

## ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу

Бондаренко Ольги Ігорівни

«Структурно фрактальні неперервні функції, означені в термінах нескінченносимвольних та канторівських зображень дійсних чисел»

подану на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз

Робота присвячена трьом класам неперервних функцій, визначених на одиничному проміжку, локальна поведінка яких є структурно складною у контексті варіаційних, диференціальних, тополого-метричних та фрактальних властивостей. Це функції: сингулярні (монотонні, немонотонні, ніде не монотонні, крім проміжків сталості), ніде не монотонні, зокрема не диференційовні. Серед функцій досліджуваних класів є функції обмеженої і необмеженої варіації, функції канторівського та квазіканторівського типів.

**Актуальність теми.** Загальна теорія вказаних класів локально складних функцій бідна, тоді як класи є масивними у різних метричних просторах, про що свідчать відомі теореми Банаха-Мазуркевича та Замфіреску. Інтенсивне дослідження таких функцій ведеться, але реалізується у певних конструктивно заданих класах або стосуються класичних відомих яскравих прикладів (серед сингулярних – це функції Серпінського, Мінковського, Салема, Салема-Такеча, інверсори та проектори різних систем зображення чисел тощо, серед ніде не диференційовних – це функції Такагі, Ван-дер-Вардена, Серпінського, Трибін-функція та ін.). Тому, вважаю, дану дисертаційну роботу актуальною. Вона є продовженням дисертаційних досліджень, виконаних під керівництвом професора Працьовитого М.В. (Барановського О.М., Василенко Н.А., Калашнікова А.В., Климчук С., Осауленка Р.Ю., Панасенка О.Б., Ратушняк С.П., Свинчук О.В.).

Об'єктивні методологічні труднощі на шляху аналітичного задання та дослідження вказаних типів функцій автор оминає шляхом створення нової оригінальної нескінченносимвольної системи кодування дійсних чисел, яка приводить до так званого  $B$ -зображення чисел інтервалу  $(0; 1)$ .

**Аналіз структури та змісту роботи.** Дисертаційна робота Бондаренко О.І. (загальним обсягом 135 сторінок) складається зі вступу, п'яти розділів, розділених на підрозділи, висновків до кожного розділу та загальних висновків, а також списку використаних джерел (94 найменувань) і додатку, що містить список публікацій здобувача та відомостей про апробацію результатів дослідження.

У вступі аргументовано актуальність дослідження, визначено об'єкт, предмет, мету і завдання; висвітлено наукову новизну одержаних результатів та особистий внесок здобувачки.

В розділі 1 «Концептуальні засади дослідження» наведено означення ключових понять, формулювання відомих фактів, які використовуються у інших розділах і стосуються кодувань (зображень) чисел одиничного проміжку та функцій з локально складною структурою. Розглянуто канторівські системи числення та їх узагальнення, так зване  $\tilde{Q}$ -зображення чисел, наведено ряд відомих модельних прикладів сингулярних, ніде не диференційовних, ніде не монотонних функцій. А також проведено огляд результатів попередніх досліджень, які стосуються теми дисертації.

У розділі 2 «Канторівське двійково-фібоначчєве зображення чисел в задачах теорії функцій» вивчається канторівська система числення, пов'язана з класичною послідовністю Фібоначчі, яка використовується для задання та дослідження множин канторівського типу з нульовою та додатною мірою Лебега, серед яких і аномально фрактальні множини, а також конструюються сингулярні, немонотонні і недиференційовні функції, функції з обмеженою і необмеженою варіаціями.

Розділ 3 « $\tilde{Q}$ -зображення і теорія фракталів» присвячений застосуванню відомого  $\tilde{Q}$ -зображення у теорії фрактальних множин, неперервних структурно фрактальних функцій та розподілів випадкових величин. Центральним об'єктом цього розділу, вважаю функцію, яку авторка називає інверсором. Основні результати цього розділу стосуються властивостей, зокрема його автомодельність та сингулярність (теореми 3.4, 3.5). Обґрунтування останнього факту ґрунтується на нормальних властивостях чисел за їх  $\tilde{Q}$ -зображеннями.

Одним з центральних об'єктів дослідження у розділі 4 є  $B$ -зображення чисел, яке ґрунтується на розкладах чисел в додатні ряди, сконструйовані з елементів двох склеєних нескінченно малих послідовностей («основ»). Його особливістю є нескінченність алфавіту (набору цифр), який в цій ситуації є набір цілих чисел. Нескінченна самоподібність, закладена в конструкцію кодування чисел, забезпечує технічну зручність аналізу множин і функцій. Основними результатами цього розділу є:

1. Теореми 4.2 і 4.3 про тополого-метричні та фрактальні властивості множин з обмеженнями на використання цифр у  $B$ -зображенні чисел.
2. Твердження про нормальні властивості чисел у їх  $B$ -зображенні.
3. Теорема 4.5, яка стверджує, що множина всіх неперервних бієкцій інтервалу  $(0; 1)$  на себе, що зберігають хвости  $B$ -зображення чисел, відносно операції «композиція» утворює нескінченну некомутативну групу.

У розділі 5 «Неперервні локально складні функції, пов'язані з  $B$ -зображенням чисел» коректно означивши континуальний клас функцій, які мають іррегулярну поведінку в кожному проміжку, де вони не є сталими, автору вдалось знайти критерій:

- ніде не монотонності;
- сингулярності канторівського типу;
- нуль-мірності множини несталості функції;
- нескінченності варіації функції.

**Наукова новизна результатів дисертаційної роботи.** Серед основних результатів хотілось би відзначити наступні:

1. Авторкою дисертаційного дослідження створено нову систему кодування дійсних чисел з двосторонньо нескінченним алфавітом ( $B$ -зображення), вивчено її тополого-метричні властивості і успішно використано для задання та дослідження множин, функцій, мір. Розглянуто цікавий частковий випадок ( $F$ -зображення), коли система кодування залежить від однієї основи.
2. Означено новий континуальний клас неперервних локально складних функцій з фрактальними властивостями, для елементів якого вивчались структурні, варіаційні, інтегро-диференціальні та автомодельні властивості. Значна частина тверджень отримана у формі необхідних і достатніх умов (це умови ніде не монотонності функції, канторовості функції, скінченності варіації тощо).
3. Виведені формули для обчислення міри Лебега множини несталості функцій, варіації функцій, визначеного інтеграла.

**Особистий внесок здобувачки в отриманні наукових результатів.**

Наукові результати, які виносяться на захист, є новими, отримані авторкою самостійно і достатньо повно висвітлені у публікаціях.

Достовірність та обґрунтованість отриманих результатів. Об'єкти дослідження коректно означені, факти повно і строго доведені, висновки належним чином аргументовані. Анотація і автореферат об'єктивно відображають зміст дисертації, включаючи наукову новизну.

**Повнота викладу результатів роботи в наукових публікаціях.**

Результати дисертаційного дослідження достатньо повно висвітлено у 6 статтях, 5 з яких опубліковані у фахових наукових виданнях України, дві з яких — у виданнях, що входять до наукометричної бази SCOPUS, та 14 тезах доповідей на наукових конференціях різних рівнів.

Автореферат повно і правильно відображає зміст дисертаційної роботи. Дисертація відповідає паспорту спеціальності та профілю ради.

**Зауваження та побажання.**

1. На даний момент існує невелика кількість математичних інструментів для задання неперервних локально складних функцій з фрактальними властивостями. Шкода, що про них мало сказано у вступі і у розділі 1.
2. У роботі зустрічається дублювання окремих фактів (наприклад, наслідок 5.13 з теореми 5.8, стор. 113, та наслідок 4.2 з теореми 4.4, стор. 89, мають однаковий зміст), їх наявність виправдовує лише те, що вони фігурують, як наслідки різних тверджень.
3. У роботі фрактальному аналізу множин приділено чимало уваги, але мало сказано про це у висновках та у формулюванні наукової новизни. Наприклад, теорема 2.4 констатує аномальну фрактальність однієї з множин канторівського типу, пов'язаною з фібоначчівсько-канторівською системою числення.
4. Поза увагою наукової новизни залишилася теорема 5.4, яка стосується розподілу значень функцій канторівського типу – важливе, далеко не тривіальне, твердження у даному дослідженні.
5. У роботі зустрічається деяка кількість описок та мовних огріхів (наприклад, на стор. 96 в доведенні пункту 2 леми 4.1 пропущена буква с).

**Загальні висновки.** Враховуючи актуальність дослідження, його наукову новизну, важливість та перспективність отриманих результатів для теорії функцій та фрактального аналізу, самостійність і завершеність роботи, відсутність академічної недоброчесності, повноту висвітлення основних положень дисертаційного дослідження у публікаціях, вважаю, що дисертаційна робота О.І. Бондаренко «Структурно фрактальні неперервні функції, означені в термінах нескінченносимвольних та канторівських зображень дійсних чисел» задовольняє всім вимогам «Порядку присудження наукових ступенів», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України № 567 від 24 липня 2013 року (зі змінами, внесеними згідно з Постановами Кабінету Міністрів України № 656 від 19 серпня 2015 року та № 1159 від 30 грудня 2015 року, № 567 від 27 липня 2016 року, № 943 від 20 листопада 2019 року, № 607 від 15 липня 2020 року), які висуваються до кандидатських дисертацій, а тому її авторка, Бондаренко Ольга Ігорівна, заслуговує на присудження їй наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.01 – математичний аналіз.

Професор кафедри алгебри, геометрії  
та математичного аналізу  
Херсонського державного університету,  
доктор фізико-математичних наук, професор



Олександр САВЧЕНКО

Підпис *О. Т. Савченко*  
підтверджую начальник ВК  
*Курасов*



Надійшов до докторської ради  
Ученый секретар Інституту  
математики НАН України  
22.06.2024  
Л. Соколенко  
17 квітня 2025р.  
Лор Соколенко