



ЗАТВЕРДЖУЮ

Директор Інституту математики  
Національної академії наук України  
академік НАН України

Олександр ТИМОХА

\_\_\_\_\_ 2025 р.

## В И С Н О В О К

про наукову новизну, теоретичне й практичне значення результатів  
дисертаційної роботи ПАНЧУК Анастасії Анатоліївни

**“Біфуркації необоротних гладких, кусково-гладких та розривних  
відображень”,**

підготовленої на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук  
зі спеціальності 01.01.02 — диференціальні рівняння та 111 — математика  
(фізико-математичні науки)

Призначені рішенням Вченої ради Інституту математики НАН України від 4 лютого 2025 року, протокол № 2 рецензенти:

– Ткаченко Віктор Іванович — доктор фізико-математичних наук (01.01.02 – “диференціальні рівняння”), професор, завідувач відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України,

– Бойко Вячеслав Миколайович — доктор фізико-математичних наук (01.01.03 – “математична фізика”), завідувач відділу математичної фізики Інституту математики НАН України;

– Покутний Олександр Олексійович — доктор фізико-математичних наук (01.01.02 – “диференціальні рівняння”), провідний науковий співробітник відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України

за результатами попередньої експертизи докторської дисертації Панчук Анастасії Анатоліївни на тему “Біфуркації необоротних гладких, кусково-гладких та розривних відображень” (тема дисертації затверджена на засіданні Вченої ради Інституту математики НАН України 19 квітня 2022 року, протокол № 4, у період з 01.09.2022 р. по 31.08.2024 р. здобувачка навчалась на денній формі навчання у докторантурі Інституту математики НАН України за спеціальністю 111 — математика, наказ про зарахування до докторантури № 8а від 25 серпня 2022 р.), а також розглянувши наукові публікації, в яких висвітлені основні наукові результати, і за результатами фахового семінару (витяг з протоколу № 1 від 10 лютого 2025 р. розширеного засідання семінару відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України), ухвалили прийняти такий висновок:

**1. Актуальність теми дослідження.** Дисертаційну роботу А. А. Панчук присвячено вивченню властивостей асимптотичних розв’язків та їх біфуркацій для широкого кола кусково-гладких відображень, багато з яких представляють актуальні моделі реальних явищ у радіоелектроніці, економіці, психології розвитку, тощо. Дослідження кусково-гладких динамічних систем та хаосу, набули популярності в останні декади минулого століття. Особливо цьому сприяв швидкий розвиток існуючих, а також поява нових, галузей прикладних наук, які вимагали детального вивчення процесів, що

характеризувались навперемінністю та різким перемиканням станів. Оскільки математичний аналіз моделей, які враховують тертя, ковзання, зіткнення і т. ін., виходить за межі класичної методології гладких динамічних систем, виникла потреба у розв'язанні теорії для систем, що містять функції зі зламами й розривами. В ході відповідних досліджень було з'ясовано, що асимптотична динаміка негладких систем є значно багатшою у порівнянні із гладкими. Зокрема, було відкрито такі нові математичні явища, як біфуркації зіткнення з межею та вироджені біфуркації, що призводять до нетипових перетворень атракторів. Цей напрямок досліджень тісно пов'язаний з роботами Т. Й. Лі, Дж. А. Йорка, Х. Е. Нуссе, Ф. Петерки, А. Ф. Філіппова, М. Кунце, М. ді Бернардо, С. Банерджі, С. Гребоджі, Е. Мозекільде, Л. Гардіні, Ю. Майстренка, І. Сушко. Незважаючи на те, що цій тематиці присвячено вже тисячі робіт, теорія біфуркацій для кусково-гладких динамічних систем ще далека від завершення. Тому вивчення асимптотичної поведінки складних, хаотичних розв'язків таких систем та дослідження їх можливих перетворень в залежності від зміни параметрів відіграють важливу роль у розвитку цієї теорії. При цьому отримані результати мають безпосередні практичні застосування у фізиці, медицині, радіоелектроніці, економіці та суспільних науках.

З огляду на вище сказане, тематика дослідження є актуальною.

**2. Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертацію виконано у відділі диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України згідно з науково-дослідними темами “Якісний та асимптотичний аналіз систем диференціальних, функціонально-диференціальних та імпульсних рівнянь”, номер державної реєстрації 0111U002035; “Конструктивні та якісні методи аналізу систем диференціальних, функціонально-диференціальних, імпульсних та різницевих рівнянь”, номер державної реєстрації 0116U003121; “Конструктивні та якісні методи аналізу функціонально-диференціальних, імпульсних та різницевих систем”, номер державної реєстрації 0120U100191; “Еволюційні та стохастичні моделі в нелінійних системах природознавства”, номер державної реєстрації 0107U002027; “Дослідження рівноважних, коливних та перехідних процесів в математичних моделях природознавства”, номер державної реєстрації 0111U010373; “Аналітичні та групові методи дослідження математичних моделей сучасного природознавства”, номер державної реєстрації 0117U002119; “Чисельно-аналітичні методи теорії нелінійних коливань, функціонально-диференціальних та імпульсних систем”, номер державної реєстрації 0120U100180; “Інноваційні методи у теорії диференціальних рівнянь, обчислювальній математиці та математичному моделюванні”, номер державної реєстрації 0122U000670; “Математичне моделювання складних динамічних систем та процесів актуальних для безпеки держави”, номер державної реєстрації 0123U100853.

**3. Наукова новизна отриманих результатів.** Дослідження проведені у представленій дисертаційній роботі спрямовані на узагальнення відомих результатів, а також описання нових типів біфуркацій, невідомих раніше біфуркаційних структур та інших новітніх властивостей асимптотичних розв'язків для широкого кола кусково-гладких відображень різної розмірності. Зокрема, вперше було одержано низку нових важливих наукових результатів, а саме:

- Для одновимірного кусково-лінійного неперервного відображення з двома межовими точками знайдено області існування стійких періодичних розв'язків та хаотичних атракторів, а також необхідні та достатні умови для їх біфуркацій. Вичерпно описано відповідні біфуркаційні структури в параметричному просторі.

Результати отримано аналітично у вигляді явних та неявних функцій, що дозволяє застосувати їх безпосередньо для конкретних прикладних задач.

- Для одновимірного кусково-лінійного неперервного відображення з двома межовими точками отримано необхідні умови виродженості біфуркаційних структур, пов'язаних з періодичними розв'язками. В такому виродженому випадку також описано біфуркаційні структури, пов'язані з хаотичними атракторами.
- Для одновимірного кусково-зростаючого відображення, яке має дві точки розриву та є симетричними відносно початку координат, отримано необхідні та достатні існування хаотичних атракторів. Зокрема, знайдено параметричні області співіснування різних хаотичних атракторів. Усі результати отримано у вигляді явних та неявних функцій.
- Для одновимірного кусково-зростаючого відображення з двома точками розриву в просторі параметрів описано біфуркаційну структуру нового типу, пов'язану виключно з хаотичними атракторами. Біфуркаційні поверхні, які утворюють цю структуру, задаються двома новими біфуркаціями хаотичних атракторів, які не відповідають жодним гомоклінічним біфуркаціям. Показано, що хаотичні атрактори можуть бути одного з двох типів, для кожного з яких отримано явні оцінки для максимальної кількості смуг.
- При дослідженні одновимірного кусково-монотонного відображення з більш ніж однією точкою розриву для хаотичних атракторів описано біфуркації двох нових типів, а саме, біфуркації зовнішнього та внутрішнього зіткнення з межею. Показано, що ці біфуркації не пов'язані з жодними гомоклінічними біфуркаціями відштовхуючих періодичних точок. Отримано достатні умови для виникнення таких біфуркацій.
- Для двовимірного кусково-гладкого необоротного неперервного відображення отримано достатні умови для існування замкненої інваріантної кривої, що складається з сегментів критичних множин різного рангу. Побудовано одновимірне відображення першого повернення, яке діє на цій кривій, та доведено, що воно має якнайменш одну точку зламу та одну точку розриву. За допомогою відображення першого повернення в просторі параметрів описано біфуркаційні структури для періодичних розв'язків.
- Для тривимірного кусково-гладкого неперервного відображення показано, що множиною перетину всіх трьох його поверхонь перемикання є гладка крива. При цьому кожна точка цієї кривої є нерухомою. Отримано необхідні умови стійкості цих нерухомих точок. Доведено, що для будь-якої початкової точки її орбіта або прямує асимптотично до однієї з нерухомих точок, або назавжди залишається в так званому "положенні нерівноважності", для якого динаміка описується одновимірним відображенням Райкера.
- Для двовимірного розривного відображення отримано умови, за яких відбувається біфуркація порушення неперервності. Показано, що в площині параметрів в околі відповідної точки корозмірності два, вихідне двовимірне відображення може бути наближене одновимірним кусково-лінійним відображенням з однією точкою

розриву. Вичерпно описано три біфуркаційні структури в площині параметрів, зокрема, нову структуру, яка пов'язана зі стійкими розв'язками парних періодів.

- Для двовимірного необоротного кусково-гладкого відображення, обидва компоненти якого мають вигляд дробу, отримано умови існування нерухомих точок, вивчено властивості їх стійкості. Також знайдено всі фокальні точки відображення та відповідні префокальні множини. Доведено, що одна з цих точок (а саме, початок координат) належить своїй префокальній множині, а тому для певних значень параметрів вона має басейн притягання додатної міри.
- Для кусково-гладких необоротних відображень, які моделюють олігополістичний ринок, розмірності  $2n$  та  $3n$ , де  $n$  є параметром, досліджено нерухомі точки та властивості їх стійкості. Доведено, що за певних умов відображення може мати лише періодичні розв'язки, причому стійкість цих розв'язків залежить від того, до якого саме многовиду синхронізації вони належать. Досліджено асимптотичні розв'язки звуження вихідного відображення на многовид повної синхронізації. Для нього описано структуру множини поглинання, а також отримано достатні умови для того, щоб асимптотичні розв'язки не містили точок, значення яких задаються малим параметром.

**4. Ступінь обґрунтованості і достовірності наукових положень та висновків, сформульованих у дисертаційній роботі.** У дисертаційній роботі використано строгі математичні означення усіх досліджуваних об'єктів, які наводяться з усіма відповідними посиланнями. Отримані теоретичні результати мають чіткі і детально обґрунтовані математичні доведення, які проведені з використанням класичних методів теорії різницевих рівнянь, теорії стійкості, а також сучасних методів теорії динамічних систем, теорії біфуркацій, теорії хаосу. Аналітичні дослідження також гармонійно поєднуються з чисельними експериментами та побудовою схематичних і біфуркаційних діаграм.

**5. Теоретичне та практичне значення результатів роботи.** Дисертаційна робота Панчук А. А. носить теоретичний характер. Проте більшість розглянутих у цій роботі відображень виступають моделями для задач, які вивчаються вченими в різних галузях прикладної науки. Теоретичні результати, отримані в ході дослідження, можуть бути корисними для подальшого розвитку аналітичної та якісної теорії різницевих рівнянь, теорії біфуркацій, загальної теорії динамічних систем, теорії хаосу. Результати дисертації можуть бути використані, і вже використовуються, для вивчення та детального опису певних явищ в електротехніці, передачі сигналів, економіці, психології розвитку.

**6. Оцінка змісту дисертації.** Дисертацію виконано фаховою англійською мовою. Стиль подання матеріалу відповідає прийнятим у науково-дослідній літературі нормам. Дисертація є логічно завершеною науковою працею. Назва дисертації відповідає її змісту.

**7. Апробація результатів дисертації.** Основні результати роботи пройшли достатню апробацію, доповідалися і обговорювалися на багатьох міжнародних конференціях в Україні та за її межами, наукових семінарах відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань і семінарах у провідних європейських наукових центрах, де отримали схвальні відгуки, зокрема на:

- The 6th International Conference on Nonlinear Economic Dynamics (NED09), 31 May–2 June, 2009, Jönköping International Business School, Sweden.
- The 17th International Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, June 21–24, 2009, Rapperswil, Switzerland.
- Українському математичному конгресі, присвяченому 100-річчю з дня народження М. М. Боголюбова, 27–29 серпня, 2009, Інститут математики НАН України, Київ, Україна.
- International Workshop on Nonlinear Maps and their Applications (NOMA'09), September 10–11, 2009, University of Urbino, Italy.
- International Workshop on Delayed Complex Systems, October 5–9, 2009, Max Planck Institute for the Physics of Complex Systems, Dresden, Germany.
- The 18th IEEE Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, May 26–28, 2010, Technische Universität Dresden, Germany.
- Міжнародному семінарі “Nonlinear Dynamics on Networks”, 5–9 липня, 2010, Національна академія наук України, Київ, Україна.
- European Conference on Iteration Theory (ECIT) 12–17 September, 2010, Nant, France.
- The 3rd International Workshop “Modelli Dinamici in Economia e Finanza” (MDEF), September 16–18, 2010, University of Urbino, Italy.
- The 7th International Conference on Nonlinear Economic Dynamics (NED), 1–3 June, 2011, Cartagena, Spain.
- Міжнародній конференції “Диференціальні рівняння та їх застосування”, 8–10 червня, 2011, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна.
- International Workshop on Nonlinear Maps and their Applications (NOMA), September 15–16, 2011, University of Évora, Portugal.
- International Conference on Structural Nonlinear Dynamics and Diagnosis (CSNDD), April 30–May 2, 2012, Marrakech, Morocco.
- Міжнародній конференції “Emergent Dynamics of Oscillatory Networks”, 20–27 травня, 2012, Меллас, Крим, Україна.
- International Workshop “Modelli Dinamici in Economia e Finanza” (MDEF), September 20–22, 2012, University of Urbino, Italy.
- European Conference on Iteration Theory (ECIT), September 9–15, 2012, Ponta Delgada, São Miguel, Açores, Portugal.
- International Conference on Nonlinear Economic Dynamics (NED), 4–6 July, 2013, Siena, Italy.

- The 8th SICC International Tutorial Workshop “Topics in nonlinear dynamics. Bifurcations in Piecewise-Smooth Systems: Perspectives, Methodologies and Open Problems”, 11–13 September, 2013, University of Urbino, Italy
- International Conference on Nonlinear Economic Dynamics (NED), 25–27 June, 2015, Tokyo, Japan.
- Final GeComplexity Conference “The EU in the new complex geography of economic systems: models, tools and policy evaluation”, 26–27 May, 2016, Heraklion, Crete, Greece.
- The 9th International Workshop “Modelli Dinamici in Economia e Finanza” (MDEF), 23–25 June, 2016, University of Urbino, Italy.
- The 11th International Conference “Progress on Difference Equations” (PODE), 29–31 May, 2017, University of Urbino, Italy.
- The 10th International Workshop “Modelli Dinamici in Economia e Finanza” (MDEF), 6–8 September, 2018, University of Urbino, Italy.
- Міжнародній конференції “Nonlinear Economic Dynamics (NED)”, 4–6 вересня, 2019, Київ, Україна.
- International Conference on Difference Equations and Applications (ICDEA), 26–30 July, 2021, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina.
- International Conference on Nonlinear Economic Dynamics (NED), 13–15 September, 2021, Milan, Italy.
- European Conference on Iteration Theory (ECIT) 2022, 13–17 June, 2022, Reichenau an der Rax, Austria.
- International Conference on Difference Equations and Applications (ICDEA), 18–22 July, 2022, Paris-Saclay University, Gif-sur-Yvette, France.
- The 11th International Workshop “Modelli Dinamici in Economia e Finanza”, 8–10 September, 2022, University of Urbino, Italy.
- International Workshop “From Modeling and Analysis to Approximation and Fast Algorithms”, 2–6 December, 2022, Hasenwinkel, Germany.
- The 13th International Conference “Progress on Difference Equations” (PODE), 29–31 May, 2023, Università Cattolica del Sacro Cuore, Milano, Italy.
- International Conference on Nonlinear Economic Dynamics (NED), 19–21 June, 2023, University of Agder (UiA), Kristiansand, Norway.
- International Conference on Difference Equations and Applications (ICDEA), 17–21 July, 2023, Pibulsongkram Rajabhat University, Phitsanulok, Thailand.
- Workshop on Dynamic Macroeconomics in Honour of Ingrid Kubin, 19 September, 2023, Vienna University of Economics and Business, Austria.

- Міжнародній конференції “Complex Dynamical Systems” (CDS), 2–4 жовтня, 2023, Інститут математики НАН України, Київ, Україна.
- International Conference on Difference Equations and Applications (ICDEA), 24–28 June, 2024, Paris, France.
- семінарі Інституту теоретичної фізики Технічного університету м. Берлін, Німеччина, керівник семінару — проф. Е. Шьолль;
- семінарі науково-дослідницького центру CERUM Університету м. Умео, Швеція, керівник семінару — проф. Л. Вестін;
- семінарі факультету прикладної математики та статистики Політехнічного університету м. Картахена, Іспанія, керівник семінару — проф. Х. Кановас;
- семінарі Вищого технічного інституту Університету м. Лісабон, Португалія, керівник семінару — проф. Е. Олівейра;
- семінарі Школи бізнесу та права Університету Агдера, Крістіансан, Норвегія, керівник семінару — проф. Й. Юнгеільгес (J. Jungeilges);
- семінарі факультету математики для економічних, фінансових та актуарних наук Католицького університету Святого Серця, Мілан, Італія, керівник семінару — проф. Д. Раді.

**8. Повнота викладу матеріалів дисертації в публікаціях та особистий внесок автора.** Основні положення дисертаційної роботи висвітлені у 51 науковій публікації, з них 21 — стаття у закордонних наукових фахових виданнях, 2 статті — у збірках праць, а також 2 препринти та 26 публікацій у тезах доповідей і матеріалах міжнародних конференцій. 20 статей проіндексовані у міжнародній наукометричній базі Scopus та 19 — у базі Web of Science, з них 10 статей опубліковані у виданнях з квартиля Q1 відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, 9 — у виданнях з квартиля Q2. Серед публікацій по 4 статті в міжнародних журналах *Chaos, Solitons & Fractals* та *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2 статті в британському журналі *Proceedings of the Royal Society A* та по 2 статті в міжнародних журналах *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* та *Mathematics and Computers in Simulation*, по 1 статті в американських журналах *Chaos* та *Discrete & Continuous Dynamical Systems – B*, в міжнародних журналах *Computers and Mathematics with Applications*, *Nonlinear Dynamics* та *Annals of Operations Research*, у швейцарському журналі *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics* та в австрійському журналі *Grazer Mathematische Berichte*.

У дисертаційній роботі чітко відзначено внесок здобувачки у роботи, опубліковані разом з іншими авторами. Зокрема, у роботах міждисциплінарного характеру здобувачка відповідає за математичну частину дослідження: доведення теоретичних результатів, чисельні експерименти, побудову діаграм. Щодо спільних статей із В. Аврутіним та І. Сушко, здобувачкою вказано, що внесок у ці результати усіх авторів є рівноцінним.

Відповідно до п. 2 Наказу № 1220 МОН України від 23.09.2019 “Про опублікування результатів дисертації на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук” (зі змінами) вказана 21 стаття зараховується як 59 наукових публікацій.

**9. Дотримання принципів академічної доброчесності.** За результатами вивчення дисертаційної роботи та наукових публікацій Панчук А. А. не виявлено елементів фальсифікації та плагіату.

### ЗАГАЛЬНИЙ ВИСНОВОК

Дисертаційна робота ПАНЧУК Анастасії Анатоліївни на тему “Біфуркації необоротних гладких, кусково-гладких та розривних відображень”, що представлена на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук, є кваліфікаційною науковою працею, виконаною здобувачкою самостійно. Робота має важливе значення для розвитку теорії різницевого рівняння та теорії біфуркацій, а також суміжних галузей науки і техніки, містить обґрунтовані й достовірні висновки, характеризується єдністю змісту, за своїм науковим рівнем, практичною та теоретичною цінністю повністю відповідає спеціальності 01.01.02 — диференціальні рівняння та вимогам п. 7 та 9 “Порядку присудження та позбавлення наукового ступеня доктора наук”, затвердженого постановою Кабінету міністрів України від 17 листопада 2021 р., № 1197 “Деякі питання присудження (позбавлення) наукових ступенів” (зі змінами), та вимогам до оформлення дисертації, затвердженими наказом Міністерства освіти і науки України від 12.01.2017 № 40 (зі змінами).

**Рекомендувати** дисертаційну роботу “Біфуркації необоротних гладких, кусково-гладких та розривних відображень”, підготовлену ПАНЧУК Анастасією Анатоліївною на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук, до захисту на спеціалізованій вченій раді за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння.

Рецензенти:

доктор фіз.-мат. наук, професор,  
завідувач відділу  
диференціальних рівнянь та теорії коливань  
Інституту математики НАН України



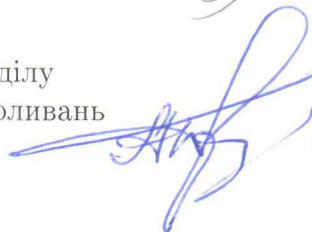
**Віктор ТКАЧЕНКО**

доктор фіз.-мат. наук,  
старший науковий співробітник,  
завідувач відділу математичної фізики  
Інституту математики НАН України



**Вячеслав БОЙКО**

доктор фіз.-мат. наук,  
провідний науковий співробітник відділу  
диференціальних рівнянь та теорії коливань  
Інституту математики НАН України



**Олександр ПОКУТНИЙ**