ВІДГУК

офіційного опонента на дисертацію Панчук Анастасії Анатоліївни "Біфуркації необоротних гладких, кусково-гладких та розривних відображень" на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння

У дисертаційній роботі Панчук Анастасії Анатоліївни "Біфуркації необоротних гладких, кусково-гладких та розривних відображень" вивчено властивості асимптотичних розв'язків низки кусково-гладких і деяких необоротних гладких динамічних систем із дискретним часом (різницевих рівнянь). Проаналізовано існування і стійкість нерухомих точок, різних періодичних розв'язків, а також якісні перетворення притягуючих інваріантних кривих та хаотичних атракторів.

Теорія складних динамічних систем і на сьогодні є одним з напрямків сучасної математики, який активно розвивається. Хоча першими кроками в цій сфері традиційно вважають дослідження А. Пуанкаре і Дж. Д. Біркгофа, фундамент цієї теорії було закладено пізніше низкою визначних робіт О. О. Андронова, О. А. Вітта, С. Е. Хайкіна, Л. С. Понтрягіна, М. Пейшото, А. М. Колмогорова, В. І. Арнольда, Ю. К. Мозера, С. Смейла, Е. Лоренца. Задачі, які вивчаються в межах цієї теорії, пов'язані зокрема зі структурною стійкістю фазового простору, локальними і глобальними біфуркаціями періодичних розв'язків і розв'язків складнішої форми. Останні насамперед привертають увагу науковців, оскільки численні природні й суспільні процеси демонструють саме нерегулярну поведінку. Тому особливе місце серед досліджуваних об'єктів займають фрактальні множини, дивні нерегулярні атрактори, хаотичні області поглинання, зрешечені басейни притягання тощо, які вивчали у своїх працях Б. Мандельброт, Е. Отт, С. Гребоджі, К. Міра, І. Гумовський, П. Ешвін та інші. У зв'язку із вивченням динамічних систем із неперервним і дискретним часом, які задані гладкими нелінійними функціями, слід також згадати роботи М. Дж. Файгенбаума, М. Ено, Дж. Гукенхаймера, Ф. Холмса. На окрему увагу заслуговують результати представників української математичної школи — Ю. О. Митропольського, А. М. Самойленка, О. А. Бойчука, І. М. Черевка, О. М. Шарковського, С. Ф. Коляди, — пов'язані з різними аспектами диференціальних рівнянь, дослідженнями апроксимації, збіжності та керування в диференціальних рівняннях із запізненням та інтегро-диференціальних рівняннях, а також асимптотичної динаміки в різницевих рівняннях з необоротними функціями.

На відміну від гладких диференціальних і різницевих рівнянь, теорія біфуркацій для негладких систем наразі розвинена недостатньо, незважаючи на велику кількість наукових праць за тематикою, написаних упродовж останнього півсторіччя. Кусково-гладкі різницеві рівняння задаються функціями з межовою множиною, тобто такою множиною, на якій або сама функція, або її похідна розривна. А отже, математичний аналіз таких систем виходить за межі класичної методології, розробленої для гладких функцій. Контакт між деяким розв'язком і межовою множиною може привести до таких різких змін асимптотичної динаміки, які неможливі у випадку гладких різницевих рівнянь. Наприклад, може відбутися перехід від стійкої нерухомої точки до стійкого періодичного розв'язку будь-якого періоду чи навіть безпосередньо до хаотичного розв'язку. Подібні переходи вперше почали вивчати Дж. А. Йорк і Х. Е. Нуссе наприкінці минулого сторіччя й саме вони запропонували термін *біфуркації зіткнення з межею*. З дослідженнями біфуркацій такого роду пов'язана велика кількість праць, серед яких варто відмітити статті С. Банерджі, С. Гребоджі, Е. Мозекільде, Ж. Т. Жусубалієва, Л. Гардіні. Проте багато питань досі залишаються відкритими, існує потреба в розробці нових методів і підходів до дослідження асимптотичної поведінки розв'язків негладких різницевих рівнянь. Таким чином, тематика досліджень, викладених в дисертаційній роботі, є **актуальною**.

Дисертація написана англійською мовою і складається з анотацій українською й англійською мовами, списку публікацій здобувачки, переліку умовних позначень, вступу, п'яти розділів, висновків, переліку використаних джерел і додатку.

У **вступі** обгрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету і задачі роботи, визначено методи дослідження, наукову новизну результатів, практичне та теоретичне значення одержаних результатів. Наведено особистий внесок здобувачки та список конференцій і семінарів, на яких проводилась апробація отриманих результатів.

Перший розділ має оглядовий характер. Наведено історію розвитку теорії динамічних систем та теорії біфуркацій для різницевих рівнянь. Введено основні поняття, коротко згадані відомі результати, які стосуються рівнянь, заданих на дійсній прямій. А саме, введено рівняння, задане неперервною функцією асиметричного тенту, а також рівняння, задане на двох променях двома зростаючими лінійними функціями; нагадано аналітичні вирази поверхонь, які обмежують області періодичності й хаотичності.

Основний зміст дисертації зосереджено у розділах 2-5, особливо у другому та третьому.

У **другому розділі** (він містить 32 сторінки) викладено результати, які стосуються різницевого рівняння першого порядку, заданого кусково-лінійною неперервною функцією з двома межовими точками. При цьому кожному періодичному розв'язку ставиться у відповідність символічна послідовність, яка складається із трьох символів (L, M і R). Розглянуто випадок зіткнення інтервалу поглинання з однією із межових точок і досліджено, як змінюються умови біфуркацій хаотичних розв'язків внаслідок такого зіткнення (Теорема 2.6). У разі, коли інтервал поглинання містить обидві межові точки, досліджено періодичні й деякі хаотичні розв'язки системи. Так, у Теоремі 2.8 наведено необхідні й достатні умови існування стійких періодичних розв'язків, символічні послідовності яких містять лише символи L і R. Перетворення фазового простору в разі, коли ці розв'язки зникають внаслідок зіткнення з однією чи іншою межовою точкою, описані в Теоремах 2.11, 2.12. А саме отримано умови, за яких результатом такого зіткнення є періодичний розв'язок, а за яких — хаотичний. Також в Теоремах 2.13-2.16 надано необхідні й достатні умови існування стійких періодичних розв'язків, символічні послідовності яких місять лише один символ M. При цьому для отримання відповідних аналітичних виразів здобувачка запропонувала власне узагальнення рекурсивного методу заміщення відображень.

Третій розділ (стор. 107-151) містить найновіші й найбільш вагомі на думку опонента результати. У ньому вивчаються різницеві рівняння першого порядку, задані кусково-лінійними функціями з декількома точками розриву. У підрозділі 3.1 надано короткі відомості про дві відомі біфуркаційні структури, пов'язані з хаотичними розв'язками різницевого рівняння, заданого кусково-лінійною функцією з однією точкою розриву, —а саме, про структури додавання і приросту кількості смуг (зв'язних елементів). Усі відповідні якісні перетворення хаотичних розв'язків задаються гомоклінічними біфуркаціями нестійких нерухомих точок або періодичних розв'язків. Підрозділ 3.2 присвячено дослідженню різницевого рівняння, заданого кусково-лінійною симетричною функцією з двома точками розриву. А отже, множина визначення цієї функції складається з трьох поділів — двох променів та одного скінченого інтервалу. Описано узагальнення біфуркаційних структур приросту (Теорема 3.12) і додавання кількості смуг (Теорема 3.13) для атракторів, точки яких належать усім трьом поділам. При цьому, всі умови біфуркацій, які задають межі відповідних областей хаотичності у просторі параметрів, отримано в аналітичному вигляді. У підрозділі 3.3 розглянуто різницеве рівняння, задане кусково-лінійною функцією, яка проходить через початок координат і має дві точки розриву, не симетричні відносно нуля. У просторі параметрів такого рівняння виявлено біфуркаційну структуру нового типу, яка складається із областей хаотичності, проте майже всі якісні перетворення відповідних хаотичних розв'язків не пов'язані з жодними гомоклінічними біфуркаціями. В Теоремі 3.16 представлено детальний опис цієї біфуркаційної структури, наведено аналітичні вирази для всіх біфуркацій і надано в явному вигляді оцінки для максимальної кількості зв'язних елементів хаотичних розв'язків. Нововиявлені біфуркації хаотичних розв'язків, які не пов'язані з гомоклінічними біфуркаціями, розділено на два типи — зовнішню й внутрішню біфуркації зіткнення з межею. В підрозділі 3.4 отримано достатні умови для виникнення біфуркацій обох типів (Теореми 3.18 і 3.20). Хоча представлені в роботі приклади задано кусково-лінійними функціями, достатні умови записані в загальному вигляді й залишаються дійсними у разі, коли різницеве рівняння задане трьома довільними зростаючими, скрізь розширюючими функціями. Заключний підрозділ 3.5 містить результати чисельного дослідження хаотичних розв'язків різницевих рівнянь, заданих кусково-лінійними функціями з трьома й чотирма точками розриву. Описано особливий випадок послідовності двох біфуркацій: біфуркації зовнішнього зіткнення з межею для хаотичного розв'язку та його злиття з хаотичним репелером. Представлено порівняння випадків корозмірності один і два.

У **четвертому розділі**, який включає сім підрозділів та має 92 сторінки, викладені результати дослідження шести різних прикладних моделей розмірностей два і три. Підрозділ 4.1 є допоміжним і містить деякі додаткові факти щодо якісних перетворень інваріантних множин різного типу у системах різницевих рівнянь з розмірністю більшою за одиницю. Підрозділи 4.2 й 4.3 присвячено двовимірним системам різницевих рівнянь, заданим гладкими необоротними функціями. Для системи першого типу в Теоремах 4.8 і 4.9 побудовано нормальні форми для біфуркацій перевороту та Неймарка-Сакера. Для системи другого типу описано сценарій виникнення області поглинання змішаного типу (Твердження 4.19). У підрозділі 4.4 вивчаються властивості стійкості періодичних розв'язків для двовимірної системи різницевих рівнянь, заданої кусково-гладкою неперервною функцією. У Теоремі 4.25 отримано достатні умови для існування замкненої інваріантної кривої, якій ці періодичні розв'язки належать, а в Теоремі 4.27 описано властивості одновимірного відображення першого повернення. Підрозділ 4.5 присвячений дослідженню асимптотичних розв'язків певної негладкої системи трьох різницевих рівнянь. Доведено, що асимптотичними розв'язками системи є або нерухомі точки, або інваріантні множини, які належать певним прямим у фазовому просторі (Теорема 4.34). У підрозділі 4.6 розглянуто систему двох різницевих рівнянь, одне з яких задане розривною функцією. Чисельно досліджено стійкі періодичні розв'язки з різними відповідними символічними послідовностями. У підрозділі 4.7 досліджено деякі асимптотичні розв'язки двовимірної системи різницевих рівнянь, які задані дробово раціональними функціями, а отже, у фазовій площині існує множина, на якій система невизначена. В Теоремі 4.40 знайдено всі фокальні точки, в яких принаймні одна із функцій системи набуває невизначеності 0/0. Чисельно показано, що для певних значень параметрів одна із фокальних точок має басейн притягання додатної міри.

Останній **п'ятий розділ** дисертації присвячено вивченню негладких систем різницевих рівнянь особливого типу вищої розмірності, які моделюють певні економічні процеси. Для неавтономної версії системи досліджено властивості стійкості нерухомих точок. Зокрема, для нерухомої точки, яка належить внутрішності множини допустимих (з точки зору практичного застосування) значень, отримано достатні умови стійкості (Теореми 5.7, 5.8). Автономну версію системи досліджено, здебільшого, чисельно. Залежно від зміни певних параметрів системи описано біфуркації стійких періодичних розв'язків, які належать многовиду повної синхронізації й деяким многовидам часткової синхронізації. Для циклу, який відповідає економічному положенню рівноваги й належить многовиду повної синхронізації, отримано достатню умову стійкості.

На підставі аналізу дисертації А. А. Панчук в цілому вважаю, що отримані в ній результати є **новими**, наведені ідеї і твердження сформульовано чітко, теореми супроводжуються детальними доведеннями й переконливими вербальними обгрунтуваннями, що засвідчує їх **достовірність**. Безумовно позитивним моментом є доповнення теоретичних результатів досить якісними рисунками, створеними за допомогою комп'ютерних технологій. Результати мають як **теоретичну**, так і **практичну значимість**. З одного боку вони є внеском у подальший розвиток теорії негладких динамічних систем та теорії біфуркацій і хаосу. З іншого боку майже всі розглянуті у дисертації системи є моделями реальних процесів і явищ. До того ж, більшість результатів отримано в аналітичному вигляді, а отже, вони придатні для безпосереднього використання науковцями прикладних спеціальностей.

Основні результати **повністю представлені** у 21 статті в закордонних наукових фахових виданнях, 26 тезах і матеріалах доповідей конференцій, 2 статтях у збірках праць і 2 препринтах. Серед них 20 статей, що проіндексовані у наукометричній базі Scopus, причому 10 з них опубліковані у виданнях із квартиля Q1, а 9 — із квартиля Q2. Відповідно до п. 2 Наказу № 1220 МОН України від 23.09.2019 вказана 21 стаття зараховується як 59 наукових публікацій.

Також дисертація пройшла дуже хорошу **апробацію**. По результатах роботи зроблені доповіді на багатьох представницьких вітчизняних та міжнародних конференціях і семінарах.

За результатами вивчення дисертації та наукових публікацій А. А. Панчук **не виявлено** елементів **фальсифікації** та **плагіату**.

До зауважень слід віднести наступне:

1. Є певні недоліки у структурі дисертації. Так, введення основних понять й означень, а також огляд відомих результатів, віднесено загалом до першого розділу. Проте на початку розділів 3 й 4 (підрозділи 3.1 і 4.1) наводиться додаткова термінологія й певні набутки попередників, які не згадано в розділі 1. Це викликає відчуття не до кінця продуманої структури й іноді порушує логічну зв'язність тексту роботи.
2. Загалом висвітлення результатів побудовано за схемою: спочатку формулювання твердження, а потім доведення. Проте в деяких випадках спочатку наведено логічні міркування, які зрештою підсумовуються сформульованою теоремою (наприклад, Теореми 2.6 і 2.15). На думку опонента, слід було б вибрати уніфікований стиль викладення матеріалу.
3. Деякі результати, які отримано чисельно, підсумовані у вигляді тверджень (наприклад, Твердження 4.18 і 4.19 у підрозділі 4.3 та Твердження 4.36-4.38 у підрозділі 4.6), а деякі — ні (наприклад, результати підрозділу 3.5, а також, підрозділів 5.3 й, особливо, 5.4). Було б доцільно всі подібні результати, які не мають строгих аналітичних доведень, але підтверджені чисельними розрахунками на комп'ютері, коротко й чітко резюмувати. Це могло б поліпшити розуміння того, що саме дисертанткою зроблено.
4. На думку опонента, четвертий розділ вийшов занадто об'ємним (хоча це й природно з огляду на кількість розглянутих в ньому систем різницевих рівнянь). З іншого боку, деякі результати другого й третього розділів викладені занадто стисло. Можна було б опустити, наприклад, розділи 4.2 й 4.3, а натомість більш розширено подати результати, які стосуються узагальнення методу заміщення відображень (кінець підрозділу 2.1) та двох біфуркацій нового типу (підрозділ 3.4), які відносяться до найбільш вагомих.

5. У дисертаційній роботі і рефераті є ряд стилістичних і граматичних помилок. Проте з контексту завжди зрозуміло, про що йдеться, і зміст при цьому не спотворюється. Тому не наводимо список цих неточностей.

Приведені недоліки не впливають на загальну позитивну оцінку роботи в цілому.

На підставі наведеного вважаю, що:

- дисертаційна робота "Біфуркації необоротних гладких, кусково-гладких та розривних відображень" самостійно підготовлена дисертанткою;
- вона повністю відповідає спеціальності 01.01.02 — диференціальні рівняння;
- дисертанткою отримані значимі результати в області моделювання та дослідження динамічних систем, що описані системами кусково-гладких різницевих рівнянь, сукупність яких є значним досягненням в розвитку теорії негладких динамічних систем та теорії біфуркацій і хаосу;
- Реферат в цілому правильно і повно відображає зміст дисертації.

Вважаю, що дисертаційна робота Панчук Анастасії Анатоліївни "Біфуркації необоротних гладких, кусково-гладких та розривних відображень" за обсягом проведених наукових досліджень, їх актуальністю, науковим рівнем, значимістю та кількістю і якістю публікацій задовольняє всім вимогам "Порядку присудження та позбавлення наукового ступеня доктора наук", затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 17.11.2021 р. № 1197 (зі змінами) та вимогам до оформлення дисертації, затвердженими наказом Міністерства освіти і науки України від 12.01.2017 р. № 40 (зі змінами), а її авторка Панчук Анастасія Анатоліївна заслуговує на присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння.

Професор
кафедри моделювання складних систем
факультету комп'ютерних наук та кібернетики
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка
доктор фіз.-мат. наук, професор Д. Я. Хусаінов

Надійшов до докторської ради Д26.206.02 25.04.2025 р.
Учений секретар Інституту математики НАН України Ігор СОКОЛЕНКО