Національна академія наук України
Інститут математики

РЕФЕРАТ
роботи, висунутої на здобуття
щорічної премії Президента України для молодих вчених
за 2026 рік

АЛГЕБРАЇЧНІ, ТОПОЛОГІЧНІ ТА ДИНАМІЧНІ СТРУКТУРИ, ПОВ'ЯЗАНІ З ДІЯМИ ГРУП

Плакош Андріяна Іванівна,
кандидат фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник,
Інститут математики НАН України

Сатур Оксана Романівна,
доктор філософії,
науковий співробітник,
Інститут математики НАН України

Фещенко Богдан Григорович,
кандидат фізико-математичних наук,
науковий співробітник,
Інститут математики НАН України

Актуальність та загальна характеристика роботи

Робота присвячена розробці та застосуванню комплексних підходів до вивчення алгебраїчних, топологічних та динамічних інваріантів складних систем, що еволюціонують або змінюються під дією груп перетворень. Актуальність дослідження зумовлена необхідністю створення нових математичних методів для аналізу нелінійних процесів у фізиці, матеріалознавстві, соціодинаміці та теорії обробки даних.

Теорія когомологій груп бере свій початок у працях В. Гуревича та була суттєво розвинена у 1940-х роках С. Ейленбергом, С. Маклейном, В. Екманом, Х. Хопфом, Д. К. Фаддєєвим та іншими дослідниками. Подальший розвиток цієї теорії тісно пов'язаний із теорією зображень і проєктивними зображеннями, де когомології природно виникають як набори факторів. Вагомий внесок у розвиток цього напряму зробили також І. Такахасі, Л. Рейтен, К. Рідтман, Ю. А. Дрозд та інші.

Обчислення когомологій конкретних груп є складною та актуальною проблемою сучасної алгебри. У багатьох випадках виникає потреба у спеціальних методах дослідження, зокрема для скінченних абелевих та неабелевих груп. Важливими є також результати, пов'язані з напівпрямими добутками груп, які вивчалися Маккеєм та іншими авторами, проте загальні результати щодо їхніх зображень і когомологій тривалий час залишалися неповними.

Особливий інтерес становлять когомології решіток, тобто скінченно породжених вільних модулів над груповими кільцями. Такі об'єкти відіграють важливу роль у теорії кристалографічних груп і груп Чернікова. Для циклічних груп порядку p і p^2, а також для кляйнівської четверної групи, відповідні класифікаційні результати були отримані в працях Ю. А. Дрозда, А. І. Плакош, Л. А. Назарової та інших дослідників. Водночас у загальному випадку задача класифікації та обчислення когомологій залишається складною.

Для кляйнівської групи характерною є наявність нескінченної кількості незвідних, попарно неізоморфних решіток, а також підвищена періодичність когомологій. Це суттєво ускладнює дослідження відповідних структур. Використовуючи результати Л. А. Назарової, К. Рінгеля, К. Роггенкампа, Ю. А. Дрозда, а також напрацювання А. І Плакош, у роботі отримано повний опис когомологій решіток над кляйнівською групою.

Значну роль у дослідженні відіграє застосування техніки порядків Бакстрема, методів теорії сагайдаків Ауслендера–Райтена та сучасних підходів теорії зображень. Це дозволяє ефективно поєднати структурні, гомологічні та категорні методи для розв'язання поставлених задач.

Отримані результати мають важливе значення для подальшого розвитку теорії зображень, когомологій груп і напівгруп, а також для класифікації кристалографічних і черніковських груп, що підтверджує актуальність і наукову значущість виконаного дослідження.

Сучасний розвиток науки характеризується величезною увагою до вивчення складних нелінійних систем і відповідних до них процесів і явищ природи й суспільства. Свої початки теорія динамічних систем бере в роботах І. Ньютона з механіки. Саме Ньютон запропонував спосіб описувати різні процеси і явища за допомогою диференціальних рівнянь і динамічних систем. Теорія динамічних систем стала універсальним знаряддям для пояснення різноманітних явищ, що спостерігалися в механіці, астрономії, статистичній фізиці, радіофізиці, електроніці, гідродинаміці, теорії коливань тощо. В Україні значний внесок у розвиток теорії складних динамічних систем і її застосувань зробили М. М. Боголюбов, Ю. О. Митропольський, А. М. Самойленко, О. М. Шарковський, Ю. Л. Майстренко, О. М. Тимоха, В. Д. Кошманенко, О. А. Бурилко, І. М. Сушко, А. А. Панчук та інші.

В. Д. Кошманенком вперше було розглянуто математичну модель конфлікту в термінах стохастичних векторів з скінченним набором позицій для двох незнищенних противників. Говорячи строго було побудовано модель динамічної системи конфлікту з відштовхувальною взаємодією у просторі поділеному на регіони. Закон динаміки в цій моделі можна вважати узагальненими векторними варіантами рівнянь Лотки–Вольтерри. Термін *динамічна система конфлікту* як інструмент для математичного опису процесу конфліктної боротьби між двома і декількома протидіючими сторонами розвинуто у ряді наступних робіт В.Д. Кошманенка з його учнями і колегами. Було одержано серію результатів, як теоретичного значення так і в побудові та дослідженні конкретних моделей з різним способом задання конфліктного перетворення. Основна задача – це вивчення поведінки траєкторій системи при $t \to \infty$, встановлення існування і знаходження граничних асимптотичних станів, пошук атракторів та їхніх басейнів, доведення існування нерухомих точок (рівноважних станів), існування циклічних орбіт та дослідження хаотичної поведінки. Динамічні системи конфлікту досліджуються не лише в термінах стохастичних векторів і дискретних мір, а й у термінах кусково рівномірно розподілених мір, абсолютно неперервних мір, структорноподібних мір.

Актуальність представлених досліджень складних систем зумовлена необхідністю розробки та глибокого аналізу математичних моделей для опису складних еволюційних процесів у системах із конфліктною взаємодією. У сучасних умовах вивчення нелінійної динаміки таких систем є критично важливим для розуміння процесів у соціодинаміці, економіці, екології та теорії формування переконань.

Гладкі функції на многовидах є одним з основних об'єктів математики сьогодення і мають застосування в різних галузях науки. Аналітичні властивості таких функцій часто несуть інформацію про геометрію та топологію многовиду, на якому вони визначені. М. Морс довів, що в околі кожної своєї невиродженої критичної точки гладка функція, після деякої заміни координат, має стандартний вигляд квадратичного многочлену (лема Морса). Це дозволило йому встановити зв'язок між числом невироджених критичних точок різних індексів з рангами та скрутами груп гомологій многовиду (слабкі та сильні нерівності Морса), а також отримати оцінки на число замкнутих геодезичних ріманового многовиду. Таким чином, виявилось, що "геометрична" структура многовиду суттєво визначається функціями Морса на ньому. Розвитком цих ідей, які отримали назву теорія Морса, займалися Л. Люстерник, Л. Шнірельман, Г. Чогошвілі, Л. Ельсгольц, Р. Бот, Е. Віттен, С. Новіков, В. Шарко та багато інших математиків XX ст. Їх результати заклали надійний фундамент для подальших досліджень многовидів методами гладких функцій та досліджень просторів гладких функцій на многовидах.

Задачі класифікації функцій Морса, а також більш загальних класів функцій на гладких многовидах, вивчалися, зокрема, математиками київської топологічної школи — В. Шарком, О. Пришляком, О. Кадубовським, Є. Полуляхом, С. Максименком та їхніми учнями. Одним з основних результатів цих досліджень є опис компонент зв'язності просторів функцій Морса у високих розмірностях, отриманий В. Шарком. Для поверхонь відповідні питання детально досліджувалися В. Шарком і С. Максименком.

З загальної точки зору, дві функції Морса є гладко еквівалентними тоді й лише тоді, коли вони належать до однієї так званої право-лівої орбіти дії добутку групи дифеоморфізмів поверхні та групи дифеоморфізмів прямої на просторі гладких функцій. Ця дія задається композицією функції з відповідними дифеоморфізмами зліва і справа.

С. Максименко досліджував гомотопічні властивості стабілізаторів та орбіт гладких функцій на поверхнях відносно таких право-лівих і правих дій груп дифеоморфізмів. Для широкого класу функцій на поверхнях ним було встановлено зв'язок між фундаментальними групами компонент зв'язності орбіт гладких функцій і компонентами зв'язності стабілізаторів відповідних функцій.

Також було показано, що орбіти для широкого класу гладких функцій з ізольованими особливостями мають гомотопічний тип клітинного комплексу. Це дало змогу описати гомотопічний тип орбіт таких функцій на всіх компактних поверхнях, а також алгебраїчну структуру фундаментальних груп орбіт для всіх компактних поверхонь, за винятком сфери, тора, проективної площини, стрічки Мебіуса та пляшки Клейна. Зауважимо, що функції на цих "виняткових" поверхнях допускають "нетривіальні симетрії", які істотно ускладнюють дослідження відповідних орбіт. На сьогодні добре дослідженими є лише гомотопічні інваріанти орбіт функцій на торі (роботи С. Максименко і Б. Фещенка) та стрічці Мебіуса (роботи С. Максименка і І. Кузнєцової), тоді як решта випадків або вивчені лише частково, або залишаються практично недослідженими.

Дослідження гомотопічних властивостей таких просторів є складною задачею, що вимагає розробки нових методів і технік, і водночас сприяє суттєвому розвитку інструментарію сучасної топології.

Зміст роботи, наукова новизна і цінність результатів роботи

Одержано повний опис когомологічних та зображувальних інваріантів алгебраїчних структур, пов'язаних з діями скінченних груп (зокрема, четверної групи Кляйна та споріднених об'єктів); розвинено аналітичні методи дослідження еволюційних процесів у динамічних системах з конкуруючою взаємодією; досліджено гомотопічні властивості орбіт гладких функцій на поверхнях. Здійснено систематичне дослідження когомологій груп і решіток, класифікацію окремих класів груп і напівгруп, аналіз зображувальних типів відповідних алгебраїчних структур, а також комплексний аналіз поведінки траєкторій динамічних систем конфлікту у просторах стохастичних векторів та ймовірнісних мір.

Об'єктом дослідження були алгебраїчні структури, що виникають з дій скінченних груп, зокрема групи, решітки, напівгрупи та пов'язані з ними алгебри; нелінійні динамічні системи конфлікту в дискретному часі, що задаються різницевими рівняннями на просторах стохастичних векторів та ймовірнісних мір; різні класи гладких відображень поверхонь та їх гомотопічні властивості.

Предметом дослідження були когомології, зображення та зображувальні типи зазначених алгебраїчних структур, а також їх класифікаційні та гомологічні властивості; властивості траєкторій, структура граничних атракторів, вплив векторів взаємодії та параметрів біфуркації на стабільність системи, а також стратегії мінімізації втрат та формування точкового спектра; гладкі функції на 2-торі та дифеоморфізми 2-тора, що зберігають функції.

А. І. Плакош вивчала зв'язки між когомологічними інваріантами та зображувальною теорією, ролі дій груп у побудові та класифікації алгебраїчних структур, а також використанню апарату сагайдаків Ауслендера–Райтен для опису сизигій і зображувальних типів. Дослідження поєднує методи теорії зображень скінченних груп і напівгруп, гомологічної та когомологічної алгебри, теорії порядків і сагайдаків, а також конструктивні й класифікаційні методи сучасної алгебри.

О. Р. Сатур ключову увагу приділила встановленню фундаментальних закономірностей, що пов'язують параметри мікроскопічної взаємодії (вектор взаємодії, стратегії "мінімальних зусиль" чи "єдиного пріоритету") з макроскопічними властивостями граничних станів системи (стійкість, циклічність, спектральний тип граничних мір). Дослідження поєднує методи функціонального аналізу, теорії динамічних систем та теорії ігор для розв'язання задач про існування рівноважних атракторів, структуру їхнього спектра, а також для побудови оптимізаційних стратегій, що мінімізують ресурсні втрати сторін у процесі конфліктного перерозподілу простору.

Б. Г. Фещенко описав алгебраїчну структуру фундаментальних груп орбіт широкого класу гладких функцій на 2-торі, а також інших груп, що "частково контролюють" гомотопічний тип орбіт. При дослідженні використовувалися методи алгебри, алгебраїчної, геометричної та диференціальної топології, теорії динамічних систем та теорії особливостей.

Робота має теоретичний характер. Її результати та методи їх отримання мають потенційне застосування і створюють математичне підґрунтя для вирішення актуальних задач у сучасних технологіях, природничих та соціальних науках:

Теорія автоматів та формальних мов: результати з теорії зображень напівгруп і алгебр Манна можуть бути використані в алгебраїчних підходах до дослідження автоматів і формальних мов, зокрема при вивченні структурних властивостей обчислювальних моделей.

Криптографія та теорія кодування: дослідження алгебраїчних решіток і когомологічних інваріантів скінченних груп формують теоретичну базу для подальших робіт у галузі алгебраїчних методів криптографії та теорії кодування.

Теорія симетрій та математична кристалографія: Отримані результати щодо кристалографічних і черніковських груп сприяють розвитку математичних методів опису симетрій у кристалографії та суміжних галузях.

Соціодинаміка та економіка: Розроблені моделі дозволяют прогнозувати динаміку суспільної думки ("ідеологічна кристалізація") та аналізувати конкурентні стратегії на ринках з обмеженими ресурсами.

Біологія та мультиагентні системи: Динаміка систем із взаємодією моделює конкуренцію біологічних популяцій, а також процеси синхронізації в роях роботів та розподілених мережах.

Аналіз даних (TDA) та геоінформатика: Методи теорії Морса застосовуються для виділення топологічних ознак у великих даних ("Big Data") та моделювання рельєфу місцевості в GIS.

Усі результати є новими та складають суттєве доповнення у розвиток відповідних напрямів. Вони доповідалися на різних міжнародних наукових конференціях, школах та наукових семінарах як в Україні так і за її межами.

Основні результати роботи

1. Доведено, що для четверної групи Кляйна сизиґії решіток збігаються з трансляцією Ауслендера–Райтен, інформація про яку міститься в сагайдаку (дає концептуальний міст між гомологічними операціями та структурою сагайдака).

2. Повністю обчислено когомології Тейта всіх решіток над четверною групою Кляйна та простежено дію автоморфізмів групи на них (перший і поки єдиний у світовій літературі випадок повного обчислення когомологій решіток для групи з нескінченною кількістю неізоморфних нерозкладних решіток).

3. Наведено класифікацію принципово нового класу черніковських 2-груп — груп із кляйнівською верхівкою та цілком звідною базою (розширює структурну теорію черніковських груп та дає нові приклади).

4. Обчислено у явному вигляді когомології регулярних решіток над четверною групою Кляйна (раніше аналогічні результати були відомі лише для циклічних груп зі скінченною кількістю нерозкладних решіток); як застосування отримано класифікацію нових класів багатовимірних кристалографічних груп та груп Чернікова (перспектива застосувань у кристалографії та теорії кодування).

5. Для скінченновимірних алгебр Манна з напівпростими базами встановлено зв'язок зображень із зображеннями сагайдаків та зважених графів і звідси виведено повний опис зображувальних типів (скінченний/ручний/дикий) (уніфікує критерії зображувальної складності через

комбінаторні моделі). Отримані результати застосовано до повного опису зображувальних типів скінченних матричних напівгруп Ріса, зокрема 0-простих напівгруп та їх взаємно анулюючих об'єднань (принципово новий внесок у теорію зображень напівгруп без відомих аналогів у літературі; методи мають потенціал широких застосувань).

6. Отримано повний опис усіх нерозкладних цілочисельних зображень знакозмінної групи A_4 та проаналізовано неоднозначність їх розкладу; обчислено зображення і когомології, встановлено зв'язки між зображеннями та відповідними когомологіями і досліджено їх гомологічні властивості (розвиває теорію цілочисельних зображень скінченних груп і когомологій груп). Результати спеціалізовано до бакстремівських кілець та застосовано до аналізу ширших класів алгебраїчних об'єктів, зокрема напівгруп, груп Чернікова та кристалографічних груп (демонструє переносимість методів і їхню універсальність для суміжних класів структур).

7. Досліджено клас динамічних систем конфлікту, поведінка яких характеризується вектором взаємодії, що визначає динаміку всієї системи та її граничні стани. Доведено існування рівноважних граничних станів та встановлено умови, за яких замість нерухомих точок у системі виникають граничні цикли (ω-граничні множини). Показано, що період таких циклів повністю визначається періодичністю координат вектора взаємодії. Проілюстровано нелінійну динаміку перерозподілу ресурсів на конкретних комп'ютерних прикладах для систем з різною кількістю компонентів.

8. Досліджено математичну модель конфлікту з притягальною взаємодією, у якій еволюція системи визначається набором додатних параметрів. Доведено існування нерухомих станів системи та знайдено їхній явний аналітичний вигляд у формі рівноважних стохастичних векторів. Обґрунтовано стійкість граничних станів та доведено збіжність довільних початкових траєкторій до граничного рівноважного атрактора. Проаналізовано властивості граничних розподілів мас, що підтверджує тенденцію систем із притяганням до концентрації ресурсів у специфічних точках простору станів.

9. Запропоновано математичну модель конфлікту, у якій два гравці зафіксовані на скінченній кількості регіонів простору існування та на кожному кроці взаємодії докладають мінімальних зусиль. Встановлено динаміку зміни стохастичних векторів станів опонентів та проведено аналіз стійкості граничних станів залежно від параметра біфуркації α. Доведено, що при $\alpha = 1$ траєкторії збігаються до нестійкого стаціонарного стану, тоді як при $\alpha = 2$ система демонструє здатність зберігати

початкові переваги гравців у стані рівноваги. Виявлено умови, за яких мінімальні ймовірності присутності опонентів у регіонах прямують до нуля, що відповідає витісненню одного з гравців з певної позиції.

10. Проведено спектральний аналіз граничних за часом станів динамічних систем конфлікту, що описуються в термінах імовірнісних мір. Сформульовано та доведено фундаментальний критерій: необхідною і достатньою умовою виникнення мір із чисто точковим спектром є застосування хоча б одним з опонентів стратегії "єдиного пріоритету". Встановлено експоненціальну швидкість концентрації розподілів з точковим спектром та доведено його щільність у фазовому просторі. Запропоновано застосування отриманих спектральних результатів у новій моделі формування переконань, де поява точкового спектра інтерпретується як "топологічна кристалізація" ідеологічної позиції індивіда.

11. Побудовано систему різницевих рівнянь для опису динаміки територіального перерозподілу та чисельних втрат опонентів, які ведуть конфліктну боротьбу. У термінах стратегій впорядкованих початкових розподілів отримано ряд достатніх умов, що гарантують мінімізацію втрат ресурсів у моделях із трьома регіонами. Встановлено взаємозв'язок між швидкістю збіжності системи до стаціонарного стану та інтенсивністю кількісних втрат опонентів. Доведено теорему про існування стратегій, що забезпечують перевагу однієї зі сторін за умови фіксованої сумарної маси ресурсів.

12. Досліджено комбінаторні властивості функцій Морса на 2-торі зі значеннями у колі, а також більш широкого класу гладких функцій $\mathcal{F}(T^2, S^1) \subset C^\infty(M, S^1)$ з ізольованими особливостями на 2-торі. Доведено, що графи функцій з $\mathcal{F}(T^2, S^1)$ є або деревами, або містять єдиний цикл.

13. Для функцій з $\mathcal{F}(T^2, S^1)$, графи яких є деревами, встановлено існування спеціальної вершини, тобто такої вершини, що зв'язні компоненти доповдення тора до рівня, що їй відповідає, є відкритими дисками. Досліджувались групи автоморфізмів зірки спеціальної вершини, що індуковані дифеоморфізмами зі стабілізатора функції, зокрема її локальний стабілізатор.

14. Для функцій з $\mathcal{F}(T^2, S^1)$, графи яких є деревами, досліджувалась "комбінаторна" дія локального стабілізатора спеціальної вершини на 2-торі його дифеоморфізмами. Встановлено, що ця "комбінаторна" дія індукує вільну дію локального стабілізатора на 2-торі дифеоморфізмами, що зберігають задану функцію. Доведено, що локальний стабілізатор спеціальної вершини є ізоморфним до добутку двох циклічних

груп $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{nm}$ для деяких $n, m \in \mathbb{N}$.

15. Описано алгебраїчну структуру фундаментальної групи орбіт та групу зв'язних компонент стабілізаторів для функцій з $\mathcal{F}(T^2, S^1)$ на 2-торі відносно дії групи дифеоморфізмів тора, а також груп автоморфізмів графів таких функцій індукованих дифеоморфізмами з стабілізаторів.

Публікації результатів роботи та їх цитування

Робота складається з 49 наукових праць, опублікованих у 2013—2025 роках, серед яких 20 статтей у провідних вітчизняних та міжнародних фахових виданнях та 29 тез наукових конференцій. У міжнародних журналах опубліковано 15 статтей, з яких 14 статтей — в журналах з імпакт-фактором. Загальна кількість сторінок у журнальних публікаціях — 260 с.

Усі публікації є реферованими. У міжнародній наукометричній базі даних Google Scholar 115 цитувань, h-індекс = 6. У міжнародній наукометричній базі даних Scopus зазначено 10 публікацій, які мають загалом 16 цитувань та h-індекс = 3, у базі даних Web of Science вказано 14 публікацій, які мають загалом 45 цитувань та h-індекс = 2.

Старший науковий співробітник відділу алгебри і топології Інституту математики НАН України, кандидат фіз.-мат. наук — Андріяна ПЛАКОШ

Науковий співробітник відділу математичної фізики Інституту математики НАН України, доктор філософії — Оксана САТУР

Науковий співробітник відділу алгебри і топології Інституту математики НАН України, кандидат фіз.-мат. наук — Богдан ФЕЩЕНКО

Учений секретар Інституту математики НАН України, кандидат фіз.-мат. наук — Ігор СОКОЛЕНКО