Цей оператор має додаткові екстремальні властивості, на відміну від звичайного узагальнено-оберненого [36]. Насправді для існування Q^+ достатньо виконання лише властивостей 1 та 3. Надалі будемо писати, що $Q \in PI(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, якщо оператор Q має псевдооберненний за Муром–Пенроузом оператор, $PI(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ — множина всіх таких операторів. Екстремальна властивість оператора Q полягає в тому, що серед усіх елементів, які мінімізують норму різниці (нев'язки) $||Qx - y||$, елемент Q^+y має найменшу довжину.

Серед нормально-розв'язних операторів виділяють декілька класів, які являють окремий інтерес.

Нехай $n = n(Q) = dimN(Q)$, $d = d(Q) = dimN(Q^*)$. Індекс оператора визначається як $indQ = n(Q) - d(Q)$ (див. [36]).

Згідно з класифікацією С. Крейна нормально-розв'язний замкнений оператор, у якого $n(Q)$ або $d(Q)$ скінчене, називається *n-нормальним* або *d-нормальним* оператором відповідно.

У випадку, коли обидва числа $n(Q)$ та $d(Q)$ є скінченними, оператор Q називається *нетеровим* (фредгольмовим). Якщо ж додатково оператор Q є оператором нульового індексу, то він називається *фредгольмовим* (фредгольмовим індексу ноль). Слід зауважити, що в іноземній літературі останні два типи операторів часто не розрізняють і називають їх або фредгольмовими, або F- операторами.

Вказані вище теореми про представлення дають можливість отримати конструкцію узагальнено-оберненого до нетерового оператора з допомогою спеціальних скінченновимірних операторів, що додаються до вихідного нетерового [36].

Це оператори проектування на ядро та образ нетерового оператора. Теорія узагальнено-обернених операторів ефективно використовується при дослідженні рівнянь із оператором, що має вказані вище властивості.

1.4. Лінійні рівняння з обмеженим оператором

Добре відомим [39] є той факт, що для будь-якої прямокутної матриці розміру $m \times n$ існує псевдообернена за Муром—Пенроузом завдяки тому, що довільний скінченновимірний оператор має замкнену множину значень.

На жаль, такого результату для лінійних відображень у нескінченновимірних, навіть, у просторах Гільберта не було через наявність складнішої геометрії. Як відомо, у просторах Гільберта для довільного лінійного обмеженого оператора Q псевдообернений за Муром—Пенроузом оператор Q^+ існує тоді й тільки тоді, коли він є нормально-розв'язним (тобто має замкнену множину значень). Таким чином, умова замкненості множини значень оператора L виділяє підклас нормально-розв'язних операторів, що мають псевдообернений [39]. Для просторів Банаха та загальніших топологічних просторів цієї умови виявляється недостатньо, навіть для того, щоб існував узагальнено-обернений оператор Q. Існування такого оператора забезпечує умова доповнювальності образу нормально-розв'язного оператора $\overline{R(Q)} = R(Q)$ та його ядра $N(Q)$. Для операторів, що не мають замкненої множини значень, такої завершеної теорії не було розроблено до появи робіт [39]. У цьому підрозділі наводяться відповідні конструкції для повноти картини. Саме таким питанням й присвячено цей підрозділ, де розглядаються визначення та побудова узагальнено-обернених операторів до лінійних обмежених, що діють у просторах Фреше, Банаха та Гільберта з не обов'язково замкненою множиною значень. Для того щоб розв'язати цю задачу, пропонується розширити вихідний простір й оператор Q на нього таким чином, щоб розширений оператор Q був нормально-розв'язним. Використовуючи розширений оператор Q, для рівняння $Qx = y$ виділяють три типи розв'язків, які гарантують їх існування за додаткових умов на праві частини. Нехай $Q : H_1 \to H_2$ — довільний лінійний обмежений оператор, що діє з простору Гільберта H_1 у простір Гільберта H_2. При цьому не припускається замкненість множини його значень.

Покажемо, як можна ввести поняття сильного псевдооберненого за Муром—Пенроузом оператора для довільного лінійного обмеженого оператора. Ця конструкція була введена у роботах Бойчука О.А., Покутного О.О. [39].

Зауважимо, що простори Гільберта H_1 та H_2 можна розкласти в ортогональні суми:

$$H_1 = N(Q) \oplus X, H_2 = \overline{R(Q)} \oplus Y. \tag{1.1}$$

В цьому випадку підпростір $X = N(Q)^{\perp}$, а підпростір $Y = \overline{R(Q)}^{\perp}$ є ортогональними доповненнями до нуль-простору та замикання образу $R(Q)$ оператора Q. Виходячи з розкладів (1.1) існують оператори ортогонального проєктування (ортопроєктори) $\mathcal{P}_{N(Q)}$, $\mathcal{P}_X$ та $\mathcal{P}_{\overline{R(Q)}}, \mathcal{P}_Y$, що проєктують вихідні простори на відповідні підпростори $\mathcal{P}_{N(Q)} : H_1 \to N(Q)$, $\mathcal{P}_X : H_1 \to X$, $\mathcal{P}_{\overline{R(Q)}} : H_2 \to \overline{R(Q)}$, $\mathcal{P}_Y : H_2 \to Y$. Позначивши через H фактор-простір простору H_1 за ядром $N(Q)$ ($H = H_1/N(Q)$) можна стверджувати, що існує неперервна бієкція $p : X \to H$ та проєкція $j : H_1 \to H$. Згідно усталеної термінології трійка (H_1, H, j) є локально тривіальним розшаруванням з типовим шаром $\mathcal{P}_{N(Q)}H$. З допомогою введених відображень можна визначити оператор

$$\mathcal{Q} = \mathcal{P}_{\overline{R(Q)}} Q j^{-1} p : X \to R(Q) \subset \overline{R(Q)}.$$

В термінах стрілок та відображень маємо такий ланцюг

$$X \xrightarrow{p} H \xrightarrow{j^{-1}} H_1$$

$$H_1 \xrightarrow{Q} H_2 \xrightarrow{\mathcal{P}_{\overline{R(Q)}}} R(Q) \subset \overline{R(Q)}.$$

Так визначений оператор є лінійним, неперервним та ін'єктивним $x_1 \neq x_2$, тоді $\mathcal{Q}x_1 \neq \mathcal{Q}x_2$). Тоді можна скористатися процесом поповнення за нормою $||x||_{\overline{X}} = ||x||_F$, де у якості простору $F = \overline{R(Q)}$ береться замикання множини значень оператора Q. Таким чином отримаємо новий простір $\overline{X}$ й оператор $\overline{\mathcal{Q}}$, що розширений на відповідний простір $\overline{X}$ який буде гомеоморфним до простору $\overline{R(Q)}$:

$$\overline{\mathcal{Q}} : \overline{X} \to \overline{R(Q)}, \quad X \subset \overline{X}.$$

Розширений оператор $\overline{Q}$ може бути визначений таким чином $\overline{Q} = \overline{\mathcal{Q}}\mathcal{P}_{\overline{X}} : \overline{H}_1 \to H_2$. Більше того справедливі будуть такі розклади

$$\overline{H}_1 = N(Q) \oplus \overline{X}, \quad H_2 = R(\overline{Q}) \oplus Y.$$

Якщо $x \in H_1$, то $\overline{Q}x = Qx$. У роботі [39] було введено такі означення.

Означення 1.14. *Оператор* $\overline{Q}^{+}: H_2 \to \overline{H}_1$ *називається сильним псевдооберненим до оператора* Q.

Якщо оператор Q має замкнену множину значень, то псевдообернений до нього Q^{+} співпадає з сильним псевдооберненим $\overline{Q}^{+}$.

Наведемо приклад оператора із незамкненою множиною значень, що був наведений у монографії [39].

Розглянемо оператор $Q: l_2 \to l_2$ який визначається таким чином

$$Qx = Q(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (0, x_2, \frac{x_3}{2}, ..., \frac{x_n}{n-1}, ...).$$

Ядро цього оператора складається з набору векторів $\{\alpha(1, 0, 0, ...), \alpha \in \mathbb{R}\}$. Профакторизований оператор $\mathcal{Q}: l_2 \to l_2$ має такий вигляд:

$$\mathcal{Q}(y_1, y_2, ..., y_n, ...) = (y_1, \frac{y_2}{2}, ..., \frac{y_n}{n}, ...).$$

У роботі [39] показано, що його множина значень незамкнена. Поповнивши простір l_2 за нормою $||x||_{\overline{H}} = ||\mathcal{Q}x||_{l_2}$, отримаємо розширений простір $\overline{H} \supset l_2$, у якому відповідний розширений оператор буде нормально-розв'язним. Простір $\overline{H}$ досить широкий і містить у собі простір обмежених послідовностей m. Таким чином, сильний псевдообернений $\overline{Q}^{+}: l_2 \to \overline{H}$ до оператора Q має такий вигляд:

$$(Q_{strong})^{+}x = \overline{Q}^{+}x = \overline{Q}^{+}(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (0, x_2, 2x_3, ..., (n-1)x_n, ...).$$

У випадку просторів Фреше та Банаха така конструкція має місце не завжди. У тому випадку, коли вихідні простори H_1 та H_2 є векторними просторами, поняття узагальнено-оберненого оператора було введено ще в роботі Е. Дойча [83] (про що йшла мова в попередній главі). За рахунок процесу поповнення, про який говорилося вище, можна поширити це поняття й на випадок просторів Фреше та Банаха з необов'язково замкненою множиною значень. Цей приклад наведено тут, оскільки він буде використовуватися в подальших дослідженнях крайових задач для операторно-диференціальних рівнянь.

У загальних топологічних просторах, коли задано лінійний та обмежений оператор Q, що діє з простору Банаха (Фреше) B_1 у простір Банаха (Фреше) B_2, додатково треба припускати доповнювальність підпросторів $N(Q)$ та $\overline{R(Q)}$, тобто що виконуються наступні розклади у прямі суми підпросторів:

$$B_1 = N(Q) \oplus X, B_2 = \overline{R(Q)} \oplus Y \tag{1.2}$$

і відповідні розклади одиниці:

$$I_{B_1} = P_{N(Q)} + P_X, I_{B_2} = P_{\overline{R(Q)}} + P_Y,$$

де $P_{N(Q)}, P_X, P_{\overline{R(Q)}}, P_Y$ — проектори на відповідні підпростори. Доповнювальність підпросторів є суттєвою умовою для існування узагальнено-обернених (або сильних узагальнено-обернених) операторів. Ці розклади у просторах Гільберта завжди існують, і тому поняття сильного псевдооберненого оператора, на відміну від поняття сильного узагальнено-оберненого, можна визначити для довільного лінійного обмеженого оператора.

Для більш загальних топологічних просторів можна ввести таке означення.

Означення 1.15. *[39] Нехай $Q : B_1 \to B_2$ — лінійний обмежений оператор, що діє з простору Банаха B_1 у простір Банаха B_2, а підпростори $X \subset B_1$ та $Y \subset B_2$ такі, що виконується умова (1.2). Тоді пару (X, Y) будемо називати узагальненою Q-допустимою парою.*

Розглянувши звужений оператор $Q_X : X \to \overline{R(Q)}$, $Q_X x = Qx, \quad x \in X$ (який буде лінійним, неперервним та ін'єктивним) та поповнивши простір X за нормою $||x|| = ||Q_X x||_{B_2}$ й розширивши Q_X на поповнений простір $\overline{X}$ за неперервністю, отримаємо оператор $\overline{Q}_X$. Далі конструкція аналогічна до відповідної у просторі Гільберта.

Означення 1.16. *[39] Нехай $Q \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ та (X, Y) — узагальнена Q-допустима пара. Тоді відображення*

$$Q^{-}_{X,Y} : B_2 \to \overline{B}_1,$$

$$Q^{-}_{X,Y} y = \overline{Q}_X^{-1} y_1, \; y = y_1 + y_2, \; y_1 \in \overline{R(Q)}, \; y_2 \in Y,$$

називатимемо сильним (X, Y)-узагальнено-оберненим до Q.

Безпосередньо з означення сильного (X, Y)-узагальнено-оберненого оператора випливають наступні властивості:

$$QQ^{-}_{X,Y}Q = Q, \quad Q^{-}_{X,Y}QQ^{-}_{X,Y} = Q^{-}_{X,Y} \quad \text{на} \ \ X,$$

або з заміною Q на Q_X:

$$\overline{Q}_X Q^{-}_{X,Y}\overline{Q}_X = \overline{Q}_X, \quad Q^{-}_{X,Y}\overline{Q}_X Q^{-}_{X,Y} = Q^{-}_{X,Y} \quad \text{на} \ \ \overline{X}.$$

Аналогів властивостей 3 та 4 (попереднього підрозділу) з означення псевдооберненого оператора в загальному випадку немає.

Зауваження 1.1. *Аналогічні підходи можна застосовувати й у тому випадкау, коли вихідні простори є просторами Фреше. У такому випадку поповнювати слід за зліченною системою напівнорм. Насправді запропонований підхід залишається застосовним у випадку деяких більш загальних, ніж Фреше локально-опуклих просторах, а відповідне поповнення будується за системою напівнорм, що визначають топологію простору.*

Зауваження 1.2. *Якщо вихідні простори є просторами Гільберта, то сильний псевдообернений оператор* $\overline{Q}^{+}$ *до оператора* Q *зі введеного вище означення буде також і сильним* (X, Y)*-узагальнено оберненим до* Q *у сенсі означення (1.16). Таким чином, у просторах Гільберта довільний лінійний обмежений оператор має сильний* $(N(Q)^{\perp}, \overline{R(Q)}^{\perp})$*-узагальнено-обернений, де* $X = N(Q)^{\perp}, Y = \overline{R(Q)}^{\perp}$.

Зауваження 1.3. *На загальні локально-опуклі простори означення, запропоновані вище, в загальному випадку перенести неможливо, тому, що, як зазначалося у попередньому підрозділі, факторпростір повного локально-опуклого простору за його замкненим підпростором може бути не повним.*

Для отримання загального вигляду розв'язків крайових задач для операторно-диференціальних рівнянь та їх класифікації нам знадобляться факти з теорії лінійних операторних рівнянь із обмеженим оператором.

Розглянемо у просторах Банаха B_1 та B_2 лінійне рівняння

$$Qx = y, \tag{1.3}$$

де y— елемент простору B_2, Q-такий лінійний обмежений оператор, що пара (X, Y) є узагальненою Q- допустимою. Відомо [36], що в загальному випадку розв'язок такого рівняння може існувати не для всіх правих частин і може бути не єдиним. Коли розв'язку не існує у звичайному сенсі, то часто знаходять такий елемент $x = \overline{x} \in B_1$, який мінімізує норму нев'язки $||Q\overline{x}-y||_{B_2} = inf_{x\in B_1}||Qx-y||_{B_2}$. Його називають псевдо- або квазірозв'язком у залежності від того, визначений він на просторах Гільберта чи Банаха відповідно [36]. Для існування такого розв'язку умова замкнености множини значень оператора Q є суттєвою, але в загальному випадку така варіаційна задача може не мати розв'язку. Для розв'язання такої задачі й використовуються наведені вище конструкції. Більше того, екстремальний елемент може належати не вихідному простору B_1, а відповідному розширеному простору $\overline{B}_1$.

Далі введемо такі означення розв'язків для рівняння (1.3), які гарантують їх існування в тому чи іншому сенсі.

Використавши побудовану вище конструкцію, розширимо вихідний простір B_1 і оператор Q, заданий на ньому таким чином, щоб варіаційна задача на розширеному просторі завжди мала розв'язки у певному сенсі. Відображення, яке буде встановлювати відповідність між розв'язками та правими частинами, в загальному випадку виявляється багатозначним.

Означення узагальнених розв'язків. Основні результати сформулюємо у просторах Банаха та Гільберта. У цьому випадку для рівняння (1.3) будемо виділяти такі три типи розв'язків.

1) Класичні розв'язки.

Розглянемо випадок, коли оператор Q нормально-розв'язний. Тоді, як відомо [36], [39] неоднорідність $y \in R(Q)$ у рівнянні (1.3) належить образу оператора тоді й тільки тоді, коли $P_{N(Q^*)}y = 0$. У цьому випадку існує узагальнено-обернений оператор Q^- або у випадку просторів Гільберта псевдообернений за Муром–Пенроузом оператор Q^+, за допомогою яких множина розв'язків рівняння (1.3) у просторі Банаха має вигляд

$$x = Q^- y + P_{N(Q)}c, \quad \forall c \in B_1,$$

а у просторі Гільберта

$$x = Q^+ y + \mathcal{P}_{N(Q)}c, \quad \forall c \in H_1.$$

2) Сильні узагальнені розв'язки.

Розглянемо випадок, коли множина значень оператора Q не є замкненою.

Оскільки оператор Q має (X, Y)—узагальнену Q - допустиму пару, то для просторів B_1 та B_2 виконується розклад (1.2).

Тоді ми можемо вести мову про сильний узагальнений розв'язок рівняння (1.3). Оскільки оператор $\overline{Q}_X$ здійснює гомеоморфізм між просторами $\overline{X}$ та $\overline{R(Q)}$, то існує $\overline{Q}_X^{-1}$ та коректним буде наступне означення.

Означення 1.17. *Елемент $\overline{Q}_X^{-1}y$ будемо називати сильним узагальненим розв'язком рівняння (1.3), якщо $y \in \overline{R(Q)}$.*

Тоді множина всіх сильних узагальнених розв'язків рівняння (1.3) буде мати вигляд

$$x = Q^{-}_{X,Y}y + P_{N(Q)}c, \qquad \forall c \in B_1,$$

а оператор $Q^{-}_{X,Y}y := \overline{Q}_X^{-1}y_1$, де $y = y_1 + y_2$, $y_1 \in \overline{R(Q)}$, $y_2 \in Y$.

У просторі Гільберта ця множина може бути представлена в такому вигляді:

$$x = Q^{+}y + \mathcal{P}_{N(Q)}c, \quad \forall c \in H_1.$$

3) Узагальнені квазірозв'язки.

Розглянемо випадок, коли $y \notin \overline{R(Q)}$. Для елемента y це рівносильно виконанню умови $P_{N(Q^*)}y \neq 0$. У цьому випадку сильних узагальнених розв'язків не існує, але існують такі елементи з $\overline{X}$, що є розв'язками варіаційної задачі $inf||\overline{Q}x - y||_{B_2}$, де $\overline{Q} = \overline{Q}_{\overline{X}}\mathcal{P}_{\overline{X}}$ та інфімум береться по всіх елементах $x \in \overline{X}$. Ці елементи й будемо називати узагальненими квазірозв'язками.

Означення 1.18. *Довільний елемент зі множини $\{Q^{-}_{X,Y}y + P_{N(Q)}c\}_{c \in B_1}$ будемо називати узагальненим квазірозв'язком рівняння (1.3).*

Означення 1.19. *Зазначимо, що якщо $R(Q) = \overline{R(Q)}$, то узагальнені квазірозв'язки співпадають зі звичайними квазірозв'язками.*

Зауваження 1.4. *З наведеного вище означення елемент $Q^{-}_{X,Y}y$ може мати не найменшу норму на відповідному просторі, на відміну від $\overline{Q}^{+}y$.*

Основним твердженням, яке використовується при отриманні результатів, що представлені в дисертації, є наступна теорема [39].

Теорема 1.12. *Нехай для оператора Q існує (X, Y) узагальнена Q— допустима пара.*

а) 1. Сильні узагальнені розв'язки рівняння (1.3) існують тоді й тільки тоді, коли елемент $y \in B_2$ задовольняє умову

$$P_{N(\overline{Q}^*)}y = 0; \tag{1.4}$$

якщо $y \in R(Q)$, то отримані розв'язки будуть класичними.

2. Якщо умова (1.4) виконується, то множина сильних узагальнених розв'язків рівняння (1.3) буде мати вигляд

$$x = Q^{-}_{X,Y}y + P_{N(Q)}c, \quad \forall c \in B_1;$$

(У випадку просторів Гільберта множина сильних узагальнених розв'язків рівняння (1.3) буде мати вигляд $x = \overline{Q}^{+}y + \mathcal{P}_{N(Q)}c, \forall c \in H_1$.)

b) 1. Узагальнені квазірозв'язки рівняння (1.3) існують тоді й тільки тоді, коли елемент $y \in B_2$ задовольняє умову

$$P_{N(\overline{Q}^{*})}y \neq 0. \tag{1.5}$$

(У випадку просторів Гільберта узагальнені псевдорозв'язки рівняння (1.3) існують тоді й тільки тоді, коли елемент $y \in H_2$ задовольняє умову $(\varphi, y) \neq 0$.)

2. Якщо умова (1.5) виконується, то множина узагальнених квазірозв'язків буде мати вигляд

$$x = Q^{-}_{X,Y}y + P_{N(Q)}c, \quad \forall c \in B_1.$$

(у просторі Гільберта множина узагальнених псевдорозв'язків буде мати вигляд $x = \overline{Q}^{+}y + \mathcal{P}_{N(Q)}c, \quad \forall c \in H_1$).

Зауваження 1.5. *У просторах Гільберта зазначені вище проєктори будуть ортопроєкторами.*

1.5. Перспективи досліджень

Наведемо у цій частині декілька задач, які можуть бути розв'язані, завдяки запропонованій у дисертації методиці.

1. Зв'язані системи лінійних операторних рівнянь Сильвестра.

Розглянемо наступну систему зв'язаних рівнянь Сильвестра у просторі Гільберта:

$$A_{ii}X_i(\varepsilon) + X_i(\varepsilon)B_{ii} + \varepsilon\left(\sum_{k=1, k\neq i}^{n} A_{ik}X_k(\varepsilon)\right) + \tag{1.6}$$

$$+\varepsilon^2 \left(\sum_{k=1, k\neq i}^{n} B_{ik} X_k(\varepsilon) \right) = H_i + \varepsilon \overline{H}_i + \varepsilon^2 \widetilde{H}_i \quad i = \overline{1, n}.$$

Тут $A_{ij}, B_{ij}, H_i, \overline{H}_i, \widetilde{H}_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),\ i, j = \overline{1, n}$ - лінійні та обмежені оператори, що діють у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Необхідно знайти достатні умови існування розв'язків $X_i(\varepsilon)$ даної системи у двох випадках ($X_i(\varepsilon)$ — лінійні та обмежені оператори).

а) Породжуюча система рівнянь ($\varepsilon = 0$) має розв'язки;

б) Породжуюча система не має розв'язків.

Дана задача має бути досліджена й у тому випадку, коли відповідний породжуючий оператор має незамкнену множину значень.

Аналогічно можна дослідити задачу, де сумування відбувається до ε^k.

2. Зв'язані системи нелінійних операторних рівнянь Сильвестра.

Розглянемо наступну систему зв'язаних рівнянь Сильвестра у просторі Гільберта:

$$\begin{gathered} A_{ii} X_i(\varepsilon) + X_i(\varepsilon) B_{ii} + \\ +\varepsilon R_i(X_1(\varepsilon), X_2(\varepsilon), ..., X_{i-1}(\varepsilon), X_{i+1}(\varepsilon), ..., X_n(\varepsilon)) + \\ +\varepsilon^2 \widetilde{R}_i(X_1(\varepsilon), X_2(\varepsilon), ..., X_{i-1}(\varepsilon), X_{i+1}(\varepsilon), ..., X_n(\varepsilon)) = H_i. \ \ i = \overline{1, n}. \end{gathered}$$

Тут $A_{ii}, B_{ii}, H_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, — $i = \overline{1, n}$ — лінійні та обмежені оператори, що діють у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Нелінійності R_i, $\widetilde{R}_i$ задовольняють додаткові обмеження.

Необхідно знайти необхідні та достатні умови існування розв'язків такої системи за умови, що породжуюча система ($\varepsilon = 0$) має розв'язки й відповідні розв'язки $X_i(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ прямують до розв'язків X_i^0 породжуючої задачі

$$A_{ii} X_i^0 + X_i^0 B_{ii} = H_i,\ i = \overline{1, n}. \tag{1.7}$$

Дана задача має бути досліджена й у тому випадку, коли відповідний породжуючий оператор має незамкнену множину значень.

3. Розглянемо наступну систему керування зв'язаних рівнянь Сильвестра у просторі Гільберта

$$A_{ii}X_i(\varepsilon) + X_i(\varepsilon)B_{ii} + \varepsilon \left(\sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} A_{ik}X_k(\varepsilon) \right) + \tag{1.8}$$

$$+\varepsilon^2 \left(\sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} B_{ik}X_k(\varepsilon) \right) + C_iU_i = H_i + \varepsilon\overline{H}_i + \varepsilon^2\widetilde{H}_i(t), \quad i = \overline{1,n}.$$

Тут $A_{ij}, B_{ij}, C_i, H_i, \overline{H}_i, \widetilde{H}_i(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),\ i = \overline{1,n}$ — лінійні та обмежені оператори, що діють у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Необхідно знайти достатні умови існування розв'язків X_i системи (1.6) за додаткових умов

$$\ell_iX_i(\varepsilon) = \alpha_i,\ i = \overline{1,n}, \tag{1.9}$$

де $\ell_i,\ i = \overline{1,n},$ — лінійні та обмежені оператори, що діють з простору $\mathcal{H}$ у простір $\mathcal{H}_1$ ($\ell_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1)$), $\alpha_i \in \mathcal{H}_1$ у двох випадках ($X_i(\varepsilon)$ — лінійні та обмежені оператори).

а) Породжуюча система рівнянь ($\varepsilon = 0$) має розв'язки.

б) Породжуюча система не має розв'язків.

Більше того, необхідно знайти умови на норми розв'язків X_i в залежності від норм U_i та α_i (аналоги так званих умов input to state stability).

Дана задача має бути досліджена й у тому випадку, коли відповідний породжуючий оператор має незамкнену множину значень. Оператор крайових умов після підстановки відповідних розв'язків теж може мати незамкнену множину значень.

4. Зв'язані системи керування нелінійних операторних рівнянь Сильвестра.

Розглянемо наступну систему зв'язаних рівнянь Сильвестра у просторі Гільберта:

$$\begin{gathered} A_{ii}X_i(\varepsilon) + X_i(\varepsilon)B_{ii} + \\ +\varepsilon R_i(X_1(\varepsilon), X_2(\varepsilon), ..., X_{i-1}(\varepsilon), X_{i+1}(\varepsilon), ..., X_n(\varepsilon)) + \\ +\varepsilon^2\widetilde{R}_i(X_1(\varepsilon), X_2(\varepsilon), ..., X_{i-1}(\varepsilon), X_{i+1}(\varepsilon), ..., X_n(\varepsilon)) + C_iU_i = H_i, \quad i = \overline{1,n}. \end{gathered}$$

Тут $A_{ii}, B_{ii}, C_i, H_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),\ i = \overline{1,n}$ — лінійні та обмежені оператори, що діють в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ з додатковими умовами

$$\ell_i X_i(\varepsilon) = \alpha_i. \tag{1.10}$$

Потрібно знайти необхідні та достатні умови існування розв'язків такої системи за умови, що породжуюча система ($\varepsilon = 0$) має розв'язки.

Більше того, необхідно знайти умови на норми розв'язків X_i в залежності від норм U_i та α_i (аналоги так званих умов input to state stability). На нелінійності R_i, $\widetilde{R}_i$ накладаються додаткові умови.

Дана задача має бути досліджена й у тому випадку, коли відповідний породжуючий оператор має незамкнену множину значень. Оператор крайових умов після підстановки відповідних розв'язків теж може мати незамкнену множину значень.

5. Зв'язані системи лінійних операторно-диференціальних рівнянь Сильвестра.

Розглянемо наступну крайову задачу для операторно-диференціальних систем зв'язаних рівнянь Сильвестра у просторі Гільберта:

$$\begin{gathered}\frac{dX_i(t,\varepsilon)}{dt} = A_{ii}(t)X_i(t,\varepsilon) + X_i(t,\varepsilon)B_{ii}(t) + \\ +\varepsilon\left(\textstyle\sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} A_{ik}X_k(t,\varepsilon)\right) + \varepsilon^2\left(\textstyle\sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} B_{ik}X_k(t,\varepsilon)\right) + \\ +H_i(t) + \varepsilon\overline{H}_i(t) + \varepsilon^2\widetilde{H}_i(t), \quad i = \overline{1,n},\ t \in J,\end{gathered}$$

$$\ell_i X_i(\cdot,\varepsilon) = \alpha_i. \tag{1.11}$$

Тут $A_{ij}(t), B_{ij}(t), H_i(t), \overline{H}_i(t), \widetilde{H}_i(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),\ i,j = \overline{1,n},$ — лінійні та обмежені оператори, що при кожному $t \in J$ діють у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ $(t \in J,\ J \subset R)$. Лінійні та обмежені оператори ℓ_i переводять розв'язки операторно-диференціальної системи в деякий простір Гільберта $\mathcal{H}_1$, $\alpha_i \in \mathcal{H}_1$.

Необхідно знайти достатні умови існування розв'язків $X_i(t,\varepsilon)$ системи (1.6) у двох випадках ($X_i(t,\varepsilon)$ — лінійні та обмежені оператори).

а) Породжуюча крайова задача ($\varepsilon = 0$) має розв'язки.

б) Породжуюча крайова задача не має розв'язків.

Така задача являє окремий інтерес у випадку постійних операторних коефіцієнтів ($A_{ii}(t) = A_{ii}, B_{ii}(t) = B_{ii}$) так і у випадку необмежених операторних коефіцієнтів. Більше того, окремим випадком є дослідження розв'язків таких задач на всій осі (з крайовими умовами на нескінченності).

Дана задача має бути досліджена й у тому випадку, коли відповідний породжуючий оператор має незамкнену множину значень. Оператор крайових умов після підстановки відповідних розв'язків теж може мати незамкнену множину значень.

6. Зв'язані системи нелінійних операторно-диференціальних рівнянь Сильвестра.

Розглянемо наступну крайову задачу для операторно-диференціальних нелінійних систем зв'язаних рівнянь Сильвестра у просторі Гільберта:

$$\begin{gathered}\frac{dX_i(t,\varepsilon)}{dt} = A_{ii}(t)X_i(t,\varepsilon) + X_i(t,\varepsilon)B_{ii}(t) + \\ +\varepsilon R_i(X_1(t,\varepsilon), X_2(t,\varepsilon), ..., X_{i-1}(t,\varepsilon), X_{i+1}(t,\varepsilon), ..., X_n(t,\varepsilon)) + \\ +\varepsilon^2 \widetilde{R}_i(X_1(t,\varepsilon), X_2(t,\varepsilon), ..., X_{i-1}(t,\varepsilon), X_{i+1}(t,\varepsilon), ..., X_n(t,\varepsilon)) + \\ +H_i(t), \quad i = \overline{1,n}, \\ \ell_i X_i(\cdot,\varepsilon) = \alpha_i. \end{gathered} \tag{1.12}$$

Тут $A_{ij}(t), B_{ii}(t), H_i(t), \overline{H}_i(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),\ i,j = \overline{1,n},$ — лінійні та обмежені оператори, що при кожному $t \in J$ діють в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ $(t \in J,\ J \subset R)$. Лінійні та обмежені оператори ℓ_i переводять розв'язки операторно-диференціальної системи в деякий простір Гільберта $\mathcal{H}_1$, $\alpha_i \in \mathcal{H}_1$.

Потрібно знайти необхідні та достатні умови існування розв'язків такої системи за умови, що породжуюча система $(\varepsilon = 0)$ має розв'язки й відповідні розв'язки $X_i(t,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ прямують до розв'язків $X_i^0(t)$ породжуючої крайової задачі

$$\frac{dX_i^0(t)}{dt} = A_{ii}(t)X_i^0(t) + X_i^0(t)B_{ii}(t) + H_i(t),\ i = \overline{1,n}, \tag{1.13}$$

$$\ell_i X_i^0(\cdot) = \alpha_i. \tag{1.14}$$

Дана задача має бути досліджена й у тому випадку, коли відповідний породжуючий оператор має незамкнену множину значень. Оператор крайових умов після підстановки відповідних розв'язків теж може мати незамкнену множину значень.

7. Розглянемо наступну операторно-диференціальну крайову задачу для системи керування зв'язаних рівнянь Сильвестра у просторі Гільберта:

$$\frac{dX_i(t,\varepsilon)}{dt} = A_{ii}(t)X_i(t,\varepsilon) + X_i(t,\varepsilon)B_{ii}(t)+$$
$$+\varepsilon\left(\sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} A_{ik}X_k(\varepsilon)\right) + \varepsilon^2\left(\sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} B_{ik}X_k(\varepsilon)\right) +$$
$$+C_i(t)U_i + H_i(t) + \varepsilon\overline{H}_i(t) + \varepsilon^2\widetilde{H}_i(t), \quad i=\overline{1,n}$$

$$\ell_i X_i(\cdot,\varepsilon) = \alpha_i. \ i=\overline{1,n} \tag{1.15}$$

Тут $A_{ij}(t), B_{ij}(t), H_i(t), \overline{H}_i(t), \widetilde{H}_i(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),\ i,j=\overline{1,n}$ — лінійні та обмежені оператори, що при кожному $t \in J$ діють в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ $(t \in J, J \subset R)$. Лінійні та обмежені оператори ℓ_i переводять розв'язки операторно-диференціальної системи у деякий простір Гільберта $\mathcal{H}_1$, $\alpha_i \in \mathcal{H}_1$. Задача роглядається у двох випадках ($X_i(t,\varepsilon)$ — лінійні та обмежені оператори).

а) Породжуюча задача ($\varepsilon = 0$) має розв'язки;

б) Породжуюча задача не має розв'язків.

Більше того, необхідно знайти умови на норми розв'язків X_i в залежності від норм U_i та α_i (аналоги так званих умов input to state stability).

Дана задача має бути досліджена й у тому випадку, коли відповідний породжуючий оператор має незамкнену множину значень. Оператор крайових умов після підстановки відповідних розв'язків теж може мати незамкнену множину значень.

8. Зв'язані системи керування нелінійних операторних рівнянь Сильвестра.

Розглянемо наступну систему зв'язаних рівнянь Сильвестра у просторі Гільберта:

$$\frac{dX_i(t,\varepsilon)}{dt} = A_{ii}(t)X_i(t,\varepsilon) + X_i(t,\varepsilon)B_{ii}(t)+$$
$$+\varepsilon R_i(X_1(t,\varepsilon), X_2(t,\varepsilon), ..., X_{i-1}(t,\varepsilon), X_{i+1}(t,\varepsilon), ..., X_n(t,\varepsilon))+$$
$$+\varepsilon^2 \widetilde{R}_i(X_1(t,\varepsilon), X_2(t,\varepsilon), ..., X_{i-1}(t,\varepsilon), X_{i+1}(t,\varepsilon), ..., X_n(t,\varepsilon))+$$
$$+C_i(t)U_i + H_i(t), \quad i=\overline{1,n},$$

$$\ell_i X_i(\cdot,\varepsilon) = \alpha_i. \tag{1.16}$$

Тут $A_{ii}(t), B_{ii}(t), H_i(t), \overline{H}_i(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),\ i,j=\overline{1,n}$ — лінійні та обмежені оператори, що при кожному $t \in J$ діють в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ $(t \in J,\ J \subset R)$. Лінійні та обмежені оператори ℓ_i переводять розв'язки операторно-диференціальної системи в деякий простір Гільберта $\mathcal{H}_1$, $\alpha_i \in \mathcal{H}_1$. Задача роглядається у двох випадках ($X_i(t,\varepsilon)$ — лінійні та обмежені оператори).

Необхідно знайти необхідні та достатні умови існування розв'язків такої системи за умови, що породжуюча система ($\varepsilon = 0$) має розв'язки й відповідні розв'язки $X_i(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ прямують до розв'язків X_i^0 породжуючої задачі

$$\frac{dX_i^0(t)}{dt} = A_{ii}(t)X_i^0(t) + X_i^0(t)B_{ii}(t) + H_i(t), \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.17}$$

$$\ell_i X_i^0(\cdot,\varepsilon) = \alpha_i. \tag{1.18}$$

Більше того, необхідно знайти умови на норми розв'язків X_i в залежності від норм U_i та α_i (аналоги так званих умов input to state stability). На нелінійності R_i, $\widetilde{R}_i$ накладаються додаткові умови, що залежать від умов задачі.

Дана задача має бути досліджена й у тому випадку, коли відповідний породжуючий оператор має незамкнену множину значень. Оператор крайових умов після підстановки відповідних розв'язків теж може мати незамкнену множину значень. Чи можна аналогічну задачу розв'язати у випадку, коли присутні нелінійності за ступенями вище, ніж 2, при ε^k?

9. Зв'язані системи лінійних операторно-диференціальних рівнянь Сильвестра з імпульсами.

Розглянемо наступну крайову задачу для операторно-диференціальних систем зв'язаних рівнянь Сильвестра у просторі Гільберта з імпульсними умовами:

$$\begin{gathered}\tfrac{dX_i(t,\varepsilon)}{dt} = A_{ii}(t)X_i(t,\varepsilon) + X_i(t,\varepsilon)B_{ii}(t) + \\ \varepsilon\left(+\textstyle\sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} A_{ik}X_k(t,\varepsilon)\right) + \varepsilon^2\left(\textstyle\sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} B_{ik}X_k(t,\varepsilon)\right) + \\ +H_i(t) + \varepsilon\overline{H}_i(t) + \varepsilon^2\widetilde{H}_i(t), \quad i = \overline{1,n}, t \in J\end{gathered}$$

$$\ell_i X_i(\cdot,\varepsilon) = \alpha_i, \tag{1.19}$$

$$\phi_i^j x_i(\cdot,\varepsilon) := E_j X_i(\tau_j+,\varepsilon) - (E_j + S_j)X_i(\tau_j-,\varepsilon) = G_i^j,\ j = \overline{1,p}. \tag{1.20}$$

Тут $A_{ij}(t), B_{ij}(t), H_i(t), \overline{H}_i(t), \widetilde{H}_i(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),\ i,j = \overline{1,n}$ — лінійні та обмежені оператори, що при кожному $t \in J$ діють в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ ($t \in J,\ J \subset R$). Лінійні та обмежені оператори ℓ_i переводять розв'язки операторно-диференціальної системи в деякий простір Гільберта

$\mathcal{H}_1$, $\alpha_i \in \mathcal{H}_1$. E_j, S_j — лінійні та обмежені оператори у функціональних просторах, що переводять відповідні розв'язки в деякий простір Гільберта $\mathcal{H}_3$, $G_i^j \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_3)$ з певними додатковими умовами продовжуваності через точки розриву $\tau_j,\ j = \overline{1,p}$.

Необхідно знайти достатні умови існування розв'язків $X_i(t,\varepsilon)$ відповідної крайовох задачі у двох випадках ($X_i(t,\varepsilon)$ — лінійні та обмежені оператори).

а) Породжуюча крайова задача ($\varepsilon = 0$) має розв'язки;

б) Породжуюча крайова задача не має розв'язків.

Така задача являє собою окремий інтерес як у випадку постійних операторних коефіцієнтів ($A_{ii}(t) = A_{ii}, B_{ii}(t) = B_{ii}$), так і у випадку необмежених операторних коефіцієнтів. Більше того, окремим випадком є дослідження розв'язків таких задач на всій осі (з крайовими умовами на нескінченності).

Дана задача має бути досліджена й у тому випадку, коли відповідний породжуючий оператор має незамкнену множину значень. Оператор крайових умов після підстановки відповідних розв'язків теж може мати незамкнену множину значень.

10. Зв'язані системи нелінійних операторно-диференціальних рівнянь Сильвестра.

Розглянемо наступну крайову задачу для операторно-диференціальних нелінійних систем зв'язаних рівнянь Сильвестра у просторі Гільберта з імпульсами:

$$\begin{gathered}\frac{dX_i(t,\varepsilon)}{dt} = A_{ii}(t)X_i(t,\varepsilon) + X_i(t,\varepsilon)B_{ii}(t)+ \\ +\varepsilon R_i(X_1(t,\varepsilon), X_2(t,\varepsilon), ..., X_{i-1}(t,\varepsilon), X_{i+1}(t,\varepsilon), ..., X_n(t,\varepsilon))+ \\ +\varepsilon^2 \widetilde{R}_i(X_1(t,\varepsilon), X_2(t,\varepsilon), ..., X_{i-1}(t,\varepsilon), X_{i+1}(t,\varepsilon), ..., X_n(t,\varepsilon))+ \\ +H_i(t), \quad i = \overline{1,n}, \\ \ell_i X_i(\cdot,\varepsilon) = \alpha_i. \end{gathered} \tag{1.21}$$

$$\phi_i^j X_i(\cdot,\varepsilon) := E_j X_i(\tau_j+,\varepsilon) - (E_j + S_j)X_i(\tau_j-,\varepsilon) = G_i^j,\ j = \overline{1,p}. \tag{1.22}$$

Тут $A_{ij}(t), B_{ii}(t), H_i(t), \overline{H}_i(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), i,j = \overline{1,n}$ — лінійні та обмежені оператори, що при кожному $t \in J$ діють у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ ($t \in J,\ J \subset R$). Лінійні та обмежені оператори ℓ_i переводять розв'язки операторно-диференціальної системи в деякий простір Гільберта $\mathcal{H}_1$, $\alpha_i \in \mathcal{H}_1$. E_j, S_j — лінійні та обмежені оператори у функціональних просторах, що переводять відповідні розв'язки в деякий простір Гільберта $\mathcal{H}_3$, $G_i^j \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_3)$ з певними додатковими умовами продовжуваності через точки розриву τ_j, $j = \overline{1,p}$. Нелінійності R_i, $\widetilde{R}_i$ задовольняють додатковим умовам.

Необхідно знайти необхідні та достатні умови існування розв'язків такої системи за умови, що породжуюча система ($\varepsilon = 0$) має розв'язки й відповідні розв'язки $X_i(t,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ прямують до розв'язків $X_i^0(t)$ породжуючої крайової задачі

$$\frac{dX_i^0(t)}{dt} = A_{ii}(t)X_i^0(t) + X_i^0(t)B_{ii}(t) + H_i(t), i = \overline{1,n}. \tag{1.23}$$

$$\ell_i X_i^0(\cdot) = \alpha_i. \tag{1.24}$$

$$\phi_i^j X_i^0(\cdot,\varepsilon) := E_j X_i^0(\tau_j+) - (E_j + S_j)X_i^0(\tau_j-) = G_i^j, j = \overline{1,p}. \tag{1.25}$$

Дана задача має бути досліджена й у тому випадку, коли відповідний породжуючий оператор має незамкнену множину значень. Оператор крайових умов після підстановки відповідних розв'язків теж може мати незамкнену множину значень.

11. Розглянемо наступну операторно-диференціальну крайову задачу для системи керування зв'язаних рівнянь Сильвестра у просторі Гільберта:

$$\begin{gathered}\frac{dX_i(t,\varepsilon)}{dt} = A_{ii}(t)X_i(t,\varepsilon) + X_i(t,\varepsilon)B_{ii}(t) + \\ +\varepsilon\left(\textstyle\sum_{k=1,k\neq i}^{n} A_{ik}X_k(\varepsilon)\right) + \varepsilon^2\left(\textstyle\sum_{k=1,k\neq i}^{n} B_{ik}X_k(\varepsilon)\right) + \\ +C_i(t)U_i + H_i(t) + \varepsilon\overline{H}_i(t) + \varepsilon^2\widetilde{H}_i(t), \quad i = \overline{1,n},\end{gathered}$$

$$\ell_i X_i(\cdot,\varepsilon) = \alpha_i, \; i = \overline{1,n}, \tag{1.26}$$

$$\phi_i^j X_i(\cdot,\varepsilon) := E_j X_i(\tau_j+,\varepsilon) - (E_j + S_j)X_i(\tau_j-,\varepsilon) = G_i^j, \; j = \overline{1,p}. \tag{1.27}$$

Тут $A_{ij}(t), B_{ij}(t), H_i(t), \overline{H}_i(t), \widetilde{H}_i(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $i,j = \overline{1,n}$ — лінійні та обмежені оператори, що при кожному $t \in J$ діють у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ ($t \in J$, $J \subset R$). Лінійні та обмежені оператори ℓ_i переводять розв'язки операторно-диференціальної системи в деякий простір Гільберта $\mathcal{H}_1$, $\alpha_i \in \mathcal{H}_1$. E_j, S_j — лінійні та обмежені оператори у функціональних просторах, що переводять відповідні розв'язки в деякий простір Гільберта $\mathcal{H}_3$, $G_i^j \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_3)$ з певними додатковими умовами продовжуваності через точки розриву τ_j, $j = \overline{1,p}$. Задача роглядається у двох випадках ($X_i(t,\varepsilon)$ — лінійні та обмежені оператори).

а) Породжуюча задача ($\varepsilon = 0$) має розв'язки.

б) Породжуюча задача не має розв'язків.

Більше того, необхідно знайти умови на норми розв'язків X_i в залежності від норм U_i та α_i (аналоги так званих умов input to state stability).

Дана задача має бути досліджена й у тому випадку, коли відповідний породжуючий оператор має незамкнену множину значень. Оператор крайових умов після підстановки відповідних розв'язків теж може мати незамкнену множину значень.

12. Зв'язані системи керування нелінійних операторних рівнянь Сильвестра.

Розглянемо наступну систему зв'язаних рівнянь Сильвестра у просторі Гільберта з імпульсами:

$$\frac{dX_i(t,\varepsilon)}{dt} = A_{ii}(t)X_i(t,\varepsilon) + X_i(t,\varepsilon)B_{ii}(t)+$$
$$+\varepsilon R_i(X_1(t,\varepsilon), X_2(t,\varepsilon), ..., X_{i-1}(t,\varepsilon), X_{i+1}(t,\varepsilon), ..., X_n(t,\varepsilon))+$$
$$+\varepsilon^2 \widetilde{R}_i(X_1(t,\varepsilon), X_2(t,\varepsilon), ..., X_{i-1}(t,\varepsilon), X_{i+1}(t,\varepsilon), ..., X_n(t,\varepsilon))+$$
$$+C_i(t)U_i + H_i(t), \quad i = \overline{1,n},$$
$$\ell_i X_i(\cdot,\varepsilon) = \alpha_i, \tag{1.28}$$

$$\phi_i^j X_i(\cdot,\varepsilon) := E_j X_i(\tau_j+,\varepsilon) - (E_j + S_j)X_i(\tau_j-,\varepsilon) = G_i^j,\ j = \overline{1,p}. \tag{1.29}$$

Тут $A_{ij}(t), B_{ii}(t), H_i(t), \overline{H}_i(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),\ i,j = \overline{1,n}$ — лінійні та обмежені оператори, що при кожному $t \in J$ діють у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ ($t \in J,\ J \subset R$). Лінійні та обмежені оператори ℓ_i переводять розв'язки операторно-диференціальної системи в деякий простір Гільберта $\mathcal{H}_1$, $\alpha_i \in \mathcal{H}_1$. E_j, S_j — лінійні та обмежені оператори у функціональних просторах, що переводять відповідні розв'язки в деякий простір Гільберта $\mathcal{H}_3$, $G_i^j \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_3)$ з певними додатковими умовами продовжуваності через точки розриву $\tau_j,\ j = \overline{1,p}$. Задача роглядається у двох випадках ($X_i(t,\varepsilon)$ — лінійні та обмежені оператори).

Необхідно знайти необхідні та достатні умови існування розв'язків такої системи за умови, що породжуюча система ($\varepsilon = 0$) має розв'язки й відповідні розв'язки $X_i(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ прямують до розв'язків X_i^0 породжуючої задачі

$$\frac{dX_i^0(t)}{dt} = A_{ii}(t)X_i^0(t) + X_i^0(t)B_{ii}(t) + H_i(t),\ i = \overline{1,n}, \tag{1.30}$$

$$\ell_i X_i^0(\cdot, \varepsilon) = \alpha_i, \tag{1.31}$$

$$\phi_i^j X_i^0(\cdot) := E_j X_i^0(\tau_j+) - (E_j + S_j)X_i^0(\tau_j-) = G_i^j,\ j = \overline{1,p}. \tag{1.32}$$

Більше того, необхідно знайти умови на норми розв'язків X_i в залежності від норм U_i та α_i (аналоги так званих умов input to state stability).

Умови на нелінійності R_i залежать від відповідної задачі й будуть визначені окремо. Вони відрізняються при отриманні необхідних та достатніх умов. Звичайно, що для того, щоб задовольнити необхідні умови від нелінійностей R_i, треба менше вимог, ніж при отриманні достатніх умов. І досі питання мінімальної гладкості при дослідженні таких задач є нетривіальною задачею. Для отримання певних оцінок інколи достатньо вимагати від нелінійностей лише умови аналогу ліпшицевості. Але при цьому сталі Ліпшиця можуть залежати від параметра ε. Зазвичай вимагають диференційовності за Фреше в околі породжуючого розв'язку лінійної породжуючої задачі. Для того, щоб необхідна та достатня умови існування співпадали, вимагають іще додатково оборотності відповідного оператора похідної Фреше. Це аналог умови простоти кореня рівняння для породжуючих амплітуд у випадку періодичної задачі для звичайної нелінійної системи диференціальних рівнянь.

Дана задача має бути досліджена й у тому випадку, коли відповідний породжуючий оператор має незамкнену множину значень. Оператор крайових умов після підстановки відповідних розв'язків теж може мати незамкнену множину значень.

Зауваження 1.6. *Зауважимо, що аналогічні задачі можна розглядати у випадку різницевих операторних крайових задач для системи рівнянь Ляпунова та задач на часових шкалах.*

Концепція input-to-state stability (ISS) введена у роботах Е. Д. Зонтага [224], [225], [223] для звичайних диференціальних рівнянь (ODE), яка об'єднує класичну теорію Ляпунова, теорію стійкості входу-виходу та має широке застосування в теорії нелінійного керування, зокрема для надійної стабілізації нелінійних систем.

У роботі [214] розроблено інструменти для дослідження властивостей input-to-state stability (ISS) нескінченновимірних систем керування. Будуються локальні і глобальні функції ISS Ляпунова для абстрактних рівнянь у банахових просторах. Доведено принцип лінеаризації, який дозволяє побудувати локальну функцію ISS Ляпунова для системи, лінійним наближенням якої є система рівнянь Ляпунова.

У роботі [215] розглянуто імпульсні системи, які мають ISS функцію Ляпунова. Забезпечено побудову локальних функцій ISS Ляпунова методом лінеаризації. Результати узагальнюються на випадок банахового простору.

У роботі [216] досліджено стійкість нелінійної системи для параболічного рівняння в частинних похідних (PDE), на яку впливають зовнішні збурення. Авторами розроблено підхід для побудови відповідної коерцитивної функції Ляпунова, за допомогою якої встановлюється коректність розглянутої системи та встановлюються умови, які гарантують властивість input-to-state stability (ISS).

У роботах тих же вчених показано, що існування некоерцитивних функцій Ляпунова передбачає нормо-інтегральну стійкість для рівняння теплопровідності з граничними умовами Діріхле. Ця властивість, у свою чергу, еквівалентна input-to-state stability, якщо система задовольняє певні м'які припущення щодо регулярності.

У статті [217] розроблено метод орієнтованих многовидів для дослідження геометричних властивостей множин траєкторій нелінійних диференціальних систем із керуванням. Новий метод дослідження стійкості нелінійних збурених диференціальних систем започатковано на концепції матричнозначних функцій Ляпунова. Цей метод узагальнено для систем із імпульсною дією, диференціальних рівнянь із розривними правими частинами та для гібридних систем. Розроблений метод орієнтованих многовидів звів проблему керованості до дослідження розв'язності диференціальних рівнянь відносно допоміжних функцій при загальних припущеннях щодо регулярності векторних полів керованої системи. Отримані в роботі результати демонструють ефективність застосування методу траєкторій множин для розв'язування обернених задач теорії керування.

Стаття [218] надає інструменти на основі Ляпунова для встановлення integral input-to-state stability (iISS) і input-to-state stability (ISS) для деяких класів нелінійних параболічних рівнянь. Показано, що для взаємозв'язків диференціальних рівнянь у частинних похідних вибір правильного стану та вхідних просторів є вирішальним, зокрема для підсистем iISS, які не є ISS.

У роботі [219] представлено метод побудови integral input-to-state stability (iISS) функцій Ляпунова для білінійних нескінченновимірних систем керування в гільбертовому просторі. Виділено проблеми, що виникають через нескінченну вимірність простору.

У роботі [220] розглянуто основні результати щодо властивості input-to-state stability (ISS) для нескінченновимірних систем, надано широку бібліографію з цієї тематики. Показано, що метод Ляпунова дуже корисний як для лінійних, так і для нелінійних систем, включаючи параболічні та гіперболічні диференціальні рівняння в частинних похідних.

У роботі [221] розглянуто нелінійні імпульсні системи із збуреннями в банахових просторах. Авторами знайдено умови часу затримки, що гарантують властивість input-to-state stability (ISS). На відміну від багатьох наявних результатів, знайдені умови охоплюють випадок, коли неперервна та дискретна динаміка може бути нестійкою одночасно.

У роботі [222] доведено, що властивість input-to-state stability (ISS) нелінійних систем над банаховими просторами еквівалентна існуванню коерцитивної неперервної за Ліпшицем функції ISS Ляпунова для цієї системи. Для лінійних нескінченновимірних систем показано, що властивість ISS еквівалентна існуванню некоерцитивної функції ISS Ляпунова. Авторами побудовано дві простіші конструкції коерцитивної та некоерцитивної функцій ISS Ляпунова для таких систем.

У роботах, що згадувалися вище, узагальнено добре відомі критерії input-to-state stability (ISS), доведені Е.Д. Зонтаг і Я. Ванг для систем звичайних диференціальних рівнянь (ODE). В окремих випадках для диференціальних рівнянь у банахових просторах доведено навіть ширші критерії для властивостей input-to-state stability (ISS). У цій же роботі введено нове поняття сильної ISS, яка еквівалентна ISS у випадку ODE, але яка є строго слабшою, ніж ISS у нескінченновимірному випадку.

Як показує цей огляд робіт, властивості input-to-state stability (ISS) відіграють вирішальну роль при дослідженні задач, що у свою чергу свідчить про багато не розв’язаних проблем і перспективність даної тематики.

РОЗДІЛ 2
КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМ ОПЕРАТОРНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У БАНАХОВОМУ ТА ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

У цьому розділі розвинемо конструктивні методи аналізу лінійних та нелінійних крайових задач для операторно-диференціальних рівнянь у банаховому та гільбертовому просторі. Такі задачі займають центральне місце в якісній теорії диференціальних рівнянь (див. [116]-[135]). Специфіка таких задач полягає d тому, що оператор у лінійній частині рівняння не має оберненого. Це не дозволяє використовувати традиційні методи, що базуються на принципі стискаючих відображень та нерухомої точки. Для аналізу нелінійних систем диференціальних рівнянь розвинуто ідеї методу Ляпунова–Шмідта та ефективні методи теорії збурень із використанням теорії узагальнено-обернених [36] та сильно узагальнено-обернених операторів [38].

У цьому розділі отримано необхідні та достатні умови існування розв'язків лінійних та нелінійних крайових задач у просторах Банаха та Гільберта. Представлено збіжні ітераційні процедури для знаходження розв'язків у нелінійному випадку.

Розвиток псевдообернених за Муром–Пенроузом операторів та їх зв'язок із крайовими задачами має давню історію.

2.1. Постановка задачі.

Розглянемо крайову задачу вигляду

$$\begin{cases} \varphi'(t,\varepsilon) = \varphi(t,\varepsilon) + \psi(t,\varepsilon) + \varepsilon f_1(t,\varphi(t,\varepsilon),\psi(t,\varepsilon),\varepsilon) + g_1(t), \\ \psi'(t,\varepsilon) = \varphi(t,\varepsilon) + \varepsilon f_2(t,\varphi(t,\varepsilon),\psi(t,\varepsilon),\varepsilon) + g_2(t), \quad t \in J \end{cases} \tag{2.1}$$

з крайовою умовою

$$l(\varphi(\cdot,\varepsilon),\psi(\cdot,\varepsilon)) = \alpha, \tag{2.2}$$

де $\varphi,\psi \in C^1(J,\mathcal{H})$, $C^1(J,\mathcal{H})$ банахів простір неперервно-диференційовних вектор-функцій на відрізку $J \subset \mathbb{R}$ зі значеннями у просторі Гільберта $\mathcal{H}$; вектор-функції f_1, f_2 сильно-диференційовні; l лінійний та обмежений оператор, що переводить розв'язки рівняння (2.1) у простір Гільберта $\mathcal{H}_1$; вектор-функції $g_1(t), g_2(t) \in C(J, \mathcal{H})$. Знайдемо необхідні та достатні умови існування розв'язків $\varphi(t,\varepsilon), \psi(t,\varepsilon)$ крайової задачі (2.1), (2.2), що при $\varepsilon = 0$ перетворюються на один з розв'язків породжуючої лінійної крайової задачі вигляду

$$\begin{cases} \varphi_0'(t) = \varphi_0(t) + \psi_0(t) + g_1(t), \\ \psi_0'(t) = \varphi_0(t) + g_2(t), \quad t \in J \end{cases} \tag{2.3}$$

$$l(\varphi_0(\cdot), \psi_0(\cdot)) = \alpha. \tag{2.4}$$

Спочатку дослідимо породжуючий лінійний випадок.

2.2. Лінійна крайова задача для системи операторно-диференціальних рівнянь у гільбертовому просторі

Розглянемо лінійну породжуючу крайову задачу (2.3), (2.4). Позначимо через $U(t)$ еволюційний оператор однорідної системи:

$$\begin{cases} \varphi_0'(t) = \varphi_0(t) + \psi_0(t), \\ \psi_0'(t) = \varphi_0(t), \quad t \in J \end{cases} \tag{2.5}$$

$$U'(t) = AU(t), U(0) = I,$$

де матрична операторнозначна функція має форму

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

та еволюційний оператор $U(t)$ має форму

$$U(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} t^n F_{n+1} & t^n F_n \\ t^n F_n & t^n F_{n-1} \end{pmatrix},$$

де F_n послідовність Фібоначчі:

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \geq 0,$$

або

$$U(t) = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t} & e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} - e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t} \\ e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} - e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t} & \frac{2}{5+\sqrt{5}} e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} + \frac{2}{5-\sqrt{5}} e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t} \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

У цьому випадку множина розв'язків рівняння (2.3) має вигляд

$$\begin{pmatrix} \varphi_0(t,c) \\ \psi_0(t,c) \end{pmatrix} = e^{tA}c + \int_0^t e^{(t-\tau)A} g(\tau) d\tau =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} t^n F_{n+1} c_1 + t^n F_n c_2 \\ t^n F_n c_1 + t^n F_{n-1} c_2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_0^t \begin{pmatrix} (t-\tau)^n F_{n+1} g_1(\tau) + (t-\tau)^n F_n g_2(\tau) \\ (t-\tau)^n F_n g_1(\tau) + (t-\tau)^n F_{n-1} g_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau,$$

де $c = (c_1, c_2)^T, c_1, c_2 \in \mathcal{H}$, $g(t) = (g_1(t), g_2(t))^T$ (або з допомогою представлення (2.6)). Підставляючи в крайову умову (2.2) отримаємо операторне рівняння

$$Qc = \alpha - l \int_0^{\cdot} U(\cdot) U^{-1}(\tau) g(\tau) d\tau, Q = lU(\cdot) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}_1. \tag{2.7}$$

У попередній часстині наведено конструкцію сильного псевдооберненого опаератора $\overline{Q}^+$ до оператора Q, що була запропонована у монографії [39] для повноти викладення.

Використовуючи теорем 2.1 можна вести мову про різні типи розв'язків вихідної крайової задачі (2.3), (2.4) для системи операторно-диференціальних рівнянь. Отже, будемо розглядати три типи розв'язків вихідної задачі.

1. Класичні розв'язки. Якщо у рівнянні (2.7) елемент $\alpha - l \int_0^{\cdot} U(\cdot)U^{-1}(\tau)g(\tau)d\tau \in R(Q)$, $Q = lU(\cdot) \in R(Q)$, то маємо випадок класичних розв'язків $\varphi, \psi \in C^1(J, \mathcal{H})$.

2. Сильні узагальнені розв'язки. Якщо $\alpha - l \int_0^{\cdot} U(\cdot)U^{-1}(\tau)g(\tau)d\tau \in \overline{R(Q)}$, то $\varphi, \psi \in C^1(J, \overline{\mathcal{H}})$.

3. Сильні узагальнені псевдорозв'язки. Якщо $\alpha - l \int_0^{\cdot} U(\cdot)U^{-1}(\tau)g(\tau)d\tau \in \overline{\mathcal{H}}/\overline{R(Q)}$, то $\varphi, \psi \in C^1(J, \overline{\mathcal{H}})$.

Використовуючи теорію сильних узагальнених розв'язків (див. [132]) отримаємо наступний результат.

Теорема 2.1. *1. а) Крайова задача (2.3), (2.4) має сильні узагальнені* *розв'язки тоді й тільки тоді, коли виконуються умови*

$$\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{\alpha - l\int_0^{\cdot} U(\cdot)U^{-1}(\tau)g(\tau)d\tau\} = 0; \tag{2.8}$$

якщо $\alpha - l\int_0^{\cdot} U(\cdot)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \in R(Q)$ *то узагальнені розв'язки будуть класичними;*

b) за умови (2.8) множина розв'язків має вигляд

$$\begin{pmatrix} \varphi_0(t,\overline{c}) \\ \psi_0(t,\overline{c}) \end{pmatrix} = U(t)\mathcal{P}_{N(\overline{Q})}\overline{c} + \overline{(G[g,\alpha])(t)}, \quad \forall \overline{c} \in \mathcal{H} \tag{2.9}$$

де $\mathcal{P}_{N(\overline{Q})}, \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}$ *— ортопроєктори на ядро та коядро оператора* $\overline{Q}$ *відповідно* ($\overline{Q}$ *— розширення оператора* Q*, (див. [38])),*

$$\overline{(G[g,\alpha])(t)} = \int_0^t U(t)U^{-1}(\tau)g(\tau)d\tau + \overline{Q}^+\left\{\alpha - l\int_0^{\cdot} U(\cdot)U^{-1}(\tau)g(\tau)d\tau\right\}$$

— узагальнений оператор Гріна, $\overline{Q}^+$ *— сильний псевдообернений за Муром–Пенрозуом оператор [38].*

2. a) Крайова задача (2.3), (2.4) має сильні псевдорозв'язки тоді й тільки тоді, коли виконуються умови

$$\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\left\{\alpha - l\int_0^{\cdot} U(\cdot)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau\right\} \neq 0; \tag{2.10}$$

b) за умови (2.10) множина сильних псевдорозв'язків має такий вигляд:

$$\begin{pmatrix} \varphi_0(t,\overline{c}) \\ \psi_0(t,\overline{c}) \end{pmatrix} = U(t)\mathcal{P}_{N(\overline{Q})}\overline{c} + \overline{(G[g,\alpha])(t)}, \quad \forall \overline{c} \in \mathcal{H}.$$

2.3. Приклад

Наведемо приклад оператора Q*, який має незамкнену множину значень і за допомогою нього задаються крайові умови в композиції з еволюцією.*

Якщо Q діє з простору $l_2 \times l_2$ у простір l_2 за правилом

$$Q\begin{pmatrix} c_1 = (c_1^1, c_1^2, c_1^3, ..., c_1^n, ...) \\ c_2 = (c_2^1, c_2^2, c_2^3, ..., c_2^n, ...) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_1^1, \frac{c_1^2}{2}, \frac{c_1^3}{3}, ..., \frac{c_1^n}{n}, ...) \\ (c_2^1, \frac{c_2^2}{,}\frac{c_2^3}{3}, ..., \frac{c_2^n}{n}, ...) \end{pmatrix},$$

то за аналогією з прикладом із монографії ([39, 29 с.]) доводиться незамкненість множини значень і будується псевдообернений за Муром–Пенроузом оператор.

Розглянемо випадок, коли вихідна породжуюча система (2.3) двовимірна й має такий вигляд:

$$\begin{cases} \varphi_0'(t) = \varphi_0(t) + \psi_0(t) + 1, \\ \psi_0'(t) = \varphi_0(t), \quad t \in J = [0, T]. \end{cases} \tag{2.11}$$

Загальний розв'язок системи (2.11) має такий вигляд:

$$\begin{pmatrix} \varphi_0(t, c) \\ \psi_0(t, c) \end{pmatrix} = U(t)c + \int_0^t U(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

У нашому випадку покоординатно отримаємо для першої координати $\varphi_0(t, c_1, c_2)$:

$$\varphi_0(t, c_1, c_2) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}\right) c_1 +$$

$$+\left(e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} - e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}\right) c_2 +$$

$$+\int_0^t \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}(t-\tau)} + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}(t-\tau)}\right) d\tau. \tag{2.12}$$

Порахуємо окремо інтерал у правій частині представлення (2.12):

$$\int_0^t \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}(t-\tau)} + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}(t-\tau)}\right) d\tau =$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} \frac{e^{-\frac{(1+\sqrt{5})}{2}\tau}}{-\frac{(1+\sqrt{5})}{2}}\Big|_0^t + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} e^{\frac{(1-\sqrt{5})}{2}t} \frac{e^{-\frac{(1-\sqrt{5})}{2}}t}{-\frac{(1-\sqrt{5})}{2}}\Big|_0^t =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2 - e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} - e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2 - e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} - e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}\right).$$

Таким чином,

$$\varphi_0(t, c_1, c_2) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}\right)c_1 +$$

$$+\left(e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} - e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}\right)c_2 +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(2 - e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} - e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}\right) = \tag{2.13}$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}\right)c_1 +$$

$$+\left(e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} - e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}\right)c_2 +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(2 - e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} - e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}\right) = \tag{2.14}$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}\right)c_1 +$$

$$+\left(e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} - e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}\right)c_2 +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(2 - e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} - e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}\right).$$

Аналогічно — для другої координати $\psi_0(t, c_1, c_2)$:

$$\psi_0(t, c_1, c_2) = \left(e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} - e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}\right)c_1 + \left(\frac{2}{5+\sqrt{5}}e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} + \frac{2}{5-\sqrt{5}}e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}\right)c_2 +$$

$$+\int_0^t \left(e^{\frac{(1+\sqrt{5})}{2}(t-\tau)} - e^{\frac{(1-\sqrt{5})}{2}(t-\tau)}\right)d\tau. \tag{2.15}$$

Порахуємо інтеграл у (2.15):

$$\int_0^t \left(e^{\frac{(1+\sqrt{5})}{2}(t-\tau)} - e^{\frac{(1-\sqrt{5})}{2}(t-\tau)}\right)d\tau =$$

$$= e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t}\frac{e^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\tau}}{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\Big|_0^t - e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}\frac{e^{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\tau}}{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\Big|_0^t =$$

$$= \frac{4\sqrt{5}}{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})} + \frac{2}{1+\sqrt{5}} e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} - \frac{2}{1-\sqrt{5}} e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}.$$

Остаточно отримаємо:

$$\psi_0(t, c_1, c_2) = \left(e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} - e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}\right) c_1 + \left(\frac{2}{5+\sqrt{5}} e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} + \frac{2}{5-\sqrt{5}} e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}\right) c_2 - \tag{2.16}$$

$$-\sqrt{5} + \frac{2}{1+\sqrt{5}} e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} - \frac{2}{1-\sqrt{5}} e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}.$$

Розглянемо задачу, коли крайові умови мають такий вигляд:

$$\varphi_0(0) = 0, \ \varphi_0(ln5) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(2 - 5^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - 5^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right).$$

У цьому випадку сталі $c_1 = c_2 = 0$. Розв'язок буде мати такий вигляд:

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\lambda} \left(2 - e^{\frac{1+\lambda}{2}t} - e^{\frac{1-\lambda}{2}t}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(2 - e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} - e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}\right).$$

Знайдемо значення розв'язку у точці $ln10^{10}$. Отримаємо рівність

$$\varphi_0(ln10^{10}) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(2 - 10^{5+5\sqrt{5}} - 10^{5-5\sqrt{5}}\right).$$

Приклад 2.2. Розглянемо випадок більш загальних крайових умов:

$$l_{\alpha,\beta}\left(\varphi_0(\cdot), \psi_0(\cdot)\right) = \begin{pmatrix} \alpha\varphi_0(0) + \beta\varphi_0(T) \\ \alpha\psi_0(0) + \beta\psi_0(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_\gamma \\ \varphi_\delta \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

Для зручності розв'язки неоднорідної системи, розглянутої в попередньому прикладі, представимо в такому вигляді:

$$\varphi_0(t, c_1, c_2) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}\right) c_1 + \tag{2.18}$$

$$+ \left(e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} - e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}\right) c_2 + h_1(t), \tag{2.19}$$

$$\psi_0(t, c_1, c_2) = \left(e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} - e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}\right) c_1 + \tag{2.20}$$

$$+ \left(\frac{2}{5+\sqrt{5}} e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} + \frac{2}{5-\sqrt{5}} e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}\right) c_2 + h_2(t).$$

Тут

$$h_1(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2 - e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} - e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2 - e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} - e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2 - 2e^{\frac{t}{2}} ch\frac{\sqrt{5}}{2}t\right),$$

$$h_2(t) = \frac{4\sqrt{5}}{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})} + \frac{2}{1+\sqrt{5}}e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} - \frac{2}{1-\sqrt{5}}e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t} =$$

$$= -\sqrt{5} + \frac{2}{1+\sqrt{5}}e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} - \frac{2}{1-\sqrt{5}}e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t} =$$

$$= -e^{\frac{t}{2}} sh\frac{\sqrt{5}}{2}t + \sqrt{5}e^{\frac{t}{2}} ch\frac{\sqrt{5}}{2}t - \sqrt{5}.$$

Підставляючи у крайову умову (2.17), отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} (\alpha + \beta F(T))c_1 + \beta G(T)c_2 = \gamma_1, \\ \beta G(T)c_1 + (\alpha + \beta H(T))c_2 = \delta_1. \end{cases} \tag{2.21}$$

У цій системі введено такі позначення:

$$F(t) = \frac{1+\lambda}{2\lambda}e^{\frac{1+\lambda}{2}t} + \frac{\lambda - 1}{2\lambda}e^{\frac{1-\lambda}{2}t},$$

$$G(t) = e^{\frac{1+\lambda}{2}t} - e^{\frac{1-\lambda}{2}t},$$

$$H(t) = \frac{2}{5+\sqrt{5}}e^{\frac{1+\lambda}{2}t} + \frac{2}{5-\sqrt{5}}e^{\frac{1-\lambda}{2}t},$$

$$\gamma_1 = \gamma - \beta h_1(T),$$

$$\delta_1 = \delta - \beta h_2(T).$$

Розглянемо декілька можливих випадків.

1). Визначник основної системи не дорівнює нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (\alpha + \beta F(T)) & \beta G(T) \\ \beta G(T) & (\alpha + \beta H(T)) \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha + \beta F(T))(\alpha + \beta H(T)) - \beta^2 G^2(T) \neq 0.$$

Таким чином маємо, що

$$C^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \alpha + \beta H(T) & -\beta G(T) \\ -\beta G(T) & \alpha + \beta F(T) \end{pmatrix}.$$

Таким чином маємо, що

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} (\alpha + \beta H(T))\gamma_1 - \beta G(T)\delta_1 \\ -\beta G(T)\gamma_1 + (\alpha + \beta F(T))\delta_1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо корені відповідного рівняння (коли $\Delta = 0$). Для цього перепишемо його в такому вигляді:

$$\alpha^2 + \alpha\beta(F(T) + H(T)) + \beta^2(F(T)H(T) - G^2(T)) = 0.$$

Випадок, коли $\alpha = 0$, розглянемо окремо. Якщо $\alpha \neq 0$, то маємо квадратне рівняння відносно α:

$$D = \beta^2(F(T) + H(T))^2 - 4\beta^2(F(T)H(T) - G^2(T)) =$$

$$= \beta^2(F(T) - H(T))^2 + 4\beta^2 G^2(T).$$

Його корені можна знайти за такою формулою:

$$\alpha_{1,2} = \frac{-\beta(F(T) + H(T)) \pm \sqrt{D}}{2} =$$

$$= \frac{-\beta(F(T) + H(T)) \pm \beta\sqrt{(F(T) - H(T))^2 + 4G^2(T)}}{2} =$$

$$= \frac{-\beta\left((F(T) + H(T)) \pm \sqrt{(F(T) - H(T))^2 + 4G^2(T)}\right)}{2}.$$

Отже, для того, щоб $\Delta \neq 0$, достатньо, щоб

$$\alpha \neq \frac{-\beta\left((F(T) + H(T)) \pm \sqrt{(F(T) - H(T))^2 + 4G^2(T)}\right)}{2}.$$

У цьому випадку вихідна задача має єдиний розв'язок при довільних γ, β. Знайдемо його за допомогою побудови оберненої матриці до матриці, що складається з лівих частин. Іі можна знайти у такому ж вигляді

$$C^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \alpha + \beta H(T) & -\beta G(T) \\ -\beta G(T) & \alpha + \beta G(T) \end{pmatrix},$$

де

$$\Delta = (\alpha + \beta H(T))(\alpha + \beta G(T)) - \beta^2 G^2(T).$$

У цьому випадку отримаємо розв'язок системи (2.21):

$$c_1 = \frac{\gamma_1(\alpha + \beta H(T)) - \delta_1 \beta H(T)}{(\alpha + \beta F(T))(\alpha + \beta H(T)) - \beta^2 G^2(T)}.$$

Аналогічно для сталої c_2:

$$c_2 = \frac{\delta_1(\alpha + \beta F(T)) - \gamma_1 \beta G(T)}{(\alpha + \beta F(T))(\alpha + \beta H(T)) - \beta^2 G^2(T)}.$$

2). Розглянемо випадок, коли $\Delta = 0$. А саме,

$$\alpha = \frac{-\beta\left((F(T) + H(T)) + \sqrt{(F(T) - H(T))^2 + 4G^2(T)}\right)}{2}.$$

Система (2.21) розв'язна тоді й тільки тоді, коли виконується така умова розв'язності:

$$\beta G(T)\left(\delta - \alpha h_2(0) - \beta h_2(T)\right) = (\alpha + \beta H(T))\left(\gamma - \alpha h_1(0) - \beta h_1(T)\right). \quad (2.22)$$

У нашому випадку $h_2(0) = 0,\ h_1(0) = 0$, і умова (2.22) набуде такого вигляду:

$$\beta G(T)\left(\delta - \beta h_2(T)\right) = (\alpha + \beta H(T))\left(\gamma - \beta h_1(T)\right). \quad (2.23)$$

В конкретному вигляді (нам відомі відповідні функції $G(T), H(T)$) умова (2.23) набуде такого вигляду:

$$2\sqrt{5}\left(\delta - \beta h_2(T)\right) = \left(\sqrt{21} + 1\right)\left(\gamma - \beta h_1(T)\right). \quad (2.24)$$

У нашому випадку умова розв'язності приведе до такого співвідношення

між сталими c_1, c_2:
$$c_2 = \frac{2\sqrt{5}\gamma_1 + (\sqrt{21}-1)\delta_1}{2\sqrt{5}\delta_1 - (\sqrt{21}+1)\gamma_1} c_1.$$

З умови (2.24) отримуємо рівняння для значення часу T:

$$10\beta e^{\frac{T}{2}} sh\frac{\sqrt{5}}{2}T - \beta e^{\frac{T}{2}} ch\frac{\sqrt{5}}{2}T \left(10\sqrt{5} + 2\sqrt{21} + 2\right) =$$

$$= \left(\sqrt{5} + \sqrt{105}\right)\gamma - 10\delta - \beta\left(2 + 2\sqrt{21} - 10\sqrt{5}\right). \qquad (2.25)$$

Загальний розв'язок крайової задачі (2.21), (2.17) буде мати такий вигляд:

$$\varphi_0(t, c_1) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}\right) c_1 + \qquad (2.26)$$

$$+ \left(e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} - e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}\right) \frac{2\sqrt{5}\gamma_1 + (\sqrt{21}-1)\delta_1}{2\sqrt{5}\delta_1 - (\sqrt{21}+1)\gamma_1} c_1 + h_1(t), \qquad (2.27)$$

$$\psi_0(t, c_1) = \left(e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} - e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}\right) c_1 + \qquad (2.28)$$

$$+ \left(\frac{2}{5+\sqrt{5}} e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} + \frac{2}{5-\sqrt{5}} e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}\right) \frac{2\sqrt{5}\gamma_1 + (\sqrt{21}-1)\delta_1}{2\sqrt{5}\delta_1 - (\sqrt{21}+1)\gamma_1} c_1 + h_2(t).$$

3). Розглянемо випадок, коли

$$\alpha = \frac{-\beta\left((F(T) + H(T)) - \sqrt{(F(T) - H(T))^2 + 4G^2(T)}\right)}{2}.$$

Тоді з (2.21) маємо, що

$$\begin{cases} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\alpha + \beta e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}T}\right) c_2 = \gamma - \alpha h_1(0) - \beta h_1(T), \\ -\left(\alpha + \beta e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}T}\right) c_2 = \delta - \alpha h_2(0) - \beta h_2(T). \end{cases} \qquad (2.29)$$

Звідси знаходимо, що

$$c_2 = -\frac{\delta - \alpha h_2(0) - \beta h_2(T)}{\alpha + \beta e^{\frac{1-\lambda}{2}T}}$$

за умови розв'язності

$$\left(\frac{2\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right)(\gamma - \alpha h_1(0) - \beta h_1(T)) = \delta - \alpha h_2(0) - \beta h_2(T).$$

У цьому випадку множина розв'язків крайової задачі буде мати такий вигляд:

$$\varphi_0(t, c_1) = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} c_1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t} \frac{-\delta + \alpha h_2(0) + \beta h_2(T)}{\alpha + \beta e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}T}} + h_1(t), \quad (2.30)$$

$$\psi_0(t, c_1, c_2) = e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} c_1 - e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t} \frac{-\delta + \alpha h_2(0) + \beta h_2(T)}{\alpha + \beta e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}T}} + h_2(t), \quad (2.31)$$

де

$$h_1(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2 - e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} - e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2 - e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} - e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2 - 2e^{\frac{t}{2}} ch\frac{\sqrt{5}}{2}t\right),$$

$$h_2(t) = \frac{4\lambda}{(1-\lambda)(1+\lambda)} + \frac{2}{1+\lambda} e^{\frac{1+\lambda}{2}t} - \frac{2}{1-\lambda} e^{\frac{1-\lambda}{2}t} =$$

$$= -\sqrt{5} + \frac{2}{1+\sqrt{5}} e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} - \frac{2}{1-\sqrt{5}} e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t} =$$

$$= -e^{\frac{t}{2}} sh\frac{\sqrt{5}}{2}t + \sqrt{5} e^{\frac{t}{2}} ch\frac{\sqrt{5}}{2}t - \sqrt{5}.$$

.

Розглянемо далі випадок, коли $\delta = 0$. Тоді

$$c_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} cth\frac{\sqrt{5}}{2}T - \frac{\sqrt{5}}{2e^{\frac{T}{2}} sh\frac{\sqrt{5}}{2}T}.$$

Умова розв'язності набуде такого вигляду:

$$\left(\frac{2\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right)\left(\gamma - \beta\frac{1}{\sqrt{5}}(2 - 2e^{\frac{T}{2}} ch\frac{\sqrt{5}}{2}T)\right) =$$

$$= -\beta\left(-e^{\frac{T}{2}} sh\frac{\sqrt{5}}{2}T + \sqrt{5} e^{\frac{T}{2}} ch\frac{\sqrt{5}}{2}T - \sqrt{5}\right).$$

З цієї умови безпосередньо випливає, що

$$\gamma = \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \right) \left(-1 + e^{\frac{T}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}T} \right).$$

Якщо, наприклад, $\beta = 2$, то

$$\gamma = 2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \right) \left(-1 + e^{\frac{T}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}T} \right).$$

Нехай

$$c_1 = e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}T} sh\frac{\sqrt{5}}{2}T + \frac{\sqrt{5}}{2} e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}T} ch\frac{\sqrt{5}}{2}T - \sqrt{5}.$$

Тоді

$$\psi_0(T) = \frac{1}{2} e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}T} - \frac{\sqrt{5}}{2} e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}T} cth\frac{\sqrt{5}}{2}T + \frac{\sqrt{5} e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}T}}{2e^{\frac{T}{2}} sh\frac{\sqrt{5}}{2}T}.$$

З цього представлення випливає, що

$$2 \left(\psi_0(T) - \frac{\sqrt{5} e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}T}}{2e^{\frac{T}{2}} sh\frac{\sqrt{5}}{2}T} + \frac{\sqrt{5}}{2} e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}T} cth\frac{\sqrt{5}}{2}T \right) = e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}T}.$$

Знайдемо значення лівої частини в точці $T = ln(10^{2024})^{\frac{4}{1-\sqrt{5}}}$. Підставляючи у праву частину отримаємо, що

$$2 \left(\psi_0(T) - \frac{\sqrt{5} e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}T}}{2e^{\frac{T}{2}} sh\frac{\sqrt{5}}{2}T} + \frac{\sqrt{5}}{2} e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}T} cth\frac{\sqrt{5}}{2}T \right) = e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}T} =$$

$$= e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2} ln(10^{2024})^{\frac{4}{1-\sqrt{5}}}} = 4048.$$

4). Нехай $\alpha = 0$.

У цьому випадку визначник Δ буде мати такий вигляд:

$$\Delta = \beta^2 \left(F(T)H(T) - G^2(T) \right).$$

Розглянемо два випадки: a) $\Delta \neq 0$. Тоді

$$B^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \beta H(T) & -\beta G(T) \\ -\beta G(T) & \beta F(T) \end{pmatrix}.$$

У цьому випадку матимемо, що

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \beta H(T) & -\beta G(T) \\ -\beta G(T) & \beta F(T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, остаточно матимемо:

$$c_1 = \frac{(\gamma_1 H(T) - \delta_1 G(T))}{\beta\,(F(T)H(T) - G^2(T))}.$$

Аналогічно — для сталої c_2:

$$c_2 = \frac{(\delta_1 F(T) - \gamma_1 G(T))}{\beta\,(F(T)H(T) - G^2(T))}.$$

У цьому випадку множина розв'язків крайової задачі буде мати такий вигляд:

$$\varphi_0(t, c_1) = \frac{1+\lambda}{2\lambda} e^{\frac{1+\lambda}{2}t} \frac{(\gamma_1 H(T) - \delta_1 G(T))}{\beta\,(F(T)H(T) - G^2(T))} + \tag{2.32}$$

$$+\frac{\lambda-1}{2\lambda} e^{\frac{1-\lambda}{2}t} \frac{(\delta_1 F(T) - \gamma_1 G(T))}{\beta\,(F(T)H(T) - G^2(T))} + h_1(t),$$

$$\psi_0(t, c_1, c_2) = e^{\frac{1+\lambda}{2}t} \frac{(\gamma_1 H(T) - \delta_1 G(T))}{\beta\,(F(T)H(T) - G^2(T))} - \tag{2.33}$$

$$-e^{\frac{1-\lambda}{2}t} \frac{(\delta_1 F(T) - \gamma_1 G(T))}{\beta\,(F(T)H(T) - G^2(T))} + h_2(t).$$

б) $\Delta = 0$. Знайдемо момент часу T, для якого визначник дорівнює нулю. Відповідне рівняння $F(T)H(T) = G^2(T)$ після спрощення набуде такого вигляду:

$$4e^{\sqrt{5}T} + 4e^{-\sqrt{5}T} = 13. \tag{2.34}$$

Після заміни змінної $x = e^{\sqrt{5}T}$ в (2.34) отримаємо квадратне рівняння

$$4x^2 - 13x + 4 = 0.$$

Дискримінант дорівнює

$$D = 105,$$

а корені — відповідно

$$x_1 = \frac{13 + \sqrt{105}}{8}, \quad x_2 = \frac{13 - \sqrt{105}}{8}.$$

Повертаючись до змінної T, знаходимо відповідні моменти часу у вигляді

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} ln \left(\frac{13 + \sqrt{105}}{8} \right),$$

$$T_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} ln \left(\frac{13 - \sqrt{105}}{8} \right).$$

З першого рівняння знаходимо

$$c_1 = \frac{\gamma_1 - \beta G(T) c_2}{\beta F(T)}. \tag{2.35}$$

Після підстановки у друге рівняння отримуємо умову розв'язності вихідної системи:

$$\delta_1 = \frac{G(T)}{F(T)} \gamma_1.$$

Стала c_2 у цьому випадку обирається довільною, а стала c_1 знаходиться з рівності (2.35). Загальний розв'язок набуде такого вигляду:

$$\varphi_0(t, c_2) = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2} t} + \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2} t} \right) \frac{\gamma_1 - \beta G(T) c_2}{\beta F(T)} + \tag{2.36}$$

$$+ \left(e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2} t} - e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2} t} \right) c_2 + h_1(t),$$

$$\psi_0(t, c_2) = \left(e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2} t} - e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2} t} \right) \frac{\gamma_1 - \beta G(T) c_2}{\beta F(T)} + \tag{2.37}$$

$$+ \left(\frac{2}{5 + \sqrt{5}} e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2} t} + \frac{2}{5 - \sqrt{5}} e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2} t} \right) c_2 + h_2(t).$$

Зауваження 2.1. *Якщо розглядати систему (2.11) зі значеннями в сепарабельному просторі $\mathcal{H}$ із ортонорованим базисом $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, то крайова умова*

(2.17) може бути переписана у вигляді зліченної системи рівнянь

$$\begin{cases} \alpha\varphi_0^{0i} + \beta\varphi_0^{Ti} = \gamma_i, \\ \alpha\psi_0^{0i} + \beta\psi_0^{Ti} = \delta_i, \end{cases}$$

де відповідні значення

$$\varphi_0^{0i} = (\varphi_0(0), e_i), \quad \varphi_0^{Ti} = (\varphi_0(T), e_i), \quad \varphi_0(0) = \sum_{i=1}^{+\infty} \varphi_0^{0i} e_i, \quad \gamma_i = (\gamma, e_i),$$

$$\psi_0^{0i} = (\psi_0(0), e_i), \quad \psi_0^{Ti} = (\psi_0(T), e_i), \quad \psi_0(0) = \sum_{i=1}^{+\infty} \psi_0^{0i} e_i, \quad \delta_i = (\delta, e_i).$$

Оператор, що визначається лівою частиною, також може мати незамкнену множину значень.

Приклад 2.3. Розглянемо крайову задачу для однорідної системи (2.11), де оператор крайових умов у просторі l_2 такого вигляду:

$$l(\varphi_0(\cdot), \psi_0(\cdot)) = \begin{cases} (\varphi_0^1(0), \frac{\varphi_0^2(0)}{2}, ..., \frac{\varphi_0^n}{n}, ...) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...), \\ (\psi_0(0), \frac{\psi_0(0)}{2}, ..., \frac{\psi_0(0)}{n}, ...) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...). \end{cases}$$

У даному випадку оператор розглядається зі значеннями у просторі l_2. Неважко зрозуміти, використовуючи модельний приклад, що так визначений оператор крайових умов породжує операторно-диференціальну крайову задачу з незамкненим оператором. Оскільки простір l_2 сепарабельний, то відповідна i-та координата розв'язку матиме такий вигляд:

$$\varphi_0^i(t, c_1^i, c_2^i) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t} \right) c_1^i +$$

$$+ \left(e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} - e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t} \right) c_2^i,$$

$$\psi_0^i(t, c_1^i, c_2^i) = \left(e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} - e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t} \right) c_1^i +$$

$$+ \left(\frac{2}{5+\sqrt{5}} e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} + \frac{2}{5-\sqrt{5}} e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t} \right) c_2^i.$$

Знайдемо значення розв'язків у точці нуль:

$$\varphi_0(0) = (\varphi_0^1(0), \varphi_0^2(0), ..., \varphi_0^n(0), ...),$$

$$\psi_0(0) = (\psi_0^1(0), \psi_0^2(0), ..., \psi_0^n(0), ...).$$

Маємо такі два вектори:

$$\varphi_0(0) = (c_1^1, \frac{c_1^2}{2}, ..., \frac{c_1^n}{n}, ...),$$

$$\psi_0(0) = (c_2^1, \frac{c_2^2}{2}, ..., \frac{c_2^n}{n}, ...).$$

Підставляючи у крайову умову, отримаємо такі операторні рівняння відносно сталих c_1^i, c_2^i:

$$\begin{cases} (c_1^1, \frac{c_1^2}{2}, ..., \frac{c_1^n}{n}, ...) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...), \\ (c_2^1, \frac{c_2^2}{2}, ..., \frac{c_2^n}{n}, ...) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...). \end{cases}$$

Зрозуміло, що розв'язок такої системи рівнянь не належить простору l_2. В даному випадку маємо таке операторне рівняння відносно оператора $Q = lU(\cdot)$:

$$Q \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} (c_1^1, c_1^2, ..., c_1^n, ...) \\ (c_2^1, c_2^2, ..., c_2^n, ...) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} (c_1^1, \frac{c_1^2}{2}, ..., \frac{c_1^n}{n}, ...) \\ (c_2^1, \frac{c_2^2}{2}, ..., \frac{c_2^n}{n}, ...) \end{pmatrix}.$$

Тобто дія цього оператора розкладається на дію двох послідовностей, кожна з яких є оператором із наведеного вище прикладу. Для того, щоб зробити вихідну задачу розв'язною в узагальненому сенсі, нам необхідно провести процедуру поповнення за відповідною нормою

$$|| \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} ||_{\overline{\mathcal{H}} \times \overline{\mathcal{H}}} = ||Q \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} ||_{l_2 \times l_2}.$$

Згідно з конструкцією, наведеною вище, отримаємо, що сильний псевдообернений оператор $\overline{Q}^+ : l_2 \times l_2 \to \overline{\mathcal{H}} \times \overline{\mathcal{H}}$ має вигляд:

$$\overline{Q}^+ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1^1, 2x_1^2, ..., nx_1^n, ...) \\ (x_2^1, 2x_2^2, ..., nx_2^n, ...) \end{pmatrix}.$$

Відповідно сильний узагальнений розв'язок операторного рівняння матиме вигляд:

$$c_1 = c_2 = (1, 1, ..., 1, ...).$$

Таким чином сильний узагальнений розв'язок вихідної крайової задачі матиме вигляд

$$\varphi_0^i(t) = \frac{1+3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} - \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t},$$

$$\psi_0^i(t) = \frac{7+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} - \frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}.$$

2.4. Нелінійний випадок

Отримаємо необхідні та достатні умови розв'язності нелінійної крайової задачі (2.1), (2.2). Необхідну умова можемо сформулювати у такому вигляді.
Теорема 2.2. *Припустимо, що крайова задача (2.1), (2.2) має розв'язок, який перетворюється на один із розв'язків породжуючої крайової задачі (2.3), (2.4) у вигляді (2.9) ($\varepsilon = 0$) з елементом $\overline{c} = c_0$. Тоді цей елемент c_0 задовольняє операторне рівняння для породжуючих елементів*

$$F(c) = \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} l \int_0^{\cdot} U(\cdot)U^{-1}(\tau) f(\tau, \varphi_0(\tau, c), \psi_0(\tau, c), \varepsilon) d\tau = 0. \qquad (2.38)$$

Тут

$$f(t, \varphi(t, \varepsilon), \psi(t, \varepsilon), \varepsilon) = \begin{pmatrix} f_1(t, \varphi(t, \varepsilon), \psi(t, \varepsilon), \varepsilon) \\ f_2(t, \varphi(t, \varepsilon), \psi(t, \varepsilon), \varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Доведення. Якщо крайова задача (2.1), (2.2) має розв'язок, то з теореми 2.1 випливає, що виконано наступну умову:

$$\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} \left\{ \alpha - l \int_0^{\cdot} U(\cdot)U^{-1}(\tau)(g(\tau) + \varepsilon f(\tau, \varphi(\tau, \varepsilon), \psi(\tau, \varepsilon), \varepsilon)) d\tau \right\} = 0.$$

Оскільки, крайова задача (2.1), (2.2) має розв'язок, то, виходячи з критерію (2.8), остаточно отримаємо ($\varepsilon \to 0$):

$$\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} \left\{ l \int_0^{\cdot} U(\cdot)U^{-1}(\tau) f(\tau, \varphi_0(\tau, \overline{c}), \psi_0(\tau, \overline{c}), 0) d\tau \right\} = 0.$$

Для отримання достатньої умови існування розв'язків зробимо заміну змінних

$$\varphi(t,\varepsilon) = \overline{\varphi}(t,\varepsilon) + \varphi_0(t,c_0),$$

$$\psi(t,\varepsilon) = \overline{\psi}(t,\varepsilon) + \psi_0(t,c_0),$$

де елемент c_0 задовольняє рівняння для породжуючих елементів (2.38). Таким чином отримаємо крайову задачу

$$\begin{cases} \overline{\varphi}'(t,\varepsilon) = \overline{\varphi}(t,\varepsilon) + \overline{\psi}(t,\varepsilon) + \varepsilon f_1(t, \overline{\varphi}(t,\varepsilon) + \varphi_0(t,c_0), \overline{\psi}(t,\varepsilon) + \psi_0(t,c_0), \varepsilon), \\ \overline{\psi}'(t,\varepsilon) = \overline{\varphi}(t,\varepsilon) + \varepsilon f_2(t, \overline{\varphi}(t,\varepsilon) + \varphi_0(t,c_0), \overline{\psi}(t,\varepsilon) + \psi_0(t,c_0), \varepsilon), \end{cases} \tag{2.39}$$

$$l(\overline{\varphi}(\cdot,\varepsilon), \overline{\psi}(\cdot,\varepsilon)) = 0. \tag{2.40}$$

Припустимо, що вектор-функції f_1, f_2 сильно-диференційовні в околі породжуючого розв'язку:

$$f_1, f_2 \in C^1(||\varphi - \varphi_0|| \leq q_1, ||\psi - \psi_0|| \leq q_2),$$

q_1, q_2 — додатні сталі.

Розкладемо нелінійності таким чином:

$$f_1(t, \overline{\varphi}(t,\varepsilon) + \varphi_0(t,c_0), \overline{\psi}(t,\varepsilon) + \psi_0(t,c_0), \varepsilon) = f_1(t, \varphi_0(t,c_0), \psi_0(t,c_0), 0) +$$

$$+ f'_{1\varphi}(t, \varphi_0(t,c_0), \psi_0(t,c_0), 0)\overline{\varphi}(t,\varepsilon) + f'_{1\psi}(t, \varphi_0(t,c_0), \psi_0(t,c_0), 0)\overline{\psi}(t,\varepsilon) +$$

$$+ \mathcal{R}_1(t, \overline{\varphi}(t,\varepsilon), \overline{\psi}(t,\varepsilon), \varepsilon),$$

$$f_2(t, \overline{\varphi}(t,\varepsilon) + \varphi_0(t,c_0), \overline{\psi}(t,\varepsilon) + \psi_0(t,c_0), \varepsilon) = f_2(t, \varphi_0(t,c_0), \psi_0(t,c_0), 0) +$$

$$+ f'_{2\varphi}(t, \varphi_0(t,c_0), \psi_0(t,c_0), 0)\overline{\varphi}(t,\varepsilon) + f'_{2\psi}(t, \varphi_0(t,c_0), \psi_0(t,c_0), 0)\overline{\psi}(t,\varepsilon) +$$

$$+ \mathcal{R}_2(t, \overline{\varphi}(t,\varepsilon), \overline{\psi}(t,\varepsilon), \varepsilon),$$

де

$$\mathcal{R}_1(t,0,0,0) = \mathcal{R}'_{1\varphi}(t,0,0,0) = \mathcal{R}'_{1\psi}(t,0,0,0) = 0,$$

$$\mathcal{R}_2(t,0,0,0) = \mathcal{R}'_{2\varphi}(t,0,0,0) = \mathcal{R}'_{2\psi}(t,0,0,0) = 0.$$

Тоді крайова задача (2.39)–(2.40) набуде вигляду:

$$\overline{\varphi}' = \overline{\varphi} + \overline{\psi} + \varepsilon\{f_1 + f'_{1\varphi}\overline{\varphi} + f'_{1\psi}\overline{\psi} + \mathcal{R}_1\}, \tag{2.41}$$

$$\overline{\psi}' = \overline{\varphi} + \varepsilon\{f_2 + f'_{2\varphi}\overline{\varphi} + f'_{2\psi}\overline{\psi} + \mathcal{R}_2\},$$

$$l(\overline{\varphi}(\cdot,\varepsilon), \overline{\psi}(\cdot,\varepsilon)) = 0. \tag{2.42}$$

Нехай

$$F(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} f_1 + f'_{1\varphi}\overline{\varphi} + f'_{1\psi}\overline{\psi} + \mathcal{R}_1 \\ f_2 + f'_{2\varphi}\overline{\varphi} + f'_{2\psi}\overline{\psi} + \mathcal{R}_2 \end{pmatrix}.$$

За умови розв'язності, крайової задачі (2.41), (2.42) (див. також [36], [38]):

$$\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\left\{l\int_0^{\cdot} U(\cdot)U^{-1}(\tau)F(\tau,\varepsilon)d\tau\right\} = 0, \tag{2.43}$$

маємо, що множина її розв'язків має вигляд:

$$\begin{pmatrix} \overline{\varphi}(t,\overline{c}) \\ \overline{\psi}(t,\overline{c}) \end{pmatrix} = U(t)\mathcal{P}_{N(\overline{Q})}\overline{c} + \varepsilon\overline{(G[F,0])(t)}, \forall\overline{c} \in \mathcal{H}, \tag{2.44}$$

де $\overline{(G[F,0])(t)}$ - узагальнений оператор Гріна крайової задачі (2.41), (2.42). Підставляючи розв'язки в умову (2.43), отримаємо операторне рівняння

$$B_0\overline{c} = b, \tag{2.45}$$

де оператор B_0 має вигляд

$$B_0 = \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}l\int_0^{\cdot} U(\cdot)U^{-1}(\tau)\begin{pmatrix} f'_{1\varphi} & f'_{1\psi} \\ f'_{2\varphi} & f'_{2\psi} \end{pmatrix}U(\tau)\mathcal{P}_{N(\overline{Q})}d\tau, \tag{2.46}$$

$$b = -\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}l\int_0^{\cdot} U(\cdot)U^{-1}(\tau)\begin{pmatrix} f_1 + \mathcal{R}_1 \\ f_2 + \mathcal{R}_2 \end{pmatrix}d\tau - \tag{2.47}$$

$$-\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}l\int_0^{\cdot} U(\cdot)U^{-1}(\tau)\begin{pmatrix} f'_{1\varphi} & f'_{1\psi} \\ f'_{2\varphi} & f'_{2\psi} \end{pmatrix}\overline{G[F,0]}(\tau)d\tau.$$

Припустимо, що виконується умова:

$$\mathcal{P}_{N(\overline{B}_0^*)}\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} = 0,$$

тоді рівняння (2.45) розв'язне. Один із розв'язків має вигляд

$$\overline{c} = \overline{B}_0^+ b.$$

Таким чином, приходимо до такої теореми.

Теорема 2.3 (достатня умова)**.** *Припустимо, що виконується умова*

$$\mathcal{P}_{N(\overline{B}_0^*)}\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} = 0.$$

Тоді для довільного елемента $c = c_0 \in \mathcal{H}$, що задовольняє рівняння для породжуючих елементів (2.38), існує розв'язок крайової задачі (2.1), (2.2), який може бути знайдений за допомогою такого ітераційного процесу:

$$\overline{c}_k = -\overline{B}_0^+\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} l \int_0^{\cdot} U(\cdot)U^{-1}(\tau) \begin{pmatrix} f_1(\tau, \varphi_0 + \overline{\varphi}_k, \psi_0 + \overline{\psi}_k, \varepsilon) + \mathcal{R}_1(\tau, \overline{\varphi}_k, \overline{\psi}_k, \varepsilon) \\ f_2(\tau, \varphi_0 + \overline{\varphi}_k, \psi_0 + \overline{\psi}_k, \varepsilon) + \mathcal{R}_2(\tau, \overline{\varphi}_k, \overline{\psi}_k, \varepsilon) \end{pmatrix} d\tau -$$

$$-\overline{B}_0^+\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} l \int_0^{\cdot} U(\cdot)U^{-1}(\tau) \begin{pmatrix} f'_{1\varphi} & f'_{1\psi} \\ f'_{2\varphi} & f'_{2\psi} \end{pmatrix} \overline{h}_{k+1}(\tau, \varepsilon) d\tau,$$

$$\begin{pmatrix} \overline{\varphi}_k(t, \overline{c}_k) \\ \overline{\psi}_k(t, \overline{c}_k) \end{pmatrix} = U(t)\mathcal{P}_{N(\overline{Q})}\overline{c}_k + \overline{h}_{k+1}(t, \varepsilon),$$

$$\mathcal{R}_1(t, \overline{\varphi}(t,\varepsilon), \overline{\psi}(t,\varepsilon), \varepsilon) = f_1(t, \overline{\varphi}(t,\varepsilon) + \varphi_0(t, c_0), \overline{\psi}(t,\varepsilon) + \psi_0(t, c_0), \varepsilon) -$$

$$-f_1(t, \varphi_0(t, c_0), \psi_0(t, c_0), 0) - f'_{1\varphi}(t, \varphi_0(t, c_0), \psi_0(t, c_0), 0)\overline{\varphi}(t, \varepsilon) -$$

$$-f'_{1\psi}(t, \varphi_0(t, c_0), \psi_0(t, c_0), 0)\overline{\psi}(t, \varepsilon),$$

$$\mathcal{R}_2(t, \overline{\varphi}(t,\varepsilon), \overline{\psi}(t,\varepsilon), \varepsilon) = f_2(t, \overline{\varphi}(t,\varepsilon) + \varphi_0(t, c_0), \overline{\psi}(t,\varepsilon) + \psi_0(t, c_0), \varepsilon) -$$

$$-f_2(t, \varphi_0(t, c_0), \psi_0(t, c_0), 0) - f'_{2\varphi}(t, \varphi_0(t, c_0), \psi_0(t, c_0), 0)\overline{\varphi}(t, \varepsilon) -$$

$$-f'_{2\psi}(t, \varphi_0(t, c_0), \psi_0(t, c_0), 0)\overline{\psi}_k(t, \varepsilon),$$

$$\varphi(t, \varepsilon) = \varphi_0(t, c_0) + \lim_{k\to\infty} \overline{\varphi}_k(t, \varepsilon),$$

$$\psi(t, \varepsilon) = \psi_0(t, c_0) + \lim_{k\to\infty} \overline{\psi}_k(t, \varepsilon).$$

Збіжність її ітераційного процесу може бути доведена, як у роботах [36], [39].

2.5. Висновки до другого розділу

У другому розділі з використанням теорії сильних псевдообернених операторів, отримано наступні результати:

1. Отримано критерій розв'язності та побудовано загальний вигляд розв'язків лінійної періодичної крайової задачі для операторно-диференціальної системи рівнянь.

2. Отримано необхідні умови існування розв'язків нелінійної крайової задачі (2.1), (2.2).

3. Отримано достатні умови існування розв'язків нелінійної крайової задачі (2.1), (2.2).

4. Розглянуто приклади, які ілюструють ці результати.

Крім того показано, що така теорія працює для операторів із незамкненою множиною значень.

РОЗДІЛ 3
ЗВ'ЯЗАНІ СИСТЕМИ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ СИЛЬВЕСТРА ТА РІККАТІ

Як відомо, рівняння Ріккаті, використовується в теорії оптимального керування, теорії ігор, стійкості руху [50]. У вище зазначених роботах такі задачі досліджувалися як у критичному так і у некритичному випадку, коли може порушуватися єдиність розв'язку та задача може бути розв'язною не при всіх правих частинах. Такі задачі є некоректними за Адамаром.

Даний розділ присвячений дослідженню операторної системи зв'язаних рівнянь Ріккаті. Слід зауважити, що результати даної частини узагальнюють добре відомі результати [44], [47] та [142] на випадок таких задач. Досліджено умови біфуркації та розгалуження розв'язків. У даному розділі за допомогою теорії та методики, розробленої в роботах Бойчука О.А. (див. [44] - [70]) та його учнів досліджено зв'язану систему операторних рівнянь Ріккаті, що останнім часом є дуже актуальним напрямком у прикладних задачах та застовується при дослідженні певних нейронних мереж [40]. Основна методика може бути застосованою й у випадку задач із оператором, що має незамкнену множину значень [38], [39]. На прикладах лінійних збурень показано, як отримати індукційну систему матричних рівнянь Сильвестра, яку треба розв'язувати на кожному кроці ітеративного процесу.

3.1. Постановка задачі

Розглянемо наступну операторну систему зв'язаних рівнянь Ріккаті:

$$A_{ii}X_i(\varepsilon) + X_i(\varepsilon)B_{ii} + \varepsilon \sum_{j=1, j\neq i}^{n} X_j(\varepsilon)C_{ij}X_j(\varepsilon) = D_i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{3.1}$$

де $A_{ii}, B_{ii}, C_{ij}, D_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ — лінійні та обмежені оператори (матриці), що діють у просторі Гільберта $\mathcal{H}$. Знайдемо необхідні та достатні умови існування розв'язків $X_i(\varepsilon)$, які при $\varepsilon = 0$ перетворюються на один із розв'язків

$X_i^0 = X_i(0)$ породжуючої системи

$$\mathbf{L}_i X_i^0 := A_{ii} X_i^0 + X_i^0 B_{ii} = D_i. \tag{3.2}$$

3.2. Лінійний випадок

Дослідимо спочатку лінійну задачу (3.2). Припустимо для простоти, що оператори $\mathbf{L}_i$ мають замкнену множину значень ($R(\mathbf{L}_i) = \overline{R(\mathbf{L}_i)}$), тобто є нормально-розв'язними. Тоді, як відомо [36], задача (3.2) буде розв'язною тоді й тільки тоді, коли виконуються такі умови розв'язності:

$$P_{N(\mathbf{L}_i^*)} D_i = 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{3.3}$$

Тут $P_{N(\mathbf{L}_i^*)} = I - \mathbf{L}_i \mathbf{L}_i^+$ — ортопроєктори на коядро операторів $\mathbf{L}_i$. Тоді множина розв'язків (3.2) має такий вигляд:

$$X_i^0 = \mathbf{L}_i^+ D_i + P_{N(\mathbf{L}_i)} H_i, \quad H_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \tag{3.4}$$

H_i - довільні лінійні та обмежені оператори, де $\mathbf{L}_i^+$ — псевдообернені за Муром–Пенроузом до операторів $\mathbf{L}_i$, $P_{N(\mathbf{L}_i)}$ — проєктори на відповідні ядра операторів $\mathbf{L}_i$ [36].

Таким чином отримуємо допоміжне твердження.

Лема 3.1. *Система (3.2) розв'язна тоді й тільки тоді, коли виконуються умови (3.3). За виконання умов (3.3) множина розв'язків системи (3.2) має вигляд (3.4).*

3.3. Слабко-збурені зв'язані системи операторних рівнянь Ріккаті

Слабко-лінійно збурені системи операторних рівнянь Ріккаті мають такий вигляд

$$\left\{\begin{array}{c} A_{11}X_1(\varepsilon)+X_1(\varepsilon)B_{11}+\varepsilon\big(A_{12}X_2(\varepsilon)+A_{13}X_3(\varepsilon)+\dots+A_{1n}X_n(\varepsilon)\big)= \\ =H_1+\varepsilon\overline{H}_1, \\ A_{22}X_2(\varepsilon)+X_2(\varepsilon)B_{22}+\varepsilon\big(A_{21}X_1(\varepsilon)+A_{23}X_3(\varepsilon)+\dots+A_{2n}X_n(\varepsilon)\big)= \\ =H_2+\varepsilon\overline{H}_2, \\ \dots \\ A_{nn}X_n(\varepsilon)+X_n(\varepsilon)B_{nn}+\varepsilon\big(A_{n1}X_1(\varepsilon)+A_{n2}X_2(\varepsilon)+\dots+A_{nn-1}X_{n-1}(\varepsilon)\big)= \\ =H_n+\varepsilon\overline{H}_n \end{array}\right. \tag{3.5}$$

Розв'язки такої системи знаходять у такому вигляді

$$X_i(\varepsilon)=\sum_{k=0}^{+\infty}X_i^k\varepsilon^k.$$

Проілюструємо це на прикладах.

3.4. Приклади

1. Розглянемо наступну зв'язану систему:

$$\left\{\begin{array}{r} \underbrace{\begin{pmatrix}5 & 1\\ 0 & -5\end{pmatrix}}_{A_{11}}X_1(\varepsilon)+X_1(\varepsilon)\underbrace{\begin{pmatrix}6 & 1\\ 0 & 6\end{pmatrix}}_{B_{11}}+ \\ +\varepsilon\underbrace{\begin{pmatrix}7 & 1\\ 0 & -7\end{pmatrix}}_{A_{12}}X_2(\varepsilon)=\underbrace{\begin{pmatrix}-5 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}}_{H_1}+\varepsilon\underbrace{\begin{pmatrix}-8 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}}_{\overline{H_1}}, \\ \underbrace{\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & -5\end{pmatrix}}_{A_{22}}X_2(\varepsilon)+X_2(\varepsilon)\underbrace{\begin{pmatrix}6 & 1\\ 0 & 6\end{pmatrix}}_{B_{22}}+ \\ +\varepsilon\underbrace{\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}}_{A_{21}}X_1(\varepsilon)=\underbrace{\begin{pmatrix}-9 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}}_{H_2}+\varepsilon\underbrace{\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}}_{\overline{H_2}}. \end{array}\right. \tag{3.6}$$

Для ε^0 відповідна незбурена система має такий вигляд:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} X_1^1 + X_1^1 \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} X_2^1 + X_2^1 \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{3.7}$$

і є всюди розв'язною. Розв'язок першої системи будемо шукати в такому вигляді:

$$X_1^1 = \begin{pmatrix} x_{11}^1 & x_{12}^1 \\ x_{21}^1 & x_{22}^1 \end{pmatrix}.$$

Підставляючи у першу підсистему, отримаємо таку систему рівнянь:

$$5x_{11}^1 + x_{21}^1 + 6x_{11}^1 = -5,$$

$$5x_{12}^1 + x_{22}^1 + x_{11}^1 + 6x_{12}^1 = 1,$$

$$-5x_{21}^1 + 6x_{21}^1 = 0,$$

$$-5x_{22}^1 + x_{21}^1 + 6x_{22}^1 = 0.$$

Із цих рівнянь знаходимо, що

$$X_1^1 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{11} & \frac{16}{121} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок другої системи будемо шукати у вигляді

$$X_2^1 = \begin{pmatrix} x_{11}^2 & x_{12}^2 \\ x_{21}^2 & x_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

Підставляючи у другу підсистему, отримаємо таку систему рівнянь:

$$4x_{11}^2 + x_{21}^2 + 6x_{11}^2 = -9,$$

$$4x_{12}^2 + x_{22}^2 + x_{11}^2 + 6x_{12}^2 = 1,$$

$$-5x_{21}^2 + 6x_{21}^2 = 0,$$

$$-5x_{22}^2 + x_{21}^2 + 6x_{22}^2 = 0.$$

Таким чином,

$$X_2^1 = \begin{pmatrix} -\frac{9}{10} & \frac{19}{100} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок відповідної збуреної зв'язаної системи будемо шукати в такому вигляді:

$$\begin{aligned} &X_i = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k X_i^{k+1}, \\ &X_1 = X_1^1 + \varepsilon X_1^2 + \varepsilon^2 X_1^3 + \varepsilon^3 X_1^4 + \cdots + \varepsilon^n X_1^{n+1} + \cdots, \\ &X_2 = X_2^1 + \varepsilon X_2^2 + \varepsilon^2 X_2^3 + \varepsilon^3 X_2^4 + \cdots + \varepsilon^n X_2^{n+1} + \cdots. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Для ε^1 отримаємо таку систему матричних рівнянь:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} X_1^2 + X_1^2 \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} X_2^1 = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} X_2^2 + X_2^2 \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X_1^1 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{3.9}$$

Підставляючи в останню систему розв'язки, отримані на попередньому кроці, матимемо таку матричну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} X_1^2 + X_1^2 \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{9}{10} & \frac{19}{100} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} X_2^2 + X_2^2 \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{5}{11} & \frac{16}{121} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} X_1^2 + X_1^2 \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{63}{10} & \frac{133}{100} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} X_2^2 + X_2^2 \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{11} & \frac{32}{121} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{3.11}$$

Розв'язки, як і на попередньому кроці, будемо шукати у вигляді матриць

$$X_1^2 = \begin{pmatrix} x_{11}^3 & x_{12}^3 \\ x_{21}^3 & x_{22}^3 \end{pmatrix}, \quad X_2^2 = \begin{pmatrix} x_{11}^4 & x_{12}^4 \\ x_{21}^4 & x_{22}^4 \end{pmatrix}.$$

Підставляючи у (3.11), отримаємо такі рівняння для визначення невідомих:

$$5x_{11}^3 + x_{21}^3 + 6x_{11}^3 = -\frac{63}{10},$$

$$5x_{12}^3 + x_{22}^3 + x_{11}^3 + 6x_{12}^3 = \frac{133}{100},$$

$$-5x_{21}^3 + 6x_{21}^3 = 0,$$

$$-5x_{22}^3 + x_{21}^3 + 6x_{22}^3 = 0,$$

$$4x_{11}^2 + x_{21}^2 + 6x_{11}^2 = -\frac{10}{11},$$

$$4x_{12}^2 + x_{22}^2 + x_{11}^2 + 6x_{12}^2 = \frac{32}{121},$$

$$-5x_{21}^2 + 6x_{21}^2 = 0,$$

$$-5x_{22}^2 + x_{21}^2 + 6x_{22}^2 = 0.$$

У цьому випадку маємо такі розв'язки:

$$X_1^2 = \begin{pmatrix} -\frac{63}{110} & \frac{2093}{12100} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_2^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{11} & \frac{43}{1210} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

На i-му кроці отримаємо таку систему матричних рівнянь:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} X_1^i + X_1^i \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} X_2^{i-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} X_2^i + X_2^i \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X_1^{i-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, i \geq 3. \end{cases} \tag{3.12}$$

2. Розглянемо таку зв'язану систему лінійних операторних рівнянь Силь-

вестра:

$$\left\{ \begin{aligned} &\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} X_1(\varepsilon) + X_1(\varepsilon) \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \\ &+\varepsilon \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} X_2(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 20 & 1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} -10 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \\ &\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X_2(\varepsilon) + X_2(\varepsilon) \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \\ &+\varepsilon \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} X_1(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -21 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}. \end{aligned} \right. \tag{3.13}$$

При $\varepsilon = 0$ отримаємо таку систему:

$$\left\{ \begin{aligned} &\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} X_1(0) + X_1(0) \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}, \\ &\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X_2(0) + X_2(0) \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -21 \end{pmatrix}. \end{aligned} \right. \tag{3.14}$$

Як і у попередному прикладі, розв'язок отриманої на першому кроці системи будемо шукати в наступному вигляді:

$$X_1(0) = X_1^1 = \begin{pmatrix} x_{11}^1 & x_{12}^1 \\ x_{21}^1 & x_{22}^1 \end{pmatrix}, \quad X_2(0) = X_2^1 = \begin{pmatrix} x_{11}^2 & x_{12}^2 \\ x_{21}^2 & x_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

Підставляючи дані вирази у (3.14), отримаємо такі рівняння відносно $x_{11}^1, x_{12}^1, x_{21}^1, x_{22}^1,\ x_{11}^2, x_{12}^2, x_{21}^2, x_{22}^2$:

$$2x_{11}^1 + x_{21}^1 + 9x_{11}^1 = 20,$$

$$2x_{12}^1 + x_{22}^1 + x_{11}^1 - x_{12}^1 = 1,$$

$$6x_{21}^1 + 9x_{21}^1 = 0,$$

$$6x_{22}^1 + x_{21}^1 - x_{22}^1 = -6,$$

$$3x_{11}^2 + x_{21}^2 + 5x_{11}^2 = 1,$$

$$3x_{12}^2 + x_{22}^2 + x_{11}^2 + 2x_{12}^2 = 1,$$

$$5x_{21}^2 = 0,$$

$$x_{22}^2 + 2x_{22}^2 = -21.$$

Точний розв'язок цієї системи має такий вигляд:

$$X_1^1 = \begin{pmatrix} \frac{20}{11} & \frac{21}{55} \\ 0 & -\frac{6}{5} \end{pmatrix}, \quad X_2^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{91}{40} \\ 0 & -\frac{21}{2} \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

При ε^1 отримаємо таку систему матричних рівнянь:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} X_1^2 + X_1^2 \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} X_2^1 = \begin{pmatrix} -10 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X_2^2 + X_2^2 \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} X_1^1 = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{3.16}$$

Підставляючи розв'язки (3.15) в систему матричних рівнянь (3.16), отримаємо таку зв'язану систему матричних рівнянь:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} X_1^2 + X_1^2 \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{91}{40} \\ 0 & -\frac{21}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X_2^2 + X_2^2 \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{20}{11} & \frac{21}{55} \\ 0 & -\frac{6}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{3.17}$$

Після перетворень отримаємо таку систему:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} X_1^2 + X_1^2 \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{85}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 91 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X_2^2 + X_2^2 \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{11} & \frac{58}{55} \\ 0 & 16 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{3.18}$$

На i-му кроці отримаємо таку систему матричних рівнянь:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} X_1^i + X_1^i \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \\ \quad + \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} X_2^{i-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X_2^i + X_2^i \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} X_1^{i-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ i \geq 3. \end{cases} \tag{3.19}$$

3.5. Нелінійний випадок

Розглянемо нелінійну систему (3.1) за умови, що породжуюча система (3.2) має розв'язок. Для цього перепишемо систему (3.1) у вигляді:

$$\mathbf{L}_i X_i(\varepsilon) = -\varepsilon \sum_{j=1, j\neq i}^{n} X_j(\varepsilon) C_{ij} X_j(\varepsilon) + D_i. \tag{3.20}$$

Будемо дивитися на праву частину (3.20) як на неоднорідність. Тоді необхідна та достатня умова розв'язності буде мати вигляд

$$-\varepsilon \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} P_{N(\mathbf{L}_i^*)} X_j(\varepsilon) C_{ij} X_j(\varepsilon) + P_{N(\mathbf{L}_i^*)} D_i = 0. \tag{3.21}$$

Оскільки виконується умова (3.3), то ділячи на ε й переходячи до границі, коли $\varepsilon \to 0$, отримаємо

$$\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} P_{N(\mathbf{L}_i^*)} X_j^0 C_{ij} X_j^0 = 0. \tag{3.22}$$

Підставляючи у (3.1) розв'язки (3.4), отримаємо систему рівнянь відносно операторів H_i:

$$F_i(H_1, H_2, ..., H_n) = \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} P_{N(\mathbf{L}_i^*)} \left(L_j^+ D_j + P_{N(\mathbf{L}_j)} H_j\right) C_{ij} \left(L_j^+ D_j + P_{N(\mathbf{L}_j)} H_j\right) = 0. \tag{3.23}$$

Таким чином, отримуємо необхідну умову існування розв'язків нелінійної операторної системи зв'язаних рівнянь Ріккаті.

Теорема 3.1. *(Необхідна умова існування). Нехай система (3.20) має розв'язок $X_i(\varepsilon)$, який перетворюється на один із розв'язків $X_i(0) = X_i^0$ лінійної породжуючої системи (3.2) з операторами $H_i = H_i^0$. Тоді ці оператори задовольняють нелінійну операторну систему для породжуючих операторів (3.23).*

Для отримання достатньої умови зробимо заміну змінних

$$X_i(\varepsilon) = Y_i(\varepsilon) + X_i^0. \tag{3.24}$$

Тоді отримаємо наступну задачу:

$$\mathbf{L}_i Y_i(\varepsilon) = -\varepsilon \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} \left(Y_j(\varepsilon) + X_j^0\right) C_{ij} \left(Y_j(\varepsilon) + X_j^0\right). \tag{3.25}$$

Будемо шукати умови розв'язності та загальний вигляд розв'язків $Y_i(\varepsilon)$, які належать простору Гільберта $\mathcal{H}$ та перетворюються в нуль при $\varepsilon = 0$. Задача (3.25) буде розв'язною тоді й тільки тоді, коли виконуються наступні умови розв'язності:

$$\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} P_{N(\mathbf{L}_i^*)} \left(Y_j(\varepsilon) + X_j^0\right) C_{ij} \left(Y_j(\varepsilon) + X_j^0\right) = 0. \tag{3.26}$$

За виконання умов розв'язності (3.26) множина розв'язків нелінійної операторної системи (3.20) має вигляд:

$$Y_i(\varepsilon) = \overline{Y}_i(\varepsilon) + P_{N(\mathbf{L}_i)}\overline{H}_i(\varepsilon), \quad \overline{H}_i(\varepsilon) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \tag{3.27}$$

де

$$\overline{Y}_i(\varepsilon) = -\varepsilon \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} \mathbf{L}_i^{+} \left(Y_j(\varepsilon) + X_j^0\right) C_{ij} \left(Y_j(\varepsilon) + X_j^0\right), \tag{3.28}$$

$H_i(\varepsilon)$ - довільні оператори.

Підставляючи вираз (3.27) в умови розв'язності (3.26), отримаємо операторну систему відносно операторів $\overline{H}_1(\varepsilon), \overline{H}_2(\varepsilon), ..., \overline{H}_n(\varepsilon)$:

$$\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} B_0^{ij}\overline{H}_j(\varepsilon) = -\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} P_{N(\mathbf{L}_i^*)}Y_j(\varepsilon)C_{ij}Y_j(\varepsilon) - \tag{3.29}$$

$$-\sum_{j=1,\ j\neq j}^{n} P_{N(\mathbf{L}_i^*)}\ell_i\left(\overline{Y}_1(\varepsilon), \overline{Y}_2(\varepsilon), ..., \overline{Y}_{i-1}(\varepsilon), \overline{Y}_{i+1}(\varepsilon), ..., \overline{Y}_n(\varepsilon)\right),$$

де

$$B_0^{ij}\overline{H}_j(\varepsilon) := P_{N(\mathbf{L}_i^*)}P_{N(\mathbf{L}_j)}\overline{H}_j(\varepsilon)C_{ij}X_j^0 + P_{N(\mathbf{L}_i^*)}X_j^0C_{ij}P_{N(\mathbf{L}_j)}\overline{H}_j(\varepsilon),$$

$$\ell_i\left(\overline{Y}_1(\varepsilon), \overline{Y}_2(\varepsilon), ..., \overline{Y}_{i-1}(\varepsilon), \overline{Y}_{i+1}(\varepsilon), ..., \overline{Y}_n(\varepsilon)\right) :=$$

$$= \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} \left(P_{N(\mathbf{L}_i^*)}\overline{Y}_j(\varepsilon)C_{ij}X_j^0 + P_{N(\mathbf{L}_i^*)}X_j^0C_{ij}\overline{Y}_j(\varepsilon)\right).$$

Цю систему ми можемо записати у нступному вигляді:

$$B_0 \begin{pmatrix} \overline{H}_1(\varepsilon) \\ \overline{H}_2(\varepsilon) \\ ... \\ \overline{H}_n(\varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{N(\mathbf{L}_1^*)}\sum_{j=1,\ j\neq 1}^{n}\left(\overline{Y}_j(\varepsilon)C_{1j}X_j^0 + X_j^0C_{1j}\overline{Y}_j(\varepsilon)\right) \\ P_{N(\mathbf{L}_2^*)}\sum_{j=1,\ j\neq 2}^{n}\left(\overline{Y}_j(\varepsilon)C_{2j}X_j^0 + X_j^0C_{2j}\overline{Y}_j(\varepsilon)\right) \\ ... \\ P_{N(\mathbf{L}_n^*)}\sum_{j=1,\ j\neq n}^{n}\left(\overline{Y}_j(\varepsilon)C_{nj}X_j^0 + X_j^0C_{nj}\overline{Y}_j(\varepsilon)\right) \end{pmatrix}, \tag{3.30}$$

де операторна матриця B_0 має вигляд

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & B_0^{12} & B_0^{13} & ... & B_0^{1n} \\ B_0^{21} & 0 & B_0^{23} & ... & B_0^{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ B_0^{n1} & B_0^{n2} & ... & B_0^{nn-1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.31}$$

Нехай B_0 - нормально-розв'язна. Тоді існує обмежений ортопроєктор $P_{N(B_0^*)}$. Достатньою умовою розв'язності системи (3.30) з операторною матрицею (3.31) є наступна умова:

$$P_{N(B_0^*)} \begin{bmatrix} P_{N(\mathbf{L}_1^*)} \\ P_{N(\mathbf{L}_2^*)} \\ ... \\ P_{N(\mathbf{L}_n^*)} \end{bmatrix} = 0. \tag{3.32}$$

За виконання умови (3.32) один із розв'язків системи (3.30) має такий вигляд:

$$\begin{pmatrix} \overline{H}_1(\varepsilon) \\ \overline{H}_2(\varepsilon) \\ ... \\ \overline{H}_n(\varepsilon) \end{pmatrix} = B_0^+ \begin{pmatrix} P_{N(\mathbf{L}_1^*)} \sum_{j=1,\ j\neq 1}^n \left(\overline{Y}_j(\varepsilon) C_{1j} X_j^0 + X_j^0 C_{1j} \overline{Y}_j(\varepsilon)\right) \\ P_{N(\mathbf{L}_2^*)} \sum_{j=1,\ j\neq 2}^n \left(\overline{Y}_j(\varepsilon) C_{2j} X_j^0 + X_j^0 C_{2j} \overline{Y}_j(\varepsilon)\right) \\ ... \\ P_{N(\mathbf{L}_n^*)} \sum_{j=1,\ j\neq n}^n \left(\overline{Y}_j(\varepsilon) C_{nj} X_j^0 + X_j^0 C_{nj} \overline{Y}_j(\varepsilon)\right) \end{pmatrix}. \tag{3.33}$$

Підставляючи у (3.27) та використовуючи методику, запропоновану в роботах [38], [39], отримуємо достатню умову розв'язності операторної системи (3.32) та відповідний ітераційний алгоритм побудови наближеного розв'язку.

Теорема 3.2. *(Достатня умова існування). За виконання умови (3.32) та необхідної умови (3.23) нелінійна операторна система зв'язаних рівнянь Ріккаті (3.1) має принаймні один розв'язок. Він може бути знайдений за допомогою наступної ітераційної процедури:*

$$\overline{Y}_i^{k+1}(\varepsilon) = -\varepsilon \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} \mathbf{L}_i^+ \left(Y_j^k(\varepsilon) + X_j^0\right) C_{ij} \left(Y_j^k(\varepsilon) + X_j^0\right), \tag{3.34}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{H}_1^k(\varepsilon) \\ \overline{H}_2^k(\varepsilon) \\ \dots \\ \overline{H}_n^k(\varepsilon) \end{pmatrix} = B_0^+ \begin{pmatrix} P_{N(\mathbf{L}_1^*)} \sum_{j=1,\ j\neq 1}^n \left(\overline{Y}_j^k(\varepsilon) C_{1j} X_j^0 + X_j^0 C_{1j} \overline{Y}_j^k(\varepsilon)\right) \\ P_{N(\mathbf{L}_2^*)} \sum_{j=1,\ j\neq 2}^n \left(\overline{Y}_j^k(\varepsilon) C_{2j} X_j^0 + X_j^0 C_{2j} \overline{Y}_j^k(\varepsilon)\right) \\ \dots \\ P_{N(\mathbf{L}_n^*)} \sum_{j=1,\ j\neq n}^n \left(\overline{Y}_j^k(\varepsilon) C_{nj} X_j^0 + X_j^0 C_{nj} \overline{Y}_j^k(\varepsilon)\right) \end{pmatrix}, \tag{3.35}$$

$$Y_i^{k+1}(\varepsilon) = \overline{Y}_i^{k+1}(\varepsilon) + P_{N(\mathbf{L}_i)} \overline{H}_i^k(\varepsilon), k = \overline{0, \infty}, \tag{3.36}$$

$$Y_i(\varepsilon) = \overline{Y}_i(\varepsilon) + P_{N(\mathbf{L}_i)} \overline{H}_i(\varepsilon), \quad \overline{H}_i(\varepsilon) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Область збіжності можна оцінити аналогічно [36], [159].

3.6. Приклад

Наведемо приклад зв'язаної системи нелінійних матричних рівнянь Ріккаті і покажемо як застосовувати до нього необхідну умову розв'язності.

Розглянемо наступний приклад

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} X_1(\varepsilon) + X_1(\varepsilon) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 15 \\ 20 & 2025 \end{pmatrix} + \\ \qquad + \varepsilon X_2(\varepsilon) \begin{pmatrix} 2030 & 1500 \\ 2000 & 20250 \end{pmatrix} X_2(\varepsilon), \\ \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} X_2(\varepsilon) + X_2(\varepsilon) \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -70 \\ -20 & -210 \end{pmatrix} + \\ \qquad + \varepsilon X_1(\varepsilon) \begin{pmatrix} 200 & 150 \\ 200 & 202 \end{pmatrix} X_1(\varepsilon). \end{cases}$$

При $\varepsilon = 0$ отримаємо таку породжуючу систему з двох незалежних матричних рівнянь

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} X_1(0) + X_1(0) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 15 \\ 20 & 2025 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} X_2(0) + X_2(0) \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -70 \\ -20 & -210 \end{pmatrix} \end{cases}$$

В даному випадку будемо використовувати кронекерів добуток для того щоб переписати всю систему у матричному вигляді, де множення буде відбуватися тільки ліворуч з втратою розмірності вдвічі. Але в такому вигляді систему буде зручно дослідити і перевірити чи виконується умова розв'язності.

Запишемо породжуючі системи у такому вигляді

$$\mathbf{L}_i X_i := A_{ii} X_i + X_i B_{ii} = H_i, \quad i = \overline{1,2}. \tag{3.37}$$

Перепишемо (3.37) у такому вигляді

$$\mathrm{vec}(A_{ii} X_i + X_i B_{ii}) = (I \otimes A_{ii} + B_{ii}^T \otimes I)\mathrm{vec}(X) = \mathrm{vec}(H_i), \quad i = \overline{1,2}. \tag{3.38}$$

де $\otimes$ позначає добуток Кронекера, vec(X) - векторизація X, I - одинична матриця.

Відповідні матричні оператори запишуться в такому вигляді:

$$\mathbf{L}_i \mathrm{vec}(X_i) := (I \otimes A_{ii} + B_{ii}^T \otimes I)\ \mathrm{vec}(X) = \mathrm{vec}(H_i), \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.39}$$

$$\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{L}_2 = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{L}_1^+ = \mathbf{L}_1^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -6 & -8 \\ 1 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_2^+ = \mathbf{L}_2^{-1} = -\frac{1}{129}\begin{pmatrix} 3 & 24 & 27 & 44 \\ 18 & 15 & 33 & 49 \\ 81 & 132 & 84 & 156 \\ 99 & 147 & 117 & 162 \end{pmatrix},$$

Відповідні проєктори матимуть такий вигляд

$$P_{N(\mathbf{L}_1)} = P_{N(\mathbf{L}_1^*)} = P_{N(\mathbf{L}_2)} = P_{N(\mathbf{L}_2^*)} = \mathbf{0}_{4\times 4},$$

де $\mathbf{0}_{4\times 4}$ - нульові матриці розміру 4×4.

В даному випадку вектори $vec(H_1), vec(H_2)$ мають такий вигляд

$$vec(H_1) = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 15 \\ 2025 \end{pmatrix}, \quad vec(H_2) = \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -70 \\ -210 \end{pmatrix}.$$

Відповідні породжуючі векторні розв'язки мають такий вигляд:

$$vec(X_1(0)) = \mathbf{L}_1^+ vec(H_1) = \begin{pmatrix} 685 \\ \frac{35}{6} \\ -\frac{8095}{6} \\ 335 \end{pmatrix},$$

$$vec(X_2(0)) = \mathbf{L}_2^+ vec(H_2) = \begin{pmatrix} -11580 \\ -12720 \\ -40470 \\ -44160 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, розв'язки породжуючої системи мають такий вигляд

$$X_1(0) = \begin{pmatrix} 685 & -\frac{8095}{6} \\ \frac{35}{6} & 335 \end{pmatrix}, \quad X_2(0) = \begin{pmatrix} -11580 & -40470 \\ -12720 & -44160 \end{pmatrix}.$$

Можемо зауважити, що необхідні умови виконуються, оскільки проєктори на відповідні підпростори є нульовими. Таким чином у цьому випадку ми бачимо, як виглядає породжуючий розв'язок і більше того, що необхідна умова виконується автоматично. Окрім того, слід зауважити, що достатня умова виконується автоматично і в нелінійної системи є єдиний розв'язок який прямує до розв'язку породжуючої системи $X_1(0), X_2(0)$.

3.7. Висновки до третього розділу

У третьому розділі отримано такі результати:

1. Отримано необхідні та достатні умови розв'язності операторної зв'язаної системи рівнянь Ріккаті в гільбертовому просторі.

2. Побудовано ітераційні алгоритми для знаходження наближених

розв'язків.

3. Розглянуто приклади лінійно збурених матричних рівнянь Сильвестра, що узгоджуються із загальною теорією в нелінійному випадку.

Зазначимо, що з допомогою теорії, розробленої в роботах [38], [39], можна досліджувати ці задачі й у тому випадку, коли оператори $\mathbf{L}_i$ мають незамкнену множину значень.

РОЗДІЛ 4
ЗВ'ЯЗАНІ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ СИЛЬВЕСТРА З КЕРУВАННЯМ ТА КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

Даний розділ присвячено отриманню умов розв'язності крайових задач для зв'язаних систем рівнянь Сильвестра з керуваннями.

Як відомо, поняття стійкості входу за станом було запропоновано Зонтагом (див. [80], [209]) і знаходить багато застосувань. У даній частині дослідимо зв'язані системи (див. [212]) операторних рівнянь Сильвестра з керуваннями та крайовими умовами. Ця задача була поставлена в роботі [46] (див. також першу частину [45]). Слід також відмітити статті [29], [194], [195], [196]), де використовувався підхід, заснований на псевдоберненні за Муром–Пенроузом [40], та досліджувалася нейронна мережа Хопфілда (така мережа належить до класу зв'язаних систем). У [81] досліджувалася грубість дихотомії для зв'язаних систем. Слід зауважити, що задачі такого вигляду зустрічаються на практиці в машинному навчанні, а саме навчанні з підкріпленням. Якщо дивитися на керування як на підкріплення, то система отримає підкріплення у вигляді керування для того, щоб вийти на заданий режим (задовольнити крайові умови). Такі задачі також з'являються при дослідженні умов стійкості входу за станом, уведеного Зонтагом (див. [80] – [81]).

4.1. Постановка задачі

Розглянемо слабко збурену зв'язану систему лінійних операторних рівнянь:

$$\begin{cases} A_{11}X_1(\varepsilon) + X_1(\varepsilon)B_{11} + \varepsilon\big(A_{12}X_2(\varepsilon) + A_{13}X_3(\varepsilon) + \dots + A_{1n}X_n(\varepsilon)\big) + \\ \qquad + C_1U_1 = H_1 + \varepsilon\overline{H}_1, \\ A_{22}X_2(\varepsilon) + X_2(\varepsilon)B_{22} + \varepsilon\big(A_{21}X_1(\varepsilon) + A_{23}X_3(\varepsilon) + \dots + A_{2n}X_n(\varepsilon)\big) + \\ \qquad + C_2U_2 = H_2 + \varepsilon\overline{H}_2, \\ \dots \\ A_{nn}X_n(\varepsilon) + X_n(\varepsilon)B_{nn} + \varepsilon\big(A_{n1}X_1(\varepsilon) + A_{n2}X_2(\varepsilon) + \dots + A_{nn-1}X_{n-1}(\varepsilon)\big) + \\ \qquad + C_nU_n = H_n + \varepsilon\overline{H}_n \end{cases} \tag{4.1}$$

з крайовими умовами

$$\ell_i X_i(\varepsilon) = \alpha_i. \tag{4.2}$$

Тут $A_{ik}, B_{ii}, H_i, C_i, \overline{H}_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ $\big(i = \overline{1,n}, k = \overline{1,n}\big)$ — лінійні та обмежені оператори, які діють із простору Гільберта $\mathcal{H}$ у себе, $U_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ — керування. Лінійні та обмежені оператори ℓ_i переводять розв'язки системи (4.1) у простір Гільберта $\mathcal{H}_1$, $\alpha_i \in \mathcal{H}_1$. Задача полягає у знаходженні достатніх умов існування розв'язків $X_i(\varepsilon) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, умов керування зв'язаних операторних систем (4.1) та побудови відповідної множини розв'язків.

У даній частині будемо розглядати випадок, коли породжуюча задача $(\varepsilon = 0)$ має розв'язки. Зазначимо, що для $\varepsilon = 0$ породжуюча задача складається з n незалежних операторних рівнянь

$$\mathbf{L}_i X_i^0 := A_{ii} X_i^0 + X_i^0 B_{ii} = H_i - C_i U_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{4.3}$$

та крайових умов

$$\ell_i X_i^0 = \alpha_i. \tag{4.4}$$

4.2. Лінійна крайова задача

Основні результати отримано за припущення, що оператори $\mathbf{L}_i$ є нормально-розв'язними $\Big(R(\mathbf{L}_i) = \overline{R(\mathbf{L}_i)}\Big)$ [36, с. 20].

Розглянемо випадок, коли породжуюча система рівнянь (4.3) має розв'язки. Необхідні та достатні умови розв'язності системи (4.3) мають такий вигляд:

$$P_{N(\mathbf{L}_i^*)} (H_i - C_i U_i) = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{4.5}$$

Тут $P_{N(\mathbf{L}_i)} = I - \mathbf{L}_i^+ \mathbf{L}_i$ та $P_{N(\mathbf{L}_i^*)} = I - \mathbf{L}_i \mathbf{L}_i^+$ — ортопроєктори, що відображають простір Гільберта $\mathcal{H}$ на відповідні ядра $N(\mathbf{L}_i)$ та коядра $N(\mathbf{L}_i^*)$ операторів $\mathbf{L}_i$; $\mathbf{L}_i^+$ —псевдообернені за Муром–Пенроузом до операторів $\mathbf{L}_i$ [36, с. 60]. За виконання умов (4.5) розв'язки X_i^0 системи (4.3) мають вигляд:

$$X_i^0 = \mathbf{L}_i^+ (H_i - C_i U_i) + P_{N(\mathbf{L}_i)} D_i, \quad D_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) - \tag{4.6}$$

сталі оператори. Підставляючи (4.6) у (4.4), отримаємо систему операторних рівнянь:

$$B_i D_i = \alpha_i - \ell_i \mathbf{L}_i^+ (H_i - C_i U_i), \tag{4.7}$$

де $B_i = \ell_i P_{N(\mathbf{L}_i)}$.

Припустимо для простоти, що $R(B_i) = \overline{R(B_i)}$, тобто оператори B_i - нормально-розв'язні. Система операторних рівнянь (4.7) розв'язна тоді й тільки тоді, коли виконуються умови:

$$P_{N(B_i^*)}\left(\alpha_i - \ell_i \mathbf{L}_i^+ (H_i - C_i U_i)\right) = 0,$$

за виконання яких множина розв'язків системи (4.7), має вигляд:

$$D_i = B_i^+\left(\alpha_i - \ell_i \mathbf{L}_i^+ (H_i - C_i U_i)\right) + P_{N(B_i)} E_i, \quad E_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}). \tag{4.8}$$

Підставляючи (4.8) у (4.6), отримаємо загальні розв'язки крайової задачі (4.3), (4.4):

$$\begin{gathered} X_i^0 = \mathbf{L}_i^+ (H_i - C_i U_i) + P_{N(\mathbf{L}_i)} B_i^+\left(\alpha_i - \ell_i \mathbf{L}_i^+ (H_i - C_i U_i)\right) + \\ + P_{N(\mathbf{L}_i)} P_{N(B_i)} E_i, \quad E_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}). \end{gathered} \tag{4.9}$$

Таким чином, доведено теорему.

Теорема 4.1. *За умов виконання системи*

$$\left\{ \begin{array}{c} P_{N(\mathbf{L}_i^*)} (H_i - C_i U_i) = 0, \\ P_{N(B_i^*)}\left(\alpha_i - \ell_i \mathbf{L}_i^+ (H_i - C_i U_i)\right) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \end{array} \right. \tag{4.10}$$

породжуюча крайова задача (4.3), (4.4) має множину розв'язків

$$\begin{gathered} X_i^0 = \mathbf{L}_i^+ (H_i - C_i U_i) + P_{N(\mathbf{L}_i)} B_i^+\left(\alpha_i - \ell_i \mathbf{L}_i^+ (H_i - C_i U_i)\right) + \\ + P_{N(\mathbf{L}_i)} P_{N(B_i)} E_i, \quad E_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}). \end{gathered}$$

Зауваження 4.1. *З теореми 4.1 та представлення (4.9) можна отримати такі оцінки на норми розв'язків:*

$$||X_i^0|| \leq F_i^1 ||E_i|| + F_i^2 ||U_i|| + F_i^3 ||\alpha_i|| + F_i^4 ||H_i||,$$

де

$$F_i^1 = ||P_{N(\mathbf{L}_i)} P_{N(B_i)}||, \quad F_i^2 = ||\mathbf{L}_i C_i|| + ||P_{N(\mathbf{L}_i)} B_i^+ \ell_i \mathbf{L}_i^+ C_i||, \quad F_i^3 = ||P_{N(\mathbf{L}_i)} B_i^+||,$$

$$F_i^4 = ||\mathbf{L}_i^+|| + ||P_{N(\mathbf{L}_i)} B_i^+ \ell_i \mathbf{L}_i^+||.$$

Ці нерівності є аналогом так званих оцінок стійкості входу за станом (див., наприклад [209]).

Зауваження 4.2. *Коли множини значень операторів L_i та B_i незамкнені, отримуємо умови так званої узагальненої керованості (див. [39]).*

Розглянемо крайову задачу (4.1), (4.2), коли породжуюча ($\varepsilon = 0$) задача (4.3), (4.4) розв'язна. У цьому випадку можемо розв'язати поставлену задачу (4.1), (4.2) з допомогою рядів

$$X_i(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k X_i^k,$$

де X_i^k — лінійні та обмежені оператори, які отримуються з допомогою ітераційного процесу.

При $\varepsilon = 0$ отримаємо:

$$\begin{cases} \mathbf{L}_1 X_1^0 = A_{11} X_1^0 + X_1^0 B_{11} = H_1 - C_1 U_1, \\ \mathbf{L}_2 X_2^0 = A_{22} X_2^0 + X_2^0 B_{22} = H_2 - C_2 U_2, \\ \qquad \dots \\ \mathbf{L}_n X_n^0 = A_{nn} X_n^0 + X_n^0 B_{nn} = H_n - C_n U_n. \end{cases}$$

з крайовими умовами

$$\ell_i X_i^0 = \alpha_i. \tag{4.11}$$

Оскільки умови (4.5) виконано (породжуюча крайова задача розв'язна), то система має множину розв'язків

$$\begin{cases} X_1^0 = \mathbf{L}_1^+ (H_1 - C_1 U_1) + P_{N(\mathbf{L}_1)} C_1^0, \\ X_2^0 = \mathbf{L}_2^+ (H_2 - C_2 U_2) + P_{N(\mathbf{L}_2)} C_2^0, \\ \qquad \dots \\ X_n^0 = \mathbf{L}_n^+ (H_n - C_n U_n) + P_{N(\mathbf{L}_n)} C_n^0, \end{cases} \tag{4.12}$$

де лінійні та обмежені оператори C_i^0 будуть знайдені з крайових умов (4.11). Підставляючи у (4.11), отримаємо таку систему операторних рівнянь:

$$G_i^0 C_i^0 = \alpha_i - \ell_i \mathbf{L}_i^+ (H_i - C_i U_i), \tag{4.13}$$

де $G_i^0 = \ell_i P_{N(\mathbf{L}_i)}$ (це аналогічна формула згідно перепозначень для оператора B_i, введеного вище). Умови розв'язності мають вигляд

$$P_{N(G_i^{0*})}\big(\alpha_i - \ell_i \mathbf{L}_i^+ (H_i - C_i U_i)\big) = 0. \tag{4.14}$$

За умов (4.14) множина розв'язків системи (4.13) має вигляд

$$C_i^0 = G_i^{0+}\big(\alpha_i - \ell_i \mathbf{L}_i^+ (H_i - C_i U_i)\big) + P_{N(G_i^0)} R_i^0, \quad R_i^0 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1), \tag{4.15}$$

де R_i^0 — лінійні та обмежені оператори (з точністю до перепозначень оператори E_i). Підставляючи у (4.9), отримаємо такі представлення:

$$X_i^0 = \mathbf{L}_i^+ (H_i - C_i U_i) + P_{N(\mathbf{L}_i)} G_i^{0+}\big(\alpha_i - \ell_i \mathbf{L}_i^+ (H_i - C_i U_i)\big) + \tag{4.16}$$

$$+ P_{N(\mathbf{L}_i)} P_{N(G_i^0)} R_i^0.$$

При ε^1 отримаємо крайову задачу

$$\left\{\begin{array}{c} A_{11}X_1^1 + X_1^1 B_{11} + A_{12}X_2^0 + A_{13}X_3^0 + \cdots + A_{1n}X_n^0 = \overline{H}_1, \\ A_{22}X_2^1 + X_2^1 B_{22} + A_{21}X_1^0 + A_{23}X_3^0 + \cdots + A_{2n}X_n^0 = \overline{H}_2, \\ \cdots \\ A_{nn}X_n^1 + X_n^1 B_{nn} + A_{n1}X_n^0 + A_{n2}X_2^0 + \cdots + A_{nn-1}X_{n-1}^0 = \overline{H}_n, \end{array}\right. \tag{4.17}$$

$$\ell_i X_i^1 = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{4.18}$$

Підставивши у (4.17) розв'язки $X_1^0, X_2^0, \ldots, X_n^0$, знайдені на попередньому кроці, отримаємо систему

$$\left\{\begin{array}{c} \mathbf{L}_1 X_1^1 = \overline{H}_1 - \sum_{k=2}^n A_{1k} X_k^0, \\ \mathbf{L}_2 X_2^1 = \overline{H}_2 - \sum_{k=1,k\neq 2}^n A_{2k} X_k^0, \\ \cdots \\ \mathbf{L}_n X_n^1 = \overline{H}_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_{nk} X_k^0. \end{array}\right. \tag{4.19}$$

За умови розв'язності

$$P_{N(\mathbf{L}_i^*)}\left(\overline{H}_i - \sum_{k=1,k\neq i}^n A_{ik} X_k^0\right) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{4.20}$$

множина розв'язків X_i^1 системи (4.19) має вигляд:

$$X_i^1 = \mathbf{L}_i^+ \left(\overline{H}_i - \sum_{k=1, k\neq i}^{n} A_{ik} X_k^0 \right) + P_{N(\mathbf{L}_i)} C_i^1, \quad i = \overline{1, n}. \tag{4.21}$$

Підставляючи (4.15) у (4.12) знаходимо оператори X_i^0. Отримані вирази для X_i^0 далі підставляємо у (4.20) й отримаємо таку систему операторних рівнянь відносно R_i^0:

$$\sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} P_{N(\mathbf{L}_i^*)} A_{ik} P_{N(\mathbf{L}_k)} P_{N(G_k^0)} R_k^0 = \tag{4.22}$$

$$= P_{N(\mathbf{L}_i^*)} \overline{H}_i - \sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} P_{N(\mathbf{L}_i^*)} A_{ik} \mathbf{L}_k^+ (H_k - C_k U_k) -$$

$$- \sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} P_{N(\mathbf{L}_i^*)} A_{ik} P_{N(\mathbf{L}_k)} G_k^{0+} \left(\alpha_k - \ell_k \mathbf{L}_k^+ (H_k - C_k U_k) \right).$$

Позначивши

$$B_{ik}^0 = \sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} P_{N(\mathbf{L}_i^*)} A_{ik} P_{N(\mathbf{L}_k)} P_{N(G_k^0)}, \tag{4.23}$$

$$\overline{\overline{H}}_i = \overline{H}_i - \sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} A_{ik} \mathbf{L}_k^+ (H_k - C_k U_k) -$$

$$- \sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} A_{ik} P_{N(\mathbf{L}_k)} G_k^{0+} \left(\alpha_k - \ell_k \mathbf{L}_k^+ (H_k - C_k U_k) \right).$$

з (4.22) отримаємо систему

$$\sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} B_{ik}^0 R_k^0 = P_{N(\mathbf{L}_i^*)} \overline{\overline{H}}_i. \tag{4.24}$$

Підставляючи розв'язки (4.21) у крайові умови (4.18), отримаємо систему операторних рівнянь:

$$G_i^0 C_i^1 = \ell_i \mathbf{L}_i^+ \left(\overline{H}_i - \sum_{k=1, k\neq i}^{n} A_{ik} X_k^0 \right). \tag{4.25}$$

Подальші конструкції є справедливими у тому випадку, коли оператори G_i^0 є нормально-розв'язними ($\overline{R(G_i^0)} = R(G_i^0)$). Необхідна та достатня умови розв'язності системи (4.25) мають вигляд:

$$P_{N(G_i^{0*})}\ell_i \mathbf{L}_i^+ \left(\overline{H}_i - \sum_{k=1, k\neq i}^{n} A_{ik} X_k^0 \right) = 0, \tag{4.26}$$

де $P_{N(G_i^{0*})}$ - ортопроєктори. Підставляючи (4.12) у (4.26), отримаємо таку систему операторних рівнянь:

$$\sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} P_{N(G_i^{0*})}\ell_i A_{ik} P_{N(\mathbf{L}_k)} P_{N(G_k^0)} R_k^0 =$$

$$= P_{N(G_i^{0*})}\ell_i \mathbf{L}_i^+ \overline{H}_i - \sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} P_{N(G_i^{0*})}\ell_i A_{ik} \mathbf{L}_k^+ \left(H_k - C_k U_k\right) -$$

$$- \sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} P_{N(G_i^{0*})}\ell_i A_{ik} P_{N(\mathbf{L}_k)} G_k^{0+} \left(\alpha_k - \ell_k \mathbf{L}_k^+ \left(H_k - C_k U_k\right)\right).$$

Позначивши

$$B_{ik}^1 = \sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} P_{N(G_i^{0*})}\ell_i A_{ik} P_{N(\mathbf{L}_k)} P_{N(G_k^0)}, \tag{4.27}$$

$$\overline{M}_i = \ell_i \mathbf{L}_i^+ \overline{H}_i - \sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} \ell_i A_{ik} \mathbf{L}_k^+ \left(H_k - C_k U_k\right) -$$

$$- \sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} \ell_i A_{ik} P_{N(\mathbf{L}_k)} G_k^{0+} \left(\alpha_k - \ell_k \mathbf{L}_k^+ \left(H_k - C_k U_k\right)\right).$$

Отримаємо систему відносно операторів R_k^0:

$$\sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} B_{ik}^1 R_k^0 = P_{N(G_i^*)} \overline{M}_i. \tag{4.28}$$

Рівняння (4.24), (4.28) — звичайні матричні операторні рівняння. Таким чином, отримаємо операторне рівняння:

$$DR^0 := \begin{bmatrix} D^0 \\ D^1 \end{bmatrix} R^0 = \begin{bmatrix} F_0^0 \\ F_0^1 \end{bmatrix} = F_0, \tag{4.29}$$

де операторні матриці D^0, D^1 та вектори F_0^0, F_0^1 мають вигляд:

$$D^0 = \begin{pmatrix} 0 & B_{12}^0 & B_{13}^0 & \cdots & B_{1n}^0 \\ B_{21}^0 & 0 & B_{23}^0 & \cdots & B_{2n}^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1}^0 & B_{n2}^0 & B_{n3}^0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad D^1 = \begin{pmatrix} 0 & B_{12}^1 & B_{13}^1 & \cdots & B_{1n}^1 \\ B_{21}^1 & 0 & B_{23}^1 & \cdots & B_{2n}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1}^1 & B_{n2}^1 & B_{n3}^1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.30}$$

а

$$F_0^0 = \begin{pmatrix} P_{N(\mathbf{L}_1^*)}\overline{\overline{H}}_1 \\ P_{N(\mathbf{L}_2^*)}\overline{\overline{H}}_2 \\ \vdots \\ P_{N(\mathbf{L}_n^*)}\overline{\overline{H}}_n \end{pmatrix}, \quad F_0^1 = \begin{pmatrix} P_{N(G_1^*)}\overline{M}_1 \\ P_{N(G_2^*)}\overline{M}_2 \\ \vdots \\ P_{N(G_n^*)}\overline{M}_n \end{pmatrix}. \tag{4.31}$$

Для простоти розглянемо випадок, коли оператор D нормально-розв'язний $\Big(R(D) = \overline{R(D)}\Big)$. Тоді достатня умова розв'язності рівняння (4.29) має такий вигляд:

$$P_{N(D^*)} \begin{bmatrix} P_{N(\mathbf{L}_1^*)} \\ P_{N(\mathbf{L}_2^*)} \\ \vdots \\ P_{N(\mathbf{L}_n^*)} \\ P_{N(G_1^*)} \\ P_{N(G_2^*)} \\ \vdots \\ P_{N(G_n^*)} \end{bmatrix} = 0, \tag{4.32}$$

де $P_{N(D^*)}$ - ортопроєктор. При виконанні умови (4.32) один із розв'язків рівняння (4.29) має такий вигляд:

$$R^0 = \overline{R}^0 = D^+ \begin{bmatrix} F_0^0 \\ F_0^1 \end{bmatrix}. \tag{4.33}$$

Розв'язки X_i^1 мають вигляд

$$X_i^1 = \mathbf{L}_i^+ \left(\overline{H}_i - \sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} A_{ik} X_k^0 \right) + \tag{4.34}$$

$$+ P_{N(\mathbf{L}_i)} C_i^1, \quad i = \overline{1,n}.$$

При ε^2 отримаємо систему

$$\begin{cases} A_{11} X_1^2 + X_1^2 B_{11} + \sum_{k=2}^{n} A_{1k} X_k^1 = 0, \\ A_{22} X_2^2 + X_2^2 B_{22} + \sum_{k=1,\ k\neq 2}^{n} A_{2k} X_k^1 = 0, \\ \dots \\ A_{nn} X_n^2 + X_n^2 B_{nn} + \sum_{k=1}^{n-1} A_{nk} X_k^1 = 0, \end{cases} \tag{4.35}$$

або

$$\begin{cases} \mathbf{L}_1 X_1^2 = -\sum_{k=2}^{n} A_{1k} X_k^1, \\ \mathbf{L}_2 X_2^2 = -\sum_{k=1,\ k\neq 2}^{n} A_{2k} X_k^1, \\ \dots \\ \mathbf{L}_n X_n^2 = -\sum_{k=1}^{n-1} A_{nk} X_k^1. \end{cases} \tag{4.36}$$

з крайовими умовами

$$\ell_i X_i^2 = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{4.37}$$

Необхідна та достатня умови розв'язності операторної системи (4.36) мають вигляд

$$P_{N(\mathbf{L}_i^*)} \left(\sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} A_{ik} X_k^1 \right) = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{4.38}$$

За умови (4.38) операторна система (4.36) має множину розв'язків:

$$\begin{aligned} X_1^2 &= -\sum_{k=2}^{n} \mathbf{L}_1^+ A_{1k} X_k^1 + P_{N(\mathbf{L}_1)} C_1^2, \\ X_2^2 &= -\sum_{k=1,\ k\neq 2}^{n} \mathbf{L}_2^+ A_{2k} X_k^1 + P_{N(\mathbf{L}_2)} C_2^2, \\ &\dots \\ X_n^2 &= -\sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{L}_n^+ A_{nk} X_k^1 + P_{N(\mathbf{L}_n)} C_n^2. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Підставимо (4.39) у крайові умови (4.37) та отримаємо систему операторних рівнянь:

$$G_i^0 C_i^2 = -\sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} \ell_i \mathbf{L}_i^+ A_{ik} X_k^1. \tag{4.40}$$

Умови розв'язності мають таку форму:

$$\sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} P_{N(G_i^{0*})} \ell_i \mathbf{L}_i^+ A_{ik} X_k^1 = 0. \tag{4.41}$$

З (4.25) маємо

$$C_i^1 = G_i^{0+} \ell_i \mathbf{L}_i^+ \left(\overline{H}_i - \sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} A_{ik} X_k^0 \right) + P_{N(G_i^0)} R_i^1, \quad R_i^1 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1).$$

З (4.21) маємо

$$X_i^1 = \mathbf{L}_i^+ \left(\overline{H}_i - \sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} A_{ik} X_k^0 \right) + \tag{4.42}$$

$$+ P_{N(\mathbf{L}_i)} G_i^{0+} \ell_i \mathbf{L}_i^+ \left(\overline{H}_i - \sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} A_{ik} X_k^0 \right) +$$

$$+ P_{N(\mathbf{L}_i)} P_{N(G_i^0)} R_i^1, \quad i = \overline{1, n}.$$

Підставляючи (4.42) у (4.38) і (4.41) отримаємо таку операторну систему:

$$DR^1 = \begin{bmatrix} F_1^0 \\ F_1^1 \end{bmatrix} = F_1, \tag{4.43}$$

де

$$F_1^0 = \begin{pmatrix} \sum_{k=2}^{n} P_{N(\mathbf{L}_1^*)} A_{1k} \left(\mathbf{L}_k^+ + P_{N(\mathbf{L}_k)} G_k^{0+} \ell_k \mathbf{L}_k^+ \right) \left(\sum_{k=2}^{n} A_{1k} X_k^0 - \overline{H}_1 \right) \\ \sum_{k=1,\ k\neq 2}^{n} P_{N(\mathbf{L}_1^*)} A_{2k} \left(\mathbf{L}_k^+ + P_{N(\mathbf{L}_k)} G_k^{0+} \ell_k \mathbf{L}_k^+ \right) \left(\sum_{k=2}^{n} A_{2k} X_k^0 - \overline{H}_1 \right) \\ \dots \\ \sum_{k=1}^{n-1} P_{N(\mathbf{L}_1^*)} A_{nk} \left(\mathbf{L}_k^+ + P_{N(\mathbf{L}_k)} G_k^{0+} \ell_k \mathbf{L}_k^+ \right) \left(\sum_{k=1}^{n-1} A_{nk} X_k^0 - \overline{H}_n \right) \end{pmatrix} \tag{4.44}$$

$$F_1^1 = \begin{pmatrix} \sum_{k=2}^{n} P_{N(G_1^{0*})}\ell_1\mathbf{L}_1^+A_{1k}\left(\mathbf{L}_k^+ + P_{N(\mathbf{L}_k)}G_k^{0+}\ell_k\mathbf{L}_k^+\right)\left(\sum_{k=2}^{n} A_{1k}X_k^0 - \overline{H}_1\right) \\ \sum_{k=1,\ k\neq 2}^{n} P_{N(G_2^{0*})}\ell_2\mathbf{L}_2^+A_{2k}\left(\mathbf{L}_k^+ + P_{N(\mathbf{L}_k)}G_k^{0+}\ell_k\mathbf{L}_k^+\right)\left(\sum_{k=1,k\neq 2}^{n} A_{2k}X_k^0 - \overline{H}_2\right) \\ \dots \\ \sum_{k=1}^{n-1} P_{N(G_n^{0*})}\ell_n\mathbf{L}_n^+A_{nk}\left(\mathbf{L}_k^+ + P_{N(\mathbf{L}_k)}G_k^{0+}\ell_k\mathbf{L}_k^+\right)\left(\sum_{k=1}^{n-1} A_{nk}X_k^0 - \overline{H}_n\right) \end{pmatrix}. \tag{4.45}$$

Оскільки умови (4.32) виконано, то один із розв'язків рівняння (4.43) має вигляд

$$R^1 = D^+F_1. \tag{4.46}$$

Підставляючи отриманий розв'язок у (4.39), отримаємо розв'язок на другому кроці ітераційного процесу у вигляді

$$X_i^1 = \mathbf{L}_i^+\left(\overline{H}_i - \sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} A_{ik}X_k^0\right) +$$

$$+P_{N(\mathbf{L}_i)}G_i^{0+}\ell_i\mathbf{L}_i^+\left(\overline{H}_i - \sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} A_{ik}X_k^0\right) +$$

$$+P_{N(\mathbf{L}_i)}P_{N(G_i^0)}D^+F_1^i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Для коефіцієнта $\varepsilon^l, l \geq 2$, розв'язок має такий вигляд:

$$\begin{gathered} X_1^l = -\sum_{k=2}^{n} \mathbf{L}_1^+A_{1k}X_k^{l-1} + P_{N(\mathbf{L}_1)}C_1^l, \\ X_2^l = -\sum_{k=1,\ k\neq 2}^{n} \mathbf{L}_2^+A_{1k}X_k^{l-1} + P_{N(\mathbf{L}_2)}C_2^l, \\ \dots \\ X_n^l = -\sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{L}_n^+A_{1k}X_k^{l-1} + P_{N(\mathbf{L}_n)}C_n^l \end{gathered} \tag{4.47}$$

за умов розв'язності:

$$P_{N(\mathbf{L}_i^*)}\left(\sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} A_{ik}X_k^{l-1}\right) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{4.48}$$

що еквівалентна такій операторній системі:

$$DR^{l-1} = F_{l-1}, \tag{4.49}$$

де блочний оператор

$$D = \begin{bmatrix} D^0 \\ D^1 \end{bmatrix}$$

має вигляд (4.30), а

$$F_{l-1}^0 = \begin{pmatrix} \sum_{k=2}^n P_{N(\mathbf{L}_1^*)} A_{1k} \left(\mathbf{L}_k^+ + P_{N(\mathbf{L}_k)} G_k^{0+} \ell_k \mathbf{L}_k^+\right) \left(\sum_{k=2}^n A_{1k} X_k^{l-1}\right) \\ \sum_{k=1,\ k\neq 2}^n P_{N(\mathbf{L}_1^*)} A_{2k} \left(\mathbf{L}_k^+ + P_{N(\mathbf{L}_k)} G_k^{0+} \ell_k \mathbf{L}_k^+\right) \left(\sum_{k=2}^n A_{2k} X_k^{l-1}\right) \\ \dots \\ \sum_{k=1}^{n-1} P_{N(\mathbf{L}_1^*)} A_{nk} \left(\mathbf{L}_k^+ + P_{N(\mathbf{L}_k)} G_k^{0+} \ell_k \mathbf{L}_k^+\right) \left(\sum_{k=1}^{n-1} A_{nk} X_k^{l-1}\right) \end{pmatrix}, \tag{4.50}$$

$$F_{l-1}^1 = \begin{pmatrix} \sum_{k=2}^n P_{N(G_1^{0*})} \ell_1 \mathbf{L}_1^+ A_{1k} \left(\mathbf{L}_k^+ + P_{N(\mathbf{L}_k)} G_k^{0+} \ell_k \mathbf{L}_k^+\right) \left(\sum_{k=2}^n A_{1k} X_k^{l-1}\right) \\ \sum_{k=1,\ k\neq 2}^n P_{N(G_2^{0*})} \ell_2 \mathbf{L}_2^+ A_{2k} \left(\mathbf{L}_k^+ + P_{N(\mathbf{L}_k)} G_k^{0+} \ell_k \mathbf{L}_k^+\right) \left(\sum_{k=1, k\neq 2}^n A_{2k} X_k^{l-1}\right) \\ \dots \\ \sum_{k=1}^{n-1} P_{N(G_n^{0*})} \ell_n \mathbf{L}_n^+ A_{nk} \left(\mathbf{L}_k^+ + P_{N(\mathbf{L}_k)} G_k^{0+} \ell_k \mathbf{L}_k^+\right) \left(\sum_{k=1}^{n-1} A_{nk} X_k^{l-1}\right) \end{pmatrix}. \tag{4.51}$$

За умови (4.32) операторна система (4.49) розв'язна, й один із розв'язків має вигляд:

$$R^{l-1} = D^+ F_{l-1}. \tag{4.52}$$

Таким чином доведено наступне твердження.

Теорема 4.2. *(Достатня умова розв'язності операторної крайової задачі (4.1), (4.2)). За умов розв'язності (4.10), (4.32) операторна система (4.1), (4.2) розв'язна. Множина розв'язків може бути представлена у вигляді рядів, що абсолютно збіжні для достатньо малого параметра ε:*

$$X_i(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k X_i^k.$$

Коефіцієнти цих рядів можуть бути знайдені за формулами (4.12), (4.33), (4.15), (4.46), (4.47), (4.52), що мають вигляд

$$X_i^0 = \mathbf{L}_i^+ (H_i - C_i U_i) + P_{N(\mathbf{L}_i)} G_i^{0+} \left(\alpha_i - \ell_i \mathbf{L}_i^+ (H_i - C_i U_i)\right) +$$

$$+ P_{N(\mathbf{L}_i)} P_{N(G_i^0)} R_i^0,$$

$$R^{l-1} = D^+ F_{l-1},$$

$$D^0 = \begin{pmatrix} 0 & B_{12}^0 & B_{13}^0 & \cdots & B_{1n}^0 \\ B_{21}^0 & 0 & B_{23}^0 & \cdots & B_{2n}^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1}^0 & B_{n2}^0 & B_{n3}^0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad D^1 = \begin{pmatrix} 0 & B_{12}^1 & B_{13}^1 & \cdots & B_{1n}^1 \\ B_{21}^1 & 0 & B_{23}^1 & \cdots & B_{2n}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1}^1 & B_{n2}^1 & B_{n3}^1 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_{l-1}^0 = \begin{pmatrix} \sum_{k=2}^n P_{N(\mathbf{L}_1^*)} A_{1k} \left(\mathbf{L}_k^+ + P_{N(\mathbf{L}_k)} G_k^{0+} \ell_k \mathbf{L}_k^+\right) \left(\sum_{k=2}^n A_{1k} X_k^{l-1}\right) \\ \sum_{k=1,\ k\neq 2}^n P_{N(\mathbf{L}_1^*)} A_{2k} \left(\mathbf{L}_k^+ + P_{N(\mathbf{L}_k)} G_k^{0+} \ell_k \mathbf{L}_k^+\right) \left(\sum_{k=2}^n A_{2k} X_k^{l-1}\right) \\ \cdots \\ \sum_{k=1}^{n-1} P_{N(\mathbf{L}_1^*)} A_{nk} \left(\mathbf{L}_k^+ + P_{N(\mathbf{L}_k)} G_k^{0+} \ell_k \mathbf{L}_k^+\right) \left(\sum_{k=1}^{n-1} A_{nk} X_k^{l-1}\right) \end{pmatrix},$$

$$F_{l-1}^1 = \begin{pmatrix} \sum_{k=2}^n P_{N(G_1^{0*})} \ell_1 \mathbf{L}_1^+ A_{1k} \left(\mathbf{L}_k^+ + P_{N(\mathbf{L}_k)} G_k^{0+} \ell_k \mathbf{L}_k^+\right) \left(\sum_{k=2}^n A_{1k} X_k^{l-1}\right) \\ \sum_{k=1,\ k\neq 2}^n P_{N(G_2^{0*})} \ell_2 \mathbf{L}_2^+ A_{2k} \left(\mathbf{L}_k^+ + P_{N(\mathbf{L}_k)} G_k^{0+} \ell_k \mathbf{L}_k^+\right) \left(\sum_{k=1,k\neq 2}^n A_{2k} X_k^{l-1}\right) \\ \cdots \\ \sum_{k=1}^{n-1} P_{N(G_n^{0*})} \ell_n \mathbf{L}_n^+ A_{nk} \left(\mathbf{L}_k^+ + P_{N(\mathbf{L}_k)} G_k^{0+} \ell_k \mathbf{L}_k^+\right) \left(\sum_{k=1}^{n-1} A_{nk} X_k^{l-1}\right) \end{pmatrix}.$$

Зауваження 4.3. *Використовуючи запропонований у даному розділі метод, можемо дослідити випадок, коли породжуюча задача ($\varepsilon = 0$) може бути нерозв'язною. У такому випадку, можемо отримати умови так званої слабкої керованості (див. [61]). У цьому випадку розв'язок збуреної задачі необхідно шукати у вигляді*

$$X_i(\varepsilon) = \sum_{k=-1}^{+\infty} \varepsilon^k X_i^k$$

або у вигляді

$$X_i(\varepsilon) = \sum_{k=-p}^{+\infty} \varepsilon^k X_i^k,$$

починаючи з від'ємного степеня ε. За методом невизначених коефіцієнтів отримаємо матричні системи рівнянь типу Сильвестра, прирівнюючи коефіцієнти при відповідних степенях ε^l.

4.3. Приклади

1. Розглянемо таку крайову задачу з керуванням

$$D_{11} X_1(\varepsilon) + X_1(\varepsilon) D_{12} + \varepsilon D_{13} X_2(\varepsilon) = H_1 - C_1 U_1,$$

$$D_{21}X_2(\varepsilon) + X_2(\varepsilon)D_{22} + \varepsilon D_{23}X_1(\varepsilon) = H_2 - C_2U_2,$$

$$\ell_1 X_1(\varepsilon) = \alpha_1,$$

$$\ell_2 X_2(\varepsilon) = \alpha_2.$$

В даній задачі всі матриці є двовимірними. Використовуючи символ Кронеккера, дану задачу можемо переписати у такому вигляді в породжуючому випадку ($\varepsilon = 0$):

$$\overline{D}_1\overline{X}_1(0) = \overline{H}_1 - \overline{C}_1\overline{U}_1,$$

$$\overline{D}_2\overline{X}_2(0) = \overline{H}_2 - \overline{C}_2\overline{U}_2,$$

де

$$\overline{D}_1 = \begin{pmatrix} D_{11}^1 + D_{11}^2 & D_{12}^1 & 0 & 0 \\ D_{21}^1 & D_{22}^1 + D_{11}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{11}^1 + D_{22}^2 & D_{12}^1 \\ 0 & 0 & D_{21}^1 & D_{22}^1 + D_{22}^2 \end{pmatrix},$$

$$\overline{D}_2 = \begin{pmatrix} D_{11}^3 + D_{11}^4 & D_{12}^3 & 0 & 0 \\ D_{21}^3 & D_{22}^3 + D_{11}^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{11}^3 + D_{22}^4 & D_{12}^3 \\ 0 & 0 & D_{21}^3 & D_{22}^3 + D_{22}^4 \end{pmatrix},$$

$$\overline{D}_1 = (I \otimes D_{11}) + (D_{12} \otimes I), \quad \overline{X}_1(0) = vec(X_1(0)) = \begin{pmatrix} X_{11}^1(0) \\ X_{12}^1(0) \\ X_{21}^1(0) \\ X_{22}^1(0) \end{pmatrix},$$

$$\overline{D}_2 = (I \otimes D_{21}) + (D_{22} \otimes I), \quad \overline{X}_2(0) = vec(X_2(0)) = \begin{pmatrix} X_{11}^2(0) \\ X_{12}^2(0) \\ X_{21}^2(0) \\ X_{22}^2(0) \end{pmatrix}.$$

За умов розв'язності

$$P_{N(\overline{D}_1^*)}(\overline{H}_1 - \overline{C}_1\overline{U}_1) = 0,$$

$$P_{N(\overline{D}_2^*)}(\overline{H}_2 - \overline{C}_2\overline{U}_2) = 0,$$

множини розв'язків мають такий вигляд

$$\overline{X}_1(0) = \overline{D}_1^+(\overline{H}_1 - \overline{C}_1\overline{U}_1) + P_{N(\overline{D}_1)}\overline{E}_1,$$

$$\overline{X}_2(0) = \overline{D}_2^+(\overline{H}_2 - \overline{C}_2\overline{U}_2) + P_{N(\overline{D}_2)}\overline{E}_2.$$

З умов розв'язності знаходимо керування як розв'язок такої системи рівнянь

$$Q_1\overline{U}_1 := P_{N(\overline{D}_1^*)}\overline{C}_1\overline{U}_1 = P_{N(\overline{D}_1^*)}\overline{H}_1,$$

$$Q_2\overline{U}_2 = P_{N(\overline{D}_2^*)}\overline{C}_2\overline{U}_2 = P_{N(\overline{D}_2^*)}\overline{H}_2.$$

Достатньою умовою розв'язності є така

$$P_{N(Q_1^*)}P_{N(\overline{D}_1^*)} = 0,$$

$$P_{N(Q_2^*)}P_{N(\overline{D}_2^*)} = 0.$$

Множини керувань знаходяться таким чином

$$\overline{U}_1 = Q_1^+P_{N(\overline{D}_1^*)}\overline{H}_1 + P_{N(Q_1)}\overline{F}_1,$$

$$\overline{U}_2 = Q_2^+P_{N(\overline{D}_2^*)}\overline{H}_2 + P_{N(Q_2)}\overline{F}_2.$$

Таким чином множини розв'язків мають таку форму

$$\overline{X}_1(0) = \overline{D}_1^+(\overline{H}_1 - \overline{C}_1Q_1^+P_{N(\overline{D}_1^*)}\overline{H}_1 + P_{N(Q_1)}\overline{F}_1) + P_{N(\overline{D}_1)}\overline{E}_1, \ \ \forall \overline{F}_1 \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad (4.53)$$

$$\overline{X}_2(0) = \overline{D}_2^+(\overline{H}_2 - \overline{C}_2Q_2^+P_{N(\overline{D}_2^*)}\overline{H}_2 + P_{N(Q_2)}\overline{F}_2) + P_{N(\overline{D}_2)}\overline{E}_2, \ \ \forall \overline{F}_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}. \quad (4.54)$$

Підставляючи в крайову умову отримаємо таку систему рівнянь відносно $\overline{H}_1, \overline{F}_1, \overline{H}_2, \overline{F}_2$:

$$\bar{\ell}_1\left(\overline{D}_1^+(\overline{H}_1 - \overline{C}_1Q_1^+P_{N(\overline{D}_1^*)}\overline{H}_1 + P_{N(Q_1)}\overline{F}_1) + P_{N(\overline{D}_1)}\overline{E}_1\right) = \overline{\alpha}_1,$$

$$\bar{\ell}_2\left(\overline{D}_2^+(\overline{H}_2 - \overline{C}_2Q_2^+P_{N(\overline{D}_2^*)}\overline{H}_2 + P_{N(Q_2)}\overline{F}_2) + P_{N(\overline{D}_2)}\overline{E}_2\right) = \overline{\alpha}_2.$$

Звідси випливає, що маємо таку систему рівнянь відносно $\overline{H}_1, \overline{H}_2, \overline{F}_1, \overline{F}_2$ такого вигляду:

$$R_1\overline{F}_1 + R_2\overline{E}_1 = \overline{\alpha}_1,$$

$$R_3\overline{F}_2 + R_4\overline{E}_2 = \overline{\alpha}_2.$$

Остаточно маємо таку систему

$$\overline{R}\begin{pmatrix} \overline{F}_1 & \overline{E}_1 \\ \overline{F}_2 & \overline{E}_2 \end{pmatrix} = \overline{\alpha} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha}_1 \\ \overline{\alpha}_2 \end{pmatrix},$$

де матриця $\overline{R}$ визначається таким чином:

$$\overline{R} = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix}$$

За умови розв'язності

$$P_{\overline{R}^*}\overline{\alpha} = 0$$

множина розв'язків матиме такий вигляд

$$\begin{pmatrix} \overline{F}_1 & \overline{E}_1 \\ \overline{F}_2 & \overline{E}_2 \end{pmatrix} = \overline{R}^+\overline{\alpha} + P_{N(\overline{R})}G, \forall G \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Підставляючи в (4.53), (4.54) отримаємо множину розв'язків на першому кроці ($\varepsilon = 0$). На k-му кроці отримаємо таку систему з відповідними умовами

$$D_{11}X_1^k + X_1^k D_{12} + D_{13}X_2^{k-1} = 0,$$

$$D_{21}X_2^k + X_2^k D_{22} + D_{23}X_1^{k-1} = 0,$$

$$\ell_1 X_1^k = 0, \ell_2 X_2^k = 0.$$

2. Розглянемо таку матричну задачу керування

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \tag{4.55}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} \tag{4.56}$$

з крайовими умовами

$$\ell_1 x_{11} = \alpha_1, \quad \ell_2 x_{12} = \alpha_2, \quad \ell_3 x_{22} = \alpha_3, \quad \ell_4 x_{21} = \alpha_4, \tag{4.57}$$

де $\ell_i \neq 0$, ℓ_i, $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,3}$, $\ell_4 = 1$, $\alpha_4 = 0$, $c_i \neq 0$, $c_i \in \mathbb{R}$.

Легко побачити, що

$$x_{11} = 1 + c_1 u_1, \quad x_{12} = -(1 + c_2 u_2), \quad x_{22} = 1 + c_2 u_2, \quad x_{21} = 0.$$

З крайових умов (4.57) маємо

$$x_{11} = \frac{\alpha_1}{\ell_1}, \quad x_{12} = \frac{\alpha_2}{\ell_2}, \quad x_{22} = \frac{\alpha_3}{\ell_3}.$$

Таким чином, розглянута задача є розв'язною тоді й тільки тоді, коли виконано наступні умови:

$$u_1 = \frac{1}{c_1}\left(\frac{\alpha_1}{\ell_1} - 1\right), \quad u_2 = \frac{1}{c_2}\left(\frac{\alpha_3}{\ell_3} - 1\right) = -\frac{1}{c_2}\left(\frac{\alpha_2}{\ell_2} + 1\right).$$

Розглянемо випадок, коли $l_1 = (1 + 10^5)^5$, $\alpha_1 = (1 + 10^5)^6(1 - 10^5 + 10^{10})$. Знайдемо керування u_1, якщо $c_1 = 10^4$. У цьому випадку маємо $x_{11} = (1 + 10^5)(1 - 10^5 + 10^{10})$, а керування $u_1 = 10^{11}$.

4.4. Висновки до четвертого розділу

У четвертому розділі розглянуто крайову задачу для збуреної зв'язаної системи для лінійних операторних рівнянь Сильвестра.

1. Встановлено необхідні та достатні умови розв'язності лінійної породжуючої крайової задачі за припущення, що оператори відповідної системи є нормально-розв'язними.

2. Доведено, що розв'язок може бути знайдений у вигляді абсолютно збіжних для достатньо малого параметра ε рядів.

3. Отримано умови існування розв'язків слабкозбуреної крайової задачі.

4. Побудовано збіжний ітераційний алгоритм знаходження розв'язку слабкозбуреної крайової задачі.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

В представленій дисертаційній роботі отримано умови існування розв'язків крайових задач для операторно-диференціальних рівнянь, що використовуються при моделюванні динамічних процесів. Серед основних результатів відзначимо наступні:

- наведено огляд літератури стосовно розвитку теорії крайових задач;

- наведено огляд літератури стосовно узагальнено-обернених та псевдообернених за Муром–Пенроузом операторів;

- зроблено історичний огляд розвитку та наведено галузі застосувань операції псевдообернення та крайових задач;

- отримано необхідні та достатні умови існування розв'язків крайової задачі для системи операторно-диференціальних рівнянь;

- показано, що крайова задача для системи операторно-диференціальних рівнянь може бути розв'язаною і в тому випадку, коли лінійний породжуючий оператор має незамкнену множину значень;

- показано процес поповнення операторних рівнянь із незамкненою множиною, який застосовується до відповідної операторно-диференціальної крайової задачі;

- наведено приклади крайових задачі в сепарабельному гільбертовому просторі l_2, на яких продемонстровано запропоновану у роботі методику дослідження;

- виділено класи класичних, сильних узагальнених та сильних псевдорозв'язків операторно-диференціальної крайової задачі зі значеннями у вихідному гільбертовому просторі та поповненому просторі;

- знайдено необхідні та достатні умови існування розв'язків зв'язаної системи операторних рівнянь Ріккаті, незбурена частина яких являє собою систему незалежних рівнянь Сильвестра;

- побудовано ітераційні збіжні алгоритми для знаходження наближених розв'язків таких систем;

- отримано умови розв'язності для зв'язаних систем рівнянь Сильвестра з крайовими умовами та керуванням;

- досліджено слабко лінійно збурені системи рівнянь Сильвестра;

- показано, що розв'язки можуть бути знайденими з допомогою рядів за ступенями малого параметра ε, що є збіжними для параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$;

- наведено приклади зв'язаних систем матричних рівнянь, для яких побудовано ітераційні системи, що дають відповідні внески у розв'язки у вигляді матричного ряду.

БІБЛІОҐРАФІЯ

1. Acosta-Humanez P. B. Darboux integrals for Schrӧdinger planar vector fields via Darboux transformations. *SIGMA.* Vol. **8** (2012), 26 p.

2. Afraimovich V., Young T., Muezzinoglu M. K., Rabinovich M. I. Nonlinear dynamics of emotion-cognition interaction: when emotion does not destroy cognition? *Bulletin of Mathematical Biology.* Vol. **73** (2011), 266–284.

3. Akhmerov R. R., Kurbatov V. G. Exponential dichotomy and stability of neutral type equations. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **76** (1988), 1–25.

4. Alexander J. C., Yorke James A. The homotopy continuation method: numerically implementable topological procedures. *Transaction of the American mathematical society.* Vol. **242** (1978), 271–284.

5. Apreutesei, N.C. A boundary value problem for second order differential equations in Hilbert spaces. *Nonlinear analysis.* Vol. **24**, 8 (1995), 1235–1246.

6. Apreutesei, N. C. Some second order difference equations in Hilbert spaces. *Communications in applied analysis.* **9, 1**, (2005), 105–115.

7. Arlotti L. A new characterization of B-bounded semigroups with applications to implicit evolution equations. *Abstract and Applied Analysis.* **5, 4**, (2000), 227–244.

8. Asplund E. A non-closed relative spectrum. *Arkiv fӧr Matematik.* Vol. **3**, (1958), 425–427.

9. Atiyah M. F. *K-theory.* New-York, Amsterdam: Benjamin inc., 1967. 220 p.

10. Banasiak J. B-bounded semigroups and implicit evolution equations. *Abstract and Applied Analysis.* **5**, 1 (2000), 13–32.

11. Banasiak J. Remarks on the solvability of the inhomogeneous abstract Cauchy problem for linear and semilinear evolution equations. *Quaestiones Mathematicae.* Vol. **22**, 1 (1999), 83–92.

12. Barreira L., Valls C. Stable manifolds for nonautonomous equations without exponential dichotomy. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **221** (2006), 58–90.

13. Barreira L., Valls C. Center manifolds for infinite delay. *Journal of Differential Equations.* Vol. **247** (2009), 1297–1310.

14. Barreira L., Valls C. Robustness via Lyapunov functions. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **246** (2009), 2891–2907.

15. Barreira L. Quadratic Lyapunov functions and nonuniform exponential dichotomies. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **246** (2009), 1235–1263.

16. Barreira L., Valls C. Lyapunov sequences for exponential dichotomies. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **246** (2009), 183–215.

17. Barreira L., Valls C. Robustness of nonuniform exponential dichotomies in Banach spaces. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **244** (2008), 2407–2447.

18. Barreira L., Valls C. Smooth center manifolds for nonuniformly partially hyperbolic trajectories. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **237** (2007), 307–342.

19. Barreira L., Valls C. Stability in delay difference equations with nonuniform exponential behavior. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **238** (2007), 449–470.

20. Barreira L., Silva C., Valls C. Nonuniform behavior and robustness. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **246** (2009), 3579–3608.

21. Barreira L., Valls C. Smooth robustness of parametrized perturbations of exponential dichotomies. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **249** (2010), 2021–2043.

22. Battelli F., Lazzari C. Exponential dichotomies, heteroclinic orbits, and Melnikov functions. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **86** (1990), 342–366.

23. Battelli F. Bounded solutions to singularly perturbed systems of O.D.E. *Journal of Diff. Eq.* **100**, 1 (1992), 49–81.

24. Battelli F., Palmer K. Transverse intersection of invariant manifolds in singular systems. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **177** (2001), 77–120.

25. Batty Charles J.K., Srivastava Sachi. The non-analytic growth bound of a C_0 - semigroup and inhomogeneous Cauchy problems. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **194** (2003), 300–327.

26. Berezansky L., Braverman E. On exponential dichotomy for linear difference equations with bounded and unbounded delay. *Proceedings of the conference on differential and difference equations and applications.* (2006) 169–178.

27. Berger A., Doan T. S., Siegmund S. A definition of spectrum for differential equations on finite time. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **246** (2009), 1098–1118.

28. Berger M. S., Podolak E. On nonlinear fredholm operator equations. *Bulletin of the American Mathematical Society.* 1974. Vol. **80**, 5 (1974), 861–864.

29. Bihun, D.S., Pokutnyi, O.O., Panasenko, E.V. Autonomous Nonlinear Boundary-Value Problems for the Lyapunov Equation in the Hilbert Space. *Ukrainian Mathematical Journal.* Vol. **73**, 7 (2021), 1009–1022.

30. Biletskyi B. A., Boichuk A. A., Pokutnyi A. A. Periodic Problems of Difference Equations and Ergodic Theory. *Abstract and Applied Analysis.* (2011), 12 p.

31. Boichuk A., Diblik J., Khusainov D., Ruzickova M. Boundary-Value Problems for Delay Differential Systems. *Advances in Difference equations.* (2010), 20 p.

32. Boichuk A. A. Solutions of weakly nonlinear differential equations bounded on the whole line. *Nonlinear Oscillations.* Vol. **2**, 1 (1999), 3–10.

33. Boichuk O.A. Criterion of the solvability of matrix Lyapunov type equations. *Ukrainian mathematical journal.* Vol. **50**, 8 (1998), 1021–1026.

34. Boichuk A. A., Pokutnij A. A. Bounded solutions of linear perturbed differential equations in a Banach space. *Tatra Mountains Mathematical Publications.* Vol. **38** (2007), 29–41.

35. Boichuk A. A., Pokutnyi O. A. Dichotomy and boundary value problems on the whole line. Proceedings, 5th Chaotic Modeling and Simulation International Conference, 12-15 June 2012, Athens Greece. 81–89.

36. Boichuk A. A., Samoilenko A. M. *Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary-Value Problems.* Utrecht–Boston: VSP, 2004. 317 p.

37. Boichuk, A.A., Samoilenko, A.M. *Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary-Value Problems.* 2nd edition. Berlin: De Gruyter, 2016. 298 p.

38. Boichuk, A.A., Pokutnyi, O.A. Perturbation theory of operator equations in the Frechet and Hilbert spaces. *Ukrainian mathematical journal.* Vol. **67**, 9 (2016), 1327–1335.

39. Boichuk, O.A., Pokutnyi, O.O. *Normally-resolvable boundary-value problems for the operator-differential equations.* Kiev: Naukova dumka, 2022. 222 p.

40. Boichuk, O., Pokutnyi, O., Feruk, V., Bihun, D. Minimizing of the quadratic functional on Hopfield networks. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations.* Vol. **92** (2021), 1–20.

41. Boichuk A. A., Shegda L. M. Singular Fredholm boundary value problems. *Nonlinear Oscillations.* Vol. **10**, 3 (2007), 303–312.

42. Boichuk A. A., Shegda L. M. Bifurcation of solutions of singular Fredholm boundary value problems. *Differential equations.* Vol. **47**, 4 (2011), 459–467.

43. Boichuk A. A., Shegda L. M. Degenerate nonlinear boundary value problems. *Ukrainian mathematical journal.* Vol. **61**, 9 (2009), 1387–1403.

44. Boichuk, A. A. and Krivosheya, S. A. A critical periodic boundary-value problem for a matrix Riccati equation. *Different. Equat.* Vol. **37**, 4 (2001), 464—471.

45. Boichuk, O., Panasenko, E. and Pokutnyi, O. Boundary-value problems for the Lyapunov equation. Part I. *Ukrainian Mathematical Journal.* Vol. **76**, 3 (2024), 1–24.

46. Boichuk, O., Panasenko, E., Pokutnyi O. Boundary-value problems for the Lyapunov equation. Part II. *Ukrainian Mathematical Journal.* Vol. **5** (2024), 680–694.

47. Boichuk, A. and Krivosheya, S. Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type. *Ukrainian Matematical journal.* 1998.Vol. **50**, 8 (1998), 1021—1026.

48. Bondar, I. A. Linear boundary-value problems for systems of integrodifferential equations with degenerate kernel. Resonance case for a weakly perturbed boundary-value problem. *J. Math. Sci.* Vol. **274**, 6 (2023), 822–832.

49. Boyadzhiev K. N. Integral represantation of functions on sectors, functional calculus and norm estimates. *Collectania Mathematica.* Vol. **53**, 3 (2002), 287–302.

50. Bryson (Jr.), A. E. and Ho, Yu-Chi. Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control. New York: Taylor Francis Group, 1975. 481 p.

51. Brenan K. E., Campbell S. L., and Petzold L. R. Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations. Philadelphia: Society for Industrial Applied Mathematics, 1996. 263 p.

52. Brezis H., Browder F. E. A general principle on ordered sets in nonlinear functional analysis. *Advances in mathematics.* Vol. **21** (1976), 355–364.

53. Broer H. Resonance tongues in Hill's equations: a geometric approach. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **166** (2000), 290–327.

54. Broer H. Resonance tongues and instability pockets in the quasiperiodic Hill-Schrodinger equation. *Journal of Diff. Equations.* Vol. **241** (2003), 467–503.

55. Broer H., Levi M. Geometrical aspects of stability theory for Hill's equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis.* Vol. **131** (1995), 225–240.

56. Caliceti E., Cannata F., Graffi S. $\mathcal{PT}$ symmetric Schrӧdinger operators: reality of the perturbed eigenvalues. *Symmetry, integrability and geometry: Methods and applications.* Vol. **6**, 009 (2010), 8 p.

57. Campbell S. L., Petzold L. R. Canonical forms and solvable singular systems of differential equations. Society for Industrial Applied Mathematics. *Journal on Algebraic and Discrete Methods.* Vol. **4** (1983), 517–521.

58. Campbell S. L., Meyer C. D. Continuity properties of the Drazin Pseudoinverse. *Linear algebra and its applications.* Vol. **10** (1975), 77–83.

59. Campbell S. L., Meyer C. D. *Generalized inverses of linear transformations.* Philadelphia: Society for Industrial Applied Mathematics, 2009. 272 p.

60. Chang K. W. Almost periodic solutions of singularly perturbed systems of differential equations. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **4** (1968), 300–307.

61. Chernousko, F.L., Akulenko, L. D., Sokolov, B. N. *Control of Oscillations.* Moscow: Nauka, 1980. 384 p.

62. Chow Shui-Nee., Lin Xiao-Biao., Palmer K. A shadowing lemma with applications to semilinear parabolic equations. Society for Industrial Applied Mathematics. *Journal on Mathematical Analysis.* Vol. **20**, 3 (1983), 547–557.

63. Chow Shui-Nee. On a conjecture of K. Cooke. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **14** (1973), 307–325.

64. Chicone C., Latushkin L. *Evolution semigroup in dynamical systems and differential equations.* Mathematical surveys monography, Providence: RI, 1999. 372 p.

65. Chicone C., Swanson R. C. Spectral theory for linearizations of dynamical systems. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **40** (1981), 155–167.

66. Chow Shui-Nee, Lin Xiao-Biao. Smooth invariant foliations in infinite dimensional spaces. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **94** (1991), 266–291.

67. Chow S.-N., Leiva H. Unbounded perturbation of the exponential dichotomy for evolution equations. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **129** (1996), 509–531.

68. Chow S.-N., Leiva H. Existence and roughness of the exponential dichotomy for skew-product semiflow in Banach spaces. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **120** (1995), 429–477.

69. Chueshov I. D. Introduction to the theory of infinite-dimensional dissipative systems. Kharkiv: Acta, 2002. 416 p.

70. Chuiko, S. M. On the solution of matrix Lyapunov equations, *Visn. Kharkiv. Univ., Ser. Mat., Prikl. Mat., Mekh.* **1120** (2014), 85-–94.

71. Colonius F., Fabbri R., Johnson R. On nonautonomous H^∞ control with infinite horizon. *Journal of Diff. Eq.* **220** (2006), 46–67.

72. Consolini L., Tosques M. A sufficient condition for dichotomy based on a suitable invariance property. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **251** (2011), 1475–1488.

73. Coppel W. A. Dichotomies and reducibility. *Journal of Diff. Eq.* **3** (1967), 500–521.

74. Coppel W. A. Dichotomies and reducibility (II). *Journal of Diff. Eq.* **4** (1968), 386 - 398.

75. Coppel W. A. Dichotomies and Lyapunov functions. *Journal of Diff. Eq.* **52** (1984), 58–65.

76. Corduneanu C. Almost periodic oscillations and waves. New York: 2009. 308 p.

77. Crandall M. G., Pazy A., Tartar L. Remarks on generators of analytic semigroups. *Israel Journal of Mathematics.* **32**, 4 (1979), 363–374.

78. Dai Xiongping. Hyperbolicity and integral expression of the Lyapunov exponents for linear cocycles. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **242** (2007), 121–170.

79. Daletskii, A. Stochastic differential equations in a scale of Hilbert spaces. Electron. J. Probab. — 2018. — 23. — P. 1–15.

80. Dashkovskiy, S., Kapustyan, O. Schmid, J. A local input-to-state stability result w.r.t. attractors of nonlinear reaction-diffusion equations. Math. *Control Signals Syst.* **32** (2020), 309–326.

81. Dashkovskiy S., Pokutnyi O., Slynko V. Roughness of dichotomy for interconnected systems of operator-differential equations, 2024 IEEE 63rd Conference on Decision and Control (CDC) December 16-19, MiCo, Milan, Italy. 2024. —- P. 6602–6607.

82. Datko, R. Extending a theorem of a A. M. Lyapunov to Hilbert spaces. *J. Math. Anal. Appl.* **32** (1970), 610–616.

83. Deutch E. Semi-inverses, reflexive semi-inverses, and pseudoinverses of an arbitrary linear transformation. *Linear algebra and its applications.* **4** (1971), 313–322.

84. Diagana Toka. Almost automorphic type and almost periodic type functions in abstract spaces. Switzerland: Springer, 2013. 312 p.

85. Diblik J., Khusainov D., Ruzickova M. Controllability of linear discrete systems with constant coefficients and pure delay. *SIAM.* **47**, 3 (2008), 1140 - 1149.

86. Dieci L., Elia C., Vleck E. Exponential dichotomy on the real line : SVD and QR methods. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **248** (2010), 287–308.

87. Dieci L., Elia. C.. The singular value decomposition to approximate spectra of dynamical systems. Theoretical aspects. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **230** (2006), 502–531.

88. Druskin, V., Knizhnerman, L. and Simoncini, V. Analysis of the rational Krylov subspace and ADI methods for solving the Lyapunov equation. *SIAM J. Numer. Anal.* **49**, 5 (2012), 1875–1898.

89. Duncana, T. E., Maslowski, B. and Pasik-Duncana, B. Stochastic equations in Hilbert space with a multiplicative fractional Gaussian noise. *Stochast. Process. Appl.* **115** (2005), 1357—1383.

90. Durhuus B., Gayral V. The scattering problem for a noncommutative nonlinear Schrödinger equation. *Symmetry, integrability and geometry: Methods and applications.* **6**, 046 (2010), 17 p.

91. R.E. Edwards. *Functional analysis. Theory and applications.* Holt: Rinehart and winston, 1965. 1071 p.

92. Eidelman Y. S., Tikhonov I. V. On periodic solutions of abstract differential equations. *Abstract and applied analysis.* Vol. **6**, 8 (2001), 489–499.

93. Engel K.-J., Nagel R. *One-parameter semigroups for linear evoluition equations.* New York: Springer-Verlag, 2000. 586 p.

94. Favini A., Yagi A. Space and time regularity for degenerate evolution equations. *Journal of Mathematical Soceity of Japan.* Vol. **44**, 2 (1992), 331–350.

95. Feynman R.P. An operator calculus having applications in quantuum electrodynamics. *Physical Review.* Vol. **84**, 1 (1951), 108–128.

96. Feshchenko I.S. On closeness of the sum of n subspaces of a Hilbert space. *Ukrainian mathematical journal.* Vol. **63**, 10 (2012), 1566–1622.

97. Gavrilyuk I., Makarov V., Vasylyk V. Exponentially Convergent Algorithms for Abstract Differential equations. Birkhauser: Springer Bales, 2011. 180 p.

98. Glasser M. L., Papageorgiou V. G., Bountis T. C. Melnikov's function for two-dimensional mappings. *SIAM.* Vol. **49**, 3 (1999), 692–703.

99. Gozzi, F., Rouy, E., Swiech, A. Second order Hamilton-Jacobi equations in Hilbert spaces and stochastic boundary control. *SIAM J. Control Optim.* Vol. **38**, 2 (2000), 400–430.

100. Gohberg I., Kaashoek M. A., Schagen F. Finite section method for linear ordinary differential equations. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **163** (2000), 312–334.
101. Goldstein J. A. Semigroups of Linear Operators and Applications. Oxford: University Press, 1985. 245 p.
102. Gruendler J. The existence of transverse homoclinic solutions for higher order equations. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **130** (1996), 307–320.
103. G*ü*hring G., R*ä*biger F., Schnaubelt R. A characteristic equation for Non-autonomous partial functional differential equations. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **181**, 2002, 439–462.
104. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. New York: Springer-Verlag, 1983. 559 p.
105. Hamilton R. S. The inverse function theorem of Nash and Moser. Bulletin of the *American Mathematical Society.* Vol. **7** (1) (1982), 65–222.
106. *Hale J.* Theory of Functional Differential Equations. Springer, 1977.
107. *Hille E., Philips R.* Functional analysis and semigroups. Colloquium Publications, 1996.
108. Hochstadt H. Instability intervals of Hill's equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics.* Vol. **17** (1964), 251–255.
109. Huy Nguyen Thieu. Invariant manifolds of admissible classes for semi-linear evolution equations. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **246** (2009), 1820–1844.
110. Iskra, O.Z., Pokutnyi, O.O. Boundary-Value Problems for the System of Operator-Differential Equations in Banach and Hilbert Spaces. *J. Math Sci.* Vol. **272** (2023), 228-–235.
111. Іскра О., Офіцеров А. Зв'язані системи операторних рівнянь Ріккаті. *Нелінійні коливання.* Vol. **27**, 3 (2024), 1–7.
112. Iskra O. Interconnected system for the Lyapunov equation with control and boundary conditions (chapter in monograph: Analytical and Approximate Methods for Complex Dynamical Systems (editor: Timokha O.M.)). Switzerland: Springer, 2025, 329–341.
113. Iskra O.Z., Pokutnyi O.O. Branching solutions for the interconnected system of Lyapunov equations with control, PDMU-(Problems of decision making under uncertainties), XXXIX International Conference, 2024. P. 111.

114. Boichuk A.A., Pokutnyi O.O., Feruk V.A., Iskra O.Z. Weakly nonlinear hyperbolic differential equations of the second order in the Hilbert space, International scientific conference Applied mathematics and information technology, Ukraine, Chernivtsi, 22-24 September 2022.

115. Fattorini, H.O. Second order linear differential equations in Banach spaces. Amsterdam, North-Holland: Elsevier, 1985. 313 p.

116. Jin, L, Xio, T. A note on the propagators of second order linear differential equations in Hilbert spaces. *Proceedings of the American mathematical society.* Vol. **113**, 3 (1991), 663–667.

117. Johnson R. Cantor spectrum for the quasi-periodic Schrödinger equation. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **91** (1991), 88–110.

118. Johnson R. The recurrent Hill's equation. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **46** (1982), 165–193.

119. Johnson R. Exponential dichotomy, rotation number, and linear differential operators with bounded coefficients. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **61** (1986), 54–78.

120. Johnson R., Mahesh Neruvkar. Exponential dichotomy and rotation number for linear Hamiltonian systems. *Journal of Diff. Eq.* Vol.**108** (1994), 201–216.

121. Johnson R., Yingfei Yi. Hopf bifurcation from non-periodic solutions of differential equations, II. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **107** (1994), 310–340.

122. Gorbachuk M.L. Boundary value problems for operator differential equations. Dordrecht: Springer, 1991. 347 p.

123. Harbrecht H., Schmidlin M. and Schwab C. The Gevrey class implicit mapping theorem with application to UQ of semilinear elliptic PDEs. arXiv:2310.01256, 2023.

124. Harbrecht H. and Kalmykov I. Sparse grid approximation of the Riccati operator for closed loop parabolic control problems with Dirichlet boundary control. *SIAM J. Control Optim.* Vol. **59**, 6 (2021), 4538–4562.

125. Hitoshi I. Viscosity solutions of nonlinear second-order partial differential equations in Hilbert spaces. *Commun. in partial differential equations.* Vol. **18** 3-4 (1993), 601–650.

126. Hitoshi I., Lions, P.L. Viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations. *Journal of diff. eq.* Vol. **83** (1990), 26–78.

127. Hwang J., Nakagiri S. On semi-linear second order Volterra integro - differential equations in Hilbert space. *Taiwanese journal of mathematics.* Vol. **12**, 3 (2000), 679–701.

128. Nguyen Thieu Huy, Vu Thi Ngog. Exponential dichotomy of difference equations in l_p - phase spaces on the half-line. *Advances in difference equations.* **058453** (2006), 1–14.

129. Keller J. B., Weinstein M. I. Asymptotic behavior of stability regions for Hill's equation. *Soceity of industrial and applied mathematics.* Vol. **47**, 5 (1987), 941–958.

130. Keller J. B., Weinstein M. I. Hill's equation with a large potentials. Soceity of industrial and applied mathematics. Vol. **45** (1985), 954–958.

131. Khusainov D. Ya.,Shuklin G. V. Linear autonomous time-delay system with permutation matrices solving. *Studia Universita Zilina Mathematical Series.* Vol. **17** (2003), 101–108.

132. Klyushin, D.A., Lyashko, S.I., Nomirovskii, D.A., Petunin, Yu.I., Semenov, V.V. Generalized Solutions of Operator Equations and Extreme Elements. New York: Springer, 2012. 202 p.

133. Kovalchuk V., Slawianowski J. J. Hamiltonian systems inspired by the Schrödinger equation. *SIGMA.* Vol. **4** (2008), 9 p.

134. Kostyukova O.I. Optimality criterion for a linear-quadratic problem of optimal control by a descriptor system. *Differencial'nie uravnenia.* Vol. **36**, 11 (2000), 1475–1481.

135. Krein S.G. Linear differential equations in Banach spaces. Provoidence: AMS, 1972. 464 p.

136. Kundu Anjan. Integrable hierarchy of higher nonlinear Schrödinger type equations. *SIGMA.* **078** (2006), 12 p.

137. Kunkel P., Mehrmann V. Differential-algebraic equations: analysis and numerical solution. European Mathematical Society, 2006. 192 p.

138. Kuzhel A. Characteristic functions and models of nonself-adjoint operators. Kluwer, 1996. 286 p.

139. Ladas G. E. and Lakshmikantham V. Differential Equations in Abstract Spaces. Academic Press 1972. 218 p.

140. Laederich S. Boundary value problems for partial differential equations with exponential dichotomies. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **100** (1992), 1–21.

141. Lan N. T. On the mild solutions of higher-order differential equations in Banach spaces. *Abstract and Applied Analysis.* Vol. **15** (2003), 865–880.

142. Lancaster, P., Rodman, L. Algebraic Riccati Equations. Oxford: Clarendon Press, 1995. 477 p.

143. Latushkin Yu., Tomilov Yu. Fredholm differential operators with unbounded coefficients. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **208** (2005), 388–429.

144. Latushkin Yu., Montgomerri Smith., Randolph T. Evolutionary semigroups and dichotomy of linear skew-product flows on locally compact spaces with Banach spaces. *Journal of Differential Equations.* Vol. **125** (1996) 73–116.

145. Latushkin Yu., Pogan A. The dichotomy theorem for evolution bi-families. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **245** (2008), 2267–2306.

146. Latushkin Yu., Schnaubelt R. Evolution semigroups, translation algebras, and exponential dichotomy of cocycles. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **159** (1999), 321–369.

147. deLaubenfels R., Wang S. Spectral conditions guaranteeing a nontrivial solution of the abstract Cauchy problem. *Proceedings of the AMS.* Vol. **126**, 11, 3271–3278.

148. deLaubenfels R. Powers of generators of holomorphic semigroups. *Proceedings of the AMS.* Vol. **99**, 1 (1987), 105–108.

149. Lazareva A.B., Pakshin P.V. Solution of matrix Lurier, Riccati and Lyapunov equations for digital systems. *Automatika and Telemekhanika.* Vol. **12** (1986), 17-–22.

150. Levy D. M., Keller J. B. Instability intervals of Hill's equation. *Communications on Pure and applied mathemtics.* Vol. **16**, 1963, 469–479.

151. Lin Xiao-Biao. Heteroclinic bifurcation and singularly perturbed boundary value problems. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **84** (1990), 319–382.

152. Lin Xiao-Biao. Exponential dichotomy and homoclinic orbits in functional differential equations. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **61** (1986), 54–78.

153. Lin Xiao-Biao. Exponential dichotomies in intermediate spaces with applications to a diffusively perturbed predator-Prey model. *Journal of Diff. Eq. Vol.* **100** (1994), 36–63.

154. Liao A. P., Bai Z. Z., Lei Yu. Best approximate solution of matrix equation $AXB + CYD = E^*$. Soceity of industrial and applied mathematics. *Journal of Matrix Analysis and Applications.* Vol. **27**, 3 (2005), 675–688.

155. Lin Xiao-Biao. Exponential dichotomies and homoclinic orbits in functional differential equations. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **63** (1986), 227–254.

156. Lindenstrauss J., Pelczynski A. Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications. *Studia Mathematica.* Vol. 29 (1968), 275–325.

157. Lojasiewich S., jr. and Zehnder E. An inverse function theorem in Frech*ét* spaces. *Journal of functional analysis.* Vol. **33** (1979), 165–174.

158. Lyashko S. I., Semenov V. V. On a theorem of M.A.Krasnoselski. *Cybernetics and System Analysis.* Vol. **46**, 6 (2010), 1021–1025.

159. Lykova, O., Boichuk, O. Construction of periodic solutions of nonlinear systems in critical cases. *UMJ.* Vol. **40** (1988), 51–58.

160. Luzin N. N. Study of a matrix system in the theory of differential equations. *Avtomatika i Telemekhanika.* Vol. **5** (1940), 4–66.

161. Maniar L., Schnaubelt R. The Fredholm alternative for parabolic evolution equations with inhomogeneous boundary conditions. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **235** (2007), 308–339.

162. Markin M. V. A characterization of the generators of analytic C_0-semigroups in the class of scalar type spectral operators. *Abstract and Applied Analysis.* Vol. **12** (2004), 1007–1018.

163. Markin M. V. On a characterization of generators of analytic semigroups in the class of normal operators. *MFAT.* Vol. **2**, 2 (1996), 86–93.

164. Martin R. H. Separation of solutions to differential equations. *Journal of Diff. Eq.* Vol. **14** (1973), 213–234.

165. Mawhin J. Topological degree methods in nonlinear boundary value problems. Regional conference series in mathematics. Providence, 1979. 122 p.

166. McKean H. P., P. van Moerbeke. The spectrum of Hill's equation. *Inventiones Mathematica.* Vol. **30** (1975), 217–244.

167. McKean H. P., Trubowitz E. Hill's operator and hyperelliptic function theory in the presence of infinitely many branch points. *Communications on Pure and Applied Mathematics.* Vol. **29** (1976), 14–226.

168. Melnikova I. V. Regularised solutions to Cauchy problems well posed in the extended sense. *Integral Transfroms Special Functions.* Vol. **17**, 2 (2006), 185–191.

169. Mironchenko, A. Input-to-state-stability. Springer, 2023. 406 p.

170. Moore E. H. On the Reciprocal of the General Algebraic Matrix (Abstract) *Bulletin of the AMS.* Vol. **26** (1920), 394–395.

171. Moser J. A new technique for the construction of solutions of nonlinear differential equations. *Proceedings of the Nationcal Academy of Science USA.* (1961), 1824–1831.

172. Muller P.C. Stability and optimal control of nonlinear descriptor systems: a survey. *Applied Mathematics Computer Science.* Vol. **8**, 2 (1998) 269–286.

173. Murray J.D. Mathematical Biology: I. An Introduction. New York: Springer, 2002. 576 p.

174. Murray J.D. Mathematical Biology: II. Spatial models and biomedical applications. New York: Springer, 2003. 839 p.

175. Naito Toshiki, Nguen van Minh. Evolution semigroups and spectral criteria for almost periodic solutions of periodic evolution equations. *Journal of Differential Equations.* Vol. **152** (1999), 358–376.

176. Nakayama Yu. Scrödinger-like dilaton gravity. *SIGMA.* Vol. **7**, 014 (2001), 12 p.

177. Al-Nayef A., Diamond P., Kloeden P., Kozyakin V., Pokrovskii A. Bi-shadowing and delay equations. *Dynamic and stability of systems.* Vol. **11**, 2. (2010), 121–134.

178. Nash J. The imbedding problem for Riemannian manifolds. *Annalen Mathematic.* Vol. **63** (1956), 20–63.

179. Nashed M. Z., Votruba G. F A unified approach to generalized inverses of linear operators: I. Algebraic, topological and projectional properties. *Bulletin of the American mathematical Soceity.* Vol. **5**, 80 (1974), 825–830.

180. Nashed M. Z., Votruba G. F. A unified approach to generalized inverses of linear operators: II. Extremal and proximal properties. *Bulletin of the American Mathematical Soceity.* Vol. **5**, 80 (1974), 831–835.

181. Neubrander F. Integrated semigroups and their applications to the Abstract Cauchy problem. Pacific Journal of Mathematics. Vol. **135**, 1 (1988), 111–155.

182. von Neumann J. On regular rings. Proceedings of the American Mathematical Soceity. Vol. **22** (1936), 707–713.

183. Nicaise, S. Differential equations in Hilbert spaces and applications to boundary value problems in nonsmooth domains. *Journal of functional analysis.* Vol. **96** (1991), 195–218.

184. Nikitin A. G., Popovych R. O. Group classification of nonlinear SchrÖdinger equations. *Ukrainian mathematical journal* Vol. **53**, 8 (2001), 1255–1265.

185. Oharu Shinnosuke. Semigroups of linear operators in a Banach space. *Publications, RIMS, Kyoto University.* **7**, 1971/72, 205–260.

186. Ortega R., Tineo A. Resonance and non-resonance in a problem of boundedness. *Proceedings of the American Mathematical Soceity.* Vol. **124**, 7 (1996), 2089–2096.

187. Palmer K. J. Exponential dichotomies and transversal homoclinic points. *Journal of Differential Equations.* Vol. **55** (1984), 225–256.

188. Palmer K. J. An ordering for linear differential systems and a characterization od exponential separation in terms of reducibility. *Journal of Differential Equations.* Vol. **53** (1984), 67–97.

189. Palmer K. J. Exponential dichotomies and transversal homoclinic points. Journal of Differential Equations. Vol. **55**, 1986, 225–256.

190. Palmer K. J. The structurally stable linear systems on the half-line are those with exponential dichotomies. *Journal of Differential Equations.* Vol. **33** (1979), 16–25.

191. Palmer K. J. Exponential separation, exponential dichotomy and spectral theory for linear systems of ordinary differential equations. *Journal of Differential Equations.* Vol. **46** (1982), 324–345.

192. Palmer K. J. An ordering for linear differential systems and a characterization of exponential separation in terms of reducibility. *Journal of Differential Equations.* Vol. **53** (1984), 67–97.

193. Palmer K. J. Transversal heteroclinic points and Cherry's example of a nonintegrable Hamiltonian system. *Journal of Differential Equations.* Vol. **65** (1986), 321–360.

194. Panasenko, E.V., Pokutnyi, O.O. Boundary-value problems for the Lyapunov equation in Banach spaces. *Journal of Mathematical Sciences.* Vol. **223**, 3 (2017), 298–304.

195. Panasenko, E.V., Pokutnyi, O.O. Bifurcation Conditions for the Solutions of the Lyapunov Equation in a Hilbert Space. *Journal of Mathematical Sciences.* 2019. Vol. **236**, 3 (2019), 313–332.

196. Panasenko, E.V., Pokutnyi, O.O. Nonlinear Boundary-Value Problems for the Lyapunov Equation in the Space L_p. *Journal of Mathematical Sciences.* Vol. **246**, 3 (2020), 394–409.

197. Papaschinopoulos G., Schinas J. Criteria for an exponential dichotomy of difference equations. *Czechoslovak Mathematical Journal.* Vol. **35**, 2 (1985), 295–299.

198. Panasenko, E. V. and Pokutnyi, O. O. Boundary-value problems for differential equations in a Banach space with unbounded operator in the linear part. *J. Math. Sci.* **203**, 3 (2014), 366–374.

199. Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1983. 279 p.

200. Penrose R. A. Generalized Inverse for Matrices. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* 1955. Vol. **51** (1955), 406–413.

201. Penrose R.A. and Todd J. A. On best approximate solutions of linear matrix equations. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* Vol. **52** (1956), 17–19.

202. Perron O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen. *Mathematical Zurnal.* **32** (1930), 138–152.

203. Picard R., Des McGhee. Partial differential equations. Berlin: de Gruyter, 2011. 487 p.

204. Rosen, I. G. and Wang, C. A multilevel technique for the approximate solution of operator Lyapunov and algebraic Riccati equations. *SIAM J. Numer. Anal.* Vol. **32**, 2 (1995), 514–541.

205. Pokutnyi, O. O. Generalized inverse operator in Frechet, Banach, and Gilbert spaces *Visn. Kyiv. Nats. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauk.* **4** (2013), 158-–161.

206. Showalter, R.E. Hilbert space methods for partial differential equations. *Electronic journal of differential equations*, 1994. 220 p.

207. De Simon, L., Giovanni, T. Linear second order differential equations with dicontinuous coefficients in Hilbert spaces. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze.* Vol. **1**, 1-2 (1974), 131–154.

208. Sobolevskii, P.E. Generalized solutions of the first order differential equations in Hilbert space. *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* Vol. **122**, 6 (1958), 994–996.

209. Sontag, E. D. Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Trans. Automatic Control.* **34** (2004), 435–443.

210. Sontag, E. D. Further facts about input to state stabilization. *IEEE Trans. on Automatic Control.* **35** (1990), 473–476.

211. Sontag, E.D. and Wang Yuan, New characterizations of input-to-state stability. *IEEE Transactions on Automatic Control.* Vol. **41**, 9 (1996), 1283–1294.

212. Vandendorpe, A., Van Dooren, P. Model Reduction of Interconnected Systems. Theory, Research Aspects and Applications. Vol. **13** (2008), 305–321.

213. Wyss C. Perturbation theory for Hamiltonian operator matrices and Riccati equations. Dissertation, Bern, 2008. 164 p.

214. Dashkovskiy S., Mironchenko A. Input-to-state stability of infinite-dimensional control systems. *Math. Control Signals Syst.* **25** (2013), 1—35.

215. Dashkovskiy S., Mironchenko A. Input-to-state stability of nonlinear impulsive systems. *SIAM, J. Control Optim.* Vol.**51**, 3 (2013), 1962–1987.

216. Dashkovskiy S., Kapustyan O., Slynko V. Robust stability of a nonlinear ODE-PDE system. *SIAM, J. Control Optim.* Vol. **61**, 3 (2023), 1760–1777.

217. Kovalev A.M., Martynyuk A.A., Boichuk O.A., Mazko A.G., Petryshyn R.I., Slyusarchuk V.Yu., Zuyev A.L., V.I. Slyn'ko. Novel qualitative methods of nonlinear mechanics and their application to the analysis of multifrequency oscillations, stability, and control problems. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory.* Vol. **9**, 2 (2009), 117-–145.

218. Mironchenko A., Ito H. Construction of Lyapunov functions for interconnected parabolic systems: an iISS approach. *SIAM, J. Control Optim.* Vol. **53**, 6 (2015), 3364–3382.

219. Mironchenko A., Ito H. Integral input-to-state stability of bilinear infinite-dimensional systems. Conference: Proc. of the 53th IEEE Conference on Decision and Control. USA : Los Angeles, California. 2014, 3155–3160.

220. Mironchenko A., Prieur C. Input-to-state stability of infinite-dimensional systems: recent results and open questions. *SIAM Review.* Vol. **62**, 3 (2020), 529–614.

221. Mironchenko A., Slynko V. Dwell-time stability conditions for infinite dimensional impulsive systems. *Automatica.* Vol. **147** (2023).

222. Mironchenko A., Wirth F. Lyapunov characterization of input-to-state stability for semilinear control systems over Banach spaces. *Systems And Control Letters.* Vol. **119** (2018), 64-–70.

223. Sontag E.D. Comments on integral variants of ISS. *Systems And Control Letters.* Vol. **34**, (1-2) (1988), 93—100.

224. Sontag E.D. Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE transactions on automatic control.* Vol. **34**, 4 (1989), 435-–443.

225. Sontag E.D., Wang Y. On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems And Control Letters.* Vol. **24**, 5 (1995), 351–359.

ДОДАТОК А
СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ТА АПРОБАЦІЯ РЕЗУЛЬТАТІВ

Основні результати дисертації опубліковано у трьох статтях [110–112] у наукових виданнях усі три входять до міжнародних наукометричних баз даних (Web of Science, Scopus) та тез міжнародних конференцій [113, 114]:

1. Iskra O. Z., Pokutnyi O. O. Boundary-Value Problems for the System of Operator-Differential Equations in Banach and Hilbert Spaces. J Math Sci, Vol. 272, 228–235 (2023). https://doi.org/10.1007/s10958-023-06412-2 (Q3).

2. Iskra O. Z. Interconnected system for the Lyapunov equation with control and boundary conditions (chapter in monograph: Analytical and Approximate Methods for Complex Dynamical Systems (editor: Timokha O.M.)), Springer, 2025. p. 329 – 341. https://doi.org/10.1007/978-3-031-77378-5_19.

3. Іскра О., Офіцеров А. Зв'язані системи операторних рівнянь Ріккаті. Нелінійні коливання, т. 27, № 3, с. 1-7 (2024). https://doi.org/10.3842/nosc.v27i3.1482 (Q3).

4. Pokutnyi O. O., Iskra O. Z. Branching solutions for the interconnected system of Lyapunov equations with control, PDMU-2024 (Problems of Decision Making Under Uncertainties), XXXIX International Conference, p. 111.

5. Boichuk A. A., Pokutnyi O. O., Feruk V. A., Iskra O. Z. Weakly nonlinear hyperbolic differential equations of the second order in the Hilbert space, International scientific conference "Applied mathematics and information technology" , Ukraine, Chernivtsi, 22-24 September 2022.

Результати дисертації доповідались та обговорювались на таких конференціях та семінарах:

1. Семінар відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України від 24 лютого 2025 року.

2. International conference PDMU-2024, Problems of decision making under uncertainties, XXXIX International Conference, Brno, 9-10 вересня 2024.

3. International scientific conference "Applied mathematics and information technology" Ukraine, Chernivtsi, 22-24 September 2022.