Національна академія наук України
Інститут математики

Бондаренко Ольга Ігорівна

УДК 517.5+511.7

Структурно фрактальні неперервні функції, означені в термінах нескінченносимвольних та канторівських зображень дійсних чисел

01.01.01 — математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2025

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі вищої математики Українського державного університету імені Михайла Драгоманова Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник доктор фізико-математичних наук, професор
Працьовитий Микола Вікторович,
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, декан факультету математики, інформатики та фізики,
в.о. завідувача відділу динамічних систем та фрактального аналізу Інституту математики НАН України.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Скасків Олег Богданович,
Львівський національний університет імені Івана Франка, завідувач кафедри теорії функцій і функціонального аналізу;

доктор фізико-математичних наук, професор
Савченко Олександр Григорович,
Херсонський державний університет, професор кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу.

Захист відбудеться «6» травня 2025 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01024 м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий «4» квітня 2025 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради Шидліч А. Л.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Тематика роботи стосується теорії локально складних неперервних функцій з фрактальними властивостями, конструкції яких реалізовані у термінах новоствореної системи кодування дійсних чисел засобами нескінченного та змінного алфавітів. В ній вивчаються неперервні ніде не монотонні (ті, що не мають проміжків монотонності) та сингулярні (ті, що відмінні від константи, і мають похідну рівну нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега) функції, а також функції, які не мають проміжків монотонності, окрім проміжків сталості.

Актуальність дослідження. Інтерес до неперервних функцій з локально складною структурою зароджувався разом зі створенням і розвитком диференціального числення. Перші приклади ніде не диференційовних функцій (Больцано (1830 р.) і Вейєрштрасса (1891 р.)) шокували прихильників новостворених Ньютоном і Лейбніцом теорій та деякий час вважались зразками математичних патологій. Пізніше набули статусу контрприкладів. Але після теореми Банаха-Мазуркевича (1931 р.) про топологічну масивність множини таких функцій у просторі $C[0;1]$ ніхто не насмілиться називати їх патологіями. І зараз, через століття, інтерес навіть до перших прикладів таких функцій не лише не згас, а й суттєво посилився (чимало нових досліджень стосувались недиференційовних функцій Такагі (1903), Серпінського (1914) та ін.)

Необхідною умовою ніде не диференційовності функції є її ніде не монотонність (повна відсутність інтервалів монотонності), а також необмеженість варіації функції в кожному як завгодно малому проміжку області визначеності. Тому функції з такими властивостями ми теж відносимо до класу W локально складних.

Інший клас локально складних об'єктів представляють сингулярні функції. Серед сингулярних існують монотонні (функції розподілу ймовірностей та інверсори цифр для деяких систем кодування чисел зі скінченним алфавітом), немонотонні і навіть ніде не монотонні функції. Окремий клас представляють сингулярні функції, які не мають проміжків монотонності, за винятком проміжків сталості. Такі функції вивчались у роботах Працьовитого М.В. та Свинчук О.В. Класичними прикладами строго зростаючих сингулярних функцій є функції Мінковського та Салема. Великі класи монотонних сингулярних функцій вивчались як функції розподілу випадкових величин з незалежними цифрами у різних системах їх кодування (Працьовитий М.В., Торбін Г.М., Барановський О.М., Виннишин Я.Ф., Гончаренко Я.В., Лисенко І.М., Макарчук О.П., Мороз М.П., Нікіфоров Р.О., Осауленко Р.Ю., Панасенко О.Б., Ратушняк С.П., Фещенко О.Ю., Салем Р., Марсалья Дж., Чаттерджі С. та інші).

Одним з найпростіших прикладів строго спадної сингулярної функції є інверсор Q_2-зображення чисел (останнє є узагальненням класичного двійкового зображення). Більшість інверсорів не самоподібних зображень чисел зі скінченним алфавітом є сингулярними. Варто також зазначити, що існують системи кодування чисел, для яких інверсори є розривними функціями в точках зліченної всюди щільної множини (Працьовитий М.В., Лисенко І.М., Маслова Ю.П.).

Теорія сингулярних, неперервних ніде не монотонних, зокрема недиференційовних функцій до цих пір проходить конструктивний етап становлення і розвивається в основному за рахунок цікавих прикладів і їх узагальнень та за рахунок індивідуальних теорій відомих яскравих класичних прикладів. Тому континуальні класи неперервних функцій, кожна з яких належить до вказаних типів, викликає нетривіальний інтерес і заслуговує на окрему увагу.

Засоби теорії фракталів забезпечують додаткові засоби аналізу функцій, їх графіків та інших суттєвих для функцій множин.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана в межах досліджень математичних об'єктів з локально складною тополого-метричною структурою і фрактальними властивостями, що проводяться на кафедрі вищої математики УДУ імені Михайла Драгоманова. Дослідження проводилося в рамках таких науково-дослідницьких тем:

1. Функції з фрактальними властивостями (множини рівнів та розподіли значень) і складні динамічні системи з ними пов'язані (№ державної реєстрації 0121U000208);
2. Математичні та природничі науки в НПУ імені М.П. Драгоманова (№ державної реєстрації 0121U000209);
3. Фрактальний аналіз математичних об'єктів зі складною локальною будовою (№ державної реєстрації 0107U000583).

Об'єкт дослідження. Об'єктом дослідження є системи кодування дійсних чисел зі змінним та нескінченним алфавітами, їх застосування у теорії локально складних функцій з фрактальними властивостями.

Предметом дослідження є геометрія (позиційна та метрична) вказаних систем кодування чисел; структурні, варіаційні, тополого-метричні, інтегро-диференціальні та фрактальні властивості неперервних функцій трьох континуальних класів.

Мета роботи полягає у створенні нової системи кодування дробової частини дійсних чисел засобами двосторонньо нескінченного алфавіту та використанні її для розширення і розвитку теорії неперервних локально складних функцій, зокрема з фрактальними властивостями.

Завдання дисертаційного дослідження полягають в наступному:

1. Обґрунтувати систему кодування дійсних чисел, алфавітом якої є множина цілих чисел (B-зображення). Вивчити її геометрію (властивості циліндрів і хвостових множин, властивості операторів лівосторонніх та правосторонніх зсувів, метричні співвідношення).
2. Розв'язати задачу про міру Лебега множини чисел з обмеженнями на використання цифр у їх зображеннях (канторівське двійково-фібоначчієве зображення, $\widetilde{Q}$-зображення, B-зображення).
3. Знайти нормальні властивості чисел у термінах вказаних зображень, тобто властивості зображень, якими володіють майже всі (у розумінні міра Лебега) числа одиничного інтервалу.
4. Коректно означити три класи неперервних функцій з локально складною структурою, пов'язані з різними системами зображення аргумента, вивчити їх структурні, варіаційні, інтегро-диференціальні та фрактальні властивості.
5. Вивчити структурні, тополого-метричні та диференціальні властивості функції-інверсора $\widetilde{Q}$-зображення.

Методи дослідження. У роботі використовувались методи теорії кодування дійсних чисел, теорії міри, метричної та ймовірнісної теорій чисел, математичного аналізу і теорії функцій, а також методи теорії фракталів (фрактального аналізу та фрактальної геометрії). Окремі ідеї, прийоми та методи черпались з робіт попередників, а саме: Працьовитого М.В., Торбіна Г.М., Гончаренко Я.В., Барановського О.М., Василенко Н.А., Василенко Н.М., Калашнікова А.В., Лещинського О.Л., Лисенко І.М., Нікіфорова Р.О., Панасенка О.Б., Ратушняк С.П., Свинчук О.В., Фещенка О.Ю., Хворостіни Ю.В. та ін.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні наукові результати, що виносяться на захист, такі.

1. Обґрунтовано нову систему кодування чисел (B-зображення) одиничного інтервалу, яка в якості алфавіту використовує множину Z всіх цілих чисел, описано її геометрію (геометричний зміст цифр, властивості циліндричних та хвостових множин, метричні співвідношення), вивчено властивості операторів лівостороннього та правостороннього зсувів. Доведено, що множина всіх неперервних перетворень одиничного інтервалу, які зберігають хвости B-зображення чисел, відносно операції композиція перетворень утворює некомутативну групу.

2. Для декількох множин чисел з обмеженнями на використання цифр у їх зображеннях описано тополого-метричні та фрактальні властивості.

3. Обґрунтовано ознаки нормальності числа за його B-зображенням (в термінах використання цифр та наборів цифр). Це зроблено і для інших систем кодування чисел.
4. Введено в розгляд і вивчено структурні, варіаційні, інтегро-диференціальні та фрактальні властивості континуального класу неперервних локально складних функцій, означених в термінах B-зображення чисел.
5. Вивчено структурні, тополого-метричні та диференціальні властивості функції-інверсора цифр $\widetilde{Q}$-зображення.

   Значна частина результатів отримана у формі необхідних та достатніх умов.

Наукові результати, які виносяться на захист, є новими, строго і повно обґрунтованими.

Практичне значення отриманих результатів. Робота носить в основному теоретичний характер. Її ідеї та результати можуть бути використані у розвитку теорій чисел та функцій, а також у фрактальному аналізі та фрактальній геометрії, які ведуться в Інституті математики НАН України, Українському державному університеті імені Михайла Драгоманова, Київському національному університеті імені Тараса Шевченка.

Особистий внесок здобувачки. Всі наукові результати, які виносяться на захист, отримані автором самостійно. Із робіт, опублікованих у співавторстві, у дисертації використані лише ті результати, які належать автору.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дослідження доповідалися на **наукових конференціях** різних рівнів, а саме:

— IV Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики (Київ, 23–25 квітня 2015 р.);

— Міжнародна наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге (Чернівці, 1–4 липня 2015 р.);

— VIII Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання» (Київ, 23 травня 2019 р.);

— Всеукраїнська наукова конференція «Актуальні проблеми математики та методики її навчання у вищій школі» (Київ, 17–18 грудня 2020 р.);

— XI Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків (Київ, 11–13 травня 2023 р.);

— IV Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Математика та інформатика в науці й освіті – виклики сучасності» (Вінниця, 25–26 травня 2023 р.);

— Міжнародна наукова конференція «Algebraic and Geometric Methods of Analysis» (Одеса, 29 травня–01 червня 2023 р.);

— XIV Міжнародна алгебраїчна конференція (Суми, 3–7 липня 2023 р.);

— Міжнародна наукова конференція, присвячена 55-річчю факультету математики та інформатики ЧНУ імені Ю. Федьковича (Чернівці, 28–30 вересня 2023 р.);

— XIX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука (Київ, 11–12 жовтня 2023 р.);

— XXII Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2024» (Київ, 11 квітня 2024 р.);

— XII Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків (Київ, 9–11 травня 2024 р.);

— V Міжнародна конференція, присвячена 145-річчю з дня народження Ганса Гана (Чернівці, 23–27 вересня 2024 р.);

— Міжнародна науково-практична конференція (УДУ імені Михайла Драгоманова, 28 жовтня 2024 р).

та **наукових семінарах**:

— семінар з фрактального аналізу Інституту математики НАН України та УДУ імені Михайла Драгоманова (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор Працьовитий М.В.);

— семінар відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор Романюк А.С.);

— семінар з теорії аналітичних функцій (Львівський національний університет імені Івана Франка, керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор Скасків О.Б.).

Публікації. Основні результати дисертаційного дослідження опубліковано в шести статтях [1–6] у наукових виданнях, п'ять з яких [1, 2, 4–6] входять до переліку фахових видань МОН України, серед них дві статті [1,2], які індексуються міжнародною науковометричною базою «Scopus».

Структура й обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, переліку скорочень і умовних позначень, зі вступу, п'яти розділів, розбитих на підрозділи, висновків до кожного розділу і загальних висновків, списку використаних джерел (94 найменування) і одного додатка, що містить список публікацій автора та відомості про апробацію результатів дисертації. Загальний обсяг дисертації становить 135 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обгрунтовано актуальність дослідження, визначено об'єкт, предмет, мету і завдання; зазначено наукову новизну одержаних результатів, особистий внесок здобувачки.

Перший розділ «Концептуальні засади дослідження» присвячено ключовим поняттям і фактам, що використовуються в роботі і стосуються теорії кодування (зображення) чисел одиничного проміжка та теорії функцій з локально складною структурою, також огляду результатів попередніх досліджень, що примикають до теми дисертаційного дослідження. У ньому проведено огляд літератури, сформульовані означення ключових понять та тверджень, які використовуються у роботі.

Основним об'єктом дослідження у розділі 2 **«Канторівське двійково-фібоначчієве зображення чисел в задачах теорії функцій»** є фрактальні множини і локально складні функції, означені у термінах канторівського двійково-фібоначчієвого зображення чисел з $[0;1]$, а саме:

$$[0;1] \ni x = \frac{\alpha_1}{s_1} + \frac{\alpha_2}{s_1 s_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{s_1 s_2 \ldots s_n} + \cdots = \Delta^{(s_n)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},$$

де $s_n = 2^{\varphi_n}$, $\varphi_1 = 1 = \varphi_2$, $\varphi_{n+2} = \varphi_n + \varphi_{n+1}$, $\alpha_n \in A_n \equiv \{0, 1, ..., s_n - 1\}$.

Теорема 2.2. Якщо $(c_n) \in L = A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots$ і для всіх $j \in A_n$ $g_{c_n n} = 0, g_{jn} = \frac{1}{2^{\varphi_n}-1}$ при $j \neq c_n$ і $\beta_{jn} = g_{0n} + ... + g_{[j-1]n}$, то функція f, означена рівністю

$$f(x = \Delta^{(s_n)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_{\alpha_k k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j j},$$

є функцією розподілу квазіканторівського типу (тобто має ніде не щільну множину точок росту додатної міри Лебега).

Теорема 2.3. Множина $C[\Delta; V_n] = \{x = \Delta_{c_1c_2\ldots c_n\ldots}, c_n \in V_n \subset A_n\}$, є: 1) відрізком $[0;1]$, якщо $V_n = A_n$ $\forall n \in N$; 2) об'єднанням відрізків, якщо $V_n = A_n$ для всіх $n > n_0$; 3) досконалою ніде не щільною множиною, якщо для нескінченної кількості значень n виконується нерівність $V_n \neq A_n$. Її міра Лебега обчислюється за формулою $\lambda(C) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{|A_n \setminus V_n|}{2^{\varphi_n}})$.

Наслідок 2.1. Множина C є нуль-множиною Лебега лише, коли

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|A_n \setminus V_n|}{2^{\varphi_n}} = \infty.$$

Теорема 2.5. Якщо $g_{0n} > 0, g_{[2^{\varphi_n}-1]n} > 0, g_{0n} + g_{[2^{\varphi_n}-1]n} = 1$, $\beta_{0n} = 0, \beta_{jn} = g_{0n}$ при $0 < j < 2^{\varphi_n}$, то функція

$$f(x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_{\alpha_k k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j j},$$

є сингулярною функцією з аномально фрактальним спектром (має нульову фрактальну розмірність Гаусдорфа-Безиковича).

Решта результатів цього розділу стосуються функції ϕ:

$$\phi\left(x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \delta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\delta_{\alpha_k k}\prod_{i=1}^{k-1} g_{\alpha_i i}\right) \equiv \Delta^{\phi}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},$$

де $\overline{g}_k = (g_{0k}, g_{1k}, \ldots, g_{s_k-1,k})$ — задана послідовність векторів така, що:
1)$|g_{ik}| < 1;$ 2)$\delta_{ik} \equiv g_{0k} + g_{1k} + \ldots + g_{i-1,k} > 0,\ i \in A_{s_k};$
3)$g_{0k} + g_{1k} + \ldots + g_{s_k-1,k} = 1,\ k \in N;$ 4) $\prod\limits_{k=1}^{\infty} g_{c_k k} = 0,\ c_k \in A_k.$

Лема 2.3. Приріст $\mu_\phi\left(\Delta_{c_1c_2\ldots c_m}\right) \equiv \phi\left(\Delta_{c_1\ldots c_m(s_{m+k}-1)}\right) - \phi\left(\Delta_{c_1\ldots c_m(0)}\right)$ функції ϕ на циліндрі $\Delta_{c_1\ldots c_m}$ обчислюється за формулою

$$\mu_\phi(\Delta_{c_1c_2\ldots c_m}) = \prod_{i=1}^{m} g_{c_i i}.$$

Теорема 2.6. Функція $y = \phi(x)$ є неперервною в кожній точці відрізка $[0;1]$; строго зростаючою, якщо $g_{ik} > 0$ для будь-яких $i \in A_{s_k},\ \forall k \in N$; сталою на всіх циліндрах виду $\Delta_{c_1\ldots c_{k-1}i}$, якщо $g_{ik} = 0$.

Лема 2.4. Якщо $g_{ik} > 0$ для всіх $i \in A_{s_k}$ і $k \geqslant m$, то функція $\phi(x)$ є *монотонною* на кожному циліндрі m-го рангу, причому на циліндрі $\Delta_{c_1\ldots c_m}$
1) строго зростає, якщо $P \equiv \prod\limits_{i=1}^{m} g_{c_i i} > 0$; 2) строго спадає, якщо $P < 0$;
3) є сталою, якщо $P = 0$.

Теорема 2.7. Якщо матриця $\|g_{ik}\|$ не містить нулів, але має нескінченну кількість від'ємних елементів, то функція $\phi(x)$ є *ніде не монотонною.*

Теорема 2.8. Варіація $V(\phi)$ функції ϕ на відрізку $[0;1]$ обчислюється за формулою $V(\phi) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} W_k$, де $W_k = g_{0k} + |g_{1k}| + \ldots + |g_{s_k-1,k}|$.

Наслідок 2.7. Функція ϕ є функцією обмеженої варіації тоді і тільки тоді, коли збігається ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1 - W_k)$.

Розділ 3 «**$\widetilde{Q}$-зображення і теорія фракталів**» присвячений відомому $\widetilde{Q}$-зображенню, що є узагальненням зображення чисел у канторівських системах числення, та його застосуванням у теорії фрактальних множин та неперервних структурно фрактальних функцій. У ньому поширюються деякі результати розділу 2 на більш загальний випадок, а також вивчаються властивості нової функції – інверсора $\widetilde{Q}$-зображення.

$\widetilde{Q}$-зображення чисел $x \in [0;1]$ визначається фіксованою послідовністю натуральних чисел (m_k), послідовністю алфавітів $A_k \equiv \{0,1,2,...,m_k\}$ і послідовністю додатних стохастичних векторів-стовпців $(q_{0k},...,q_{m_k k})$: 1) $0 < q_{ik} < 1$; 2) $\sum\limits_{i=0}^{m_k} q_{ik} = 1$, $k \in N$; 3) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \max\limits_i \{q_{in}\} = 0$.

Для довільного числа $x \in [0;1]$ існує послідовність $(i_k) \in L$ така, що

$$x = a_{i_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} [a_{i_k k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{i_j(x) j}] \equiv \Delta^{\widetilde{Q}}_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots},$$

де $a_{i_k k} = \sum\limits_{s=0}^{i_k - 1} q_{sk}$. Подання числа x вказаним рядом називається його $\tilde{Q}$*-представленням*, його скорочений запис $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots}$ — $\tilde{Q}$*-зображенням*, i_k — k*-ою цифрою* цього зображення.

Основним об'єктом дослідження у цьому розділі є функція, означена рівністю $I(x = \Delta^{\widetilde{Q}}_{i_1 \ldots i_n \ldots}) = \Delta^{\widetilde{Q}}_{[m_1 - i_1] \ldots [m_n - i_n] \ldots}$ і названа *інверсором.*

Лема 3.6. Інверсор I цифр $\widetilde{Q}$-зображення чисел є неперервною строго спадною функцією на $[0;1]$.

Теорема 3.4. Інверсор є лінійною функцією $I(x) = 1 - x$ тоді і тільки тоді, коли для елементів матриці $||q_{ik}||$ виконуються рівності $q_{i_n n} = q_{[m_n - i_n] n}$, $\forall n \in N$.

Лема 3.8. Якщо для елементів матриці $||q_{ik}||$ мають місце рівності $\begin{cases} q_{[m_1 - i_1]1} \neq q_{i_1 1}, \\ q_{[m_n - i_n]n} = q_{i_n n}, n = 2,3,..., \end{cases}$ то функція є лінійною на циліндрах 1-го рангу, а саме функцією виду

$$I(x) = a_{m_1 - i_1(x) + 1} - \frac{q_{[m_1 - i_1(x)]1}}{q_{i_1(x)1}} (x - a_{i_1(x)}).$$

Наслідок 3.4. Якщо для елементів матриці $||q_{ik}||$ виконуються рівності

$$\begin{cases} q_{[m_k - i_k]1} \neq q_{i_k k}, \ k = \overline{1,2,...,n-1} \\ q_{[m_n - i_n]n} = q_{i_n n}, 1 \neq n \in N, \end{cases}$$

то інверсор $I(x)$ є кусково-лінійною функцією, причому лінійною на циліндрах $(n-1)$-го рангу $I(x)=\sum\limits_{k=1}^{n-2} a_{m_k-i_k}\prod\limits_{j=1}^{k-1} q_{[m_j-i_j]}+$
$+a_{m_{n-1}-i_{n-1}+1}\prod\limits_{j=1}^{n-2} q_{[m_j-i_j]j}+\prod\limits_{j=1}^{n-1}\frac{q_{[m_j-i_j]j}}{q_{i_jj}}(x-\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_{i_k}\prod\limits_{j=1}^{k-1} q_{i_jj}).$

Лема 3.9. Якщо в $\widetilde{Q}$-унарній точці $x_0=\Delta^{\widetilde{Q}}_{i_1\ldots i_n\ldots}$ існує похідна $I'(x_0)$ функції I, то її можна обчислити за формулою $I'(x_0)=-\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{q_{[m_n-i_n]n}}{q_{i_nn}}$.

Теорема 3.5. Якщо послідовність (m_k) є сталою $(m_k=m)$ і $\lim\limits_{k\to\infty} q_{ik}=$
$=q_i$, $i=\overline{0,m}$, причому існує таке s, що $q_s\neq\frac{1}{m+1}$, то функція має похідну рівну нулю майже скрізь, тобто є *сингулярною.*

Теорема 3.6. Якщо послідовність (m_n) є сталою $(m_n=m)$ і матриця $||q_{ik}||$, що визначає $\widetilde{Q}$-зображення, є періодичною, а саме виконуються рівності $q_{i,k(n-1)+j}=g_{ij}, j=\overline{1,k}$ для деякого фіксованого натурального k і всіх $n\in N$, то графік Γ функції I є самоафінною множиною з самоафінною структурою $\Gamma=\bigcup\limits_{e_1=0}^{m_1}\ldots\bigcup\limits_{e_k=0}^{m_k}\Gamma_{e_1\ldots e_k}, e_k\in N^0_{m_k}$, де
$\Gamma_{e_1\ldots e_k}=f_{e_1\ldots e_k}(\Gamma)=\{(x;y)\in R^2: x=\Delta_{e_1\ldots e_k i_1\ldots i_n\ldots}, y=I(x)\}$,

$$f_{e_1\ldots e_k}:\begin{cases}x'=\delta_{e_1\ldots e_k}(\Delta_{i_1i_2\ldots i_n\ldots}),\\ y'=\delta_{[m_1-e_1]\ldots[m_n-e_n]}(\Delta_{[m_1-i_1][m_2-i_2]\ldots}),\end{cases}\qquad (e_1\ldots e_k)\in A_1\times\ldots\times A_k.$$

Наслідок 3.6. Самоафінна розмірність графіка Γ функції I є розв'язком рівняння $\sum\limits_{e_1=0}^{m_1}\ldots\sum\limits_{e_k=0}^{m_k}\left(\prod\limits_{j=1}^{k}(q_{e_jj}q_{[m_j-e_j]j})^{\frac{x}{2}}\right)=1.$

Два наступні розділи є головними у дисертаційному дослідженні.

У розділі 4 **«B–зображення дійсних чисел»** обгрунтовується нова система кодування (B-зображення) чисел з (0;1), алфавітом якої є множина всіх цілих чисел. Ця система є, взагалі кажучи, мультиосновною, але в окремих випадках вона може бути дво- або одноосновною (Ф-зображення). Тут вивчаються геометрія B-зображення чисел, оператори лівостороннього та правостороннього зсувів цифр B-зображення, неперервні перетворення (0;1), які зберігають хвости B-зображення чисел, розв'язуються тополого-метричні задачі.

Нехай $A=Z=\{0,\pm1,\pm2,\ldots\}$ — алфавіт, L – простір послідовностей елементів алфавіту; (Θ_n) — послідовність додатних дійсних чисел $(n\in Z)$ така, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Theta_{-n}\equiv u<1$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Theta_n\equiv v<1$, $u+v=1$; $b_n\equiv\sum\limits_{i=-\infty}^{n-1}\Theta_i$.

Теорема 4.1. Для будь-якого числа $x\in(0;1)$ існує єдиний скінченний набір цілих чисел $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$ або єдина послідовність $(\alpha_n) \in L$ такі, що виконується одна з рівностей

$$x = b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{m} b_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{\alpha_i} \equiv \Delta^B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m(\varnothing)}, \qquad (1)$$

$$x = b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} b_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{\alpha_i} \equiv \Delta^B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}. \qquad (2)$$

Символічний запис x рівністю (1) або (2) називатимемо *B-зображенням* цього числа, а $\alpha_n = \alpha_n(x)$ — n-ою його цифрою. Через єдиність B-зображення числа цифра $\alpha_n = \alpha_n(x)$ є коректно означеною функцією числа x.

Числа, для яких виконується рівність (1), називаються *B-скінченними*, а ті, для яких виконується рівність (2), — *B-нескінченними.*

Множина всіх B-скінченних чисел є зліченною, причому всюди щільною в інтервалі $(0;1)$ множиною.

B-зображення є засобом кодування чисел інтервала $(0;1)$, їх ідентифікації та порівняння: *числа $x = \Delta^B_{\alpha_1\ldots\alpha_m\ldots}$ і $y = \Delta^B_{\beta_1\ldots\beta_m\ldots}$ перебувають у відношенні $x < y$ тоді і лише тоді, коли існує $k \in N$ таке, що $\alpha_k < \beta_k$, але $\alpha_i = \beta_i$ при $i < k$.*

Теорема 4.2. Множина чисел $C[B, V_n] = \{x : \alpha_n(x) \in V_n \subset Z\}$ є ніде не щільною, якщо нескінченну кількість разів виконується нерівність $V_n \neq Z$. Її міра Лебега обчислюється за формулою

$$\lambda(C) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(E_n)}{\lambda(E_{n-1})} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda(\overline{E}_n)}{\lambda(E_{n-1})}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - W_n),$$

де $E_0 = (0;1)$, E_n — об'єднання циліндрів n-го рангу, серед внутрішніх точок яких є точки множини C, $\overline{E}_n \equiv E_{n-1} \setminus E_n$, $W_n \equiv \sum\limits_{i \in Z\setminus V_n} \Theta_i$.

Наслідок 4.1. $\lambda(C) > 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} W_k < \infty$.

Теорема 4.3. Множина $C[B, V] = \{x : \alpha_n(x) \in V \neq Z\}$ є N-самоподібною нуль-множиною Лебега, N-самоподібна розмірність якої збігається з розмірністю Гаусдорфа-Безиковича і є розв'язком рівняння $\sum\limits_{i \in V} \Theta_i^x = 1$.

Теорема 4.4. Множина чисел інтервала $(0;1)$ з обмеженими цифрами B-зображення має нульову міру Лебега. Для майже всіх $x \in (0;1)$ виконується умова $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \alpha_n(x) = \infty$, де $\alpha_n(x)$ — це n-та B-цифра числа x.

У пункті 4.6 вивчались *неперервні перетворення одиничного інтервалу, які зберігають хвости зображення чисел.* Конструктивно доведено, що множина всіх таких перетворень відносно операції «композиція перетворень» утворює нескінченну некомутативну групу. Конструкції перетворень містять поєднання лівостороннього та правостороннього зсувів.

У розділі 5 **«Неперервні локально складні функції, пов'язані з B-зображенням чисел»** досліджуються функції, які визначаються у термінах B-зображення аргумента. Серед них функції монотонні, ніде не монотонні і такі, що не мають проміжків монотонності, окрім проміжків сталості. Досліджуються структурні, варіаційні, інтегро-диференціальні та фрактальні властивості функцій.

Нехай нескінченна матриця $||p_{ik}||$ $(\forall i \in Z, \forall k \in N)$ задовольняє умови:

1) $|p_{ik}| < 1\ \forall i \in Z, \forall k \in N$; 2) $\sum\limits_{i \in Z} p_{ik} = 1, \forall k \in N$;

3) $0 < \sum\limits_{k=2}^{\infty} \prod\limits_{j=1}^{k-1} p_{i_j j} < \infty, \forall i_j \in Z$; 4) $0 < \sigma_{ik} \equiv \sum\limits_{j=-\infty}^{i-1} p_{jk} < 1,\ \forall i \in Z$, $\forall k \in N$.

Функція f, що є основним об'єктом дослідження, означується рівностями

$$\begin{cases} f(x = \Delta^B_{i_1 \ldots i_k \ldots}) = \sigma_{i_1 1} + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \sigma_{i_k k} \prod\limits_{j=1}^{k-1} p_{i_j j} \equiv \Delta^f_{i_1 \ldots i_k \ldots}, \\ f(x = \Delta^B_{i_1 \ldots i_m (\varnothing)}) = \sigma_{i_1 1} + \sum\limits_{k=2}^{m} \sigma_{i_k k} \prod\limits_{j=1}^{k-1} p_{i_j j} \equiv \Delta^f_{i_1 \ldots i_m (\varnothing)}. \end{cases}$$

Теорема 5.1. Функція f неперервна в кожній точці області визначення. Якщо $p_{cm} = 0$, то f є сталою на кожному циліндрі $\Delta^B_{c_1 c_2 \ldots c_{m-1} c}$. Якщо $p_{ik} \neq 0$ для будь-яких $i \in Z$, $k \in N$, то функція f не має інтервалів сталості.

Лема 5.2. Приріст $\mu_f(\Delta^B_{c_1 \ldots c_m}) \equiv f(d) - f(a)$ функції f на циліндрі $\Delta^B_{c_1 \ldots c_m} = [a; d)$ обчислюється за формулою $\mu_f(\Delta^B_{c_1 \ldots c_m}) = \prod\limits_{i=1}^{m} p_{c_i i}$.

Наслідок 5.2. Якщо $p_{c_i i} \neq 0$ для всіх $i \leqslant m$, то приріст функції f на циліндрі $\Delta^B_{c_1 \ldots c_m}$ є або додатним, або від'ємним, причому додатним, якщо $\prod\limits_{i=1}^{m} p_{c_i i} > 0$, і від'ємним в протилежному випадку.

Наслідок 5.3. Якщо матриця $||p_{ik}||$ не має від'ємних елементів, то f є функцією розподілу на інтервалі $(0;1)$, причому строго зростаючою, якщо матриця не містить нулів.

Теорема 5.2. Міра Лебега $\lambda(S_f)$ множини S_f несталості функції f обчислюється за формулою: $\lambda(S_f) = \prod\limits_{k=1}^{\infty}(1 - \frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})}) = \prod\limits_{k=1}^{\infty}(1 - W_k)$,

$F_0 = [0;1]$, F_k – об'єднання B-циліндрів рангу k, які містять циліндри вищих рангів з ненульовими приростами функції f, $\overline{F}_k \equiv F_{k-1} \setminus F_k$, $W_k = \sum\limits_{i:p_{ik}=0} \Theta_i$.

Наслідок 5.4. Має місце співвідношення

$$\lambda(S_f) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})} = \sum_{k=1}^{\infty} W_k = \infty.$$

Теорема 5.3. Функція f є *сингулярною функцією канторівського типу* (тобто міра Лебега множини її точок несталості рівна нулю) тоді і лише тоді, коли нескінченна кількість стовпців матриці $||p_{ik}||$ містять нулі і при цьому $\sum\limits_{k \in N} W_k = \infty$.

Наслідок 5.5. Якщо $p_{i_k k} = 0$, $p_{jk} \neq 0$ при $j \neq i_k$ і $\Theta_{i_k} < \frac{1}{k^2}$ для будь-якого k, то ряд $\sum\limits_{k \in N} W_k$ збігається і f є *функцією квазіканторівського типу*.

Наслідок 5.6. Якщо всі стовпці матриці $||p_{ik}||$ однакові, тобто $p_{ik} = p_i$ для будь-якого $k \in N$, і принаймні один елемент матриці рівний нулю (нехай $p_m = 0$), то f є функцією канторівського типу.

У пункті 5.4 *«Розподіли значень функцій канторівського типу»* для неперервних функцій доведено наступні твердження.

Лема 5.3. Якщо f — функція канторівського типу, а ζ — випадкова величина з незалежними однаково розподіленими цифрами B-зображення, то точка $y_* = f(\Delta^B_{c_1 \ldots c_{m-1} i(\varnothing)})$, де $p_{c_k k} \neq 0 \neq q_{c_k}$, $k = \overline{1, m-1}, p_{im} = 0 \neq q_i$, є атомом розподілу випадкової величини $Y = f(\zeta)$, маса якого дорівнює значенню виразу $q_i \prod\limits_{k=1}^{m-1} q_{c_k} = P\{\zeta \in \Delta^B_{c_1 \ldots c_{m-1} i}\}$.

Наслідок 5.7. Якщо f — функція розподілу канторівського типу, а ζ — неперервна випадкова величина з незалежними однаково розподіленими цифрами B-зображення, то точковий спектр (множина атомів) випадкової величини $Y = f(\zeta)$ утворюють точки виду y_*.

Теорема 5.4. Якщо f — функція розподілу канторівського типу, а ζ — неперервна в. в. з незалежними однаково розподіленими цифрами B-зображення, $P\{\zeta_n = i\} = q_i > 0$, $\sum\limits_{i \in Z} q_i = 1$, то в. в. $Y = f(\zeta)$ має чисто дискретний розподіл тоді і лише тоді, коли $G \equiv \sum\limits_{k=1}^{\infty} G_k \prod\limits_{i=1}^{k-1} Q_i = 1$, $q_k = \Theta_k$ $\forall k \in Z$. Його атомами є точки виду $y = f(\Delta^B_{c_1 \ldots c_{m-1} i(\varnothing)})$, де $p_{c_k k} \neq 0 \neq q_{c_k}$, $k = \overline{1, m-1}$, $p_{im} = 0 \neq q_i$, маса атома якої дорівнює $q_i \prod\limits_{k=1}^{m-1} q_{c_k}$.

У решті випадків розподіл Y є нетривіальною сумішшю дискретного та неперервного розподілів.

У пункті 5.5 доведено *критерій ніде не монотонності функції.*

Теорема 5.5. Функція f є ніде не монотонною тоді і лише тоді, коли серед елементів матриці $||p_{ik}||$ немає нулів і нескінченна кількість її стовпців містять від'ємні елементи.

У пункті 5.6 вивчаються *варіаційні властивості функції: виведено формулу для обчислення варіації, за допомогою якої встановлено необхідні і достатні та деякі достатні умови, за яких функція має необмежену варіацію.*

Лема 5.4. Функція f свого найбільшого і найменшого значення на B-циліндрі набуває на його кінцях.

Теорема 5.6. Варіація $V_0^1(f)$ функції f на інтервалі $(0;1)$ обчислюється за формулою $V_1^0(f) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} V_k$, де $V_k = \sum\limits_{i=-\infty}^{+\infty} |p_{ik}|$.

Наслідок 5.8. Функція f має необмежену варіацію тоді і лише тоді, коли $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (1 - V_k) = -\infty$.

Наслідок 5.9. Якщо всі стовпці матриці $||p_{ik}||$ однакові і функція f є ніде не монотонною, то вона має необмежену варіацію.

Наслідок 5.10. Якщо нескінченна кількість стовпців у матриці $||p_{ik}||$ містять нульові елементи і при цьому $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (1 - V_k) = -\infty$, то f є функцією канторівського або квазіканторівського типу, яка має необмежену варіацію і не має проміжків монотонності, окрім проміжків сталості.

У пункті 5.7 вивчаються *автомодельні та інтегральні властивості функцій.*

Лема 5.5. Графік Γ_f функції f є структурно фрактальною множиною, а саме N-самоафінною множиною з наступною структурою самоафінності:

$$\Gamma_f = \bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} \Gamma_i, \quad \Gamma_i = \varphi_i(\Gamma_f), \quad \varphi_i : \begin{cases} x' = \Theta_i x + b_i, \\ y' = p_i y + \sigma_i, \end{cases} \quad i \in Z.$$

Теорема 5.7. Для випадку, коли всі стовпці матриці однакові ($p_{ik} = p_i$), має місце рівність

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{\sum\limits_{i \in Z} \sigma_i \Theta_i}{1 - \sum\limits_{i \in Z} \Theta_i p_i},$$

де $\sigma_i \equiv \sum\limits_{j=-\infty}^{i-1} p_j, \forall i \in Z$.

Пункт 5.8 присвячений *диференціальним властивостям функції* і доведенню ознаки її сингулярності для випадку, коли всі стовпці матриці однакові.

Лема 5.6. Міра Лебега множини канторівського типу $C[B,V] = \{x : x = \Delta^B_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}, \alpha_n \in V \subset Z, V \neq Z\}$ дорівнює нулю.

Наслідок 5.11. Міра Лебега множини $E_n(i)$ чисел з $(0;1)$, у B-зображенні яких цифра i може зустрічатись на перших n місцях, дорівнює нулю.

Теорема 5.8. Множина I чисел з $(0;1)$, у B-зображенні яких цифра $i \in A$ зустрічається лише скінченну кількість разів, має нульову міру Лебега.

Наслідок 5.12. Майже всі числа інтервалу $(0;1)$ у своїх B-зображеннях використовують всі цифри алфавіту нескінченну кількість разів.

Наслідок 5.13. Для майже всіх (у розумінні міри Лебега) $x = \Delta^B_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots} \in (0;1)$ маємо, що $\lim\sup\limits_{n\to\infty} \alpha_n(x) = \infty$.

Лема 5.7. Якщо у B-нескінченній точці x_0 існує скінченна похідна функції f, то вона обчислюється за формулою $f'(x_0) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \frac{p_{\alpha_k(x_0)}}{\Theta_{\alpha_k(x_0)}}$. Якщо нескінченний добуток $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \frac{p_{\alpha_k(x_0)}}{\Theta_{\alpha_k(x_0)}}$ розбігається, причому не до нуля, то не існує скінченної похідної функції f у точці x_0.

Теорема 5.9. Якщо (p_n) — послідовність додатних дійсних чисел, серед членів якої існує $p_k \neq \Theta_k$, то f є сингулярною строго зростаючою функцією розподілу ймовірностей на інтервалі $(0;1)$.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота виконана в галузі метричної теорії неперервних локально складних функцій, які мають структурно фрактальні властивості. В ній отримано наступні результати:

1. Вивчено окремі класи функцій з локально складною структурою, означених у термінах зображення дійсних чисел рядами Кантора (канторівські системи числення).
2. Створено нову систему кодування дійсних чисел одиничного проміжка (B-зображення), алфавітом якої є множина цілих чисел. Описано її геометрію (геометричних зміст цифр, метричні відношення, обгрунтовано властивості циліндричних та хвостових множин), розв'язано ряд метричних задач і встановлено нормальні

властивості чисел за їх B-зображенням.

3. З використанням B-зображення означено континуальний клас неперервних функцій, серед яких монотонні, немонотонні, ніде не монотонні, ніде не диференційовні; функції обмеженої та необмеженої варіації; сингулярні функції.
4. Для функцій означеного класу вичерпно розв'язано ряд задач:

4.1. Виведено формулу для обчислення міри Лебега множини несталості функцій. Доведено критерій її нуль-мірності.

4.2. Знайдено необхідні і достатні умови належності функції до класу сингулярних функцій канторівського типу.

4.3. Доведено критерій ніде не монотонності функції.

4.4. Виведено формулу для обчислення варіації функції та знайдено необхідні і достатні умови, за яких функція має необмежену варіацію.

4.5. Для випадку, коли функція не має проміжків сталості, встановлено структурну фрактальність графіка (його N-самоафінність) і обчислено визначений інтеграл.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Pratsiovytyi M., Bondarenko O., Lysenko I., Ratushniak S.* Continuous Functions with Locally Complicated and Fractal Properties Related to Infinite-Symbol B-Representation of Numbers. // Journal of Mathematical Sciences (United States), 2024, 282 (6) — P. 1008–1027. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-024-07230-w
2. *Pratsiovytyi M.V., Baranovskyi O.M., Bondarenko O.I., Ratushniak S.P.* One class of continuous locally complicated functions related to infinite-symbol Φ-representation of numbers. Matematychni Studii, 59(2). — 2023. — P. 123-131. DOI: https://doi.org/10.30970/ms.59.2.123-131
3. *Бондаренко О.І., Працьовитий М.В.* Канторівська система числення, пов'язана з двійковим рядом і послідовністю Фібоначчі // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2017. — Т.14 (4). — Київ: Інститут математики НАН України, 2017. С.178–187. https://trim.imath.kiev.ua/index.php/trim/article/view/414
4. *Бондаренко О.І., Василенко Н.М., Працьовитий М.В.* Канторівська двійково-фібоначчієва система числення у задачах теорії функцій // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2019. – Т. 16 (3). – С. 173–185. https://trim.imath.kiev.ua/index.php/trim/article/view/515

5. *Працьовитий М.В., Бондаренко О.І., Ратушняк С.П., Франчук К.В.* $\widetilde{Q}$-зображення дійсних чисел як узагальнення канторівських систем числення // Могилянський математ. журнал. — 2022. — Том № 5. — С. 9–18. DOI: https://doi.org/10.18523/2617-7080520229-18
6. *Працьовитий М.В., Бондаренко О.І., Василенко Н.М., Лисенко І.М.* Нескінченносимвольне B-зображення дійсних чисел і деякі його застосування// Буковинський математичний журнал. — 2023. — Т.11 (1). — С. 94-105. DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2023.01.08
7. *Бондаренко О.І., Працьовитий М.В.* Чотирьохсимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування// IV Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики. — 2015. — С.35.
8. *Бондаренко О.І., Працьовитий М.В.* Одна система числення зі змінним алфавітом як частинний випадок представлення чисел рядами Кантора// Міжнародна наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге. — 2015. — С.24.
9. *Бондаренко О.І.* Канторівські системи числення і послідовності Фібоначчі// VIII Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». — 2019. — С.37.
10. *Бондаренко О.І.* Канторівська двійково-фібоначчієва система числення у задачах теорії функцій// Всеукраїнська наукова конференція «Актуальні проблеми математики та методики її навчання у вищій школі». — 2020. — С.5–7.
11. *Бондаренко О.І., Василенко Н.М.* Нескінченно-символьне Ф-зображення його геометрія// XI Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків. — 2023. — С.59–60.
12. *Працьовитий М.В., Бондаренко О.І., Лисенко І.М., Ратушняк С.П.* Нескінченно-символьне Ф-зображення дробової частини дійсного числа і його застосування у задачах теорії функцій, теорії ймовірності та фрактального аналізу// IV Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Математика та інформатика в науці й освіті - виклики сучасності». — 2023. — С.61–65.
13. *Працьовитий М.В., Бондаренко О.І., Гончаренко Я.В., Ратушняк С.П.* Геометрія чисел у задачах конструктивної теорії локально складних функцій// Міжнародна наукова конференція «Algebraic and Geometric Methods of Analysis». — 2023. — С.128–130.
14. *Працьовитий М.В., Бондаренко О.І., Лисенко І.М., Ратушняк С.П.* Algebraic structures related to the infinitely symbolic B-representation of real numbers// 14 Міжнародна алгебраїчна конференція. — 2023. — С.108.

15. *Працьовитий М.В., Бондаренко О.І., Гончаренко Я.В., Лисенко І.М.* Застосування у метричній теорії чисел, фрактальному аналізі та теорії розподілів випадкових величин B-зображення чисел// Міжнародна наукова конференція, присвячена 55-річчю факультету математики та інформатики ЧНУ імені Ю. Федьковича. — 2023. — С.289–290.
16. *Працьовитий М.В., Василенко Н.М., Бондаренко О.І.* Ф-зображення чисел у теорії неперервних ніде не монотонних функцій з автомодельними властивостями// XIX міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука. — 2023. — С.95–96.
17. *Бондаренко О.І., Василенко Н.А.* Застосування B-зображення дійсних чисел у теорії функцій// XXII Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2024». — 2024. — С.16.
18. *Бондаренко О.І., Василенко Н.М.* Про деякі застосування нескінченносимвольного B-зображення чисел у теорії функцій// XII Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків. — 2024. — С. 58–59.
19. *Бондаренко О., Працьовитий М.* Тополого-метричні властивості множин, визначених у термінах зображення чисел рядами Кантора, що пов'язані з послідовністю Фібоначчі// V Міжнародна конференція, присвячена 145-річчю з дня народження Ганса Гана. — 2024. — С. 21-22.
20. *Бондаренко О.* Канторівське зображення чисел одиничного відрізка, пов'язане з послідовністю Якобсталя-Люка// Міжнародна науково-практична конференція. — 2024. — С.51-52.

АНОТАЦІЯ

Бондаренко О.І. Структурно фрактальні неперервні функції, означені в термінах нескінченносимвольних та канторівських зображень дійсних чисел. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. — Інститут математики НАН України, Київ, 2025.

Робота присвячена розвитку теорії локально складних неперервних функцій з фрактальними властивостями, конструкції яких реалізовані у термінах різних систем кодування (зображення) дійсних чисел, зокрема канторівських систем числення, $\widetilde{Q}$-зображення та оригінальної новоствореної системи кодування дійсних чисел (B-зображення) засобами двосторонньо нескінченного алфавіту. В ній вивчаються структурні, варіаційні, тополого-метричні, інтегро-диференціальні та фрактальні властивості трьох класів неперервних функцій. Серед них: ніде не монотонні (ті, що

не мають проміжків монотонності), сингулярні функції (ті, що є неперервними, відмінними від константи і мають похідну рівну нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега), а також функції, що не мають проміжків монотонності, окрім проміжків сталості. Для означення функції використовується зображення аргумента в одній з вище вказаних систем, а значення функції визначається специфічною нескінченною матрицею, сума елементів кожного стовпця якої дорівнює одиниці.

Найбільш повно досліджено клас функцій, що пов'язаний з вперше обгрунтованим і детально вивченим B-зображенням чисел одиничного інтервалу. Для функцій цього класу виведено формулу для обчислення міри Лебега множини несталості функції, що є різницею області визначення і об'єднання інтервалів сталості. Встановлено необхідні та достатні умови її нуль-мірності. Обгрунтовано критерій належності функції до класу сингулярних функцій канторівського типу.

Доведено, що функція є ніде не монотонною тоді і лише тоді, коли серед елементів її визначальної матриці немає нулів і нескінченна кількість її стовпців містять від'ємні елементи. Виведено формулу для обчислення варіації функції. Знайдено необхідні та достатні умови, за яких вона має необмежену варіацію. Зокрема доведено, що вона є такою, коли у матриці всі стовпці однакові і не містять нулів. Вказано умови, за яких функція матиме канторівський або квазіканторівський тип, необмежену варіацію і не має проміжків монотонності, крім проміжків сталості.

Встановлено, що у випадку, коли всі стовпці визначальної матриці однакові і не містять нулів, графік функції є N-самоафінною множиною. Структуру самоафінності графіка функції використано для обчислення визначеного інтеграла.

За умови, коли всі стовпці матриці однакові, її елементи додатні, знайдено достатні умови того, щоб функція була сингулярною строго зростаючою функцією розподілу ймовірностей на одиничному інтервалі.

Ключові слова: канторівська система числення, сингулярна функція, неперервна ніде не монотонна функція, функція канторівського типу, функція необмеженої варіації, N-самоафінна множина, B-зображення чисел, B-циліндр, нормальна властивість числа, оператор зсуву цифр, неперервне перетворення, яке зберігає хвости B-зображення чисел.

ABSTRACT

Bondarenko O.I. Structurally fractal continuous functions defined in terms of infinite-symbol and Cantor representations of real numbers. — Manuscript.

Thesis for Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree in speciality 01.01.01 — Mathematical Analysis. — Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2025.

This thesis is devoted to the development of the theory of locally complicated continuous functions with fractal properties constructed in terms of various systems of encoding (representations) for real numbers. These include Cantor numeral systems, $\widetilde{Q}$-representation, and an original brand-new system of encoding for real numbers (B-representation) with a bidirectionally infinite alphabet. The structural, variational, topological and metric, integral and differential, and fractal properties of three classes of continuous functions are studied in the work. Nowhere monotonic functions (those that do not have intervals of monotonicity), singular functions (those that are continuous, nonconstant, and have derivatives equal to zero almost everywhere with respect to the Lebesgue measure) as well as functions that do not have intervals of monotonicity except for intervals of constancy are among them.

The argument of these functions is defined using one of the above-mentioned representations, and the value of the function is determined by a specific infinite matrix such that sum of elements of every column is equal to one.

The class of functions related to the brand-new and studied in detail B-representation of numbers of the unit interval is studied in the most complete way. For functions of this class, a formula for calculating the Lebesgue measure of the set of non-constancy of the function, which is the difference between the domain of definition and the union of intervals of constancy, is derived. Necessary and sufficient conditions for this set to be of zero Lebesgue measure are established. A criterion for the function to belong to the class of singular Cantor-type functions is found.

We prove that this function is nowhere monotonic if and only if there are no zeros among the elements of its defining matrix and an infinite number of its columns contain negative elements. A formula for calculating the variation of the function is derived. Necessary and sufficient conditions for the function to have unbounded variation are found. In particular, we prove that it has unbounded variation when all columns of the matrix are identical and do not contain zeros. Conditions for the function, when it has Cantor or quasi-Cantor type, unbounded variation and does not have intervals of monotonicity other than intervals of constancy, are specified.

We establish that in the case, when all columns of the defining matrix are identical and do not contain zeros, the graph of the function is an N-self-affine set. The self-affine structure of the function graph is used to compute the definite integral.

Under the condition that all columns of the matrix are identical and its elements are positive, sufficient conditions for the function to be a singular strictly increasing probability distribution function on the unit interval are found.

Key words: Cantor numeral system, singular function, continuous nowhere monotonic function, Cantor-type function, function of unbounded variation, N-self-affine set, B-representation of numbers, B-cylinder, normal property of a number, digit shift operator, continuous transformation that preserves the tails of the B-representation of numbers.

Підписано до друку 27.03.2025. Формат $60 \times 84/16$. Папір друк. Офсет. друк. Фіз. друк. арк. Умовн. друк. арк.
Тираж 100 пр. Зам. 89.

Український державний університет імені Михайла Драгоманова,
01601, м. Київ, вул. Пирогова, 9.