НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ПАНЧУК Анастасія Анатоліївна

УДК 517.9

Біфуркації необоротних гладких, кусково-гладких та розривних відображень

01.01.02 — диференціальні рівняння
111 — математика

Реферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 2025

Дисертацією є рукопис.
Роботу виконано в Інституті математики НАН України.

Науковий консультант:

доктор фізико-математичних наук, старший дослідник
БУРИЛКО Олександр Андрійович
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник відділу
диференціальних рівнянь та теорії коливань.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
ХУСАІНОВ Денис Ях'євич,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
професор кафедри моделювання складних систем;

доктор фізико-математичних наук, професор
ШВЕЦЬ Олександр Юрійович,
Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського",
професор кафедри математичної фізики
та диференціальних рівнянь;

доктор фізико-математичних наук, професор
ЧЕРЕВКО Ігор Михайлович,
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича,
завідувач кафедри математичного моделювання.

Захист відбудеться « 13 » травня 2025 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України і на офіційному сайті інституту за адресою: https://www.imath.kiev.ua/zahyst/.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **Марина НЕСТЕРЕНКО**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Дисертація присвячена аналізу асимптотичної динаміки і властивостей притягуючих інваріантних множин для широкого кола необоротних як неперервних, так і розривних кусково-гладких відображень. Вивчені стійкі періодичні розв'язки й хаотичні атрактори для цих відображень і ретельно проаналізовані різні локальні і глобальні аспекти їхньої асимптотичної поведінки. Зокрема, досліджені якісні перетворення хаотичних атракторів, вивчені біфуркації нових типів і описані невідомі раніше біфуркаційні структури.

Обґрунтування вибору теми дослідження. Біфуркації інваріантних множин у необоротних і кусково-гладких динамічних системах привертають увагу дослідників уже майже півсторіччя. Хоча впродовж тривалого часу у багатьох прикладних науках використовували класичні методи дослідження, які залучають лінійні (або принаймні гладкі) функції, наші знання про реальний світ, які постійно поглиблюються, свідчать про те, що лінійність і гладкість — це не таке вже й часте явище у природі. Швидкий розвиток сучасних наукових течій, а також поява нових напрямів досліджень або навіть нових галузей науки вимагає від нас докладного аналізу все складніших об'єктів і вивчення динамічних систем, які містять функції зі зламами й розривами. Розуміння асимптотичних властивостей розв'язків таких систем дає змогу розв'язувати практичні завдання, які виникають у багатьох сферах людського життя, починаючи від хімії й фізики до економіки й суспільних наук. Основна проблема полягає в тому, що класичні методи дослідження здебільшого не можуть бути застосовані для негладких систем, тому стає потрібним створення абсолютно нових підходів, зокрема тих, які допомагають формально описувати перетворення нерегулярних, дивних, хаотичних об'єктів.

Одним із перших науковців, хто спробував строго описати складну хаотичну поведінку динамічної системи, був французький математик А. Пуанкаре (H. Poincaré). Сьогодні навіть широко розповсюджена думка, що поштовхом для виникнення сучасної теорії динамічних систем була саме його відома праця “Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste”. У цій фундаментальній роботі строгий аналіз було доповнено якісними геометричними методами для опису глобальних властивостей розв'язків. Такий підхід став справжнім проривом у вивченні нелінійних диференціальних рівнянь. Ідеї Пуанкаре про те, що розуміння глобальної асимптотичної поведінки всіх розв'язків важливіше за точний аналітичний опис конкретних локальних траєкторій, пізніше підтримав Дж. Д. Біркгоф (G. D. Birkhoff), який також підкреслював важливість вивчення відображень із дискретним часом як засобу для розуміння складніших явищ, що виникають у диференціальних рівняннях. У середині 20-го сторіччя теорія динамічних систем бурхливо розвивалася завдяки іншим вагомим дослідженням, у яких розв'язували важливі теоретичні і прикладні задачі за допомогою різних методів і підходів. Серед них варто відзначити: роботи О. О. Андронова й Л. С. Понтрягіна, які стосуються структурної стійкості й локальних біфуркацій для систем на площині; узагальнення цих результатів на двовимірні многовиди бразильським математиком М. Пейшото (M. Peixoto); роботи А. М. Колмогорова, В. І. Арнольда і Ю. К. Мозера (J. K. Moser), які привели до появи КАМ-теорії; геометричну побудову знаменитої підкови С. Смейла (S. Smale) як прикладу структурно стійкого хаотичного відображення.

Посилення інтересу до вивчення складних асимптотичних розв'язків нелінійних динамічних систем виникло завдяки результатам американського метеоролога Е. Лоренца (E. Lorenz). Досліджуючи чисельно тривимірну модель для прогнозування погоди, науковець виявив, що для певних значень параметрів система має нескінченну множину неперіодичних розв'язків, відому сьогодні під назвою "атрактора Лоренца". Ці розв'язки демонстрували надзвичайно високу чутливість до початкових умов, а саме, навіть незначне відхилення від вихідної початкової точки згодом породжувало цілком інакшу траєкторію, що робило майже неможливим точне довготермінове передбачення асимптотичної поведінки (відомий *ефект метелика*). Сьогодні чутливість до початкових умов розглядають як ключову властивість хаосу.

Результати Лоренца впевнили багатьох дослідників у тому, що асимптотична динаміка охоплює безліч розв'язків, відмінних від положень рівноваги і граничних циклів. Перше використання слова "хаос" у контексті вивчення динамічних систем із дискретним часом (тобто різницевих рівнянь, які також називаються відображеннями) приписують Т.-Й. Лі (T.-Y. Li) і Дж. А. Йорку (J. A. Yorke), які показали, що з факту існування точки періоду три випливає існування незліченної множини, точки якої навіть асимптотично не періодичні. Відтоді інтерес до вивчення нелінійних динамічних систем і нерегулярної поведінки зростає експоненціально. Впродовж дальших кількох десятиріч створювали різні потужні аналітичні, якісні та геометричні методи, які застосовували до розв'зування ряду важливих реальних завдань із біології, хімії, фізики, економіки, екології, навіть психології й суспільних наук. Такі складні явища, як дивні нерегулярні атрактори, фрактальні множини, синхронізація хаотичних систем, зрешечені (riddled) басейни притягання й багато інших захопливих особливостей динамічних систем із нелінійними функціями досліджували у своїх роботах, наприклад, Б. Мандельброт (B. Mandelbrot), Е. Отт (E. Ott), С. Ґребоджі (C. Grebogi), І. Помо (Y. Pomeau), П. Манневіль (P. Manneville), П. Ешвін (P. Ashwin), О. Ю. Швець, О. А. Бурилко. На сьогодні теорія гладких нелінійних динамічних систем різного роду (різницевих, диференціальних, зокрема у частинних похідних, функціонально-диференціальних, інтегрально-диференціальних рівнянь) добре опрацьована, можливі біфуркації відповідних асимптотичних розв'язків ретельно вивчені й детально описані. Серед науковців, які зробили вагомий внесок у розвиток цієї галузі, варто відзначити О. М. Шарковського, М. Дж. Файгенбаума (M. J. Feigenbaum), Д. Рюеля (D. Ruelle), Ф. Такенса (F. Takens), Й. Уеду (Y. Ueda), М. Ено (M. Hénon), Дж. Гукенгаймера (J. Guckenheimer), Ф. Голмса (P. Holmes), І. Ґумовського (I. Gumowski), К. Міру (C. Mira), С. Віґґінса (S. Wiggins), А. М. Самойленка, О. А. Бойчука, Ю. О. Кузнєцова (Yu. A. Kuznetsov), Д. Я. Хусаінова, І. М. Черевка, А. Мацумото (A. Matsumoto), Ф. Сідаровського (F. Szidarovszky).

Наприкінці 20-го сторіччя разом із теорією гладких нелінійних динамічних систем дослідження негладких явищ набрали популярності у відповідь на зростання вимог із боку різних прикладних галузей медицини, механіки, техніки, економіки, суспільних наук. Наприклад, завдяки технологічному прогресові в радіоелектроніці для створення високоефективних перетворювачів енергії окрім нелінійних компонент почали використовувати комутаційні напівпровідники. Моделі для дослідження відповідної динаміки негладкі й демонструють різноманіття нових математичних явищ. В економічних науках стало актуальним вивчення поведінки фінансових і валютних ринків, оскільки притаманні їм різкі зростання і спади можуть мати серйозний вплив на реальну економіку. Це привело до появи низки робіт, пов'язаних із розривними динамічними системами, які моделюють ринки з різнорідними агентами. До того ж, суттєве посилення взаємодії між країнами й регіонами стало однією зі причин зростання нестабільності в економіці й суспільстві, що також сприяло появі ряду негладких моделей, які враховують складну взаємодію між різними групами й об'єктами. Існують також інші численні приклади негладких моделей, які описують поведінку ударних осциляторів і осциляторів із тертям, динаміку в системах керування з перемикачами, нейронну й серцеву діяльність тощо.

Проте математичний аналіз процесів, пов'язаних із тертям, дрижанням, ковзанням, зіткненнями, імпульсами, виходить за межі класичної методології гладких динамічних систем. Тому виникнення нових практичних задач супроводжувалося також численними теоретичними дослідженнями негладких динамічних систем загального типу. Було виявлено, що кусково-гладкі системи демонструють набагато цікавішу динаміку, ніж гладкі. Основна причина — це наявність у фазовому просторі певних множини, які розділяють його на кілька областей, що відповідають різним визначенням системної функції. Ці множини, на яких функція системи недиференційовна чи навіть розривна, називають *многовидами перемикання* (switching manifolds), а їхню сукупність — *межовою множиною* (border set). Коли при зміні параметрів певна інваріантна множина взаємодіє якимось чином із однією зі множин перемикання, то структура фазового простору може різко змінитися. Для всіх перетворень такого типу використовують загальний термін — *біфуркації, спричинені розривами* (discontinuity-induced bifurcations). Вивченню таких біфуркацій для динамічних систем із неперервним часом присвячені широко відомі роботи Ф. Петерки (F. Peterka), О. Ф. Філіппова, В. І. Бабіцького, М. І. Фейгіна, Б. Брольято (B. Brogliato), М. Кунце (M. Kunze), М. Ді Бернардо (M. Di Bernardo).

У кусково-гладких відображеннях частковий випадок біфуркації, спричиненої розривом, — це *біфуркація зіткнення з межею*, яка може виникнути, коли асимптотичний розв'язок торкається многовиду перемикання. Це може привести до таких перетворень фазового простору, які неможливі у випадку гладких відображень. Наприклад, може відбутися перехід від стійкої нерухомої точки до стійкого циклу будь-якого періоду. Серед перших, хто вивчав біфуркації такого роду, були Г. Е. Нуссе (H. E. Nusse) і Дж. А. Йорк (J. A. Yorke). Їхня фундаментальна стаття сприяла появі серії досліджень, присвячених опису наслідків біфуркацій зіткнення з межею, серед яких відомі праці С. Банерджі (S. Banerjee), С. Ґребоджі (C. Grebogi), Е. Мозекільде (E. Mosekilde), Ж. Т. Жусубалієва (Z. T. Zhusubaliev), М. Шанца (M. Schanz), Л. Ґардіні (L. Gardini), Дж. І. Біскі (G. I. Bischi), А. Альярі (A. Agliari), В. Аврутіна (V. Avrutin), І. Сушко. Також тут варто згадати й раніші праці Н. Н. Леонова, які, одначе, помітили лише недавно.

Інший тип біфуркацій, який виникаає в кусково-гладких відображеннях, — це *вироджені біфуркації*. Це аналоги гладких біфуркацій, пов'язаних із мультиплікатором, який перетинає одиничне коло, проте не приводять до стандартних результатів такого перетину через певну виродженість системних функцій у момент біфуркації (наприклад, якщо ці функції лінійні). Зауважимо, що серед представників кусково-гладких відображень кусково-лінійні відіграють справді важливу роль. Із одного боку, вони часто виступають природними моделями конкретних задач у різних прикладних галузях, як-от силова електроніка, клітинні нейронні мережі, передача сигналів, економіка тощо. З іншого боку, лінійність функцій системи спрощує її дослідження й дає змогу отримати більшість результатів в аналітичній формі. Один із найпростіших прикладів кусково-лінійних відображень — це відоме одновимірне відображення асиметричного тенту, яке має одну точку зламу (межову точку). Завдяки дослідженням Ш. Іто (S. Ito), Ш. Танаки (S. Tanaka), Х. Накади (H. Nakada), Ф. Такенса (F. Takens), Ю. Л. Майстренка, В. Л. Майстренка динаміку відображення асиметричного тенту повністю описано, що дає можливість використовувати його як нормальну форму для біфуркацій зіткнення з межею для неперервних відображень.

Одначе для відображень із кількома межовими точками (як зламу, так і розриву), а також для негладких відображень складної форми з нелінійностями і для кусково-гладких відображень вищої розмірності теорія біфуркацій іще далека від завершення. Тим не менш, такі відображення можуть описувати складну поведінку, властиву реальним явищам у багатьох прикладних сферах. Наприклад, у радіоелектроніці — динаміку у схемах Чуа особливої форми, у стійкій передачі сигналу — спектри хаотичних сигналів, в економіці — певні процеси наближення ціни до рівноважного значення, навіть у психології розвитку — формалізований динамічний процес узаємодії між викладачем і учнем. Розв'язування цих і багатьох інших завдань вимагає ретельного дослідження властивостей асимптотичних розв'язків, а також їхніх біфуркацій у кусково-гладких, неперервних і розривних відображеннях. Варто також зазначити, що аналітичні дослідження кусково-гладких динамічних систем зазвичай доповнюються й підтверджуються чисельними експериментами й комп'ютерним моделюванням, що приводить до появи нових наукових міждисциплінарних галузей.

Актуальність аналізу якісних перетворень фазового простору негладких відображень, пов'язаних із періодичними й хаотичними розв'язками, підтверджується наявністю тисяч статей на цю тематику, опублікованих у висорейтингових математичних, природничонаукових, економічних і міждисциплінарних журналах, зокрема Nonlinearity; Proceedings of the Royal Society A; Journal of Economic Dynamics and Control; Chaos, Solitons and Fractals. Більшість цих робіт написали математики у співавторстві з науковцями різноманітних прикладних спеціальностей, що свідчить про важливість теоретичних досліджень у цій галузі для моделювання складних реальних явищ.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України згідно з науково-дослідними темами "Якісний та асимптотичний аналіз систем диференціальних, функціонально-диференціальних та імпульсних рівнянь", номер державної реєстрації 0111U002035; "Конструктивні та якісні методи аналізу систем диференціальних, функціонально-диференціальних, імпульсних та різницевих рівнянь", номер державної реєстрації 0116U003121; "Конструктивні та якісні методи аналізу функціонально-диференціальних, імпульсних та різницевих систем", номер державної реєстрації 0120U100191; "Еволюційні та стохастичні моделі в нелінійних системах природознавства", номер державної реєстрації 0107U002027; "Дослідження рівноважних, коливних та перехідних процесів в математичних моделях природознавства", номер державної реєстрації 0111U010373; "Аналітичні та групові методи дослідження математичних моделей сучасного природознавства", номер державної реєстрації 0117U002119; "Чисельно-аналітичні методи теорії нелінійних коливань, функціонально-диференціальних та імпульсних систем", номер державної реєстрації 0120U100180; "Інноваційні методи у теорії диференціальних рівнянь, обчислювальній математиці та математичному моделюванні", номер державної реєстрації 0122U000670; "Математичне моделювання складних динамічних систем та процесів актуальних для безпеки держави", номер державної реєстрації 0123U100853.

Мета і завдання дослідження. Основна *мета* цього дослідження — це аналіз нових локальних і глобальних аспектів асимптотичної динаміки необоротних кусково-гладких відображень. Основна увага дисертації приділена доведенню існування і стійкості розв'язків різної форми, дослідженню якісних перетворень хаотичних атракторів, описові певних біфуркаційних структур і визначенню областей мультистабільності для широкого кола неперервних або розривних негладких і гладких необоротних відображень.

Об'єкт дослідження — це нелінійні необоротні, а також неперервні й розривні кусково-гладкі відображення різної розмірності, які залежать від параметрів, чимало з яких — це актуальні моделі реальних явищ, які мають велике значення в різних прикладних галузях.

Предмет дослідження — це існування, стійкість і якісні перетворення інваріантних множин різних типів, як-от нерухомі точки, періодичні точки, замкнуті інваріантні криві, хаотичні атрактори, інваріантні інтервали поглинання, хаотичні області поглинання незмішаного і змішаного типів, басейни притягання.

Завдання дослідження охоплюють:

- Розглянути кусково-лінійне неперервне відображення зі двома межовими точками (бімодальне відображення), яке є узагальненням відображення асиметричного тенту (кусково-лінійного неперервного відображення з однією межовою точкою); проаналізувати його асимптотичну динаміку, виявляючи стійкі нерухомі точки, періодичні орбіти й хаотичні атрактори; визначити для них відповідні умови біфуркацій; у просторі параметрів відображення описати відповідні біфуркаційні структури й порівняти їх із уже відомими; застосувати отримані теоретичні результати до конкретних прикладів, які моделюють певні економічні явища.

- Розглянути одновимірне кусково-монотонне відображення з симетричною системною функцією, яке має дві точки розриву; проаналізувати асимптотичну поведінку його орбіт, виявляючи області параметрів для регулярної й хаотичної динаміки; визначити умови біфуркацій для різних розв'язків; у просторі параметрів відображення описати біфуркаційні структури, пов'язані з хаотичними атракторами; дослідити можливість співіснування різних атракторів.

- Розглянути одновимірне кусково-монотонне відображення без симетрій, яке має дві точки розриву; проаналізувати його асимптотичну динаміку, зокрема пов'язану з хаотичними атракторами; визначити для них відповідні умови біфуркацій; у просторі параметрів відображення описати біфуркаційні структури, пов'язані з хаотичними атракторами; порівняти отримані результати в симетричному й несиметричному випадках.

- Розглянути одновимірне кусково-монотонне відображення з кількома точками розриву; вивчити можливі біфуркації хаотичних атракторів і визначити достатні умови їхнього виникнення; з'ясувати, чи може таке відображення зі двома межовими точками продемонструвати якісь нові біфуркаційні явища порівняно з кусково-монотонним відображенням із одним розривом; отримані результати також порівняти з ситуацією, коли відображення має більше двох точок розриву.

- Дослідити дво- і тривимірні нелінійні необоротні гладкі, неперервні кусково-гладкі й розривні кусково-гладкі відображення, які виступають моделями різноманітних актуальних проблем в економіці, екології, соціології і психології розвитку; для таких відображень вивчити асимптотичну поведінку їхніх орбіт різного типу; описати біфуркації стійких нерухомих точок і циклів, а також, за можливості, хаотичних атракторів; дослідити можливість існування притягуючих інваріантних замкнених кривих (гладких і негладких) і проаналізувати їхні можливі перетворення; дослідити звуження вихідного відображення на певні інваріантні множини меншої розмірності, якщо вони існують; також вивчити асимптотичні властивості розв'язків у разі, коли функція системи невизначена на певній підмножині фазового простору; у відповідних просторах параметрів розглянутих відображень детально описати біфуркаційні структури різної природи.

- Для кусково-гладкого необоротного відображення вищої розмірності, яке моделює олігополістичний ринок, проаналізувати можливість існування нерухомих точок і асимптотично періодичних розв'язків і вивчити властивості їхньої стійкості; дослідити можливість виникнення часткової й повної синхронізації; розглянути звуження вихідного відображення на многовид повної синхронізації, якщо він інваріантний; описати певні біфуркаційні сценарії, залежні від зміни значень параметрів.

Методи дослідження. В роботі використано класичні методи теорії різницевих рівнянь, теорії стійкості, а також сучасні методи теорії динамічних систем, теорії біфуркацій, теорії хаосу. Аналітичні дослідження гармонійно поєднуються з чисельними експериментами й побудовою схематичних і біфуркаційних діаграм. Математичні моделі опрацьовані й досліджені з урахуванням особливостей конкретних реальних явищ, а отримані теоретичні результати знаходять своєю чергою прикладну інтерпретацію, узгоджену з експериментальними даними.

Наукова новизна отриманих результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну й винесені на захист, нові й полягають у такому:

- Для сімейства одновимірних кусково-лінійних неперервних відображень зі двома межовими точками показано, що залежно від значень параметрів можуть існувати стійкі цикли будь-якого періоду, й отримано необхідні й достатні умови для їхнього існування. У просторі параметрів таких відображень описано три різні біфуркаційні структури. Дві з них — це узагальнення уже відомих біфуркаційних структур, а третю виявлено вперше. Вона містить як області періодичності, так і області хаотичності. Для відповідних періодичних розв'зків отримано необхідні й достатні умови їхнього існування і стійкості, а для хаотичних атракторів отримано достатні умови їхнього існування.

- Вивчено сімейство бімодальних відображень, для яких функції, визначені на двох зовнішніх поділах, проходять через початок координат. Це відображення моделює процес наближення ціни до рівноважного значення за певних умов. Показано, що відображення не може мати стійких періодичних точок (окрім нерухомої точки). У просторі параметрів вичерпно описано біфуркаційну структуру, пов'язану з хаотичними атракторами.

- Для сімейства одновимірних кусково-монотонних відображень, які мають дві точки розриву і симетртчні відносно початку координат, вичерпно описано дві різні біфуркаційні структури, пов'язані з хаотичними атракторами, точки яких належать до всіх трьох поділів. Зокрема, отримано необхідні й достатні умови існування хаотичних атракторів, які мають різну кількість зв'язних елементів, і визначено принципи, згідно з якими ці кількості змінюються внаслідок біфуркацій. Також знайдено параметричні області співіснування різних хаотичних атракторів.

- У просторі параметрів сімейства одновимірних кусково-зростаючих відображень зі двома точками розриву і без симетрій виявлено біфуркаційну структуру нового типу, пов'язану з хаотичними атракторами. Доведено, що біфуркаційні поверхні, які утворюють цю структуру, не пов'язані з жодними гомоклінічними біфуркаціями відштовхуючих періодичних точок. Показано, що хаотичні атрактори можуть належати до двох різних видів. Для атракторів обох видів отримано явні оцінки максимальної кількості їхніх зв'язних елементів.

- Для сімейства одновимірних кусково-монотонних відображень зі двома точками розриву виявлено дві нові біфуркації хаотичних атракторів, а саме: біфуркацію зовнішнього і внутрішнього зіткнення з межею. Показано, що ці біфуркації не пов'язані з жодними гомоклінічними біфуркаціями відштовхуючих нерухомих або періодичних точок. Для біфуркацій обох типів отримано достатні умови їхнього виникнення.

- Для сімейства одновимірних кусково-монотонних відображень, які мають більше двох точок розриву, досліджено особливий випадок біфуркації зовнішнього зіткнення з межею. Для певних значень параметрів ця біфуркація спричиняє різке розширення атрактора. Як показано, це перетворення відбувається через зіткнення атрактора з хаотичним репеллером, розташованим на границі басейну притягання. Показано, що у випадку корозмірності два різке розширення атрактора відбувається безпосередньо після зіткнення з межею.

- Розглянуто сімейства двовимірних гладких неборотних відображень, які моделюють певні важливі процеси в економіці й екології. Для нерухомих точок таких відображень досліджено загальні й деякі вироджені випадки біфуркації перевороту й біфуркації Неймарка-Сакера. Проаналізовано глобальні біфуркації, які пов'язані зі критичними множинами різного рангу й перетвореннями притягуючої інваріантної кривої. Вичерпно описано певні біфуркаційні сценарії, характерні для розглянутих відображень. Для певних значень параметрів показано існування хаотичної області поглинання.

- Для сімейства двовимірних кусково-гладких неперервних відображень отримано достатні умови існування притягуючої замкненої інваріантної негладкої кривої, яка складається з сегментів критичних множин різного рангу. Показано, що звуження вихідного двовимірного відображення на цю криву задається одновимірним відображенням першого повернення, яке має принаймні одну точку зламу і принаймні одну точку розриву.

- Досліджено сімейство тривимірних кусково-гладких неперервних відображень із межовою множиною, яка складається з трьох гладких поверхонь. Доведено, що перетин усіх трьох поверхонь перемикання — це гладка крива, кожна точка якої — нерухома. Отримано достатні умови стійкості цих нерухомих точок. Доведено, що для будь-якої початкової умови відповідна орбіта чи асимптотично прямує до однієї з нерухомих точок, а чи назавжди залишається в так званому "положенні нерівноважності". Цей асимптотичний розв'язок характеризується тим, що дві перші координати залишаються незмінними, а третя змінюється згідно з одновимірним відображенням Райкера з зафіксованими параметрами.

- Для сімейства двовимірних розривних відображень отримано достатні й необхідні умови біфуркації порушення неперевності. Показано, що у площині параметрів, в околі відповідної точки корозмірності два, вихідне двовимірне відображення може бути наближене одновимірним кусково-лінійним відображенням із однією точкою розриву. Крім того, описано три різні біфуркаційні структури, пов'язані з періодичними розв'язками. Зокрема, надано вичерпний опис біфуркаційної структури нового типу, яка містить області періодичності відповідні парним періодам.

- Для сімейства двовимірних необоротних кусково-гладких відображень, які мають дробово-раціональні члени в обох компонентах системної функції, знайдено всі фокальні точки й відповідні префокальні множини. Доведено, що одна з фокальних точок, а саме початок координат, належить своїй префокальній множині. Як наслідок, для певних значень параметрів ця фокальна точка має басейн притягання додатної міри.

- Досліджено сімейство $2n$-вимірних неавтономних кусково-гладких необоротних відображень, які моделюють олігополістичний ринок. Вивчено властивості нерухомих точок. Зокрема, для нерухомої точки, яка відповідає положенню економічної рівноваги Курно, отримано достатні умови стійкості.

- Для сімейства $3n$-вимірних кусково-гладких необоротних відображень, які моделюють олігополістичний ринок, доведено, що вони не можуть мати нерухомих точок, а лише періодичні розв'язки з періодами, кратними певному числу. Показано, що звуження вихідного відображення на многовид повної синхронізації задається тривимірними кусково-гладким відображенням. Для цього тривимірного відображення описано кілька типових біфуркаційних сценаріїв, залежних від зміни значень параметрів.

Практичне значення отриманих результатів. Дисертація містить математичні результати, які мають теоретичний характер. Проте більшість досліджуваних у цій роботі динамічних систем виступають актуальними моделями важливих завдань, які виникають у різних прикладних науках. Отримані під час дослідження теоретичні результати можуть бути використані для подальшого розвитку аналітичної і якісної теорії різницевих рівнянь, теорії біфуркацій, загальної теорії динамічних систем, теорії хаосу. Результати дисертації можуть бути використані (і їх уже використовують) для опису певних реальних явищ у радіоелектроніці, передачі сигналів, економіці, психології розвитку.

Особистий внесок здобувачки. Тематику роботи здобувачка визначила самостійно. Всі отримані в дисертації результати нові. З результатів, надрукованих у спільних зі співавторами статтях, до основної частини дисертації увійшли тільки такі, які здобувачка отримала самостійно, за винятком кількох результатів, де вклад співавторів рівноцінний. У роботах [2, 4, 14] внесок всіх співавторів до формулювань і доведень теоретичних результатів рівноцінний. У роботах, які мають міжгалузевий характер, авторці дисертації належить математична частина досліджень, а співавторам — описання економічної, екологічної чи психологічної мотивації виникнення моделей, побудова моделей і прикладна інтерпретація отриманих математичних результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи були представлені, їх доповідали й обговорювали на: International Conference "Nonlinear Economic Dynamics", 31 May-2 June, 2009, Jönköping, Sweden; International Workshop "Nonlinear Dynamics of Electronic Systems", June 21-24, 2009, Rapperswil, Switzerland; Українському математичному конгресі, присвяченому 100-річчю з дня народження М. М. Боголюбова, 27-29 серпня, 2009, Київ, Україна; International Workshop "Nonlinear Maps and their Applications", September 10-11, 2009, Urbino, Italy; International Workshop "Delayed Complex Systems", October 5-9, 2009, Dresden, Germany; International Workshop "Nonlinear Dynamics of Electronic Systems", May 26-28, 2010, Dresden, Germany; Міжнарожному семінарі "Nonlinear Dynamics on Networks", 5-9 липня, 2010, Київ, Україна; European Conference on Iteration Theory 2010, September, 12-17, 2010, Nant, France; International Workshop "Modelli Dinamici in Economia e Finanza", September 16-18, 2010, Urbino, Italy; International Conference "Nonlinear Economic Dynamics", June 1-3, 2011, Cartagena, Spain; Міжнародній конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування", 8-10 червня, 2011, Київ, Україна; International Workshop "Nonlinear Maps and their Applications", September 15-16, 2011, Évora, Portugal; International Conference "Structural Nonlinear Dynamics and Diagnosis", April 30-May 2, 2012, Marrakech, Morocco; Міжнародній конференції "Emergent Dynamics of Oscillatory Networks", 20-27 травня, 2012, Меллас, Крим, Україна; International Workshop "Modelli Dinamici in Economia e Finanza", September 20-22, 2012, Urbino, Italy; European Conference on Iteration Theory, September 9-15, 2012, Ponta Delgada, Sãn Miguel, Açores, Portugal; International Conference "Nonlinear Economic Dynamics", July 4-6, 2013, Siena, Italy; International Tutorial Workshop "Topics in nonlinear dynamics. Bifurcations in Piecewise-Smooth Systems: Perspectives, Methodologies and Open Problems", 11-13 September, 2013, Urbino, Italy; International Conference "Nonlinear Economic Dynamics", 25-27 June, 2015, Tokyo, Japan; Final GeComplexity Conference “The EU in the new complex geography of economic systems: models, tools and policy evaluation”, 26-27 May, 2016, Heraklion, Crete, Greece; International Workshop “Modelli Dinamici in Economia e Finanza”, 23-25 June, 2016, Urbino, Italy; International Conference “Progress on Difference Equations”, May 29-31, 2017, Urbino, Italy; International Workshop “Modelli Dinamici in Economia e Finanza”, September 6-8, 2018, Urbino, Italy; Міжнародній конференції “Nonlinear Economic Dynamics”, 4-6 вересня, 2019, Київ, Україна; International Conference “Difference Equations and Applications”, July 26-30, 2021, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina; International Conference “Nonlinear Economic Dynamics”, September 13-15, 2021, Milan, Italy; European Conference on Iteration Theory, June 13-17, 2022, Reichenau an der Rax, Austria; International Conference “Difference Equations and Applications”, July 18-22, 2022, Gif-sur-Yvette, France; International Workshop “Modelli Dinamici in Economia e Finanza”, September 8-10, 2022, Urbino, Italy; International Workshop “From Modeling and Analysis to Approximation and Fast Algorithms”, December 2-6, 2022, Hasenwinkel, Germany; International Conference “Progress on Difference Equations”, May 29-31, 2023, Milano, Italy; International Conference “Nonlinear Economic Dynamics”, June 19-21, 2023, Kristiansand, Norway; International Conference “Difference Equations and Applications”, July 17-21, 2023, Phitsanulok, Thailand; Workshop on Dynamic Macroeconomics in Honour of Ingrid Kubin, 19 September, 2023, Vienna, Austria; Міжнародній конференції “Complex Dynamical Systems”, 2-4 жовтня, 2023, Київ, Україна; International Conference “Difference Equations and Applications”, June 24-28, 2024, Paris, France; засіданнях Вченої ради Інституту математики НАН України; семінарах відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України, керівники семінару (в різні роки) — акад. НАН України, доктор фіз.-мат. наук, проф. А. М. Самойленко, акад. НАН України, доктор фіз.-мат. наук, проф. О. А. Бойчук, доктор фіз.-мат. наук, професор В. І. Ткаченко; семінарі “Математика та природничі науки” Інституту математики НАН України, керівники семінару — доктор фіз.-мат. наук О. Антонюк, доктор фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник С. Максименко; семінарі Інституту теоретичної фізики Технічного університету м. Берлін, Німеччина, керівник семінару — проф. Е. Шьолль (E. Schöll); семінарі науково-дослідницького центру CERUM Університету м. Умео, Швеція, керівник семінару — проф. Л. Вестін

(L. Westin); семінарі факультету прикладної математики та статистики Політехнічного університету м. Картахена, Іспанія, керівник семінару — проф. Х. Кановас (J. Canovas); семінарі Вищого технічного інституту Університету м. Лісабон, Португалія, керівник семінару — проф. Е. Олівейра (H. Oliveira); семінарі Школи бізнесу та права Університету Агдера, Крістіансан, Норвегія, керівник семінару — проф. Й. Юнґеільґес (J. Jungeilges); семінарі факультету математики для економічних, фінансових та актуарних наук Католицького університету Святого Серця, Мілан, Італія, керівник семінару — проф. Д. Раді (D. Radi).

Публікації. Результати дисертації висвітлено у 51 науковій публікації, з них 21 публікація — статті у закордонних наукових фахових виданнях, 26 — у тезах доповідей і матеріалах міжнародних конференцій, 2 статті — у збірках праць, а також 2 препринти. 20 статей проіндексовані у міжнародній наукометричній базі Scopus, а 19 — у базі Web of Science. Стаття [21] проіндексована у наукометричній базі MathSciNet. Статті [1-4, 6-10, 19] опубліковані у виданнях зі квартиля Q1 відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, статті [5, 12-18, 20] — у виданнях зі квартиля Q2. Відповідно до п. 2 Наказу № 1220 МОН України від 23.09.2019 вказана 21 стаття зараховується як 59 наукових публікацій.

Структура й обсяг дисертації. Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел, який містить 253 найменувань, і додатка зі списком публікацій і апробацією результатів. Повний обсяг роботи становить 330 сторінок друкованого тексту, із них список використаних джерел міститься на 28 сторінках, а додаток — на 15 сторінках.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі визначено об'єкт і предмет дослідження, обґрунтовано актуальність теми дисертації, проаналізовано сучасний стан розглянутих у дисертації проблем, сформульовано завдання дослідження, коротко описано основні результати, винесені на захист, охарактеризовано їхню наукову новизну, теоретичне і практичне значення, прокоментовано повноту викладення матеріалу в опублікованих працях та ступінь його апробації. Основну частину роботи складають п'ять розділів.

У **першому** розділі дисертації подано огляд літератури за темою, наведено коротку історичну довідку, зокрема стосовно виникнення понять складної динаміки й хаосу; описано відомі результати, а також окреслено коло питань, які залишилися відкритими; надано деякі означення і введено основну термінологію.

Розлянімо множину $X \subset \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, і нехай $F : X \to X$ деяка функція. Функція F задає систему різницевих рівнянь

$$x_{t+1} = F(x_t), \quad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

де початкова умова x_0 пробігає X. Тоді F називається *відображенням*, X — *простором станів* або *фазовим простором* відображення F або динамічної системи (1). Припустімо, що $X = \cup_{i=1}^{M} X_i \subset \mathbb{R}^m$, $M \in \mathbb{N}$, при цьому

(1.2.A.i) внутрішність $\mathrm{Int} X_i \neq \varnothing$, $i = \overline{1, M}$;

(1.2.A.ii) будь-який перетин замикань $\Gamma_{ij} := \overline{X_i} \cap \overline{X_j}$, $i \neq j$, — це чи многовид розмірності, меншої за m, а чи порожній.

Відображення $F : X \to X$, задане функціями $F_i \in C^1(X_i)$, $i = \overline{1, M}$, $F_i \neq F_j$, $i \neq j$, таким чином, що $F(x) = F_i(x)$ для $x \in \mathrm{Int} X_i$, називається *кусково-гладким*, множини X_i — *поділами*, кожна множина Γ_{ij} — *многовидом перемикання*, а їхня сукупність

$$\Gamma := \bigcup_{i=1}^{M} \bigcup_{j=1, j\neq i}^{M} \Gamma_{ij}$$

називається *межовою множиною.* Зауважимо, що для відображення F розмірності один замість многовидів перемикання маємо просто *межові точки* $\Gamma = \{d_1, \ldots, d_{M-1}\}$, $d_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, M-1}$. На множині Γ відображеня F може задаватись різними способами, залежно від конкретних завдань і застосувань. Це визначення не впливає загалом на асимптотичну динаміку системи (1).

Для будь-якої початкової умови $\bar{x} \in X$, множина $o(\bar{x}) = o_{\bar{x}} := \{x_t \,:\, x_t = F^t(\bar{x})\}_{t=0}^{\infty}$ називається *орбітою* відображення F або *розв'язком* системи (1). Тут F^0 — тотожне відображення (тобто $F^0(x) = x$ для будь-якого $x \in X$), функція F^t називається t*-ою ітерацією* F, а точка x_t називається t*-им образом* точки x_0. Будь-яка точка y, така, що $F(y) = x_0$, називається *прообразом* точки x_0 і часто позначається як x_{-1} або $F^{-1}(x_0)$. Якщо функція F — необоротна, то таких прообразів може існувати декілька чи не існувати жодного. Якщо $F^t(y) = x_0$, то y називається t*-им прообразом* точки x_0.

Точка $x^* \in X$, така, що $F(x^*) = x^*$, називається *нерухомою.* Множина точок $\mathcal{O} = \{x_t\}_{t=0}^{n-1} \subset X$, таких, що $x_t = F(x_{t-1})$, $t = \overline{1, n-1}$, $x_0 = F(x_{n-1})$, називається або *періодичним розв'язком* системи (1), або *циклом періоду* n відображення F, або просто n*-циклом.* Кожна точка x_t називається *періодичною.* Окрім простих регулярних розв'язків (тобто нерухомих і періодичних точок) динамічна система (1) (відображення F) може мати розв'язки (орбіти) складнішої структури, хаотичні множини. В роботі використане означення хаосу, яке ввів Р. Девані.

Означення 1.7. Кажуть, що відображення $F : X \to X$ має *чутливу залежність від початкових умов*, якщо $\exists\, \delta > 0$, таке, що $\forall\, x \in X$ і будь-якого околу $U(x)$ існують $y \in U(x)$ та $t \in \mathbb{Z}_+$, такі, що $|F^t(x) - F^t(y)| > \delta$.

Означення 1.8. Відображення $F : X \to X$ називається *топологічно транзитивним*, якщо для будь-якої пари відкритих множин $U, V \subset X$ існує $t \in \mathbb{Z}_+$, таке, що $F^t(U) \cap V \neq \varnothing$.

Означення 1.9. Розгляньмо множину $\mathcal{A} \subseteq X$, інваріантну відносно F. Відображення F називається *хаотичним у сенсі Девані* на множині $\mathcal{A}$, якщо

(1) $F|_{\mathcal{A}}$ має чутливу залежність від початкових умов;

(2) $F|_{\mathcal{A}}$ топологічно транзитивне;

(3) множина періодичних точок F щільна в $\mathcal{A}$.

Множину $\mathcal{A}$ також часто називають *хаотичною.*

Означення 1.10. Інваріантна множина $\mathcal{A}$ називається *притягуючою*, якщо існує $U(\mathcal{A})$, такий, що $\forall\, x \in U$, за винятком множини нульової міри Лебега, існує $\lim_{t\to\infty} F^t(x) \in \mathcal{A}$. Якщо $\mathcal{A}$ містить щільну орбіту, то її називають *топологічним атрактором* або просто *атрактором.*

Для відображення F розмірності $m = 1$ хаотичний атрактор — це сукупність інтервалів, інваріантних відносно F.

Означення 1.31. Топологічний атрактор $\mathcal{Q} = \cup_{i=1}^{n} B_i$, $B_i = [a_i, b_i]$, $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_n < b_n$, називається n*-частинним* або n*-смуговим хаотичним атрактором* F, якщо обмеження $F|_{\mathcal{Q}}$ хаотичне. Інтервали B_i називаються *смугами* $\mathcal{Q}$, а інтервали $G_i = (b_i, a_{i+1})$, $i = \overline{1, n-1}$, називаються *порожніми проміжками.* Заради стислості ми позначаємо $\mathcal{G} = \cup_{i=1}^{n-1} G_i$. Область у просторі параметрів, пов'язана зі значеннями параметрів, для яких існує $\mathcal{Q}$, називається *областю хаотичності*.

Для необоротних і негладких відображень важливу роль також відіграє поняття критичної множини, яке з'явилося як узагальнення поняття локального екстремуму для функцій. Для довільного гладкого відображення *критична множина* (critical set) CS визначається як геометричне місце таких точок у фазовому просторі відображення, які мають якнайменш два збіжні прообрази. Ці прообрази належать множині CS_{-1}, яка ще називається *множиною збіжних прообразів* (set of merging preimages) і належить множині точок, у яких детермінант матриці Якобі відображення F обертається в нуль. Для кусково-гладкого неперервного відображення множина CS_{-1} додатково може містити точки многовидів перемикання Γ_{ij}, якщо вони відповідають принаймні двом збіжним прообразам. Тоді критична множина CS містить також відповідні образи $F(\Gamma_{ij})$. Якщо ж відображення F розривне, то множина CS_{-1} містить точки розриву, які вочевидь відповідають не двом збіжним прообразам, а лише одному прообразові, який з'являється чи зникає. Тоді множина CS також містить образи точок розриву, отримані за допомогою двох відповідних функцій. Тобто якщо відображення F розривне на множині Γ_{ij} для деяких i та j, то образи $F_i(\Gamma_{ij})$ і $F_j(\Gamma_{ij})$ належать критичній множині CS. Для множини CS її k-ий образ $F^k(CS)$, $k \in \mathbb{N}$, називається *критичною множиною рангу* k й позначається як CS_k. У випадку, коли розмірність $m = 2$, критична множина — це крива чи сукупність кривих і її часто позначають як LC (від французького "ligne critique"). У випадку, коли розмірність $m = 1$, критична множина — це скінченна множина (критичних) точок.

Критичні множини часто виступають ключовими об'єктами, завдяки яким відбуваються якісні зміни інваріантних множин і їхніх басейнів притягання. Зокрема, сегменти критичних множин різних рангів обмежують області поглинання (absorbing domains).

Означення 1.18. Множина $\Delta \subset X$ називається *областю поглинання незмішаного типу*, якщо

(1) $F(\Delta) \subseteq \Delta$;

(2) існує окіл $U(\Delta)$, такий, що $F(U(\Delta)) \subset U(\Delta)$ і будь-яка точка $x \in U(\Delta) \setminus \Delta$ має образ скінченого рангу у внутрішності $\mathrm{Int}\Delta$;

(3) межа $\partial\Delta$ складається зі скінченної кількості підмножин критичних множин різного рангу.

Означення 1.19. Множина $\Delta \subset X$ називається *областю поглинання змішаного типу*, якщо

(1) $F(\Delta) \subseteq \Delta$;

(2) існує окіл $U(\Delta)$, такий, що $F(U(\Delta)) \subset U(\Delta)$ і майже всі точки $x \in U(\Delta) \setminus \Delta$ мають образи скінченого рангу у внутрішності $\mathrm{Int}\Delta$;

(3) межа $\partial\Delta$ складається зі скінченної кількості підмножин критичних множин різного рангу і підмножин нестійкої множини певної сідлової нерухомої точки (чи сідлового циклу), або навіть підмножин кількох нестійких множин різних сідлових нерухомих точок (циклів).

Зауважимо, що для відображення F розмірності один область поглинання — це *інтервал поглинання*, який може бути лише незмішаного типу.

У **другому** розділі дисертації розглянуті кусково-лінійні неперервні відображення зі двома межовими точками, а саме:

$$f : x \mapsto f(x) = \begin{cases} f_{\mathcal{L}}(x) = a_{\mathcal{L}}x + \mu_{\mathcal{L}}, & x < d_{\mathcal{L}}, \\ f_{\mathcal{M}}(x) = a_{\mathcal{M}}x + \mu_{\mathcal{M}}, & d_{\mathcal{L}} < x < d_{\mathcal{R}}, \\ f_{\mathcal{R}}(x) = a_{\mathcal{R}}x + \mu_{\mathcal{R}}, & x > d_{\mathcal{R}}, \end{cases} \tag{2}$$

$$\text{з} \quad f_{\mathcal{L}}(d_{\mathcal{L}}) = f_{\mathcal{M}}(d_{\mathcal{L}}), \quad f_{\mathcal{M}}(d_{\mathcal{R}}) = f_{\mathcal{R}}(d_{\mathcal{R}}). \tag{3}$$

Це відображення має вісім параметрів $\{a_{\mathcal{L}}, a_{\mathcal{M}}, a_{\mathcal{R}}, \mu_{\mathcal{L}}, \mu_{\mathcal{M}}, \mu_{\mathcal{R}}, d_{\mathcal{L}}, d_{\mathcal{R}}\} \subset \mathbb{R}$, $d_{\mathcal{L}} < d_{\mathcal{R}}$, але лише шість із них незалежні, оскільки з умов неперервності (3) два будь-які параметри можна виразити через шість інших. Проте, зважаючи на те, що отримані теоретичні результати передбачається використовувати, зокрема при розв'язанні конкретних прикладних задач, у всіх аналітичних виразах залишено всі вісім параметрів.

Відображення f задане у (2), (3), яке ще називають бімодальним відображенням, важливе з двох причин. Із одного боку, воно природнім чином виникає при розв'язанні різних прикладних задач.

Наприклад, воно виступає моделлю для ланцюга Чуа певної конструкції із запізненням; його використовують для побудови ефективного генератора хаосу в телекомунікаціях і опрацюванні зображень; воно моделює процес наближення ціни до рівноважного значення при стабілізації економіки тощо. З іншого боку, бімодальне відображення — це узагальнення відомого відображення асиметричного тенту (skew tent) і для нього умови біфуркацій можуть бути отримані в аналітичній формі, завдяки лінійності його функцій.

У дисертації для бімодального відображення визначено області з обмеженими і необмеженими розв'язками. Вичерпно описано три різні біфуркаційні структури у просторі параметрів. Перша з них — структура асиметричного тенту (skew tent map structure) — існує в околі значень параметрів, які відповідають біфуркації інтервалу поглинання, який розширюється з двох сусідніх поділів на всі три поділи. Друга — структура додавання періодів (period adding structure) — складається лише з областей періодичності та є узагальненням біфуркаційної структури, відомої для розривного кусково-лінійного відображення з однією межовою точкою. Третю структуру — структуру зубців (fin structure), — яка містить як області періодичності, так і області хаотичності, виявлено вперше. Для циклів отримано необхідні й достатні умови їхнього існування і стійкості. Для хаотичних атракторів отримано достатні умови їхнього існування.

Також було розглянуто конкретний приклад бімодального відображення, яке моделює економічний процес наближення ціни до рівноважного значення. Особливість цього прикладу полягає в тому, що функції $f_{\mathcal{L}}$ і $f_{\mathcal{R}}$ обидві проходять через початок координат. Через це у просторі параметрів біфуркаційні структури, пов'язані з періодичними розв'язками, вироджені. Описано природу цього виродження й отримано достатні умови існування хаотичних атракторів.

У **третьому** розділі дисертації досліджені кусково-монотонні відображення з принаймні двома межовими точками, для яких вивчені біфуркації хаотичних атракторів. Розгляньмо такі відображення з двома точками розриву:

$$f : x \mapsto f(x) = \begin{cases} f_{\mathcal{L}}(x) = (a+b)x - \mu, & x < d_{\mathcal{L}}, \\ f_{\mathcal{M}}(x) = ax, & d_{\mathcal{L}} < x < d_{\mathcal{R}}, \\ f_{\mathcal{R}}(x) = (a+b)x + \mu, & x > d_{\mathcal{R}}. \end{cases} \quad (4)$$

Відображення такого типу — це досить популярні моделі для зміни ціни активу підвищеного ризику (акції) на фінансовому ринку з різнорідними агентами. Такі моделі, запропоновані початково у працях Р. Дея (R. Day) та В. Хуанґа (W. Huang), досліджувало чимало економістів у співпраці зі прикладними математиками. Отримані за їхньої допомоги теоретичні результати мають також емпіричне підтвердження на основі реальних даних, наприклад, у роботах К. Гомса (C. Hommes), Р. Франке (R. Franke), Л. Менкгофа (L. Menkhoff), М. Тейлора (M. Taylor) та інших.

За умови $d_{\mathcal{R}} = -d_{\mathcal{L}} = z$ функція f симетрична. В дисертаційній роботі у просторі параметрів такого відображення вичерпно описано дві біфуркаційні структури, які є узагальненнями структур додавання кількості смуг (bandcount adding) і приросту кількості смуг (bandcount incrementing), характерних для кусково-монотонного відображення, заданого на двох поділах і з однією точкою розриву. На відміну від цих уже відомих біфуркаційних структур, структури, описані в дисертаційній роботі, складаються з областей для хаотичних атракторів, точки яких належать до всіх трьох поділів $I_{\mathcal{L}}$, $I_{\mathcal{M}}$ та $I_{\mathcal{R}}$, а також містять параметричні області співіснування двох різних хаотичних атракторів. Зауважимо, що таке співіснування неможливе для відображень із однією межовою точкою, розглянутих у роботах попередників.

У разі, коли $b = 0$, але симетрія порушується, тобто $d_{\mathcal{R}} \neq -d_{\mathcal{L}}$, у просторі параметрів виявлено біфуркаційну структуру нового типу, яка була названа структурою збільшення кількості смуг (bandcount accretion). Як відомо, для кусково-монотонних відображень із однією межовою точкою якісні перетворення хаотичних атракторів пов'язані з гомоклінічними біфуркаціями відштовхуючих періодичних точок, розташованих на межі басейну притягання. Натомість біфуркаційні поверхні, які утворюють структуру збільшення кількості смуг, не пов'язані з жодними критичними гомоклінічними орбітами. Зміна кількості смуг хаотичного атрактора стається лише завдяки контакту двох різних критичних точок певних рангів.

Нехай межові точки відображення f типу (4) дорівнюють $d_{\mathcal{L}} = -1$, а $d_{\mathcal{R}} = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Позначмо критичні точки як

$$c_{\mathcal{L}} = f_{\mathcal{L}}(-1),\ c_{\mathcal{M}_-} = f_{\mathcal{M}}(-1),\ c_{\mathcal{M}_+} = f_{\mathcal{M}}(1+\varepsilon),\ c_{\mathcal{R}} = f_{\mathcal{R}}(1+\varepsilon). \quad (5)$$

Також введімо додаткові позначення для частин інтервала поглинання $J = [J_{\min}, J_{\max}]$, а саме: $J^{\mathcal{L}} = [J_{\min}, 0)$ і $J^{\mathcal{R}} = (0, J_{\max}]$.

Теорема 3.16. *Для фіксованого значення параметра a розглянімо область*

$$D_{\mathrm{accr}} = \{(\varepsilon,\mu) : \mu > -\varepsilon - a^2 - 1,\ \mu < -a^2(1+\varepsilon),\ \mu < -a(a+1)\}, \quad (6)$$

обмежену біфуркаційними поверхнями $\upsilon^{c_{\mathcal{M}_-},c_{\mathcal{R}}}$ *(що відповідає контакту* $c_{\mathcal{M}_-} = c_{\mathcal{R}}$*),* $\zeta_{\mathcal{M}}^{c^1_{\mathcal{M}_+}}$ *(що відповідає гомоклінічній біфуркації* $x^*_{\mathcal{M}} = c^1_{\mathcal{M}_+}$*) та* $\upsilon^{c_{\mathcal{L}},c^2_{\mathcal{M}_-}}$ *(що відповідає контакту* $c_{\mathcal{L}} = c^2_{\mathcal{M}_-}$*). У цій області існує біфуркаційна структура, яку можна описати таким чином:*

- *Перший ярус структури складається з областей хаотичності* $\mathcal{C}^{n+1}_{\mathcal{M}}$*,* $n = \overline{1,\bar{n}}$*, кожна з яких пов'язана з хаотичним атрактором* $\mathcal{Q}^{n+1}_{\mathcal{M}} = \cup_{i=1}^{n+1} B_i$ *з* $B_1 \subset J^{\mathcal{L}}$ *і* $\cup_{i=2}^{n+1} B_i \subset J^{\mathcal{R}}$*, де*

$$\bar{n} = \left[\frac{\ln(a+1)}{\ln a}\right], \quad (7)$$

  $[\cdot]$ *позначає цілу частину числа.*

- *Для* $n < \bar{n}$ *область* $\mathcal{C}^{n+1}_{\mathcal{M}}$ *обмежена біфуркаційними поверхнями* $\upsilon^{c^{n+1}_{\mathcal{M}_-},c^2_{\mathcal{M}_+}}$ *(що відповідає контакту* $c^{n+1}_{\mathcal{M}_-} = c^2_{\mathcal{M}_+}$*) й* $\upsilon^{c^n_{\mathcal{M}_-},d_{\mathcal{R}}}$ *(що відповідає контакту* $c^n_{\mathcal{M}_-} = d_{\mathcal{R}}$*), аналітичні вирази для яких — це, відповідно,*

$$\mu = -a^3\frac{1+\varepsilon+a^{n-1}}{a^n+a-1} \quad \text{і} \quad \mu = -a^2 - \frac{1+\varepsilon}{a^{n-1}}. \quad (8)$$

  Область $\mathcal{C}^{\bar{n}+1}_{\mathcal{M}}$ *обмежена* $\upsilon^{c^{\bar{n}+1}_{\mathcal{M}_-},c^2_{\mathcal{M}_+}}$*,* $\zeta_{\mathcal{M}}^{c^1_{\mathcal{M}_+}}$ *та* $\upsilon^{c_{\mathcal{L}},c^2_{\mathcal{M}_-}}$*.*

- *Між двома сусідніми областями* $\mathcal{C}^{(n-1)+1}_{\mathcal{M}}$ *і* $\mathcal{C}^{n+1}_{\mathcal{M}}$*,* $n \geq 2$*, першого ярусу існує нескінчена кількість областей* $\mathcal{C}^{n+k}_{\mathcal{M}}$*,* $k \geq 2$*, другого ярусу, кожна з яких відповідає хаотичному атракторові* $\mathcal{Q}^{n+k}_{\mathcal{M}} = \cup_{i=1}^{n+k} B_i$*, який має* $\cup_{i=1}^{k} B_i \subset J^{\mathcal{L}}$ *і* $\cup_{i=k+1}^{n+k} B_i \subset J^{\mathcal{R}}$*. Зі збільшенням k області* $\mathcal{C}^{n+k}_{\mathcal{M}}$ *акумулюються до кривої* $B_n(a)$*, заданої перетином двох поверхонь*

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon}_n := \frac{1}{a^n-1}, \quad \mu = \bar{\mu}_n := -\frac{a^{n+2}}{a^n-1}. \quad (9)$$

- *Дві сусідні області $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}^{n+k}$ й $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}^{n+(k+1)}$, $k \geq 2$, розділені біфуркаційною поверхнею $\upsilon^{c_{\mathcal{L}}^{n-1}, c_{\mathcal{M}_-}^{n+k}}$ (що відповідає контакту $c_{\mathcal{L}}^{n-1} = c_{\mathcal{M}_-}^{n+k}$), заданою виразом*

$$\mu = \mu^{c_{\mathcal{L}}^{n-1}, c_{\mathcal{M}_-}^{n+k}} := -\frac{a^n(a^{k+1}-1)}{a^{n+k-1} - a^{k-1} - a^{n-1} + 1}. \tag{10}$$

Серед біфуркацій хаотичних атракторів, які не пов'язані з критичними гомоклінічними орбітами, а лише з контактом різних критичних точок, було виділено два основні класи. А саме: біфуркації зовнішнього (exterior) і внутрішнього (interior) зіткнення з межею. Розгляньмо кусково-зростаюче відображення з двома точками розриву типу

$$f : x \mapsto f(x) = \begin{cases} f_{\mathcal{L}}(x) = ax + \mu_{\mathcal{L}}, & x < d_{\mathcal{L}}, \\ f_{\mathcal{M}}(x) = ax + \mu_{\mathcal{M}}, & d_{\mathcal{L}} < x < d_{\mathcal{R}}, \\ f_{\mathcal{R}}(x) = ax + \mu_{\mathcal{R}}, & x > d_{\mathcal{R}}, \end{cases} \tag{11}$$

де $a > 1$, $d_{\mathcal{R}} = -d_{\mathcal{L}} = 1$. Усі викладені нижче результати для відображення f (11) виражені в термінах критичних точок $c_{\mathcal{L}} = f_{\mathcal{L}}(-1)$, $c_{\mathcal{M}_-} = f_{\mathcal{M}}(-1)$, $c_{\mathcal{M}_+} = f_{\mathcal{M}}(1)$ і $c_{\mathcal{R}} = f_{\mathcal{R}}(1)$, що дає змогу використати їх і в загальнішому випадку, для довільних кусково-зростаючих скрізь розширюючих відображень. Позначмо біфуркаційний параметр через α, який може бути одним із чотирьох: a, $\mu_{\mathcal{L}}$, $\mu_{\mathcal{M}}$ або $\mu_{\mathcal{R}}$.

Теорема 3.18. *Розгляньмо розривне відображення f типу (11) із біфуркаційним параметром α. Припустімо, що існує α^* й окіл $U = U(\alpha^*)$, такий, що для $\alpha \in U$ виконуються*

(1) для $\alpha < \alpha^*$ ($\alpha > \alpha^*$) відображення $f|_\alpha$ має єдиний n-смуговий хаотичний атрактор $\mathcal{Q}(\alpha) = \cup_{i=1}^n B_i(\alpha)$, $n \in \mathbb{N}$, з $d_{\mathcal{L}} \in \operatorname{Int}\mathcal{Q}(\alpha)$, а $d_{\mathcal{R}} \notin \mathcal{Q}(\alpha)$;

(2) існує лише одна критична точка $c_s^k(\alpha) \in \partial\mathcal{Q}(\alpha)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $s \in \{\mathcal{L}, \mathcal{M}_-\}$, така, що $c_s^k(\alpha^*) = d_{\mathcal{R}}$;

(3) для $\alpha < \alpha^*$ ($\alpha > \alpha^*$) виконується $c_s^k(\alpha) \in I_r$, а для $\alpha > \alpha^*$ ($\alpha < \alpha^*$) виконується $c_s^k(\alpha) \in I_q$ з $r, q \in \{\mathcal{M}_+, \mathcal{R}\}$, $r \neq q$;

(4) для $\alpha \in U$ відображення $f|_\alpha$ не має критичних гомоклінічних орбіт.

Якщо $f^i|_{\alpha^*}(c_q(\alpha^*)) \in J\backslash\mathcal{Q}(\alpha^*)$, *де* $i = \overline{0, m-1}$, $m \in \mathbb{N}$, *то для* $\alpha > \alpha^*$ *(*$\alpha < \alpha^*$*) інтервали* $f^{i+1}|_\alpha(\tilde{B}(\alpha))$ *з* $\tilde{B}(\alpha) = [d_{\mathcal{R}}, c_s^k(\alpha)]$ *— це нові смуги атрактора* $\mathcal{Q}(\alpha)$, *тобто* $\mathcal{Q}(\alpha)$ *має* $(n+m)$ *смуг.*

Теорема 3.18 описує достатні умови для виникнення зовнішньої біфуркації зіткнення з межею. Окрім того, вона надає досить простий критерій для оцінювання кількості смуг атрактора після біфуркації, якщо конфігурація атрактора перед біфуркацією добре відома.

Для опису нової біфуркації другого типу введімо далі таке позначення:

$$Z_k = \{x \in J \,:\, x \text{ має } k \text{ прообразів, які належать } J\}. \tag{12}$$

Ані інтервал Z_0, ані жоден із його образів, таких, що $f^j(Z_0) \subset Z_1$ для $j = \overline{1, m}$, $m \in \mathbb{N}$, не може містити точок атрактора.

Теорема 3.20. *Розгляньмо розривне відображення* f *(11) із біфуркаційним параметром* α. *Припустімо, що існує* α^* *й окіл* $U = U(\alpha^*)$, *такий, що для* $\alpha \in U$ *виконуються:*

(1) для $\alpha \le \alpha^*$ *(*$\alpha \ge \alpha^*$*) відображення* $f|_\alpha$ *має єдиний* n*-смуговий,* $n \ge 2$, *хаотичний атрактор* $\mathcal{Q}(\alpha)$ *з* $d_{\mathcal{L}}, d_{\mathcal{R}} \in \mathrm{Int}\mathcal{Q}(\alpha)$*;*

(2) для $\alpha < \alpha^*$ *(*$\alpha > \alpha^*$*) існують дві критичні точки,* $c_s^k(\alpha) \in \partial\mathcal{Q}(\alpha)$ *й* $c_q^m(\alpha) \in \mathrm{Int}\mathcal{Q}(\alpha)$, $s, q \in \{\mathcal{L}, \mathcal{M}_-, \mathcal{M}_+, \mathcal{R}\}$, $s \ne q$, $k, m \in \mathbb{Z}_+$, *такі, що* $c_q^m(\alpha) \in Z_2 \cap Z_1$ *і має обидва прообрази у внутрішності* $\mathrm{Int}\mathcal{Q}(\alpha)$, *а* $c_s^{k+1}(\alpha) \in Z_2$ *має другий прообраз* $\bar{c}(\alpha)$, $\bar{c}(\alpha) \ne c_s^k(\alpha)$, *для якого* $\bar{c}(\alpha) \in \mathrm{Int}\mathcal{Q}(\alpha)$*;*

(3) $c_s^{k+1}(\alpha^*) = c_q^m(\alpha^*)$ *і для* $\alpha > \alpha^*$ *(*$\alpha < \alpha^*$*) виконується* $c_s^{k+1}(\alpha) \in Z_1$, *а її єдиний прообраз — це* $c_s^k(\alpha)$*;*

(4) для $\alpha \in U$ *виконується* $c_r^i(\alpha) \ne d_{\mathcal{L}}$, $c_r^i(\alpha) \ne d_{\mathcal{R}}$ *для будь-якого* $i \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \{\mathcal{L}, \mathcal{M}_-, \mathcal{M}_+, \mathcal{R}\}$*;*

(5) для $\alpha \in U$ *відображення* $f|_\alpha$ *не має критичних гомоклінічних орбіт.*

Тоді справедливе таке:

- *для* $\alpha > \alpha^*$ *(*$\alpha < \alpha^*$*) відображення* $f|_\alpha$ *має єдиний хаотичний атрактор* $\mathcal{Q}(\alpha)$, *який має якнайменш* $n+1$ *смугу, де інтервал* $\tilde{G}(\alpha) = [c_s^{k+1}(\alpha), c_q^m(\alpha)]$ *— це новий порожній проміжок атрактора* $\mathcal{Q}(\alpha)$*;*

- *якщо $c_q^{m+i}(\alpha^*) \in Z_1$, де $i = \overline{1,l}$, $l \in \mathbb{N}$, то для $\alpha > \alpha^*$ ($\alpha < \alpha^*$) інтервали $f^i|_\alpha(\tilde{G}(\alpha))$ — це також нові порожні проміжки атрактора $\mathcal{Q}(\alpha)$, тобто $\mathcal{Q}(\alpha)$ має $n + l + 1$ смугу.*

Теорема 3.20 описує достатні умови для виникнення внутрішньої біфуркації зіткнення з межею. Крім того, вона надає досить простий критерій для оцінювання кількості смуг атрактора після біфуркації, якщо конфігурація атрактора перед біфуркацією добре відома.

Також, були розглянуті кусково-монотонні відображення з трьома й чотирма точками розриву, для яких було описано особливий випадок біфуркації зовнішнього зіткнення з межею, що спричиняє подальше різке розширення атрактора. Показано, що перед біфуркацією на межі басейну притягання хаотичного атрактора міститься хаотичний репелер. У загальному випадку корозмірності один перетворення атрактора стається завдяки послідовності двох біфуркацій: біфуркації зовнішнього зіткнення з межею, супроводжуваній згодом біфуркацією контакту хаотичного атрактора й хаотичного репелера з подальшим їхнім злиттям і розширенням атрактора. У випадку корозмірності два обидві біфуркації (зовнішнього зіткнення з межею й контакту атрактора з репелером) відбуваються водночас, отож зіткнення атрактора з межовою точкою спричиняє безпосередньо різку зміну його розміру.

Четвертий розділ дисертації присвячено двовимірним і тривимірним відображенням, які є математичними моделями конкретних важливих задач економіки, екології і психології. Розглянуто системи різницевих рівнянь із широким спектром функцій правої частини, не тільки кусково-гладких, а й гладких необоротних, а також дробово-раціональних функцій зі зникомим знаменником.

Так, вивчено двовимірне необоротне відображення

$$T : (Y, D) \mapsto T(Y, D) = \begin{cases} Y + \alpha a_2 \left(\dfrac{a_1 + a_2}{a_1 \mathrm{e}^{-\gamma v Y + (r+\gamma) D - \bar{G}} + a_2} - 1 \right), \\ D + \gamma (v Y - D) \end{cases} \tag{13}$$

з параметрами $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $a_i \in \mathbb{R}_+$, $i = 1, 2$, $\gamma \in \mathbb{R}_+$, $v \in \mathbb{R}_+$, $\bar{G} \in \mathbb{R}_+$, $r \in (0, 1)$, яке моделює закриту економіку типу Мінського з ендогенним процесом регулювання боргу. Для біфуркації перевороту (flip) і біфуркації Неймарка-Сакера (Neimark–Sacker) єдиної нерухомої точки побудовано нормальні форми. Детально розглянуто два вироджені випадки біфуркації Неймарка-Сакера, вичерпно описано структуру простору параметрів в околі відповідних точок корозмірності два. Також для значень параметрів, які розташовані достатньо далеко від біфуркаційної межі Неймарка-Сакера, проаналізовано глобальні біфуркації, які пов'язані з критичними множинами різного рангу й перетвореннями притягуючої інваріантної кривої.

Також вивчено сімейство двовимірних необоротних відображень

$$F:(x,r)\to F(x,r)=\left\{\begin{array}{l}\left(1+\alpha-\dfrac{Na_0q_0}{2\gamma}\right)x-\dfrac{\alpha}{k}x^2+\dfrac{N}{2\gamma}(a_0q_0-a_1q_1)xr,\\ r\left\{r+(1-r)\mathrm{e}^{\beta\left(\frac{a_0^2q_0-a_1^2q_1}{4\gamma}x-\xi\right)}\right\}^{-1},\end{array}\right. \tag{14}$$

де $\alpha\in\mathbb{R}_+$, $k\in\mathbb{R}_+$, $N\in\mathbb{N}$, $q_i\in\mathbb{R}_+$, $a_i\in\mathbb{R}_+$, $i=0,1$, $q_0<q_1$, $a_1<a_0$, $\gamma\in\mathbb{R}_+$, $\beta\in\mathbb{R}_+$, $\xi\in\mathbb{R}_-$. Система (14) моделює процес експлуатації відновлюваних ресурсів, коли учасники мають обрати чи екологічну й дорожчу стратегію, чи дешевшу, проте руйнівну для середовища. Отримано аналітичні вирази для множини збіжних прообразів і критичної множини. Вичерпно описано два різні біфуркаційні сценарії, характерні для розглянутих відображень. Перший сценарій пов'язаний із каскадом подвоєння періоду, проте є нетиповим і складається не тільки з біфуркацій перевороту, а й із біфуркацій Неймарка-Сакера для циклів. Другий сценарій пов'язаний із біфуркаціями атрактора всередині певної області поглинання, а саме: гладка інваріантна крива спочатку втрачає гладкість, а згодом перетворюється на хаотичний атрактор. Детально проаналізовано відповідні глобальні біфуркації. Також показано, що область поглинання — це хаотична область змішаного типу, тобто вона обмежена сегментами критичних кривих різного рангу й відповідними частинами нестійких множин двох сідлових циклів.

Досліджено стійкі періодичні розв'язки для сімейства двовимірних кусково-гладких необоротних неперервних відображень

$$S\;:\;(x,q)\mapsto\big(F(x,q),\gamma x^{\beta}\big),\quad\text{де} \tag{15}$$

$$F(x,q)=\left\{\begin{array}{ll}x+x(1-x)\dfrac{\alpha(\Delta_c-fq)-1}{\alpha(\Delta_c-fq)+1}, & 0\le q<\frac{\Delta_c}{f},\\ x^2, & \frac{\Delta_c}{f}\le q\le 1.\end{array}\right. \tag{16}$$

Параметри: $\alpha > 0$, $f > 0$, $\gamma \in (0,1]$, $\beta > 0$ та $\Delta_c > 0$. За допомогою системи (15), (16) формалізовано процес виявлення шахрайства у державних закупівлях і боротьби з ним. Показано, що за певних умов у фазовому просторі існує притягуюча замкнена інваріантна негладка крива $\mathcal{A}$, яка складається з сегментів критичних множин різного рангу. Отримано достатні умови для її існування. Ретельно проаналізовано властивості обмеження $S|_{\mathcal{A}}$, заданого одновимірним відображенням першого повернення ϕ. Доведено, що ϕ має принаймні одну точку зламу та одну точку розриву. За допомогою ϕ визначено біфуркації стійких періодичних розв'язків і описано відповідну біфуркаційну структуру у просторі параметрів.

Також розглянуто модель, яка формалізує процес торгівлі на ринку товарів тривалого користування. Цю модель задає тривимірне кусково-гладке неперервне відображення

$$\Phi \, : \, (X,Y,p) \mapsto \big(X',Y',p'\big), \quad \text{де} \tag{17}$$

$$X' = \begin{cases} x_1(X,Y,p) =: x_1, & (x_1 - x_2)(x_1 - X) \le 0, \\ x_2(X,Y,p) =: x_2, & (x_2 - x_1)(x_2 - X) \le 0, \\ X, & \text{в інших випадках}, \end{cases} \tag{18a}$$

$$Y' = \begin{cases} y_1(X,Y,p) =: y_1, & (x_1 - x_2)(x_1 - X) \le 0, \\ y_2(X,Y,p) =: y_2, & (x_2 - x_1)(x_2 - X) \le 0, \\ Y, & \text{в інших випадках}, \end{cases} \tag{18b}$$

$$p' = p\mathrm{e}^{\delta(x_2 - x_1)} \tag{18c}$$

і

$$x_1 = \alpha(X + pY), \qquad x_2 = 1 - \beta\big(1 - X + p(1-Y)\big), \tag{19}$$

$$y_1 = \frac{1-\alpha}{p\alpha}x_1, \qquad y_2 = 1 - \frac{1-\beta}{p\beta}(1 - x_2). \tag{20}$$

Множина перемикання відбраження Φ, заданого (17)-(20), складається з трьох гладких поверхонь. Доведено, що перетин усіх цих поверхонь — це гладка крива, причому кожна точка цієї кривої нерухома. Для нерухомих точок отримано умови стійкості, які залежать від значення першої координати X. Також доведено, що будь-яка орбіта

Φ або асимптотично наближається до однієї з нерухомих точок, або назавжди залишається в так званій “точці неврівноваженості”, для якої перші дві координати залишаються незмінними, тоді як третя змінюється відповідно до одновимірного відображення Райкера з фіксованими параметрами.

Далі вивчено асимптотичну динаміку розв’язків сімейства двовимірних розривних відображень, які моделюють валютний ринок із емоційними учасниками, заданого як

$$f\ :\ (X,Y)\mapsto \big(f(X,Y),X\big),\quad \text{де} \tag{21}$$

$$f(X,Y)=\begin{cases} d_1X^2-d_1XY+aX-f_c, & X>0\wedge|X-Y|>1,\\ d_2X^2-d_2XY+aX-f_c, & X>0\wedge|X-Y|\le 1,\\ -d_1X^2+d_1XY+bX+f_d, & X\le 0\wedge|X-Y|>1,\\ -d_2X^2+d_2XY+bX+f_d, & X\le 0\wedge|X-Y|\le 1. \end{cases} \tag{22}$$

Отримано умови біфуркації руйнування неперервності. Показано, що у площині біфуркаційних параметрів (f_c,f_d) в околі відповідної точки корозмірності два відображення f, задане в (21), (22), може бути наближене одновимірним кусково-лінійним відображенням із однією точкою розриву. Також вичерпно описано три різні біфуркаційні структури, пов’язані з періодичними розв’язками. Зокрема виявлено й детально проаналізовано новітню біфуркаційну структуру, яка містить області періодичності парних періодів.

Також розглянуто двовимірне кусково-гладке відображення, обидва компоненти якого задаються функціями, що містять дробово-раціональні члени. Така модель формалізує коадаптивну взаємодію учня й учителя під час передавання знань; її запропонував П. ван Ґерт (P. van Geert), натхненний ідеєю зони найближчого розвитку Л. С. Виготського. Без утрати загальності ми розглядаємо випадок, коли параметр, який позначає кінцеву освітню мету, нормалізовано до одиниці. Тоді відображення набуває форми

$$F\ :\ (A,P)\to \big(F_1(A,P),F_2(A,P)\big),\quad \text{де} \tag{23}$$

$$F_1(A,P)=A\left[1+\left(r_a-\left|\frac{P}{A}-O_a\right|b_a(1-A)\right)\frac{P-A}{P}\right], \tag{24}$$

$$F_2(A,P)=P\left[1+\left(r_p-\left(\frac{P}{A}-O_p\right)b_p\,(1-P)\right)(1-P)\right] \tag{25}$$

й параметри $\{r_a, r_p, b_a, b_p, O_a, O_p\} \subset \mathbb{R}_+$. Доведено, що відображення F, задане в (23)-(25), може мати від двох до одинадцяти нерухомих точок. Отримано умови їхнього існування, а для деяких із них детально проаналізовано властивості стійкості. Також знайдено всі фокальні точки й відповідні префокальні множини. Доведено, що одна з цих фокальних точок, а саме $SP_0(0,0)$, належить своїй префокальній множині й може мати басейн притягання додатної міри.

П'ятий розділ дисертації присвячено досідженню асимптотичних розв'язків кусково-гладких відображень вищої розмірності, які моделюють олігополістичний ринок. Ці моделі запропонував відомий економіст Т. Пуу (T. Puu) як спробу розв'язку так званої проблеми Теокаріса-Курно (Theocharis–Cournot), коли ринок дестабілізується при збільшенні кількості конкурентів.

Розгляньмо абстрактний ринок із n, $n \geq 2$, конкурентами (чи агентами), які виробляють однакові товари. У фіксований період часу видобуток i-го агента (кількість виробленого товару) позначмо як q_i, а всю множину видобутків наведімо вектором $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Щоб виробити товар q_i, агент використовує певну кількість капіталу k_i, а множину капіталів позначмо як $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Також введімо додаткову величину

$$\mathbb{R}_+ \ni Q_i(\mathbf{q}) =: Q_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{j=n} q_j, \tag{26}$$

яка позначає сукупний обсяг виробництва конкурентів для i-го агента.

Диниміка на ринку моделюється $2n$-вимірним неавтномним відображенням $\mathbf{\Phi} : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}_+^{2n} \ni (t, \mathbf{q}, \mathbf{k}) \to (\mathbf{q}', \mathbf{k}') \in \mathbb{R}_+^{2n}$, де $\mathbf{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{2n})$ із компонентами

$$q_i' = \Phi_i(t, \mathbf{q}, \mathbf{k}) = \begin{cases} F_{w,\varepsilon}(Q_i, k_i), & \sigma_m(i,t) \neq 0, \\ G_{w,r,\varepsilon}(Q_i), & \sigma_m(i,t) = 0, \end{cases} \tag{27а}$$

$$k_i' = \Phi_{n+i}(t, \mathbf{q}, \mathbf{k}) = \begin{cases} k_i, & \sigma_m(i,t) \neq 0, \\ \left(1 + \sqrt{\frac{w}{r}}\right) G_{w,r,\varepsilon}(Q_i), & \sigma_m(i,t) = 0, \end{cases} \tag{27б}$$

для $i = \overline{1, n}$. Функція $\sigma_m : \mathbb{N} \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$

$$\sigma_m(i,t) = (t - mi) \bmod T \tag{28}$$

визначає періоди часу, коли відповідний капітал зношується, і відбувається пермикання з функції $F_{w,\varepsilon}$ на $G_{w,r,\varepsilon}$. Параметр $T \in \mathbb{N}$ позначає довговічність основного капіталу, а $m \in \mathbb{Z}_+$ впливає на синхронізацію/десинхронізацію цих періодів часу для різних агентів. Так, якщо $m = 0$, то всі учасники оновлюють свої капітали синхронно.

Функція $F_{w,\varepsilon} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

$$F_{w,\varepsilon}(Q,k) = \begin{cases} k\dfrac{\sqrt{\frac{Q}{w}} - Q}{k + \sqrt{\frac{Q}{w}}} =: f_w(Q,k), & Q \leq \dfrac{1}{w}, \\ \varepsilon, & Q > \dfrac{1}{w}, \end{cases} \tag{29}$$

з параметром $w \in \mathbb{R}$, $w > 0$, визначає оптимальний обсяг виробництва для фіксованого значення капіталу й називається *короткотерміновою* функцією. Функція $G_{w,r,\varepsilon} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

$$G_{w,r,\varepsilon}(Q) = \begin{cases} \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{r}+\sqrt{w}} - Q =: g_{w,r}(Q), & Q \leq \frac{1}{(\sqrt{r}+\sqrt{w})^2}, \\ \varepsilon, & Q > \frac{1}{(\sqrt{r}+\sqrt{w})^2}, \end{cases} \tag{30}$$

з параметром $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, називається *довготерміновою*. Параметр $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ позначає умовний малий обсяг у режимі неактивності.

Для відображення $\mathbf{\Phi}$ проаналізовано його нерухомі точки.

Лема 5.1. *Відображення $\mathbf{\Phi}$ має щонайбільше три нерухомі точки:*

$$E^* = (\mathbf{q}^*, \mathbf{k}^*) = (\underbrace{q^*, \ldots, q^*}_{n}, \underbrace{k^*, \ldots, k^*}_{n}), \tag{31}$$

$$E_0 = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{2n}), \tag{32}$$

$$E_\varepsilon = (\underbrace{q_\varepsilon, q_\varepsilon, \ldots, q_\varepsilon}_{n}, \underbrace{k_\varepsilon, k_\varepsilon, \ldots, k_\varepsilon}_{n}), \tag{33}$$

де

$$q_\varepsilon = \varepsilon, \quad k_\varepsilon = \left(1 + \sqrt{\frac{w}{r}}\right)\varepsilon. \tag{34}$$

Точки E^* й E_0 існують завжди, а точка E_ε існує, якщо чи

- $(n-1)\varepsilon w > 1$, *чи*

- $(n-1)\varepsilon w < 1$, $(n-1)\varepsilon(\sqrt{r}+\sqrt{w})^2 > 1$ *і* $\sqrt{r}\sqrt{n-1} = n\sqrt{w}(\sqrt{r}+\sqrt{w})\sqrt{\varepsilon}$.

Нерухома точка E^* відповідає так званому економічному положенню рівноваги Курно, коли ринок урівноважений, і тому виступає важливим об'єктом досліджень. Для такої точки отримано умови її стійкості.

Теорема 5.7. *Розгляньмо відображення* $\mathbf{\Phi}$ *з* $T \to \infty$. *Нерухома точка* E^* *стійка, якщо* $n \leq 4$ *або* $n > 4$ *і* $w(n-4)^2 < 4n^2 r$.

Теорема 5.8. *Розгляньмо відображення* $\mathbf{\Phi}$, *задане у (27)-(30) із* $T = 2$ *й непарним* m. *Нерухома точка* E^*

- *стійка для всіх* $r > 0$, $w > 0$, *якщо* $n \leq 4$;
- *стійка для* $w \leq 100r$, *якщо* $n = 5$;
- *стійка для* $w \leq 36r$, *якщо* $n = 6$;
- *нестійка, якщо* $n \geq 7$.

Також було розглянуто автономні $3n$-вимірні відображення типу (27)-(30) із додатковими координатами $\mathbf{T} = (T_1, T_2, \ldots, T_n) \in \mathbb{R}^n$, які змінюються за

$$T_i' = \Phi_{2n+i}(\mathbf{q}, \mathbf{k}, \mathbf{T}) = \begin{cases} T_i - \kappa^{q_i - \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r}+\sqrt{w}}k_i}, & T_i > 0, \\ T_0, & T_i \leq 0, \end{cases} \tag{35}$$

де $T_0 \in \mathbb{N}$, $\kappa \in \mathbb{R}$, $\kappa \geq 1$. При цьому у (27) умови $\sigma_m(i,t) \neq 0$ і $\sigma_m(i,t) = 0$ замінюються на $T_i > 0$ та $T_i \leq 0$, відповідно. Тобто перемикання між функціями $F_{w,\varepsilon}$ і $G_{w,r,\varepsilon}$ відбувається, якщо $T_i \leq 0$. Було доведено, що такі відображення не можуть мати нерухомих точок, а лише періодичні розв'язки, періоди яких обов'язково кратні T_0. Також вивчено властивості звуження такого $3n$-вимірного відображення на многовид повної синхронізації, для якого описано кілька типових біфуркаційних сценарії.

Наприкінці дисертації наведено основні результати й висновки.

Список наукових праць, де опубліковано результати дисертації, й інформацію щодо їхньої апробації наведено у додатку А.

ВИСНОВКИ

Основні результати дисертації можна сформулювати так:

- Для сімейства одновимірних кусково-лінійних неперервних відображень з двома межовими точками отримано необхідні й достатні умови для існування стійких циклів будь-якого періоду. У просторі параметрів таких відображень вичерпно описано три різні біфуркаційні структури, дві з яких — це узагальнення вже відомих біфуркаційних структур. Третю біфуркаційну структуру, яка містить як області періодичності, так і області хаотичності, виявлено вперше. Для циклів отримано необхідні й достатні умови їхнього існування і стійкості. Для хаотичних атракторів отримано достатні умови їхнього існування. Також було розглянуто особливий випадок таких відображень, коли функції, визначені на двох зовнішніх поділах, проходять через початок координат. Описано природу цього виродження й отримано достатні умови існування хаотичних атракторів.
- Розглянуто сімейство одновимірних кусково-монотонних розривних відображень зі двома точками розриву, для якого вивчено хаотичні атрактори. У випадку, коли відображення симетричне відносно початку координат, отримано необхідні й достатні умови існування хаотичних атракторів, які мають різну кількість зв'язних елементів. Вичерпно описано дві відповідні біфуркаційні структури, пов'язані з хаотичними атракторами, які поширюються на всі три поділи у фазовому просторі відображення. Знайдено параметричні області співіснування різних хаотичних атракторів. У випадку, коли відображення несиметричне, було виявлено біфуркаційну структуру нового типу, пов'язану з хаотичними атракторами. Доведено, що біфуркаційні поверхні, які утворюють цю структуру, не пов'язані з жодними гомоклінічними біфуркаціями відштовхуючих періодичних точок. Було показано, що конфігурації хаотичних атракторів можуть належати до двох різних видів. Для атракторів обох видів отримано явні оцінки максимальної кількості їхніх зв'язних елементів.
- Для сімейства одновимірних кусково-монотонних розривних відображень із більш ніж однією точкою розриву виявлено дві нові біфуркації хаотичних атракторів, не пов'язані з жодними критичними гомоклінічними орбітами, а саме: біфуркацію зовнішнього і внутрішнього зіткнення з межею. Для обох типів біфуркацій отримано достатні умови для їхнього виникнення. Також досліджено особливий випадок біфуркації зовнішнього зіткнення з межею. Для певних зна-

чень параметрів така біфуркація приводить до раптового розширення атрактора, яке відбувається через зіткнення з хаотичним репелером, розташованим на межі басейну притягання. Ретельно проаналізовано загальний випадок корозмірності один і особливий випадок корозмірності два.

• Досліджено біфуркації стійких циклів різного періоду для сімейства двовимірних кусково-гладких необоротних відображень, які формалізують процес боротьби з шахрайством у державних закупівлях. Показано, що для певних значень параметрів у фазовій площині відображення існує замкнена інваріантна негладка крива, яка складається з частин критичних множин різного рангу. Отримано достатні умови існування цієї кривої й показано, що звуження вихідного відображення на цю криву задається одновимірним відображенням першого повернення. Доведено, що відображення першого повернення має принаймні дві межові точки, одна з яких є точкою зламу, а друга — точкою розриву. За допомогою відображення першого повернення визначено біфуркації стійких циклів і описано відповідну біфуркаційну структуру у просторі параметрів.

• Вивчено сімейство тривимірних кусково-гладких неперервних відображень, яке моделює процес торгівлі на ринку товарів тривалого користування. Множина перемикання таких відображень складається зі трьох гладких поверхонь. Доведено, що перетин усіх трьох поверхонь перемикання — це гладка крива, причому кожна точка цієї кривої нерухома. Отримано необхідні умови стійкості цих нерухомих точок. Доведено, що для будь-якої початкової точки її орбіта чи прямує асимптотично до однієї з нерухомих точок, а чи назавжди залишається в так званому "положенні неврівноваженості", для якого дві перші координати залишаються незмінними, а третя змінюється відповідно до одновимірного відобораження Райкера з фіксованими параметрами.

• Досліджено біфуркаційні структури, пов'язані зі стійкими циклами, у просторі параметрів сімейства двовимірних розривних відображень, які моделюють валютний ринок із емоційними учасниками. Отримано умови біфуркації порушення неперевності, яка має корозмірність два. Для параметрів, близьких до біфуркаційних значень, показано, що вихідне двовимірне відображення може бути наближене одновимірним кусково-лінійним відображенням із однією точкою розриву. Вичерпно описано три різні біфуркаційні структури, одна з яких — це відома структура додавання періодів, друга — це певне узагальнення структури приросту періодів, а третю, пов'язану з циклами парних періодів, виявлено вперше.

• Вивчено асимптотичну динаміку сімейства двовимірних кусково-гладких відображень, для яких обидва компоненти задані функціями, що містять дробово-раціональні члени. Для таких відображень отримано умови існування нерухомих точок, а для деяких із них — детально проаналізовано властивості стійкості. Також знайдено всі фокальні точки й відповідні префокальні множини. Доведено, що одна з фокальних точок — початок координат — належить своїй префокальній множині. Як наслідок, ця фокальна точка може мати басейн притягання додатної міри.

• Для сімейства $2n$-вимірних неавтономних кусково-гладких необоротних відображень, які моделюють ринок із кількістю учасників рівною n, вивчено властивості нерухомих точок. Зокрема, для нерухомої точки, яка відповідає економічному положенню рівноваги Курно, отримано достатні умови стійкості й нестійкості. Також для сімейства $3n$-вимірних автономних кусково-гладких необоротних відображень доведено, що вони не можуть мати нерухомих точок, а лише цикли певних періодів. Розглянуто звуження вихідного відображення на многовид повної синхронізації, задане тривимірним кусково-гладким відображенням. Для цього тривимірного відображення описано структуру множини поглинання й отримано достатні умови для того, щоб асимптотичні розв'язки не містили точок, значення яких задані малим пареметром.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Campisi G., Panchuk A., Tramontana F. A discontinuous model of exchange rate dynamics with sentiment traders. *Annals of Operations Research* 2024, **337**, 913–935 [Published online: 25 May 2023]. doi: 10.1007/s10479-023-05387-2. (SJR — **Q1**)

2. Avrutin V., Panchuk A., Sushko I. Can a border collision bifurcation of a chaotic attractor lead to its expansion? *Proceedings of the Royal Society A* 2023, **479**, 20230260; doi: 10.1098/rspa.2023.0260. (SJR — **Q1**)

3. Panchuk A., Sushko I., Michetti E., Coppier R. Revealing bifurcation mechanisms in a 2D nonsmooth map by means of the first return map. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 2023, **117**, 106946; doi: 10.1016/j.cnsns.2022.106946. (SJR — **Q1**)

4. Avrutin V., Panchuk A., Sushko I. Border collision bifurcations of chaotic attractors in one-dimensional maps with multiple discontinuities. *Proceedings of the Royal Society A* 2021, **477**, 20210432; doi: 10.1098/rspa.2021.0432. (SJR — **Q1**)
5. Panchuk A., Westerhoff F. Speculative behavior and chaotic asset price dynamics: On the emergence of a bandcount accretion bifurcation structure. *Discrete & Continuous Dynamical Systems – B* 2021, **26**(11), 5941–5964; doi: 10.3934/dcdsb.2021117. (SJR — **Q2**)
6. Cerboni Baiardi L., Panchuk A. Global dynamic scenarios in a discrete-time model of renewable resource exploitation: a mathematical study. *Nonlinear Dynamics* 2020, **102**, 1111–1127; doi: 10.1007/s11071-020-05898-8. (SJR — **Q1**)
7. Cerboni Baiardi L., Naimzada A., Panchuk A. Endogenous desired debt in a Minskyan business model. *Chaos, Solitons & Fractals* 2020, **131**, 109470; doi: 10.1016/j.chaos.2019.109470. (SJR — **Q1**)
8. Merlone U., Panchuk A., van Geert P. Modeling learning and teaching interaction by a map with vanishing denominators: Fixed points stability and bifurcations. *Chaos, Solitons & Fractals* 2019, **126**, 253–265; doi: 10.1016/j.chaos.2019.06.008. (SJR — **Q1**)
9. Panchuk A., Sushko I., Westerhoff F. A financial market model with two discontinuities: bifurcation structures in the chaotic domain, *Chaos* 2018, **28**, 055908; doi: 10.1063/1.5024382. (SJR — **Q1**)
10. Panchuk A., Puu T. Dynamics of a durable commodity market involving trade at disequilibrium, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 2018, **58**, 2–14; doi: 10.1016/j.cnsns.2017.08.003. (SJR — **Q1**)
11. Panchuk A., Sushko I., Avrutin V. Bifurcation structures in a bimodal piecewise linear map. *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics* 2017, **3**, 1–7; doi: 10.3389/fams.2017.00007.
12. Cánovas J., Panchuk A., Puu T. Asymptotic dynamics of a piecewise smooth map modelling a competitive market, *Mathematics and Computers in Simulation* 2015, **117**, 20–38; doi: 10.1016/j.matcom.2015.05.004. (SJR — **Q2**)
13. Foroni I., Avellone A., Panchuk A. Sudden transition from equilibrium stability to chaotic dynamics in a cautious tâtonnement model. *Chaos, Solitons & Fractals* 2015, **79**, 105–115; doi:

10.1016/j.chaos.2015.05.013. (SJR – **Q2**)

14. Panchuk A., Sushko I., Avrutin V. Bifurcation structures in a bimodal piecewise linear map: Chaotic dynamics, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 2015, **25**(3), 1530006; doi: 10.1142/S0218127415300062. (SJR – **Q2**)
15. Panchuk A., Puu T. Oligopoly model with recurrent renewal of capital revisited, *Mathematics and Computers in Simulation* 2015, **108**, 119–128; doi: 10.1016/j.matcom.2013.09.007. (SJR – **Q2**)
16. Panchuk A., Sushko I., Schenke B., Avrutin V. Bifurcation structures in a bimodal piecewise linear map: Regular dynamics, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 2013, **23**(12), 1330040; doi: 10.1142/S0218127413300401. (SJR – **Q2**)
17. Panchuk A., Rosin D. P., Hövel P., Schöll E. Synchronization of coupled neural oscillators with heterogeneous delays, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 2013, **23**(12), 1330039; doi: 10.1142/S0218127413300395. (SJR – **Q2**)
18. Panchuk A., Puu T. Stability in a non-autonomous iterative system: An application to oligopoly. *Computers and Mathematics with Applications* 2009, **58**(10), 2022–2034; doi: 10.1016/j.camwa.2009.06.048. (SJR – **Q2**)
19. Puu T., Panchuk A. Oligopoly and stability, *Chaos, Solitons & Fractals* 2009, **41**(5), 2505–2516; doi: 10.1016/j.chaos.2008.09.037. (SJR – **Q1**)
20. Dahlem M. A., Hiller G., Panchuk A., Schöll E. Dynamics of delay-coupled excitable neural systems, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 2009, **19**(2), 745–753; doi: 10.1142/S0218127409023111. (SJR – **Q2**)
21. Panchuk A., Puu T. Cournot equilibrium stability in a non-autonomous system modeling the oligopoly market. *Grazer Mathematische Berichte* 2009, **354**, 201–218.
22. Campisi G., Panchuk A., Tramontana F. Bifurcation structures in a discontinuous 2D map, modeling exchange rate dynamics. *International Conference on Difference Equations and Applications (ICDEA 2024)*, June 24–28, 2024, Paris, France: Book of Abstracts. 2024, P. 87.

23. Campisi G., Panchuk A., Tramontana F. Bifurcation structures in a discontinuous 2D map, modeling exchange rate dynamics. *The International Conference on Difference Equations and Applications (ICDEA 2023)*, July 17–21, 2023, Phitsanulok, Thailand, Pibulsongkram Rajabhat University: Book of Abstracts. 2023, pp. 19–20.

24. Panchuk A., Coppier R., Michetti E. Evolution of dishonest behavior in public procurement. The role of updating control. *The 13th International Conference on Nonlinear Economic Dynamics (NED 2023)*, June 19–21, 2023, Kristiansand, Norway, University of Agder: Book of Abstracts. 2023, P. 30.

25. Panchuk A., Sushko I., Michetti E., Coppier R. A 2D nonsmooth map modeling fraud in a public procurement: Advantages of the first return map. *The 11th International Workshop on Dynamic Models in Economics and Finance (MDEF 2022)*, September 8–10, 2022, Italy, University of Urbino: Book of Abstracts. 2022, P. 5.

26. Panchuk A., Avrutin V., Sushko I. Exterior, interior and expansion-like border collisions for chaotic attractors in 1D discontinuous maps. *International Conference on Difference Equations and Applications (ICDEA 2022)*, July 18–22, 2022, Gif-sur-Yvette, France, Paris-Saclay University: Book of Abstracts. 2022, P. 75.

27. Panchuk A., Avrutin V., Sushko I. Border collision bifurcations of chaotic attractors in 1D maps with multiple discontinuities. *The European Conference on Iteration Theory (ECIT 2022)*, June 13–17, 2022, Reichenau an der Rax, Austria: Book of Abstracts. 2022, P. 25.

28. Panchuk A., Coppier R., Michetti E., Sushko I. The first return map: revealing bifurcation mechanisms in a 2D nonsmooth map. *The European Conference on Iteration Theory (ECIT 2022)*, June 13–17, 2022, Reichenau an der Rax, Austria: Book of Abstracts. 2022, P. 26.

29. Panchuk A., Michetti E., Sushko I. Interplay between honest and dishonest agents given an endogenous monitoring: bifurcation structure overview. *The 12th International Conference on Nonlinear Economic Dynamics (NED 2021)*, September 13–15, 2021, Milan, Itay, Catholic University of the Sacred Heart: Book of Abstracts. 2021, P. 33.

30. Avrutin V., Panchuk A., Sushko I. Border collision bifurcations

of chaotic attractors in 1D maps with multiple discontinuities. *International Conference on Difference Equations and Applications (ICDEA 2021)*, July 26–30, 2021, Bosnia and Herzegovina, University of Sarajevo: Book of Abstracts. 2021, P. 65.

31. Merlone U., Panchuk A., van Geert P. Modelling learning and teaching interaction by a map with vanishing denominators. *The 11th International Conference on Nonlinear Economic Dynamics (NED 2019)*, September 4–6, 2019, Ukraine, Kyiv School of Economics: Book of Abstracts. 2019, P. 30.

32. Panchuk A., Sushko I., Westerhoff F. A financial market model with two discontinuities: bifurcation structures in the chaotic domain. *The 10th International Workshop on Dynamic Models in Economics and Finance (MDEF 2018)*, September 6–8, 2018, Italy, University of Urbino: Book of Abstracts. 2018, P. 37.

33. Panchuk A., Sushko I., Westerhoff F. Bifurcation structures related to chaotic attractors in a 1D PWL map defined on three partitions. *The 11th International Conference "Progress on Difference Equations" (PODE 2017)*, May 29–31, 2017, Italy, University of Urbino: Book of Abstracts. 2017, P. 34.

34. Panchuk A., Cerboni Baiardi L. Renewable resource exploitation described by a discrete time nonlinear model with replicator dynamics. *The 9th International Workshop on Dynamic Models in Economics and Finance (MDEF 2016)*, June 23–25, 2016, Italy, University of Urbino: Book of Abstracts. 2016, P. 23.

35. Panchuk A. Dynamics of a stock market involving disequilibrium trade. *The 9th International Conference on Nonlinear Economic Dynamics (NED 2015)*, July 25–27, 2015, Tokyo, Japan, Chuo University: Book of Abstracts. 2015, P. 33.

36. Panchuk A., Puu T. Disequilibrium trade and dynamics of stock markets. *The 8th International Conference on Nonlinear Economic Dynamics (NED 2013)*, July 4–6, 2013, Italy, University of Siena: Book of Abstracts. 2013, pp. 60–61.

37. Panchuk A., Canovas J., Puu T. Oligopoly model with recurrent renewal of capital: modifications and new results. *The 7th International Workshop on Dynamic Models in Economics and Finance (MDEF 2012)*, September 20–22, 2012, Italy, University of Urbino:

Book of Abstracts. 2012, P. 40.

38. Panchuk A., Avrutin V., Schenke B., Sushko I. Cycles and their bifurcations in a bimodal piecewise linear map. *The European Conference on Iteration Theory (ECIT 2012)*, September 9–15, 2012, Ponta Delgada, Sãn Miguel, Açores, Portugal: Book of Abstracts. 2012, P. 30.

39. Panchuk A. Delay FitzHugh-Nagumo equations for modelling coupled neurons. *The International Conference on Structural Nonlinear Dynamics and Diagnosis (CSNDD 2012)*, April 29–May 2, 2012, Marrakech, Morocco: Book of Abstracts. 2012, P. 8.

40. Panchuk A. Three segmented piecewise-linear map. *The 3rd International Workshop on Nonlinear Maps and their Applications (NOMA 2011)*, September 15–16, 2011, Évora, Portugal, University of Évora: Book of Proceedings. 2011, pp. 3–6.

41. Panchuk A. Three segmented piecewise-linear map. *The 3rd International Workshop on Nonlinear Maps and their Applications (NOMA 2011)*, September 15–16, 2011, Évora, Portugal, University of Évora: Book of Abstracts. 2011, P. 7.

42. Panchuk A. Delay differential equaitons for modeling coupled neurons. *Міжнародна конференція "Differential Equations and Their Applications"*, June 8–10, 2011, Київ, Україна, Київський національний університет імені Тараса Шевченка: Тези доповідей. 2011, P. 175.

43. Panchuk A., Puu T. Oligopoly model with recurring renewal of capital. *The 7th International Conference on Nonlinear Economic Dynamics (NED 2011)*, June 1–3, 2011, Cartagena, Spain, Technical University of Cartagena: Book of Abstracts. 2011, P. 34.

44. Panchuk A., Puu T. Dynamics in the oligopoly model with recurring renewal of capital. *The European Conference on Iteration Theory (ECIT 2010)*, September 12–17, 2010, Nant, France: Book of Abstracts. 2010, P. 35.

45. Panchuk A., Dahlem M. A., Schöll E. Modelling coupled neurons: role of the delay terms in producing spiking and bursting. *The 2nd International Workshop on Nonlinear Maps and their Applications (NOMA 2009)*, September 10–11, 2009, Italy, University of Urbino: Book of Proceedings. 2009, pp. 120—123.

46. Panchuk A., Dahlem M. A., Schöll E. Regular spiking in FitzHugh-Nagumo systems coupled through linear delay. *The 17th International Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems (NDES 2009)*, June 21–24, 2009, Rapperswil, Switzerland: Book of Proceedings. 2009, pp. 176–179.
47. Panchuk A., Puu T. Synchronization and stability in a non-autonomous iterative system. *The European Conference on Iteration Theory (ECIT 2008)*, September 7–13, 2008, Yalta, Crimea, Ukraine, Institute of Mathematics, NAS of Ukraine: Book of Abstracts. 2008, P. 38.
48. Panchuk A. Dynamics of industrial oligopoly market involving capacity limits and recurrent investment. In: Commendatore P., Kayam S., Kubin I. (Eds.), *Complexity and Geographical Economics.* Cham: Springer, 2016; pp. 249–275; doi: 10.1007/978-3-319-12805-4_10.
49. Panchuk A., Puu T. Industry dynamics, stability of Cournot equilibrium, and renewal of capital. In: Puu T., Panchuk A. (Eds.), *Nonlinear Economic Dynamics.* Nova Science Publishers, Inc., 2010; pp. 239–254.
50. Canovas J. S., Panchuk A., Puu T. Role of reinvestment in a competitive market, 2015. No 12, Gecomplexity Discussion Paper Series, Action IS1104 “The EU in the new complex geography of economic systems: models, tools and policy evaluation”. https://EconPapers.repec.org/RePEc:cst:wpaper:12.
51. Panchuk A., Dahlem M. A., Schöll E. Regular spiking in asymmetrically delay-coupled FitzHugh-Nagumo systems, 2009. http://arxiv.org/abs/0911.2071.

АНОТАЦІЇ

Панчук А.А Біфуркації необоротних гладких, кусково-гладких та розривних відображень — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 “диференціальні рівняння” (111 — математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2025.

Дисертація присвячена вивченню властивостей і біфуркацій асимптотичних розв'язків для широкого кола кусково-гладких різницевих рівнянь або відображень, багато з яких — це актуальні моделі реальних явищ із радіоелектроніки, економіки, психології, суспільних наук. Дослідження кусково-гладких динамічних систем набуло популярності наприкінці минулого сторіччя у відповідь на підвищення вимог із боку різних прикладних галузей науки. Оскільки математичний аналіз процесів, пов'язаних із тертям, дрижанням, ковзанням, зіткненнями, імпульсами, виходить за межі класичної методології гладких динамічних систем, то виникла потреба у створенні нових підходів і теорій. Кусково-гладкі системи демонструють набагато цікавішу асимптотичну динаміку, ніж гладкі системи, здебільшого тому, що у фазовому просторі існують множини, на яких функція системи недиференційовна, а в певних випадках навіть невизначена.

У цій роботі досліджено спочатку одновимірні кусково-гладкі неперервні й розривні відображення. Проаналізовано існування і стійкість періодичних розв'язків, досліджено біфуркації хаотичних атракторів. У просторах параметрів розглянутих систем вичерпно описано відповідні біфуркаційні структури. Деякі з них — це узагальнення вже відомих структур, але кілька біфуркаційних структур описано вперше. Зокрема, структуру збільшення кількості смуг, яка пов'язана лише з хаотичними атракторами. До того ж, біфуркації, які задають границі областей хаотичності в цій структурі, не пов'язані з жодними критичними гомоклінічними орбітами на відміну від досі відомих інших біфуркацій хаотичних атракторів. У дисертації виявлено два типи таких нових біфуркацій, які відбуваються завдяки контакту двох різних критичних точок. Отримано достатні умови для їхнього виникнення, знайдено досить простий критерій оцінювання кількості смуг хаотичного атрактора після біфуркації.

Окрім того, в роботі досліджено дво- і тривимірні відображення, а також відображення вищої розмірності, які моделюють важливі завдання економіки, екології, психології розвитку та інших суспільних наук. Для таких відображень розглянуто нерухомі точки, періодичні розв'язки, притягуючі гладкі й негладкі інваріантні криві, хаотичні атрактори різної конфігурації, області поглинання незмішаного і змішаного типів; вивчено їхні локальні і глобальні біфуркації й описано відповідні біфуркаційні структури у просторах параметрів.

Ключові слова: кусково-гладкі відображення, розривні відображення, необоротні відображення, критичні множини, відображення зі зникомим знаменником, фокальні точки, глобальні біфуркації, біфуркації зіткнення з межею, хаотична динаміка, хаотичні атрактори, мультистабільність, контактні біфуркації для критичних точок, біфуркаційні структури у просторі параметрів.

Panchuk A.A. Bifurcations of noninvertible smooth, piecewise smooth, and discontinuous maps — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.02 “Differential equations” (111 – Mathematics). — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2025.

The thesis is devoted to the study of the properties and bifurcations of asymptotic solutions for a wide range of piecewise smooth difference equations or maps, many of which represent relevant models of real phenomena in engineering, economics, psychology, and social sciences. The study of piecewise smooth dynamical systems gained popularity at the end of the last century in response to the growing demands of various applied fields of science. Since the mathematical analysis of processes associated with friction, chattering, sliding, collisions, and intermittency goes beyond the classical methodology of smooth dynamical systems, there was a need in developping new approaches and theories. Piecewise smooth systems demonstrate much more interesting asymptotic dynamics than smooth ones, largely due to the fact that there are sets in the phase space on which the system function is non-differentiable, and in some cases, even undefined.

In this work, at the beginning, one-dimensional piecewise smooth continuous and discontinuous maps are studied. The existence and stability of periodic solutions are analysed, and bifurcations of chaotic attractors are investigated. In the parameter spaces of the systems under consideration, the corresponding bifurcation structures are exhaustively described. Some of them are generalisations of already known structures, but several bifurcation structures were described for the first time. In particular, the bandcount accretion structure, which is associated with chaotic attractors only. In addition, the bifurcations that define the boundaries of the chaoticity regions in this structure are not related to any critical homoclinic orbits, unlike other bifurcations of chaotic attractors known so far. The thesis reveals and describes two types of such

new bifurcations that occur due to the contact of two different critical points. Sufficient conditions for their occurrence are obtained, and a fairly simple criterion for estimating the number of bands of a chaotic attractor after a bifurcation is found.

The work also investigated two- and three-dimensional maps, as well as maps of higher dimensions, that model existing important problems, arising in economics, ecology, developmental psychology, and other social sciences. For such maps, fixed points, periodic solutions, attracting smooth and non-smooth invariant curves, chaotic attractors of various configurations, absorbing areas of non-mixed and mixed types were considered; their local and global bifurcations were studied, and corresponding bifurcation structures in parameter spaces were analysed.

Key words: piecewise smooth maps, discontinuous maps, noninvertible maps, critical sets, maps with vanishing denominator, focal points, global bifurcations, border collision bifurcations, chaotic dynamics, chaotic attractors, multistability, contact bifurcations for critical points, bifurcation structures in the parameter space.