

ВІДГУК

офіційного опонента Швеця О. Ю. на дисертаційну роботу Панчук Анастасії Анатоліївни “Біфуркації необоротних гладких, кусково-гладких та розривних відображень” подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння

Актуальність теми дисертації.

Біфуркації інваріантних множин в необоротних та кусково-гладких динамічних системах привертають увагу дослідників вже протягом майже півстоліття. Існуючі класичні методи дослідження, в більшості випадків, не можуть бути застосовані для негладких систем, а тому необхідно розробляти абсолютно нові наукові підходи, які дозволять формально описати еволюцію нерегулярних, хаотичних об'єктів. Швидкий розвиток існуючих напрямів досліджень, або навіть виникнення нових галузей науки, вимагає від нас розуміння дедалі складніших об'єктів та дослідження динамічних систем, що містять функції зі зламами й розривами. Розуміння асимптотичних властивостей розв'язків таких систем дозволяє вирішувати практичні задачі, що виникають у численних сферах життя людини від хімії та фізики до економіки та суспільних наук.

Одним із перших, хто спробував формально описати складну хаотичну поведінку в динамічній системі, був французький математик А. Пуанкаре. Сьогодні навіть дехто вважає, що його трилогія “Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste” стала початком теорії динамічних систем. Пізніше запропонований Пуанкаре підхід об'єднання строгого аналізу з якісними геометричними методами був підтриманий Дж. Д. Біркгофом, який здебільшого відомий зараз завдяки своїй ергодичній теоремі. Варто також відмітити внесок у подальший розвиток теорії динамічних систем таких відомих науковців як О. О. Андронов, Л. С. Понтрягін, М. Пейшото, А. М. Колмогоров, В. І. Арнольд, Ю. К. Мозер, С. Смейл. Посиленню інтересу до вивчення саме нелінійних динамічних систем сприяли результати Е. Лоренца (опубліковані в 1963 році), який за допомогою чисельних досліджень моделі атмосферної конвекції виявив неперіодичні розв'язки з високою чутливістю до початкових умов, що робило майже неможливим точне довгострокове передбачення асимптотичної поведінки системи (так званий *ефект метелика*). Цей результат зумовив розуміння того, що в динамічних системах структурно стійкими можуть бути не лише нерухомі точки чи періодичні розв'язки, але й об'єкти складнішої форми. Проте більше 10-ти років знадобилось на те, щоб математики ризикнули

віднести слово “хаос” до списку строгих термінів. Лише в 1975 році Т.-Й. Лі і Дж. А. Йорк у своїй відомій статті “Period three implies chaos” назвали *хаотичною* множини, інваріантну відносно певного відображення, точки якої навіть асимптотично не періодичні. Далі варто згадати роботи П. Манневілья й І. Пома щодо переходу від стабільної періодичної поведінки до турбулентності у простих дисипативних динамічних системах. Вагомий внесок у розвиток наукового напрямку, який стосується вивчення математичних об’єктів складної форми, зробив і Б. Мандельброт, досліджуючи самоподібні множини, які він назвав фракталами. Відмітимо також праці П. Ешвіна, в яких він вивчає так звані *зрешечені басейни притягання*, тобто такі, які співпадають зі своєю межею з точністю до множини міри нуль (є скрізь “фрактальними”).

Справжній сплеск дослідницької діяльності, що стосується негладких систем, виник наприкінці минулого століття, після поширення знань про якісні локальні й глобальні перетворення фазового простору, які об’єднані під загальною назвою *біфуркації, спричинені розривами*. Такі біфуркації характерні для динамічних систем, заданих недиференційовними функціями (тобто чи сама функція, чи її похідна розривна). Фазовий простір такої системи розділений на підобласті, в кожній з яких вона визначена по-різному. Межі цих підобластей називаються *многовидами перемикання*. Завдяки контакту інваріантної множини з одним із таких многовидів структура фазового простору може якісно змінитись. З цим напрямком досліджень пов’язані праці Ф. Петерки, О. Ф. Філіппова, В. І. Бабіцького, М. Ді Бернардо та ін. Частковим випадком біфуркацій, спричинених розривами, є *біфуркації зіткнення з межею* для кусково-гладких відображень. Ці біфуркації часто приводять до різкої зміни асимптотичної поведінки, наприклад, переходу від стійкої нерухомої точки до стійкого циклу будь-якого періоду або навіть одразу до хаотичного атрактора, що неможливо в гладких системах. Дослідженню того, яким може бути результат зіткнення інваріантної множини з межею, присвячено численну кількість статей, наприклад, праці Г. Е. Нуссе, Дж. А. Йорка, С. Банерджі, С. Гребоджі, Л. Гардіні, В. Аврутіна. Набутки згаданих та інших авторів привели до справжньої революції в теорії динамічних систем та теорії біфуркацій.

Незважаючи на велику кількість робіт, присвячених вивченню властивостей розв’язків негладких динамічних систем, ще багато питань залишаються невирішеними. Наприклад, не проводились ґрунтовні дослідження асимптотичної поведінки розв’язків одновимірних кусково-монотонних відображень з декількома межевими точками, зокрема,

дослідження біфуркацій хаотичних атракторів для таких відображень. Тим не менш, саме такі відображення виникають природним чином як моделі для описання складної поведінки реальних об'єктів у багатьох прикладних галузях науки. Також недостатньо ще вивчені маловимірні відображення з певними особливостями, наприклад, з нескінченною кількістю нерухомих точок, двовимірні відображення, які допускають звуження на одновимірну інваріантну негладку замкнену криву, маловимірні розривні відображення, а також, негладкі багатовимірні відображення. Актуальність теми даного дослідження підтверджується також великою кількістю публікацій у математичних та міжгалузевих міжнародних наукових виданнях з високими рейтингами.

Оцінка обґрунтованості наукових результатів дисертації, їх достовірності та новизни.

Наукова новизна дисертаційного дослідження полягає в отриманні наступних пріоритетних результатів:

- Для сімейства одновимірних кусково-лінійних неперервних відображень з двома межовими точками отримано необхідні й достатні умови для існування стійких періодичних розв'язків, а також необхідні умови для існування хаотичних атракторів. Вичерпно описано відповідні біфуркаційні структури в параметричному просторі, з яких дві є узагальненнями вже відомих структур, а третю описано *вперше*. Результати отримано аналітично у вигляді явних та неявних функцій, що дозволяє застосовувати їх безпосередньо для конкретних прикладних задач.
- Для сімейства одновимірних кусково-зростаючих відображень, які мають дві точки розриву, отримано необхідні й достатні умови для існування хаотичних атракторів та їх біфуркацій, які призводять до різкої зміни конфігурації цих атракторів. Знайдено параметричні області співіснування різних хаотичних атракторів. В просторі параметрів вичерпно описано відповідні біфуркаційні структури. Зокрема, *вперше* описано біфуркаційну структуру збільшення кількості смуг, яка здебільшого складається з біфуркаційних поверхонь, що не пов'язані з гомоклінічними біфуркаціями нестійких нерухомих точок або циклів. Усі результати отримано аналітично.
- На прикладі сімейства одновимірних кусково-монотонних відображень з більш ніж однією точкою розриву для хаотичних атракторів описано біфуркації двох *нових типів*, а саме, біфуркації *зовнішнього та внутрішнього зіткнення з межею*. Показано, що ці біфуркації не пов'язані з жодними гомоклінічними біфуркаціями нестійких нерухомих

точок або циклів. Отримано достатні умови для виникнення таких біфуркацій. Також описано особливу біфуркацію розширення хаотичного атрактора, яка відбувається завдяки зіткненню хаотичного атрактора з хаотичним репелером. Розглянуто загальний випадок корозмірності один і особливий випадок корозмірності два.

- Для сімейства двовимірних кусково-гладких необоротних неперервних відображень вивчено періодичні розв'язки, які негладкій інваріантній кривій, яка складається з частин критичних множин різного рангу. Отримано достатні умови для існування цієї кривої. Показано, що в разі, коли вона існує, асимптотичну динаміку можна описати за допомогою відображення першого повернення, яке має принаймні одну точку зламу й одну точку розриву.
- Було розглянуто сімейство двовимірних необоротних кусково-гладких відображень, обидва компоненти якого мають вигляд дробу, а отже, у фазовій площині існує множина, на якій функція системи невизначена. Досліджено нерухомі точки відображення, отримано умови їх існування. Доведено, що одна з фокальних точок відображення (а саме, початок координат) належить своїй префокальній множині й для певних значень параметрів має басейн притягання додатної міри.
- Для сімейства неавтономних кусково-гладких необоротних відображень довільної розмірності досліджено нерухомі точки, отримано умови їх існування. Доведено, що одна з них завжди є нестійкою, друга — суперстійкою, а для третьої отримано достатні умови стійкості. Описано структуру критичної множини та чисельно досліджено деякі перетворення замкненої інваріантної кривої, яка народжується в результаті біфуркації Неймарка-Сакера.
- Для сімейства автономних кусково-гладких необоротних відображень довільної розмірності доведено, що вони не можуть мати нерухомих точок, а лише цикли, період яких кратний певному числу. Досліджено звуження вихідного відображення на многовид повної синхронізації, описано структуру області поглинання, а також отримано достатні умови для того, щоб асимптотичні розв'язки не містили точок, значення яких задаються малим параметром.

Дисертаційна робота А. А. Панчук виконана на високому науковому рівні. Можна стверджувати, що всі отримані результати є достовірними і строго обґрунтованими, бо супроводжуються правильними і повними доведеннями, а також чисельними експериментами й ілюстраціями, які добре збігаються з

аналітичними висновками. Достовірність підтверджується також рівнем наукових публікацій здобувачки та представленням основних результатів дисертаційної роботи на провідних міжнародних та українських конференціях.

Оцінка змісту дисертації, її завершеність та дотримання принципів академічної доброчесності.

Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, списку літератури і додатку зі списком публікацій і переліком апробацій результатів. Обсяг основного тексту роботи становить 259 сторінок, а загальний обсяг — 330 сторінок.

У вступі обговорюється актуальність теми дисертаційної роботи, висвітлено мету, завдання, об'єкт, предмет і методи дослідження, наукову новизну отриманих результатів, значимість роботи для теорії й практичних застосувань. Вказано особистий внесок здобувачки, представлено відомості про публікацію та апробацію основних результатів.

У першому розділі дисертаційної роботи наведено коротку історичну довідку за тематикою, представлено огляд робіт, що присвячені аналізу асимптотичної динаміки й біфуркацій в негладких відображеннях, висвітлено сучасний стан проблеми. Також тут введено основні означення, представлено загальну термінологію й низку результатів попередників, які використовуються далі.

У другому розділі дисертаційної роботи вивчено сімейство одновимірних бімодальних кусково-лінійних відображень, які мають дві точки зламу. Такі відображення виникають природним чином як моделі різноманітних прикладних явищ. А завдяки простій формі цих відображень, всі результати можна отримати в аналітичному вигляді.

Третій розділ присвячено дослідженню біфуркацій хаотичних атракторів для сімейств одновимірних кусково-монотонних відображень з кількома точками розриву. У підрозділах 3.2 й 3.3 розглянуто кусково-зростаючі лінійні відображення з двома точками розриву, які є, відповідно, симетричними й асиметричними відносно початку координат. Представлено й описано узагальнення двох відомих біфуркаційних структур, пов'язаних із хаотичними атракторами, які охоплюють всі три поділи відображення, та одну *цілком нову* біфуркаційну структуру. Підрозділ 3.4 присвячений дослідженню *зовнішньої* та *внутрішньої* біфуркацій зіткнення з межею для хаотичних атракторів, які були виявлені *вперше*. У підрозділі 3.5 розглянуто кусково-монотонні відображення з трьома та чотирма точками розриву, для яких досліджено особливий випадок біфуркації зовнішнього зіткнення з межею для хаотичного атрактора, яка

супроводжується його зіткненням із хаотичним репелером й подальшим різким розширенням атрактора.

У розділі чотири представлено результати досліджень шістьох різних двох- та тривимірних моделей конкретних прикладних задач. Для відповідних відображень вивчено біфуркації асимптотичних розв'язків різної природи й форми, наприклад, нерухомих точок, циклів різного періоду, притягальних гладких і негладких інваріантних кривих, хаотичних атракторів різної конфігурації, областей поглинання незмішаного і змішаного типів.

Заключний п'ятий розділ присвячено вивченню сімейств неавтономних та автономних кусково-гладких відображень вищої розмірності, які моделюють олігополістичний ринок. Через високу розмірність і нелінійність залучених функцій більшість результатів цього розділу отримано чисельно.

З огляду на вищевказане, можна стверджувати, що дисертаційна робота А. А. Панчук є завершеною науковою працею, її структура, обсяг та оформлення відповідають вимогам, що висуваються до докторських дисертацій. За результатами вивчення дисертації та наукових публікацій А. А. Панчук не виявлено елементів фальсифікації й академічного плагіату.

Теоретичне та практичне значення результатів роботи.

Результати досліджень, викладених в дисертаційній роботі, є здебільшого теоретичними й доповнюють важливі розділи теорії різницевого рівняння, теорії біфуркацій і теорії детермінованого хаосу. З іншого боку низка отриманих здобувачкою результатів можуть бути використані (а деякі з них уже використовуються) для описання певних реальних явищ у радіоелектроніці, передачі сигналів, економіці, психології розвитку.

Повнота викладу результатів дисертаційної роботи в наукових публікаціях і їх апробація.

Основні результати дисертації опубліковано у 51 друкованій праці, серед яких: 21 стаття у закордонних наукових фахових виданнях, 26 тез доповідей і матеріалів міжнародних наукових конференцій високого рівня, 2 статті — у збірках праць і 2 препринти. 20 статей проіндексовані у міжнародній наукометричній базі Scopus, причому 10 з них опубліковані у виданнях із квартилю Q1 відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, а 9 — у виданнях із квартилю Q2.

Результати, описані в дисертаційній роботі, повністю висвітлені у наукових публікаціях здобувачки та доповідались на багатьох міжнародних конференціях і наукових семінарах в Україні та за її межами.

Недоліки та зауваження до дисертаційної роботи.

- Узагальнення методу заміщення відображень на випадок символічних послідовностей, які складаються з трьох символів (стор. 96-100), викладено не надто чітко. Бажано було б більш переконливо обґрунтувати варіації підстановки для третього символу (M).
- У підрозділах 3.2 й 3.3 розглянуто симетричний і несиметричний випадок кусково-зростаючого відображення, заданого трьома лінійними функціями. На думку автора відгуку, тут бракує чіткого порівняння результатів, отриманих в обох випадках. При порушенні симетрії (при переході від симетричного до несиметричного випадку) інтуїтивно зрозуміло, як саме змінюються біфуркаційні структури в просторі параметрів. Проте відносно нової біфуркаційної структури — структури збільшення кількості смуг (яку описано за умов відсутності симетрії), — зовсім не очевидно, чи вона існує для симетричної версії відображення.
- Щодо біфуркацій двох нових типів (біфуркацій зовнішнього й внутрішнього зіткнення з межею для хаотичних атракторів), які описано в підрозділі 3.4, не зрозуміло, наскільки важливо, щоб межові точки були саме точками розриву. Чи можуть ці біфуркації виникати, якщо одна межева точка є точкою зламу? Варто було б розглянути цю задачу й під таким кутом. Те саме стосується й результатів, викладених у підрозділі 3.5: чи розглядуване відображення має бути обов'язково розривним?

В тексті також зустрічається певна кількість граматичних та стилістичних помилок. А саме:

- При посиланні на означення, леми, теореми тощо часто використано означений артикль, проте він не потрібний.
- Декілька раз замість “Jacobian” написано “Jacobi” (стор. 58, 237, 272, 274).
- На стор. 60 у рядку 13; в Означенні 1.31 у останньому рядку; на стор. 136 у рядку 10; на стор. 153 в рядку 2: артикль “the” варто замінити на “a”.
- На стор. 66 у передостанньому рядку має бути *t* замість *m*.
- На стор. 70 у рядку 3 треба замінити “harmonics” на “harmonic”.
- На стор. 75 у передостанньому рядку має бути “smooth continuous maps”.
- На стор. 99 у рядку 3 слово “with” зайве.
- На стор. 125 у другому абзаці в рядках 5, 6 має бути “a” замість “an”.
- На стор. 130 у реченні, яке йде після рівняння (3.42), має бути знак включення (а не приналежності).
- На стор. 154 в останньому рядку має бути “component”.
- На стор. 264 в сьомому рядку знизу мають бути малі *f* і *g* замість великих.

Висновок про дисертаційну роботу. Не зважаючи на зроблені зауваження, отримані в дисертаційній роботі результати та зроблені авторкою висновки є правильними та обґрунтованими. Основні результати дисертації є новими, отримані особисто авторкою і досить повно викладені в надрукованих нею роботах. Автореферат правильно відображає зміст дисертації.

Вважаю, що дисертаційна робота Панчук Анастасії Анатоліївни “Біфуркації необоротних гладких, кусково-гладких та розривних відображень” відповідає усім вимогам щодо докторських дисертацій — п.п. 7, 9 “Порядку присудження та позбавлення наукового ступеня доктора наук”, затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України № 1197 від 17.11.2021 р., а її авторка Панчук Анастасія Анатоліївна заслуговує на присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння.

Офіційний опонент
доктор фіз.-мат. наук, професор,
професор кафедри математичної фізики
та диференціальних рівнянь
Національного технічного університету
України “Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського”

О. Ю. Швець

Підпис О.Ю. Швеця засвідчую
Вчений секретар
Національного технічного університету
України “Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського”,
к.т.н., доц.



В.В. Холявко

Надійшов до докторської ради 226.206.02 22.04.2025р.

Учений секретар Інституту
математики НАН України



Горько Ігор СОКОЛЕНКО