

В І Д Г У К

офіційного опонента про дисертацію Бондаренко Ольги Ігорівни “ Структурно фрактальні неперервні функції, означені в термінах нескінченносимвольних та канторовських зображень дійсних чисел ”, подану до захисту на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 “математичний аналіз”.

1. Актуальність теми. Дисертаційна робота виконана в галузі конструктивної теорії локально складних неперервних функцій з фрактальними властивостями. Вона присвячена сингулярним (монотонним та ніде не монотонним) функціям і засобам їх вивчення. Оскільки кожна монотонна функція є диференційовною майже скрізь, то кожна неперервна недиференційовна функція є ніде не монотонною. Проте, клас останніх є істотно ширшим. Серед них існують функції обмеженої і необмеженої варіації, а функції обмеженої варіації є також диференційовними майже скрізь. Сингулярною, традиційно, називають функцію обмеженої варіації, яка має похідну що дорівнює нулю майже скрізь в сенсі міри Лебега. Приклади монотонних сингулярних функцій є добре відомі, але вони, як і канторова драбина, є нестрого монотонними. Функції Салема і функція знаку запитання (функція Мінковського) є строго монотонними сингулярними функціями. Н. Okamoto, M. Wunsch (2005, 2007) побудували деякі інші приклади строго монотонних неперервних сингулярних функцій. Великі підкласи функцій розподілу випадкових величин з незалежними цифрами в різних системах кодування, досліджувались як підкласи класу строго монотонних сингулярних функцій в роботах Працьовитого М.В., Торбіна Г.М., Осауленка Р.Ю. та цілого ряду інших як українських, так і закордонних математиків. Ці функції мають ряд чудових властивостей з точки зору теорії фракталів. При цьому практично відсутні загальні підходи до дослідження таких об'єктів і кожна з таких функцій досліджувалася окремо. Зазначимо, що ці дослідження в сукупності становлять спробу накопичення емпіричного матеріалу за рахунок певних узагальнень класичних прикладів з складними властивостями. Водночас виявилось (K. Garg, 1985), що існують ніде не монотонні сингулярні функції. Зазначимо, що повна відсутність інтервалів монотонності, а також необмеженість варіації функції на кожному довільно малому проміжку з множини визначення, є необхідними умовами ніде не диференційовності функції. Клас таких функцій широкий, але через згадану причину, вони залишаються мало дослідженими. Тому, безумовно актуальним завданням є розробка засобів їх ефективного дослідження, зокрема, для того, щоб можна було дослідити величину цього класу у просторі неперервних функцій. Зазначимо, що інтенсивний розвиток теорії фракталів (фрактальної геометрії та фрактального аналізу) спонукає істотне зростання інтересу до неперервних ніде не монотонних функцій. М. Kesseböhmer, B.O. Stratmann (2008) провели доволі нескладне, але й ефективне дослідження фрактальних властивостей множини недиференційовності функції Мінковського $Q(x)$. Зокрема, довели, що одиничний інтервал $[0, 1]$ розбивається на три множини $[0, 1] = \{x : Q'(x) = 0\} \cup \{x : Q'(x) = \infty\} \cup \{x : \nexists Q'(x)\}$, а також отримали оцінки розмірностей Хаусдорфа (Hausdorff dimensions) цих множин. У дослідженнях Осауленка Р.Ю. зроблена у певному сенсі результативна спроба розвинути на основі ідей цієї статті загального підходу до дослідження фрактальних властивостей сингулярних функцій.

З огляду на сказане, не повинно виникати сумніву в актуальності дисертаційного дослідження нових класів неперервних ніде не монотонних недиференційовних функцій. Зокрема, структурних, варіаційних, інтегро-диференціальних та фрактальних властивостей класу неперервних локально складних функцій, означених в термінах В-зображення чисел.

2. Наукова новизна результатів дисертаційної роботи. Основний зміст дисертаційної роботи О.І. Бондаренко складає дослідження локально складних неперервних функцій з фрактальними властивостями, конструкції яких реалізовані в термінах системи кодування дійсних чисел засобами нескінченного та змінного алфавітів. Власне, дослідження неперервних нід не монотонних, сингулярних та функції, що не мають проміжків строгої монотонності. Основними новими результатами цієї дисертації на думку автора відгуку є:

- побудова нової системи кодування дійсних чисел (B -зображення), алфавітом якої є множина цілих чисел, дослідження її геометричних властивостей;
- опис міри Лебега множини чисел з обмеженнями на використання цифр в їхньому зображенні, зокрема, канторових двійково-фібоначієвих зображень;
- дослідження структурних, топологічних і метричних, інтегро-диференціальних та фрактальних властивостей локально складних функцій, означених в термінах B -зображення чисел;
- дослідження структурних, топологічних і метричних та диференціальних властивостей функції-інверсора Q -зображення.

Найбільше враження на автора даного відгуку справили своєю лаконічністю і точністю Теорема 4.2 та Теорема 5.2, а також Наслідок 5.4 з неї. На мій погляд, вони в повній мірі характеризують силу дисертаційного дослідження і ефективність методів, що в ній застосовуються, а також аналітичний хист автора дисертації.

Основні наукові результати дисертаційної роботи, що виносяться на захист є новими, наведені з повними і строгими доведеннями, а отже, є правильними. Досить точний опис результатів дисертаційної роботи дано у анотації дисертації та в авторефераті, тому їх подальший перелік опустимо.

3. Особистий внесок здобувача в отриманні наукових результатів. Дисертаційне дослідження виконано дисертантом самостійно. Основні теоретичні положення та розробки, що характеризують наукову новизну дослідження, теоретичне значення його результатів, одержані дисертантом особисто. Результати досліджень, які наведені у дисертаційній роботі та опубліковані у фахових наукових статтях, належать автору і є його науковим добробком. Порушення академічної доброчесності відсутні.

4. Достовірність та обґрунтованість отриманих результатів та запропонованих автором вирішень, висновків, рекомендацій. Достовірність результатів забезпечується строгими доведеннями теорем, які з достатньою повнотою наведені в дисертації. Автор захищає перелічені вище результати роботи.

5. Повнота викладу результатів роботи в наукових публікаціях, зарахованих за темою дисертації. Результати дисертаційного дослідження О.І.Бондаренко з достатньою повнотою (зокрема, всі основні результати роботи) опубліковані у 20 статтях і наукових повідомленнях, зокрема, у 6 статтях у фахових виданнях, серед яких 1 – у журналі Математичні Студії, що відображений у базі даних SCOPUS (Q3 на момент публікації), 3 – відображені у списку Б) фахових видань України; 14 у тезах конференцій різного рівня.

6. Зауваження. Дисертаційна робота в цілому добре написана, але містить невелику кількість описок, повний список яких ми не наводимо. Вкажемо лише на деякі, на погляд автора відгуку, недоліки та недоречності.

1) Опис всіх тез автора дисертації не містить опису видань, в яких ці тези опубліковані, а містить лише сторінки, на яких у відповідних збірниках тез вони опубліковані.

2) Складно встановити, в якому стандарті чи стилі оформлено описання як своїх публікацій, так і публікацій інших авторів зі списку літератури, позаяк у цьому автор поводить себе доволі довільно. Наприклад, опис статті [5] зі Списку опублікованих праць за темою дисертації відрізняється від опису інших статей з цього списку.

3) Не зрозуміло, чому в Списку опублікованих праць за темою дисертації присутня стаття в Journal of Mathematical Sciences [6], адже вона є в переліку видань країни-агресора у списку з Постанови РНБО, прийнятої в лютому 2022 року.

4) Текст дисертації містить ряд русицизмів, стилістичних огріхів, невідповідностей відмінків. Наприклад, в тексті зустрічаємо слова:

а) “в кожному як завгодно малому проміжку”, що є калькою з рос. “в каждом как угодно малом промежутке”, правильно ж “в кожному довільно малому проміжку”;

б) замість “всюди щільною” порібно писати “скрізь щільною”;

в) “відносно операція композиції перетворень”, а повинно бути “відносно операції композиції перетворень”; “має ніде не щільну множину точок росту додатної міри Лебега” – тут дві неточності, адже “ріст” – це, наприклад, ріст людини, в даному контексті повинно бути “зростання”. Крім цього, дану фразу можна зрозуміти, що йдеться про точки зростання додатної міри Лебега, а насправді мова йде про те, що множина точок зростання має додатну міру Лебега. Так і потрібно було написати; написано “міра ... рівна нулю”, а потрібно писати “міра ... дорівнює нулю”, бо рівна, наприклад, дорога; замість “канторівського типу” варто писати “канторового типу” або ж “типу Кантора”;

замість “має місце співвідношення” слід писати “виконується співвідношення” або ж “правильним є співвідношення”.

5) Формулювання Наслідку 2.1 допускає неоднозначне тлумачення. Записана у ньому умова є необхідною умовою для того, щоб множина C була нуль-множиною Лебега, а чи достатньою? З формулювання зрозуміти це складно.

6) Неодноразово свавільно використовується запис для позначення значення функції f у фіксованій точці $x = a$, а саме: $f(x = a) = \dots$. Те ж саме можна було би написати так: $f(x) \Big|_{x=a} = \dots$, або так: “значення функції f у фіксованій точці $x = a$ визначимо за допомогою рівності $f(x) = \dots$ ”.

7) Неакуратно вживається термін “функція розподілу”. Зокрема, написано “функція розподілу на інтервалі $(0, 1)$ ”. Якщо йдеться про ймовірнісну функцію розподілу, то стандартно вона визначена всій числовій прямій.

8) Неодноразово вживається словосполучення “матриця не містить нулів”, а якщо йдеться про відсутність нульових елементів, то так і потрібно писати “матриця не має нульових елементів”.

Висловлені щойно зауваження практично ніяк не впливають на позитивне в цілому сприйняття як результатів, отриманих у дисертації, так і самого її тексту.

7. Висновки. З огляду на сказане вище, вважаю, що дисертаційна робота відповідає вимогам “Порядку присудження наукових ступенів” (Постанова Кабінету міністрів України № 567 від 24.07.2013 із змінами, внесеними згідно з Постановою КМ за № 656 від 19.08.2015) щодо кандидатських дисертацій, а результати дисертаційної роботи відповідають вимогам до наукового рівня її результатів (актуальність, новизна, наукова значущість), є важливим внеском у конструктивну теорію локально складних неперервних функцій з фрактальними властивостями. Основні результати дисертації, отримані автором дисертації самостійно і опубліковані

у 5 статтях у виданнях, у яких слід публікувати результати дисертації. Враховуючи, що дисертаційна робота є завершеним науковим дослідженням, виконаним на сучасному науковому рівні, результати якого опубліковані та апробовані на наукових семінарах і конференціях, а порушення академічної доброчесності відсутні, вважаю, що її автор, **Бондаренко Ольга Ігорівна**, заслуговує присудження їй наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз.

Офіційний опонент

професор, доктор фізико-математичних наук,
зав.кафедри теорії функцій і функціонального
аналізу Львівського національного
університету імені Івана Франка



О.Б. Скасків

Підпис професора О.Б.Скасківа засвідчую,
Вчений секретар Львівського національного
університету імені Івана Франка



О.С.Грабовецька

Надійшло до докторської ради 026.206.01 21.04.2025р.
Учений секретар Інституту
математики НАН України  І. СОКОЛЕНКО

