Міністерство освіти і науки України
Український державний університет
імені Михайла Драгоманова
Національна академія наук України
Інститут математики

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Бондаренко Ольга Ігорівна

УДК 517.5+511.7

Дисертація

Структурно фрактальні неперервні функції, означені в термінах нескінченносимвольних та канторівських зображень дійсних чисел

01.01.01 — Математичний аналіз

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

____________ О. І. Бондаренко

Науковий керівник: **Працьовитий Микола Вікторович**,
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ — 2025

АНОТАЦІЯ

Бондаренко О. І. Структурно фрактальні неперервні функції, означені в термінах нескінченносимвольних та канторівських зображень дійсних чисел. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — Математичний аналіз. — Український державний університет імені Михайла Драгоманова; Інститут математики НАН України, Київ, 2025.

Дисертаційне дослідження виконане на кафедрі вищої математики та лабораторії фрактального аналізу Українського державного університету імені Михайла Драгоманова.

Робота присвячена розвитку теорії локально складних неперервних функцій з фрактальними властивостями, конструкції яких реалізовані у термінах різних систем кодування (зображення) дійсних чисел, зокрема канторівських систем числення, $\widetilde{Q}$-зображення та оригінальної новоствореної системи кодування дійсних чисел засобами двосторонньо нескінченного алфавіту. В ній вивчаються неперервні ніде не монотонні (ті, що не мають проміжків монотонності), сингулярні функції (ті, що є неперервними, відмінними від константи і мають похідну рівну нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега), а також функції, що не мають проміжків монотонності, окрім проміжків сталості. Хоча класи таких функцій мають другу категорію Бера у просторі $C[0;1]$ (теореми Банаха-Мазуркевича, Замфіреску), вивчені вони недостатньо. Загальна теорія таких функцій є „бідною“, а розвивається вона в основному за рахунок індивідуальних теорій яскравих представників. Аналітична складова теорії вимагає засобів, які допо-

магають долати нескінченність. Ефективними для цього є різні кодування дійсних чисел з використанням різних алфавітів та спеціальних нескінченних виразів. З цією метою у роботі використовуються двосторонні ряди для створення нової системи кодування чисел – B-зображення.

Дисертаційна робота складається з анотацій українською й англійською мовами, переліку скорочень і умовних позначень, вступу, п'яти розділів, розбитих на підрозділи, висновків до кожного розділу і загальних висновків, списку використаних джерел і одного додатка, що містить список публікацій автора та відомості про апробацію результатів дисертації.

У вступі обґрунтовано актуальність дослідження, визначено його об'єкт, предмет, мету і завдання; зазначено наукову новизну одержаних результатів, особистий внесок здобувача.

Перший розділ присвячено концептуальним засадам дослідження. У ньому проведено огляд літератури, наведено означення ключових понять та формулювання тверджень, які використовуються у роботі.

Основним об'єктом дослідження у розділі 2 **«Канторівське двійково-фібоначчієве зображення чисел в задачах теорії функцій»** є фрактальні множини і локально складні функції, означені у термінах канторівського двійково-фібоначчієвого зображення чисел з $[0;1]$, а саме:

$$[0;1] \ni x = \frac{\alpha_1}{s_1} + \frac{\alpha_2}{s_1 s_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s_1 s_2 \dots s_n} + \dots = \Delta^{(s_n)}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots},$$

де $s_n = 2^{\varphi_n}$, $\varphi_1 = 1 = \varphi_2$, $\varphi_{n+2} = \varphi_n + \varphi_{n+1}$, $\alpha_n \in A_n \equiv \{0, 1, ..., s_n - 1\}$.

Розділ 3 **«$\widetilde{Q}$-зображення і теорія фракталів»** присвячений $\widetilde{Q}$-зображенню, що є узагальненням зображення чисел у канторівських системах числення, та його застосуванням у теорії фрактальних множин та неперервних структурно фрактальних функцій. У ньому узагальнено результати попереднього розділу і отримано нові.

Два наступні розділи є головними у дисертаційному дослідженні.

У розділі 4 **«B-зображення дійсних чисел»** обґрунтовується нова система кодування чисел з $(0;1)$, алфавітом якої є множина всіх цілих чисел (B-зображення). Ця система є, взагалі кажучи, мультиосновною, але в окремих випадках вона може бути дво- або одноосновною (Φ-зображення). Тут вивчаються геометрія B-зображення чисел, оператори лівостороннього та правостороннього зсувів цифр B-зображення, неперервні перетворення проміжку $(0;1)$, які зберігають хвости B-зображення чисел, розв'язуються тополого-метричні задачі.

Нехай $A = Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ — алфавіт, L – простір послідовностей елементів алфавіту; (Θ_n) — послідовність додатних дійсних чисел ($n \in Z$) така, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \Theta_{-n} \equiv u < 1$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \Theta_n \equiv v < 1$, $u + v = 1$; $b_n \equiv \sum\limits_{i=-\infty}^{n-1} \Theta_i$.

Обгрунтовує B-зображення чисел наступне твердження: для будь-якого числа $x \in (0;1)$ існує єдиний скінченний набір цілих чисел $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$ або єдина послідовність $(\alpha_n) \in L$ такі, що виконується одна з рівностей

$$x = b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{m} b_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{\alpha_i} \equiv \Delta^B_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_m(\varnothing)},$$

$$x = b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} b_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{\alpha_i} \equiv \Delta^B_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_k ...}, \alpha_n = \alpha_n(x).$$

Означення. *B-циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 ... c_m$* називається множина $\Delta^B_{c_1 ... c_m} = \{x : x = \Delta^B_{c_1 ... c_m \alpha_{m+1} ... \alpha_n(\varnothing)}, x = \Delta^B_{c_1 ... c_m \beta_1 \beta_2 ...}, (\beta_n) \in L\}$.

Виведено формулу для обчислення міри Лебега множини $C[B, V_n] = \{x : \alpha_n(x) \in V_n \subset Z\}$ і встановлено критерій її нуль-мірності. Доведено, що вона є ніде не щільною, якщо нескінченну кількість разів виконується нерівність $V_n \neq Z$; вказано необхідні і достатні умови її канторовості.

Доведено, що множина $C[B, V] = \{x : \alpha_n(x) \in V \neq Z\}$ є N-самоподібною нуль-множиною Лебега, N-самоподібна розмірність якої збігається з розмірністю Гаусдорфа-Безиковича і є розв'язком рівняння $\sum\limits_{i \in V} \Theta_i^x = 1$.

Встановлено, що множина чисел інтервала $(0;1)$ з обмеженими цифрами B-зображення має нульову міру Лебега, а тому для майже всіх $x \in (0;1)$

виконується умова $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\alpha_n(x)=\infty$, де $\alpha_n(x)$ – це n-та B-цифра числа x.

У розділі 5 **«Неперервні локально складні функції, пов'язані з B-зображенням чисел»** досліджуються структурні, варіаційні, інтегро-диференціальні та фрактальні властивості функцій, які визначаються у термінах B-зображення аргумента. Серед них функції монотонні, немонотонні, ніде не монотонні і такі, що не мають проміжків монотонності, окрім проміжків сталості; функції обмеженої і необмеженої варіації, сингулярні та абсолютно неперервні функції.

Нехай нескінченна матриця $||p_{ik}||$ $(\forall i\in Z,\,\forall k\in N)$ задовольняє умови:

1) $|p_{ik}|<1\ \forall i\in Z,\forall k\in N$; 2) $\sum\limits_{i\in Z}p_{ik}=1,\forall k\in N$;

3) $0<\sum\limits_{k=2}^{\infty}\prod\limits_{j=1}^{k-1}p_{i_jj}<\infty,\forall i_j\in Z$; 4) $0<\sigma_{ik}\equiv\sum\limits_{j=-\infty}^{i-1}p_{jk}<1,\ \forall i\in Z,\ \forall k\in N.$

Основним об'єктом цього розділу є функція f, означена на інтервалі $(0;1)$ рівностями:

$$\begin{cases} f(x=\Delta^B_{i_1\ldots i_k\ldots})=\sigma_{i_11}+\sum\limits_{k=2}^{\infty}\sigma_{i_kk}\prod\limits_{j=1}^{k-1}p_{i_jj}\equiv\Delta^f_{i_1\ldots i_k\ldots},\\ f(x=\Delta^B_{i_1\ldots i_m(\varnothing)})=\sigma_{i_11}+\sum\limits_{k=2}^{m}\sigma_{i_kk}\prod\limits_{j=1}^{k-1}p_{i_jj}\equiv\Delta^f_{i_1\ldots i_m(\varnothing)}.\end{cases}$$

Коректність та неперервність функції гарантують умови 1)-4).

Доведено, що коли $p_{cm}=0$, то функція є сталою на кожному циліндрі виду $\Delta^B_{c_1c_2\ldots c_{m-1}c}$; якщо ж $p_{ik}\neq 0$ для будь-яких $i\in Z$, $k\in N$, то вона не має інтервалів сталості.

Виведено формулу для обчислення міри Лебега множини несталості функції f, що є різницею області визначення і об'єднання інтервалів сталості, встановлено необхідні та достатні умови її нуль-мірності.

Обгрунтовано критерій належності функції до класу сингулярних функцій канторівського типу.

Доведено, що функція f є ніде не монотонною тоді і лише тоді, коли серед елементів матриці $||p_{ik}||$ немає нулів і нескінченна кількість її стовпців містять від'ємні елементи.

Виведено формулу для обчислення варіації функції. Знайдено необхідні та достатні умови, за яких вона має необмежену варіацію. Зокрема доведено, що вона є такою, коли у матриці $||p_{ik}||$ всі стовпці однакові і не містять нулів. Вказано умови, при яких функція матиме канторівський або квазі-канторівський тип, необмежену варіацію і не має проміжків монотонності, крім проміжків сталості.

Структурну фрактальність графіка функції засвідчує наступне твердження: якщо всі стовпці матриці однакові ($p_{ik} = p_i$), то графік Γ_f функції f є N-самоафінною множиною з структурою самоафінності: $\Gamma_f = \bigcup\limits_{i=-\infty}^{+\infty} \varphi_i(\Gamma_f)$, $\varphi_i : x' = \Theta_i x + b_i, y' = p_i y + \sigma_i$ і має місце рівність

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{\sum\limits_{i\in Z} \sigma_i \Theta_i}{1 - \sum\limits_{i\in Z} \Theta_i p_i}.$$

Доведено, що множина чисел з $(0;1)$, у B-зображенні яких цифра $i \in A$ зустрічається лише скінченну кількість разів, має нульову міру Лебега, а тому майже всі числа інтервалу $(0;1)$ у своїх B-зображеннях використовують всі цифри алфавіту нескінченну кількість разів.

Встановлено, що коли всі стовпці матриці $||p_{ik}||$ однакові ($p_{ik} = p_i$), всі її елементи додатні і при цьому існує $p_i \neq \Theta_i$, то f є сингулярною строго зростаючою функцією розподілу ймовірностей на інтервалі $(0;1)$ з самоафінним графіком.

Ключові слова: канторівська система числення, сингулярна функція, неперервна ніде не монотонна функція, функція канторівського типу, функція необмеженої варіації, N-самоподібна розмірність, B-зображення дійсних чисел, B-циліндр, нормальна властивість числа, оператор зсуву цифр, неперервне перетворення, яке зберігає хвости B-зображення чисел.

ABSTRACT

Bondarenko O. I. Structurally fractal continuous functions defined in terms of infinite-symbol and Cantor representations of real numbers. — Qualifying scientific work in the form of manuscript.

Thesis for candidate of physical and mathematical sciences degree in speciality 01.01.01 — Mathematical analysis. — Mykhailo Drahomanov Ukrainian State University; Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2025.

The dissertation research was conducted at the Department of Higher Mathematics and the Laboratory of Fractal Analysis of the Mykhailo Drahomanov Ukrainian State University.

The work is devoted to the development of the theory of locally complicated continuous functions with fractal properties, whose constructions are realized in terms of various systems of encoding (representation) for real numbers. In particular, Cantor numeral systems, $\widetilde{Q}$-representation, and an original brand-new system of encoding for real numbers with a bidirectionally infinite alphabet are used. Continuous nowhere monotonic functions (those that do not have intervals of monotonicity), singular functions (those that are continuous, non-constant, and have derivatives equal to zero almost everywhere with respect to Lebesgue measure) as well as functions that do not have monotonicity intervals except for intervals of constancy are studied in the work. Although the classes of such functions are of the second Baire category in the space $C[0, 1]$ (Banach-Mazurkiewicz and Zamfirescu theorems), they are insufficiently studied. The general theory of such functions is “poor” and it is developed mostly through individual theories of prominent representatives. The analytical component of the theory requires tools to

overcome infinity. Various encodings of real numbers using various alphabets and special infinite expressions are effective for this task. To this end, the dissertation employs bidirectional series to create a new system of encoding for numbers, the B-representation.

The dissertation consists of abstracts in Ukrainian and English, a list of abbreviations and symbols, an introduction, five chapters divided into sections, conclusions for each chapter and general conclusions, a list of references, and an appendix containing the author's list of publications and information on the approbation of the dissertation results.

The introduction substantiates the relevance of the research, defines its object, subject, purpose, and objectives as well as highlights the scientific novelty of the obtained results and the personal contribution of the author.

The first chapter is devoted to the conceptual foundations of the study. A literature review, definitions of key concepts, and statements used in the research are provided.

The main object of study in Chapter 2 **"Cantor Binary-Fibonacci Representation of Numbers in the Function Theory Problems"** is fractal sets and locally complicated functions defined in terms of the Cantor binary-Fibonacci representation of numbers from $[0,1]$, namely

$$[0,1] \ni x = \frac{\alpha_1}{s_1} + \frac{\alpha_2}{s_1 s_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s_1 s_2 \dots s_n} + \dots = \Delta^{(s_n)}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots},$$

where $s_n = 2^{\varphi_n}$, $\varphi_1 = 1 = \varphi_2$, $\varphi_{n+2} = \varphi_n + \varphi_{n+1}$, $\alpha_n \in A_n \equiv \{0, 1, ..., s_n - 1\}$.

Chapter 3 **"$\widetilde{Q}$-Representation and Fractal Theory"** is devoted to the $\widetilde{Q}$-representation, which generalizes the representation of numbers in Cantor numeral systems, and its applications in the theory of fractal sets and continuous structurally fractal functions. The results of the previous chapter are generalized and new findings are presented.

The next two chapters are the core of the dissertation research.

In Chapter 4 **"B-Representation of Real Numbers"**, a new system of encoding for numbers from $(0,1)$, whose alphabet is the set of all integers, is introduced. It is called the B-representation. Generally speaking, this system is multibasic but it can be two-base or one-base in particular cases (Φ-representation). Here, the geometry of B-representation of numbers, left and right shift operators for digits of B-representation, continuous transformations of the interval $(0,1)$ preserving the tails of B-representation are studied, and topological and metric problems are solved.

Let $A = Z = \{0, \pm1, \pm2, ...\}$ be the alphabet, let L be a space of sequences of the alphabet elements, and let (Θ_n) be a sequence of positive real numbers $(n \in Z)$ such that $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \Theta_{-n} \equiv u < 1$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \Theta_n \equiv v < 1$, $u + v = 1$, $b_n \equiv \sum\limits_{i=-\infty}^{n-1} \Theta_i$.

The B-representation of numbers is justified by the following statement: for any number $x \in (0,1)$, there exists a unique finite tuple of integers $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$ or a unique sequence $(\alpha_n) \in L$ such that one of the following equalities holds:

$$x = b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{m} b_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{\alpha_i} \equiv \Delta^B_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_m(\varnothing)},$$

$$x = b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} b_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{\alpha_i} \equiv \Delta^B_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k...}, \alpha_n = \alpha_n(x).$$

Definition. A *B-cylinder of rank m with base $c_1c_2...c_m$* is the set $\Delta^B_{c_1...c_m} = \{x : x = \Delta^B_{c_1...c_m\alpha_{m+1}...\alpha_n(\varnothing)}, x = \Delta^B_{c_1...c_m\beta_1\beta_2...}, (\beta_n) \in L\}$.

A formula for computing the Lebesgue measure of the set $C[B, V_n] = \{x : \alpha_n(x) \in V_n \subset Z\}$ is derived, and a criterion for it to be of zero measure is established. It is proven that this set is nowhere dense if the inequality $V_n \neq Z$ holds infinitely many times. Necessary and sufficient conditions for this set to be a Cantor-type set are also provided.

It is also shown that the set $C[B, V] = \{x : \alpha_n(x) \in V \neq Z\}$ is an N-self-similar set of zero Lebesgue measure, whose N-self-similar dimension coincides with the Hausdorff-Besicovitch dimension and is the solution of the equation $\sum\limits_{i\in V}\Theta_i^x = 1$.

Furthermore, it is established that the set of numbers in the interval $(0,1)$ with bounded digits in their B-representation is of zero Lebesgue measure. Consequently, for almost all $x \in (0,1)$, the following condition holds: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\alpha_n(x) = \infty$, where $\alpha_n(x)$ is the nth B-digit of number x.

In Chapter 5 **"Continuous Locally Complicated Functions Related to the B-Representation of Numbers"**, structural, variational, integral and differential, and fractal properties of functions defined in terms of the B-representation of an argument are studied. Monotonic, non-monotonic, nowhere monotonic functions, functions that do not have intervals of monotonicity except for intervals of constancy, functions of bounded and unbounded variation, singular, and absolutely continuous functions are among them.

Let the infinite matrix $||p_{ik}||$ $(\forall i \in Z,\ \forall k \in N)$ satisfy the following conditions:

1) $|p_{ik}| < 1\ \forall i \in Z, \forall k \in N$; 2) $\sum\limits_{i\in Z} p_{ik} = 1, \forall k \in N$;

3) $0 < \sum\limits_{k=2}^{\infty}\prod\limits_{j=1}^{k-1} p_{i_j j} < \infty, \forall i_j \in Z$; 4) $0 < \sigma_{ik} \equiv \sum\limits_{j=-\infty}^{i-1} p_{jk} < 1,\ \forall i \in Z,\ \forall k \in N$.

The main object of this chapter is the function f defined on the interval $(0,1)$ by the equalities

$$\begin{cases} f(x = \Delta^B_{i_1\ldots i_k\ldots}) = \sigma_{i_1 1} + \sum\limits_{k=2}^{\infty}\sigma_{i_k k}\prod\limits_{j=1}^{k-1} p_{i_j j} \equiv \Delta^f_{i_1\ldots i_k\ldots}, \\ f(x = \Delta^B_{i_1\ldots i_m(\varnothing)}) = \sigma_{i_1 1} + \sum\limits_{k=2}^{m}\sigma_{i_k k}\prod\limits_{j=1}^{k-1} p_{i_j j} \equiv \Delta^f_{i_1\ldots i_m(\varnothing)}. \end{cases}$$

Conditions 1)-4) provide that this function is well defined and continuous.

It is proven that if $p_{cm} = 0$, then the function is constant on each cylinder of the form $\Delta^B_{c_1 c_2\ldots c_{m-1} c}$, and if $p_{ik} \neq 0$ for all $i \in Z$, $k \in N$, then it does not have intervals of constancy.

A formula for calculating the Lebesgue measure of the set of non-constancy of f, which is the difference of its domain and the union of its intervals of constancy, is derived. Necessary and sufficient conditions for it to be of zero measure are established.

A criterion for the function to belong to the class of the Cantor-type singular functions is justified.

It is proven that the function f is nowhere monotonic if and only if the matrix $||p_{ik}||$ does not contain zeros and an infinite number of its columns contain negative elements.

A formula for calculating the variation of the function is derived. Necessary and sufficient conditions for its variation to be unbounded are found. In particular, it is proven that the variation is unbounded when all columns of the matrix $||p_{ik}||$ are identical and do not contain zeros. Conditions under which the function is of Cantor-type or quasi-Cantor-type, is of unbounded variation, and does not have intervals of monotonicity except for intervals of constancy are given.

The following statement establishes the structural fractality of the function graph: If all columns of the matrix are identical ($p_{ik} = p_i$), then the graph Γ_f of the function f is an N-self-affine set with the self-affinity structure: $\Gamma_f = \bigcup\limits_{i=-\infty}^{+\infty} \varphi_i(\Gamma_f)$, $\varphi_i : x' = \Theta_i x + b_i, y' = p_i y + \sigma_i$. Moreover, the following equality holds:

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{\sum\limits_{i\in Z} \sigma_i \Theta_i}{1 - \sum\limits_{i\in Z} \Theta_i p_i}.$$

It is proven that the set of numbers in $(0, 1)$, whose B-representation contains a given digit $i \in A$ only finitely many times, is of zero Lebesgue measure. Consequently, almost all numbers in $(0, 1)$ use all digits of the alphabet infinitely often in their B-representations.

Finally, it is established that if all columns of the matrix $||p_{ik}||$ are identical ($p_{ik} = p_i$), all elements are positive, and there exists $p_i \neq \Theta_i$, then f is a

singular strictly increasing probability distribution function on $(0, 1)$ with a self-affine graph.

Key words: Cantor numeral system, Singular function, Continuous nowhere monotonic function, Cantor-type function, Function of unbounded variation, N-self-similar dimension, B-representation of real numbers, B-cylinder, Normal property of a number, Digit shift operator, Continuous transformation that preserves the tails of the B-representation of numbers.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧКИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. ***Бондаренко О.І.***, *Працьовитий М.В.* Канторівська система числення, пов'язана з двійковим рядом і послідовністю Фібоначчі // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2017. — Т.14 (4). — Київ: Інститут математики НАН України. С.178–187. https://trim.imath.kiev.ua/index.php/trim/article/view/414
2. ***Бондаренко О.І.***, *Василенко Н.М.*, *Працьовитий М.В.* Канторівська двійково-фібоначчієва система числення у задачах теорії функцій // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2019. – Т. 16 (3). – С. 173–185. https://trim.imath.kiev.ua/index.php/trim/article/view/515
3. *Працьовитий М.В.*, ***Бондаренко О.І.***, *Ратушняк С.П.*, *Франчук К.В.* $\widetilde{Q}$-зображення дійсних чисел як узагальнення канторівських систем числення // Могилянський математ. журнал. — 2022. — Том 5. — С. 9–18. DOI: https://doi.org/10.18523/2617-7080520229-18
4. *Працьовитий М.В.*, ***Бондаренко О.І.***, *Василенко Н.М.*, *Лисенко І.М.* Нескінченносимвольне B-зображення дійсних чисел і деякі його застосування// Буковинський математичний журнал. — 2023. — Т.11 (1). — С. 94-105. DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2023.01.08
5. *Pratsiovytyi M.V.*, *Baranovskyi O.M.*, ***Bondarenko O.I.***, *Ratushniak S.P.* One class of continuous locally complicated functions related to infinite-symbol Φ-representation of numbers. Matematychni Studii, 59(2). — 2023. — P. 123-131. DOI: https://doi.org/10.30970/ms.59.2.123-131
6. *Pratsiovytyi M.*, ***Bondarenko O.***, *Lysenko I.*, *Ratushniak S.* Continuous Functions with Locally Complicated and Fractal Properties Related to Infinite-Symbol B-Representation of Numbers. // Journal of Mathematical Sciences (United States), 2024, 282 (6) — P. 1008–1027. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-024-07230-w

7. ***Бондаренко О.І.***, *Працьовитий М.В.* Чотирьохсимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування// IV Всеукр. наукова конф. молодих вчених з математики та фізики. — 2015. — С.35.
8. ***Бондаренко О.І.***, *Працьовитий М.В.* Одна система числення зі змінним алфавітом як частинний випадок представлення чисел рядами Кантора// Міжнародна наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге. — 2015. — С.24.
9. ***Бондаренко О.І.*** Канторівські системи числення і послідовності Фібоначчі// VIII Всеукр. наукова конф. молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». — 2019. — С.37.
10. ***Бондаренко О.І.*** Канторівська двійково-фібоначчієва система числення у задачах теорії функцій// Всеукр. наукова конф. «Актуальні проблеми математики та методики її навчання у вищій школі». — 2020. — С.5–7.
11. ***Бондаренко О.І.***, *Василенко Н.М.* Нескінченно-символьне Ф-зображення і його геометрія// XI Всеукр. наукова конф. молодих математиків. — 2023. — С.59–60.
12. *Працьовитий М.В.*, **Бондаренко О.І.**, *Лисенко І.М., Ратушняк С.П.* Нескінченно-символьне Ф-зображення дробової частини дійсного числа і його застосування у задачах теорії функцій, теорії ймовірності та фрактального аналізу// IV Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Математика та інформатика в науці й освіті - виклики сучасності». — 2023. — С.61–65.
13. *Працьовитий М.В.*, **Бондаренко О.І.**, *Гончаренко Я.В., Ратушняк С.П.* Геометрія чисел у задачах конструктивної теорії локально складних функцій// Міжнародна наукова конференція «Algebraic and Geometric Methods of Analysis». — 2023. — С.128–130.

14. *Працьовитий М.В.*, ***Бондаренко О.І.***, *Лисенко І.М.*, *Ратушняк С.П.* Algebraic structures related to the infinitely symbolic B-representation of real numbers// 14 Міжнародна алгебраїчна конференція. — 2023. — С.108.

15. *Працьовитий М.В.*, ***Бондаренко О.І.***, *Гончаренко Я.В.*, *Лисенко І.М.* Застосування у метричній теорії чисел, фрактальному аналізі та теорії розподілів випадкових величин B-зображення чисел// Міжнародна наукова конференція, присвячена 55-річчю факультету математики та інформатики ЧНУ імені Ю. Федьковича. — 2023. — С.289–290.

16. *Працьовитий М.В.*, *Василенко Н.М.*, ***Бондаренко О.І.*** Ф-зображення чисел у теорії неперервних ніде не монотонних функцій з автомодельними властивостями// XIX міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука. — 2023. — С.95–96.

17. ***Бондаренко О.І.***, *Василенко Н.А.* Застосування B-зображення дійсних чисел у теорії функцій// XXII Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2024». — 2024. — С.16.

18. ***Бондаренко О.І.***, *Василенко Н.М.* Про деякі застосування нескінченносимвольного B-зображення чисел у теорії функцій// XII Всеукр. наукова конф. молодих математиків. — 2024. — С. 58–59.

19. ***Бондаренко Ольга***, *Працьовитий Микола* Тополого-метричні властивості множин, визначених у термінах зображення чисел рядами Кантора, що пов'язані з послідовністю Фібоначчі// V Міжнародна конференція, присвяченої 145-річчю з дня народження Ганса Гана. —2024. — С. 21-22.

20. ***Бондаренко Ольга*** Канторівське зображення чисел одиничного відрізка, пов'язане з послідовністю Якобсталя-Люка// Міжнародна науково-практична конференція. — 2024. — С.51-52.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ І УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

N	—	множина натуральних чисел;
Z	—	множина цілих чисел;
Q	—	множина раціональних чисел;
R	—	множина дійсних чисел;
R^n	—	евклідів n-вимірний простір;
$(a;b)/[a;b]$	—	інтервал / відрізок;
A	—	алфавіт (набір цифр);
$L = A^\infty$	—	множина всіх нескінченних послідовностей елементів алфавіту A;
$\overline{a} = (a_n)$	—	числова послідовність;
$E \overset{k}{\sim} E'$	—	множина E подібна E' з коефіцієнтом k;
$\lambda(E)$	—	міра Лебега множини E;
$\alpha_0(E)$	—	розмірність Гаусдорфа–Безиковича E;
$\alpha_s(E)$	—	самоподібна розмірність множини E;
S_f	—	множина несталості функції f;
$(a_1...a_p)$	—	період у певному зображенні числа;
$\Delta^B_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}$	—	B-зображення числа;
$\Delta^\Phi_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}$	—	Φ-зображення числа;
$\Delta^{\widetilde{Q}}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}$	—	$\widetilde{Q}$-зображення числа;
$\Delta^g_{c_1c_2...c_n}$	—	g-циліндр рангу n з основою $c_1c_2\ldots c_n$;
$\nabla^g_{c_1c_2...c_n}$	—	інтервал з тими ж кінцями, що й в $\Delta^g_{c_1c_2...c_n}$;
$C[g,V]$	—	множина чисел, g-зображення яких використовує цифри лише з множини $V \subset A$;
$C[g,V_n]$	—	множина всіх чисел, n-на цифра g-зображення яких належить множині $V_n \subset A$;
$\equiv$	—	рівно за означенням;
$\square$	—	доведення завершено.

ВСТУП

Робота присвячена розвитку метричної теорії неперервних локально складних функцій з фрактальними властивостями, визначених на одиничному проміжку. Аналітичне задання таких функцій (формулою або декількома формулами) зі скінченною кількістю операцій неможливе. Частковому вирішенню цієї проблеми присвячена дана робота.

Поняття дійсного числа є ключовим для математичного аналізу, теорії функцій, теорії ймовірностей тощо. Саме дійсне число використовується і у віртуальній, і в аналітичній формах. Для конструктивної теорії функцій з локально складними властивостями форма числа є важливою складовою теорії. Форму існування дійсному числу надає система числення або система кодування чисел.

Нагадаємо [72], що кодуванням дійсних чисел множини D засобами алфавіту (набору цифр) A називається сюр'єктивне відображення (відображення «на») множини (простору послідовностей елементів алфавіту) $L = A \times A \times ...$ на множину D. Якщо алфавіт містить s елементів, то систему кодування чисел називають s-символьною. Найпростішою з них є класична s-кова система числення, зокрема двійкова ($s = 2$) [69].

Традиційні s-кові системи числення ($s \in N$) крім своїх простих і зручних для використання властивостей мають ряд обмеженостей, що в значній мірі вичерпує їх потенціал для задання та дослідження локально складних множин, функцій, мір, динамічних систем тощо. Розширення можливостей для застосувань реалізується через збагачення арсеналу засобів нових форм подання дійсних чисел.

Великий (значний) арсенал засобів конструювання та дослідження класу W функцій, які розглядаються далі і відносяться до локально складних, дають системи зображення чисел з нескінченним та змінним алфавітами [9, 41, 68]. Це зображення чисел

1) елементарними ланцюговими дробами [28, 33, 78];
2) додатними рядами Енгеля [4, 51, 77], Сільвестера, Перрона [58], Люрота [48, 94] та ін.;
3) знакопочережними рядами Люрота, Остроградського-Серпінського-Пірса [53, 50], Остроградського [61, 62].

Актуалізація. Інтерес до неперевних функцій з локально складною структурою зароджувався разом зі створенням і розвитком диференціального числення. Перші приклади ніде не диференційовних функцій (Больцано (1830 р.) і Вейєрштраса (1891 р.)) шокували прихильників новостворених Ньютоном і Лейбніцом теорій і деякий час вважались зразками математичних патологій. Пізніше набули статусу контрприкладів. Але після теореми Банаха-Мазуркевича (1931 р.) [3, 65] про топологічну масивність множини таких функцій у просторі $C[0;1]$ ніхто не насмілиться називати їх патологіями. І зараз, через століття, інтерес навіть до перших прикладів таких функцій не лише не згас [55, 57, 60], а й суттєво посилився [12] (чимало нових досліджень стосувались недиференційовних функцій Такагі (1903) [2], Серпінського (1914) [43] та ін.)

Необхіною умовою ніде не диференційовності функції [45] є її ніде не монотонність (повна відсутність інтервалів монотонності), а також необмеженість варіації функції в кожному як завгодно малому проміжку. І функції з такими властивостями ми теж відносимо до класу W локально складних.

Інший клас локально складних об'єктів представляють сингулярні функції — неперевні функції, відмінні від константи, похідна яких майже скрізь (у розумінні міри Лебега) рівна нулю. Серед сингулярних існують монотонні (функції розподілу та інверсори), немонотонні і навіть ніде не монотонні функції [42, 68]. Окремий клас представляють сингулярні функції, які не мають проміжків монотонності за виключенням проміжків сталості. Такі функції вивчались у роботах Працьовитого М.В. та Свинчук О.В. [85, 86, 87].Класичними прикладами строго зростаючих сингулярних функцій є функції Мінковського [18] та Салема [39, 40]. Великі класи монотонних сингулярних функцій вивчались як функції розподілу випадкових величин з незалежними цифрами у різних системах їх кодування [33, 37].

Одним з найпростіших прикладів строго спадної сингулярної функції є інверсор Q_2-зображення чисел (останнє є узагальненням класичного двійкового зображення [83, 84, 88]). Більшість інверсорів зображень чисел зі скінченним алфавітом є сингулярними. Варто також зазначити, що існують системи кодування чисел, для яких інверсори є розривними функціями в точках всюди щільної зліченної множини [15, 30, 31, 32].

Теорія сингулярних, неперервних ніде не монотонних, зокрема недиференційовних функцій до цих пір проходить конструктивний етап становлення і розвивається в основному за рахунок цікавих прикладів і їх узагальнень та за рахунок індивідуальних теорій відомих яскравих класичних прикладів. Тому континуальні класи неперервних функцій, кожна з яких належить до вказаних типів, викликає нетривіальний інтерес і заслуговує на окрему увагу.

Засоби теорії фракталів забезпечують додаткові засоби аналізу функцій, їх графіків та інших суттєвих для функцій множин.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами. Робота виконана в межах досліджень математичних об'єктів з локально складною тополого-метричною структурою і фрактальними властивостями, що проводяться на кафедрі вищої математики УДУ імені Михайла Драгоманова. Дослідження проводилося в рамках таких науково-дослідницьких тем:

1. Функції з фрактальними властивостями (множини рівнів та роз-

поділи значень) і складні динамічні системи з ними пов'язані (№ державної реєстрації 0121U000208);

2. Математичні та природничі науки в НПУ імені М.П. Драгоманова (№ державної реєстрації 0121U000209);
3. Фрактальний аналіз математичних об'єктів зі складною локальною будовою (№ державної реєстрації 0107U000583).

Об'єкт та предмет дослідження. Об'єктом дослідження є системи кодування дійсних чисел зі змінним та нескінченним алфавітами та їх застосування у теорії локально складних функцій з фрактальними властивостями.

Предметом дослідження є геометрія (позиційна та метрична) вказаних систем кодування чисел; структурні, варіаційні, тополого-метричні, інтегро-диференціальні та фрактальні властивості неперервних функцій трьох континуальних класів.

Завдання дослідження.

1. Обгрунтувати систему кодування дійсних чисел, алфавітом якої є множина цілих чисел (B-зображення). Вивчити її геометрію (властивості циліндрів і хвостових множин, властивості операторів лівосторонніх та правосторонніх зсувів, метричні співвідношення).
2. Розв'язати задачі про міру Лебега множин чисел з обмеженнями на використання цифр у їх зображеннях: у канторівських системах числення, у $\tilde{Q}$-зображенні та у B-зображенні.
3. Розглянути класи структурно та метрично фрактальних множин, визначених умовами на їхні зображення.
4. Знайти нормальні властивості чисел у термінах введених зображень.
5. Коректно означити та вивчити класи неперервних функцій з локально складною структурою.

6. Дати вичерпну відповідь на питання про варіацію функції та її диференціальні властивості, коли система кодування B-зображення визначається одним параметром (Ф-зображення).
7. Для канторівських зображень чисел та їх узагальнень $\tilde{Q}$-зображень виділити підклас кодувань, пов'язаних з послідовностями Фібоначчі, ввести в розгляд і вивчити властивості локально складних функцій вказаного класу.
8. Вивчити структурні тополого-метричні та диференціальні властивості функцій-інверсорів вказаних зображень.

Методи дослідження. У роботі використовувались методи теорії кодування дійсних чисел, теорії міри, метричної та ймовірнісної теорій чисел, математичного аналізу і теорії функцій, а також методи теорії фракталів (фрактального аналізу та фрактальної геометрії). Окремі ідеї, прийоми та методи черпались з робіт попередників: Працьовитого М.В., Торбіна Г.М., Гончаренко Я.В., Барановського О.М., Василенко Н.А.,Василенко Н.М., Дмитренка С.О., Калашнікова А.В., Лещинського О.Л., Лисенко І.М., Нікіфорова Р.О., Осауленка Р.Ю., Панасенка О.Б., Ратушняк С.П., Свинчук О.В., Фещенка О.Ю., Хворостіни Ю.В., Чуйкова А.С. та ін.

Наукова новизна отриманих результатів.

1. Вивчено окремі класи функцій з локально складною структурою, означених у термінах зображення дійсних чисел рядами Кантора (канторівські системи числення).
2. Створено нову систему кодування дійсних чисел одиничного проміжка (B-зображення), алфавітом якої є множина цілих чисел. Описано її геометрію (геометричний зміст цифр, метричні відношення, обгрунтовано властивості циліндричних та хвостових множин), розв'язано ряд метричних задач і встановлено нормальні властивості чисел за їх зображеннями.

3. З використанням B-зображення означено континуальний клас неперервних функцій, серед яких монотонні, немонотонні, ніде не монотонні, ніде не диференційовні; функції обмеженої та необмеженої варіації; сингулярні функції.
4. Для функцій означеного класу вичерпно розв'язано ряд задач:

4.1. Виведено формулу для обчислення міри Лебега множини несталості функцій. Доведено критерій її нульмірності.

4.2. Знайдено необхідні і достатні умови належності функції до класу сингулярних функцій канторівського типу.

4.3. Доведено критерій ніде не монотонності функції.

4.4. Виведено формулу для обчислення варіації функції та знайдено необхідні і достатні умови, за яких функція має необмежену варіацію.

4.5. Для випадку, коли функція не має проміжків сталості, встановлено структурну фрактальність графіка (його N-самоафінність) і обчислено визначений інтеграл.

Практичне значення отриманих результатів. Робота носить в основному теоретичний характер. Її ідеї та результати можуть бути використані у розвитку теорій чисел та функцій, а також у фрактальному аналізі та фрактальній геометрії, які ведуться в Інституті математики НАН України, Українському державному університеті імені Михайла Драгоманова, Київському національному універиситеті імені Тараса Шевченка тощо.

Особистий внесок здобувача. Всі наукові результати, які виносяться на захист, отримані автором самостійно. Із робіт, опублікованих у співавторстві, у дисертації використані лише результати, які належать автору.

Апробація матеріалів дисертації. Основні результати дослідження доповідалися на **наукових конференціях** різних рівнів, а саме:

— IV Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики (Київ, 23–25 квітня 2015 р.);

— Міжнародна наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге (Чернівці, 1–4 липня 2015 р.);
— VIII Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання» (Київ, 23 травня 2019 р.);
— Всеукраїнська наукова конференція «Актуальні проблеми математики та методики її навчання у вищій школі» (Київ, 17–18 грудня 2020 р.);
— XI Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків (Київ, 11–13 травня 2023 р.);
— IV Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Математика та інформатика в науці й освіті – виклики сучасності» (Вінниця, 25–26 травня 2023 р.);
— Міжнародна наукова конференція «Algebraic and Geometric Methods of Analysis» (Одеса, 29 травня–01 червня 2023 р.);
— XIV Міжнародна алгебраїчна конференція (Суми, 3–7 липня 2023 р.);
— Міжнародна наукова конференція, присвячена 55-річчю факультету математики та інформатики ЧНУ імені Ю. Федьковича (Чернівці, 28–30 вересня 2023 р.);
— XIX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука (Київ, 11–12 жовтня 2023 р.);
— XXII Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2024» (Київ, 11 квітня 2024 р.);
— XII Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків (Київ, 9–11 травня 2024 р.);
— V Міжнародна конференція, присвяченої 145-річчю з дня народження Ганса Гана (23.09.-27.09.2024, Чернівці);
— Міжнародна науково-практична конференція (28 жовтня 2024, УДУ імені Михайла Драгоманова)

та **наукових семінарах**:

— семінар з фрактального аналізу Інституту математики НАН України та УДУ імені Михайла Драгоманова (керівник: д-р фіз.-мат. наук, професор Працьовитий М.В.);
— семінар відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник: д-р фіз.-мат. наук, професор Романюк А.С.);
— семінар з теорії аналітичних функцій (Львівський національний університет імені Івана Франка, керівник: д-р фіз.-мат. наук, професор Скасків О.Б.).

Публікації. Основні результати дисертаційного дослідження опубліковано в шести статтях [20, 21, 52, 53, 74, 75] у наукових виданнях, п'ять з яких [20, 21, 52, 74, 75] входять до переліку фахових видань МОН України, серед них дві статті [20, 21], які індексуються міжнародною науковометричною базою "Scopus".

Структура та обсяг дисертації. Дисертація загальним обсягом 135 сторінок складається з анотації, переліку скорочень і умовних позначень, зі вступу, п'яти розділів, розбитих на підрозділи, висновків до кожного розділу і загальних висновків, списку використаних джерел (94 найменування) і одного додатка, що містить список публікацій автора та відомості про апробацію результатів дисертації (20 найменувань).

Подяка. Хочу висловити щиру вдячність своєму науковому керівнику Працьовитому Миколі Вікторовичу за невтомну підтримку, професійні поради та цінні настанови. Ваша безмежна відданість науці та багатий досвід стали незамінними чинниками у написанні моєї дисертації. Дякую за Ваш час та зусилля, які Ви присвятили моїй роботі, а також за Ваше терпіння та розуміння. Ваша професійність надихає на нові досягнення. Без Вашої допомоги цей дисертаційний проєкт не був би можливим.

РОЗДІЛ 1
КОНЦЕПТУАЛЬНІ ЗАСАДИ ДОСЛІДЖЕННЯ.

Цей розділ присвячено ключовим поняттям і фактам, що використовуються в роботі і стосуються теорії кодування (зображення) чисел одиничного проміжка та теорії функцій з локально складною структурою, також огляду результатів попередніх досліджень, що примикають до теми дисертаційного дослідження.

1.1. Системи кодування дійсних чисел засобами скінченного, нескінченного та змінного алфавітів

Нехай A – скінченна або зліченна множина, потужність якої більша за 1. Її ми називаємо *алфавітом (набором цифр)*. Множину $L = A \times A \times \ldots \times A \times \ldots = \{(a_n) : a_n \in A, n \in N\}$ ми називаємо *простором послідовностей елементів алфавіту.*

Означення 1.1. Кодуванням (зображенням) чисел множини D засобами алфавіту A називається сюр'єктивне відображення g множини L у множину D [72].

Якщо $g(a_n) = x$, то кажуть, що послідовність (a_n) є g-кодом числа x, а символічний запис $x = \Delta^g_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}$ називають його *g-зображенням*, при цьому a_n називають n-ою цифрою цього зображення.

Кажуть, що система кодування має нульову надлишковість, якщо всі числа множини D мають не більше двох g-зображень, причому тих, що мають їх два — не більш, ніж зліченна множина. У цьому випадку числа, що мають одне зображення називають g-унарними, а ті, що мають два — g-бінарними. Кажуть, що система кодування має екстранульову надлишковість, якщо всі числа мають єдине зображення.

Якщо в алфавіті s-символів, то кодування називається *s-символьним.* Існують системи кодування зі змінним алфавітом, але скінченним. Існують системи з нескінченним алфавітом, зокрема, коли числа розкладаються у елементарний ланцюговий дріб і кодуються засобами алфавіту, який є множиною натуральних чисел.

Множина чисел множини D, які мають g-зображення $\Delta^g_{c_1...c_m a_{m+1} a_{m+2}...}$ називається *g-циліндром рангу m* з основою $c_1...c_m$ і позначається $\Delta_{c_1...c_m}$ [72].

Систему g-кодування називають *неперервною*, якщо кожен g-циліндр є проміжком. Простими прикладами неперевного g-кодування з нульовою надлишковістю є представлення (зображення) чисел у класичній s-ковій системі числення.

Означення 1.2. Обмежена множина $E \subset R^n$ називається *N-самоподібною*, якщо існує зліченний набір перетворень подібності $f_1, f_2, ..., f_n, ...$ таких, що $\begin{cases} 1) E = f_1(E) \cup f_2(E) \cup f_3(E) \cup ... \cup f_n(E) \cup ...; \\ 2) f_i(E) \cap f_j(E) = \varnothing, \ i \neq j. \end{cases}$

1.2. Канторівські системи числення

Класична s-кова система числення $(1 < s \in N)$ використовує алфавіт $A_s \equiv \{0, 1, \ldots, s-1\}$ і $L_s = A_s \times A_s \times ...$ – простір послідовностей елементів алфавіту A_s.

S-ковий розклад і s-кове зображення числа $x \in [0; 1]$ мають вигляд:

$$x = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{s^n} + \cdots \equiv \Delta^s_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n ...}, (\alpha_n) \in L. \tag{1.1}$$

Узагальненням класичної s-кової системи числення є канторівська система, яка використовує послідовність натуральних основ (s_n) і змінний алфавіт $A_{s_n} \equiv \{0, 1, \ldots, s_n - 1\}$, $2 \leqslant s_n \in N$, $n = 1, 2, \ldots$ [7, 67, 90].

Якщо (s_n) – послідовність натуральних чисел, більших 1, (A_{s_n}) — послідовність алфавітів, то представлення числа $x \in [0;1]$ у канторівській (s_n)-системі має вигляд

$$x = \frac{\alpha_1}{s_1} + \frac{\alpha_2}{s_1 s_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s_1 s_2 \dots s_n} + \dots \equiv \Delta^{(s_n)}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}, \qquad (1.2)$$

$\alpha_n \in A_{s_n}$. При $s_n = s$ маємо *класичне s-кове зображення числа.*

Символічний запис $\Delta^{(s_n)}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}$ називається *Δ-зображенням* ряду (1.2) і його суми — числа x. При цьому α_n називається *n-ою цифрою* цього зображення. Δ-зображення числа є його кодуванням засобами змінного алфавіту A_{s_n}, при цьому кодом числа x є послідовність (α_n) з простору $\Omega_1 \equiv A_{s_1} \times A_{s_2} \times \ldots \times A_{s_n} \times \ldots$.

Нагадаємо, що існують числа, які мають *два Δ-зображення.* Вони називаються *Δ-бінарними.* Це числа з зображеннями:

$$\Delta_{c_1 \dots c_{m-1} c_m (0)}, \quad \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} [c_m - 1][s_{m+1}-1][s_{m+2}-1]\dots},$$

де $(s_{m+k}) \in \Omega_{m+1} = A_{s_{m+1}} \times A_{s_{m+2}} \times \ldots \times A_{s_{m+k}} \times \ldots$. Круглі дужки символізують період. Таких чисел зліченна всюди щільна в $[0;1]$ множина. Для однозначності зображення можна домовитись використовувати лише одне з них, а саме — перше. Решта чисел мають *єдине Δ-зображення* і називаються *Δ-унарними.*

Циліндром рангу m з основою $c_1 \dots c_m$ називається *множина* $\Delta^{(s_n)}_{c_1 \dots c_m}$ всіх чисел x, які мають зображення $\Delta^{(s_n)}_{c_1 \dots c_m d_1 d_2 \dots}$, де $(d_k) \in \Omega_{m+1}$.

Циліндр $\Delta^{(s_n)}_{c_1 \dots c_m}$ є відрізком з кінцями:

$$a = \frac{c_1}{s_1} + \frac{c_2}{s_1 s_2} + \ldots + \frac{c_m}{s_1 s_2 \dots s_m} = \Delta^{(s_n)}_{c_1 \dots c_m (0)},$$

$$b = a + \frac{s_{m+1} - 1}{s_1 \dots s_m s_{m+1}} + \frac{s_{m+2} - 1}{s_1 \dots s_{m+1} s_{m+2}} + \ldots = \Delta^{(s_n)}_{c_1 \dots c_m (s_{m+k} - 1)},$$

який має довжину $|\Delta^{(s_n)}_{c_1 \dots c_m}| = \frac{1}{s_1 s_2 \dots s_m}$. А отже, основне метричне відношення для даного зображення має вигляд

$$\frac{|\Delta^{(s_n)}_{c_1\ldots c_m i}|}{|\Delta^{(s_n)}_{c_1\ldots c_m}|} = \frac{1}{s_{m+1}}.$$

Воно не залежить від основи $c_1 \ldots c_m$ циліндра і не залежить від останньої цифри i, а залежить лише від рангу циліндра, а саме від члена s_{m+1} послідовності основ.

Зауважимо, що кожне Δ-бінарне число є кінцем двох послідовностей циліндрів всеможливих рангів, починаючи з деякого.

Безпосередньо з означення циліндра випливає: $\Delta^{(s_n)}_{c_1\ldots c_m} = \bigcup\limits_{i=0}^{s_{m+1}-1} \Delta^{(s_n)}_{c_1\ldots c_m i}$. Послідовність вкладених циліндрів визначає точку, тобто для будь-якої послідовності $(c_n) \in \Omega_1$ виконується рівність $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Delta^{(s_n)}_{c_1\ldots c_n} = \Delta^{(s_n)}_{c_1\ldots c_n\ldots}$. Тому точка відрізка $[0;1]$ є *циліндром нескінченного рангу.*

1.3. $\widetilde{Q}$-зображення як узагальнення канторівських зображень

Розглянемо ще одне зображення чисел зі змінним алфавітом, яке вперше введене Працьовитим М.В. [65] як *узагальнення Q^*-зображення [19].* Тут використовуються всі параметри і позначення попереднього пункту.

Нехай $\|q_{ik}\|$ — нескінченна матриця ($i \in A_{s_k}, \forall k \in N$) така, що

1) $0 < q_{ik} \in R$;

2) $q_{ok} + \cdots + q_{[s_n-1]k} = 1$;

3) $\forall(\alpha_k) \in \Omega : \prod\limits_{k=1}^{\infty} q_{\alpha_k k} = 0 \Longleftrightarrow \prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_i\{q_{ik}\} = 0.$

Покладемо $\beta_{ik} \equiv q_{0k} + q_{1k} + \cdots + q_{[i-1]k}$, $k \in N$.

Твердження 1.1. Для будь-якого $x \in [0;1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in \Omega$ така, що

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_{\alpha_k k} \prod_{i=1}^{k-1} q_{\alpha_i i} \equiv \Delta^{\widetilde{Q}}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}. \tag{1.3}$$

Останній символічний запис $\Delta^{\widetilde{Q}}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ називається *$\widetilde{Q}$-зображенням числа x*, а α_n — *його n-ою цифрою.*

Якщо $s_n = s = const$, то $\widetilde{Q}$-зображення є Q_s-зображенням [65] (далі воно позначається $\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$). Якщо крім цього ще й $q_{in} = q_i = \frac{1}{s}$, то $\widetilde{Q}$-зображення є класичним s-ковим зображенням і позначається $\Delta^{s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$. Теорія Q_s-зображення добре розроблена і має ряд різнопланових застосувань [83, 88] у теорії фракталів, теорії функцій, теорії ймовірностей.

Очевидно, що $\widetilde{Q}$-зображення є *узагальненням канторівського зображення* і стає ним при $q_{ik} = \frac{1}{s_k}, \forall k \in N$.

$\widetilde{Q}$-циліндр рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$ означується рівністю

$$\Delta^{\widetilde{Q}}_{c_1c_2\ldots c_m} = \{x : x = \Delta^{\widetilde{Q}}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \alpha_i = c_i, i = \overline{1,m}\}. \tag{1.4}$$

Циліндр $\Delta^{\widetilde{Q}}_{c_1c_2\ldots c_m}$ є відрізком $[a;b]$ з кінцями:
$a = \beta_{\alpha_1 1} + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \beta_{\alpha_k k} \prod\limits_{i=1}^{k-1} q_{\alpha_i i}$, $\;b = a + \prod\limits_{i=1}^{m} q_{\alpha_i i}$, а отже,

$$|\Delta^{\widetilde{Q}}_{c_1c_2\ldots c_m}| = \prod_{i=1}^{m} q_{c_i i}.$$

Тоді основне метричне відношення для $\widetilde{Q}$-зображення має вигляд:

$$|\Delta^{\widetilde{Q}}_{c_1c_2\ldots c_m i}| = q_{i[m+1]}|\Delta^{\widetilde{Q}}_{c_1c_2\ldots c_m}|.$$

Як і для канторівських зображень існують числа, що мають два $\widetilde{Q}$-зображення: $\Delta^{\widetilde{Q}}_{c_1\ldots c_{m-1}(0)} = \Delta^{\widetilde{Q}}_{c_1\ldots c_{m-1}[c_m-1](s_{m+k}-1)}$. Вони називаються $\widetilde{Q}$-*бінарними*. Множина таких чисел злічення і щільна у відрізку $[0;1]$. Решта чисел мають єдине $\widetilde{Q}$-зображення. Їх називають $\widetilde{Q}$-*унарними* [65].

У різних роботах вивчались властивості функції розподілу випадкової величини з незалежними цифрами її $\widetilde{Q}$-зображення [71, 75]. Доведено, що такі функції мають чистий лебегівський тип (є чисто дискретними, чисто абсолютно неперервними або чисто сингулярними) і є, в переважній більшості, сингулярними. $\widetilde{Q}$-зображення фігурувало в дослідженнях неперервних локально складних функцій [71, 75].

1.4. Q_∞-зображення

Існують системи кодування (зображення) дійсних чисел, які використовують сталий нескінченний алфавіт. Розглянемо одну з таких. Нехай (q_n) — задана послідовність додатних дійсних чисел така, що $q_0+\ldots+q_n+\ldots=1$, $\sigma_k \equiv q_0+q_1+\cdots+q_{k-1}$, $H \equiv N \times N \times \ldots$

Твердження 1.2. Для будь-якого $x \in [0;1)$ існує єдина послідовність $(a_n) \in H$ така, що

$$x=\sigma_{a_1}+\sum_{k=2}^{\infty}\sigma_{a_k}\prod_{i=1}^{k-1}q_{a_i} \equiv \Delta^{Q_\infty}_{a_1\ldots a_n\ldots}. \tag{1.5}$$

Символічний запис $\Delta^{Q_\infty}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$ називається Q_∞-зображенням числа x, а a_n — його n-ою цифрою.

Зрозуміло, що Q_∞-зображення є частковим випадком $\widetilde{Q}$-зображення. Тому його геометрія, виражена у властивостях циліндричних множин, лише конкретизується:

1) $|\Delta^{Q_\infty}_{c_1c_2\ldots c_m}|=\prod_{j=1}^{m}q_{c_j}$, 2) $|\Delta^{Q_\infty}_{c_1c_2\ldots c_mj}|=q_j|\Delta^{Q_\infty}_{c_1c_2\ldots c_m}|$.

Зауваження 1.1. Особливістю Q_∞-зображення є те, що кожне число проміжка $[0;1)$ має єдине Q_∞-зображення, тобто дана система кодування чисел має нульову надлишковість.

Q_∞-зображення і математичні об'єкти з ним пов'язані (множини, функції, ймовірнісні міри, динамічні системи) вивчались у різних роботах, зокрема кандидатських дисертаціях Ліщинського О.Л. [81] і Нікіфорова Р.О. [34, 19].

Q_∞-зображення тісно пов'язане із зображенням чисел додатними рядами Люрота [48, 94].

Q^*_∞-зображення є узагальненням Q_∞-зображення і є частковим випадком $\widetilde{Q}$-зображення [70].

1.5. Сингулярні функції

Означення 1.3. Неперервна функція, відмінна від константи, називається *сингулярною*, якщо її похідна рівна нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега. Серед сингулярних функцій існують монотонні (зокрема, строго монотонні), не монотонні і такі, що не мають проміжків монотонності взагалі [42, 68].

Твердження 1.3. *(Теорема Лебега).* Довільна функція $y = f(x)$ обмеженої варіації є лінійною комбінацією функції:

$$f(x) = \alpha_1 f_d(x) + \alpha_2 f_{ac}(x) + \alpha_3 f_s(x), \tag{1.6}$$

де $\alpha_i \geqslant 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$; f_d – дискретна (функція стрибків); f_{ac} – абсолютно неперервна функція; $f_{ac} = \int\limits_{-\infty}^{x} f'_{ac}(t)dt$; f_s – сингулярна функція.

Рівність (1.6) називають *лебегівською структурою* функції. При $\alpha_1 = 1$ функцію f називають *чисто дискретною*, при $\alpha_2 = 1$ — *чисто абсолютно неперервною*, а при $\alpha_3 = 1$ — *чисто сингулярною (або просто сингулярною).* В решті випадків кажуть, що функція f є сумішшю двох або трьох функцій чистих лебегівських типів.

Далі зосередимо увагу на чисто сингулярних функціях. Найпростішим прикладом неспадної сингулярної функції є класична функція Кантора:

$$k(x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k}) = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} p_{\alpha_j}),$$

де $p_0 = \frac{1}{2} = p_2, p_1 = 0, \beta_0 = 0, \beta_1 = p_0 = \beta_2$.

Приклад 1.1. *(строго зростаюча сингулярна функція Салема [39, 40]).* Функція Салема є функцією розподілу випадкової величини з незалежними однаково розподіленими цифрами двійкового зображення, які набувають значень 0 та 1 з ймовірностями p_0 і p_1 ($p_i > 0, p_0 + p_1 = 1$). Вона є неперервним розв'язком системи функціональних рівнянь

$$\begin{cases} f(\frac{x}{2}) = p_0 f(x), \\ f(\frac{1+x}{2}) = p_0 + p_1 f(x). \end{cases}$$

Вона має аналітичний вираз

$$s(x = \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \alpha_1 p_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}(\alpha_k p_{1-\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1} p_{\alpha_j}),$$

де $0 < p_0 < 1, p_1 = 1 - p_0 \neq \frac{1}{2}$.

Приклад 1.2. *(строго спадна). Інверсор цифр Q_2-зображення чисел.* Інверсором цифр Q_2-зображення чисел називається функція, означена рівністю $I(x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_2}_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\ldots[1-\alpha_n]\ldots}$. При $q_0 = \frac{1}{2}$ має місце рівність $I(x) = x$. При $q_0 \neq \frac{1}{2}$ інверсор є сингулярною строго спадною функцією [88].

Приклад 1.3. *(строго зростаюча сингулярна функція Мінковського).*

Функція Мінковського $y = ?(x)$ вперше введена у розгляд у 1911 році у роботі [18] як приклад функції, що встановлює взаємно однозначну відповідність між квадратичними ірраціональностями $[0;1]$ і раціональними числами з цього ж відрізка. Вона аналітично задається виразом, який знайшов Салем [40], а саме:

$$?(x = [0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]) =$$

$= 2^{1-a_1} - 2^{1-a_1-a_2} + 2^{1-a_1-a_2-a_3} + \cdots + (-1)^{n+1}2^{1-a_1-\cdots-a_n} + \ldots$, де $x = [0; a_1, a_2, \ldots]$ — розклад числа x в елементарний ланцюговий дріб, тобто

$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ldots}}, \; a_n \in N$$

.

Однопараметричне узагальнення φ_μ побудовано у роботі [80] Працьовитого М.В., Калашнікова А.В., Безбородова В.К.

1.6. Ніде не диференційовні функції

Приклад 1.4. *(Функція Такагі [44]).*

В 1903 р. Т. Такагі запропонував наступну конструкцію неперервної ніде не диференційовної функції:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varphi_0(2^n x), \tag{1.7}$$

де $\varphi_0(x) = \inf\limits_{m \in Z} \mid x - m \mid,\ \varphi_n(x) = \varphi_0(2^n x)$. Як показав Н. Коно [14] функція Такагі задовольняє рівність

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_0^x r_k(t) dt,$$

де $r_k(t) = (-1)^{\lfloor 2kt \rfloor}$ — функція Радемахера, $\lfloor 2kt \rfloor$ — ціла частина числа t.

Функція Такагі є аналогом відомої неперервної недиференційовної функції К. Веєрштрасса:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n cos(b_n \pi x),$$

де $0 < a < 1, b$ — від'ємне ціле число, більше за одиницю і таке, що $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Він отримується заміною гармонік на «прямокутній хвилі», що дозволяє суттєво спростити обгрунтування недиференційовності (відсутності похідної у кожній точці області визначення). Дослідження функції Такагі триває і досі [44]. На данний момент їй присвячені десятки досліджень.

Приклад 1.5. *(Функція Працьовитого-Василенко [10]).*

Нехай s – фіксоване непарне натуральне число $(s > 3)$, Q_s^* та Q_3^* – задані матриці для Q^*-зображення, причому матрицю, яка визначає останнє зображення будемо позначити через $G_3^* = ||g_{ik}||,\ i \in A_3,\ k \in N$.

Нехай A_s – алфавіт (набір цифр), визначимо дискретну функцію

$$\gamma(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha = 0, \\ 1, & \text{якщо } \alpha \in A_s \backslash \{0, s-1\}, \\ 2, & \text{якщо } \alpha = s-1. \end{cases}$$

Для послідовності $(\alpha_k) \in L \equiv A_s^\infty = A_s \times A_s \times ...$ визначаєтся послідовність (c_k) наступним чином

$$c_1 = 0,\ c_k = \begin{cases} c_{k-1},\ \text{якщо } \alpha_{k-1} \in A_s \backslash \{2, 4, \ldots, s-3\} \\ 1 - c_{k-1},\ \text{якщо } \alpha_{k-1} \in \{2, 4, \ldots, s-3\}. \end{cases}$$

Розглянемо на $[0;1]$ функцію, аргумент якої має форму Q_s^*-зображення

$$x = \varphi_{\alpha_1 1} + \sum_{i=2}^{\infty} (\varphi_{\alpha_i i} \prod_{j=1}^{i-1} q_{\alpha_j j}) \equiv \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots},$$

де $\alpha_k \in A_s,\ Q_s^* = ||q_{ij}||,\ \varphi_{0j} = 0,\ \varphi_{ij} = \sum\limits_{k=0}^{i-1} q_{kj},\ i \in A_s,\ j \in N$, а значення функції має G_3^*-розклад

$$f(x) = \psi_{\beta_1 1} + \sum_{i=2}^{\infty} (\psi_{\beta_i i} \prod_{j=1}^{i-1} q_{\beta_j j}) \equiv \Delta^{G_3^*}_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_k \ldots},$$

де $\beta_k \in A_3 \equiv \{0, 1, 2\},\ G_3^* = ||g_{ik}||,\ \psi_{0j} = 0,\ \psi_{ij} = \sum\limits_{k=0}^{i-1} g_{kj},\ i \in A_3,\ j \in N,$

$$\beta_k = \begin{cases} \gamma(\alpha_k), & \text{якщо } c_k = 0, \\ 2 - \gamma(\alpha_k), & \text{якщо } c_k \neq 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

Надамо формулам (1.8) інший запис:

$$\beta_k = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \left[\begin{array}{lll} \alpha_k = 0 & \text{і} & c_k = 0, \\ \alpha_k = s-1 & \text{і} & c_k = 1; \end{array} \right. \\ 1, & \text{якщо } \alpha_k \in A_s \setminus \{0, s-1\}; \\ 2, & \text{якщо} \left[\begin{array}{l} \alpha_k = 0 \text{ і } c_k = 1, \\ \alpha_k = s-1 \text{ і } c_k = 0. \end{array} \right. \end{cases} \tag{1.9}$$

Зауваження 1.2. Значення G_3^*-символа β_k залежить від кількості (парності чи непарності) наявних символів з множини $\{2, 4, ..., s-3\}$ в Q_s^*-зображенні числа x, а значить і від набору $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1})$, але може і не залежити, якщо всі Q_s^*-символи $\alpha_i(x) \in A_s \backslash \{0, s-1\},$ де $i = \overline{1, k-1}$.

Приклад 1.6. *(Трибін-функція) [63].*

Нехай задано два зображення чисел відрізка $[0;1]$: Q_3-зображення, визначене трійкою чисел $(q_0; q_1; q_2)$ і Q_2-зображення, визначене парою чисел $(q_0^{'}, q_1^{'})$. Функція f, означується рівністю

$$f(x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n ...}) = \Delta^{Q_2}_{\beta_1 \beta_2 ... \beta_n ...}, \tag{1.10}$$

$$\beta_1 = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_1 = 0, \\ 1, & \text{якщо } \alpha_1 \neq 0, \end{cases}$$

$$\beta_{n+1} = \begin{cases} \beta_n, & \text{якщо } \alpha_{n+1} = \alpha_n, \\ 1 - \beta_n, & \text{якщо } \alpha_{n+1} \neq \alpha_n. \end{cases}$$

Рівність (1.10) є коректним означенням функції f, оскільки використання формули (1.10) для двох формально різних зображень одного і того ж Q_3-бінарного числа приводить до одного і того ж результату.

Функція f є неперервною, ніде не монотонною та ніде не диференційовною; має обмежену і необмежену варіацію.

Трибін-функція вперше означена і вивчена у роботі М.В. Працьовитого [64]. Як виявилось значно пізніше, раніше розглядались часткові випадки цієї функції, а саме функції Буша [6] та Вундерліха [47], означені в термінах трійкового та двійкового зображень.

Властивості Трибін-функції також вивчались в роботах [11], а у статтях [14, 24, 73] розглядались її узагальнення та аналоги.

1.7. Ніде не монотонні функції

Означення 1.4. Неперервна функція, яка не має жодного проміжку монотонності, називається *ніде не монотонною* [68, 89].

Два добре відомих факти:

1) кожна функція обмеженої варіації є різницею двох монотонних функцій;
2) кожна неперервна монотонна функція має скінченну похідну майже в кожній точці (відносно міри Лебега)

є ключовими твердженнями у теорії функцій з обмеженою варіацією. Їх наслідком є наступне твердження: *кожна ніде не диференційовна функція є ніде не монотонною.*

Обернене твердження є неправильним. Існують ніде не монотонні функції, які мають скінченну варіацію, і ті, які, крім цього, мають похідну, рівну нулю майже скрізь (у розумінні міри Лебега).

Серед ніде не монотонних функцій є функції обмеженої та необмеженої варіації, ніде не диференційовні функції та сингулярні функції.

Розглянемо по одному з представників кожного з вказаних класів, зауваживши, що кожна ніде не диференційовна функція є ніде не монотонною.

Інтерес до неперервних функцій, які мають масивні (у тополого-метричному та фрактальному сенсі) множини особливостей інтегро-

-диференціального та варіаційного характеру, зокрема до сингулярних [68], ніде не монотонних та недиференційовних невпинно зростає [10, 16]. Його підсилюють нові приклади моделей реальних процесів інформаційно-комунікаційного плану, які використовують такі функції, інтерес до систем кодування, декодування та захисту інформації, засобів компактизації даних тощо.

Сьогодні найбільш поширеними способами конструювання та дослідження ніде не монотонних функцій є: метод згущення особливостей [92], IFS-метод (метод ітерованих функцій), задання функцій перетворювачем цифр (одного або різних) зображень чисел [25, 76], зокрема за допомогою автоматів з різною масивністю пам'яті [56, 60, 66, 73, 84], інверсуванням цифр зображення числа, «проектування» цифр одного зображення числа в інше. Одним з явно сформованих є підхід, який реалізується в роботах [79, 85].

1.8. Фрактальний аналіз множин

Ми розмежовуємо структурну і метричну фрактальність множин простору R^n, розуміючи, що за певних умов між ними існує тісний зв'язок.

Множину $E \subset R^n$ ми називаємо *структурно фрактальною*, якщо вона є самоподібною, самоафінною або автомодельною.

Множина $E \subset R^n$ називається *автомодельною*, якщо існує $(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ — набір стискаючих перетворень простору, що належать одній напівгрупі такий, що $E = \varphi_1(E) \cup \varphi_2(E) \cup \cdots \cup \varphi_n(E)$, причому перетин $\varphi_i(E) \cap \varphi_j(E)$ є істотно меншим за масивністю, ніж його складові.

Якщо φ_i — елементи групи афінних перетворень, то множина E називається *самоафінною* [13].

Якщо φ_i з групи перетворень подібності, то множина E називається *самоподібною*.

Якщо E — самоподібна множина і подібна множині $\varphi_j(E)$ з коефіцієнтами k_j, то розв'язок рівняння

$$k_1^x + k_2^x + \cdots + k_n^x = 1$$

називається *самоподібною розмірністю множини* E. Для класичної множини Кантора маємо $(\frac{1}{3})^x + (\frac{1}{3})^x = 1 \iff x = \log_3 2 \approx 0,63$.

Міра Гаусдорфа порядку α множини $E \subset R^n$, яка позначається $H^\alpha(E)$, означується рівністю

$$H^\alpha(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} m_\varepsilon^\alpha(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \{ \inf_{d(E_i) \leqslant \varepsilon} \Sigma_i d^\alpha(E_i), E \subset \cup_i E_i \}, \tag{1.11}$$

де $d(E_i)$ — діаметр множини E_i. При цьому точна нижня межа береться за всеможливими покриттями $\cup E_i$ множини E, діаметри множин яких не перевищують ε.

Розмірність Гаусдорфа-Безиковича $\alpha_0(E)$ множини $E \subset R^n$ є числом, яке означується рівністю

$$\alpha_0(E) = \inf\{\alpha : H^\alpha(E) = 0\} = \sup\{\alpha : H^\alpha(E) = \infty\}.$$

При певних умовах самоподібна розмірність самоподібної множини рівна розмірності Гаусдорфа-Безиковича, зокрема, це має місце, коли множина задовольняє умову відкритої множини [46].

Якщо E — самоафінна множина і виконується рівність $E = \cup_{j=1} \varphi_j(E)$,

$$\varphi_j : \begin{cases} x' = a_{11}^{(j)} x + a_{12}^{(j)} y + x_0, \\ y' = a_{21}^{(j)} x + a_{22}^{(j)} y + y_0, j = \overline{1,n} \end{cases}, \tag{1.12}$$

то розв'язок рівняння

$$\sum_{j=1}^{n} | \begin{vmatrix} a_{11}^{(j)} a_{12}^{(j)} \\ a_{21}^{(j)} a_{22}^{(j)} \end{vmatrix} |^{\frac{x}{2}} = 1 \tag{1.13}$$

є *самоафінною розмірністю множини* E.

Зрозуміло, що кожна самоподібна множина є самоафінною і самоподібна розмірність в цьому випадку є самоафінною розмірністю.

1.9. Фрактальний аналіз функцій

Часто локально складні функції мають фрактали у якості суттєвих для них множин (множин значень, множин рівнів, множин несталості, множин зростання тощо, у деяких функціях фрактальними є графіки). Такі функції ми називаємо *функціями з фрактальними властивостями* або *фрактальними функціями* [16, 17, 82, 84].

Множини точок росту функцій розподілу канторівського типу часто є *фракталами* [8]. Наприклад, множиною точок росту класичної функції Кантора є множина Кантора — *найпростіший самоподібний фрактал з фрактальною розмірністю Гаусдорфа-Безиковича*: $\log_3 2 \approx 0,63$.

Суттєвими носіями щільності строго монотонних сингулярних функцій розподілу є всюди щільні фрактали типу множин Безиковича-Егглстона [65].

Множина точок $N_f = \{x : f^{'}(x) \neq 0\}$, в яких похідна сингулярної функції f або не існує, або дорівнює нескінченності, або дорівнює числу, відмінному від нуля, є *нуль-множиною Лебега.* А це є необхідною умовою її фрактальності. Фрактальний аналіз сингулярної функції полягає у вивченні фрактальних властивостей вказаної множини, а також фрактальних властивостей її графіка, який часто є самоподібним, самоафінним або автомодельним.

1.10. Циліндрична похідна

Означення 1.5. Якщо маємо неперервне g-кодування чисел проміжку $(a; b)$ з нульовою надлишковістю і функцію f, задану на ньому, то її *циліндричною похідною* [72] в точці x_0 називають границю послідовності відношень

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_f(\Delta^g_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\ldots\alpha_n(x_0)})}{|\Delta^g_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\ldots\alpha_n(x_0)}|},$$

де $\Delta^g_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)...\alpha_n(x_0)}$ – циліндр $n-$го рангу, що містить точку x_0, $|\Delta^g_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)...\alpha_n(x_0)}|$ – довжина циліндра, $\mu_f(\Delta^g_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)...\alpha_n(x_0)}) = f(\Delta^g_{\alpha_1...\alpha_n(1)} - f(\Delta^g_{\alpha_1...\alpha_n(0)})$ – приріст функції на циліндрі.

Наслідок 1.1. *Якщо в точці $x_0 \in (a; b)$ існує похідна функції f, визначеної на цьому проміжку, то її значення збігається зі значенням циліндричної похідної за будь-якої неперервної системи кодування (з нульовою надлишковістю) чисел цього проміжку, зокрема за класичного двійкового кодування.*

Наслідок 1.2. *Нехай g – неперервне кодування з нульовою надлишковістю. Якщо f – неперервна функція обмеженої варіації, яку визначено на відрізку $[a; b]$, і для майже всіх $x \in [a; b]$ її циліндрична похідна дорівнює нулю, то f – сингулярна функція.*

Зауваження 1.3. Циліндрична похідна – продуктивний засіб для обґрунтування сингулярності та недиференційовності неперервної функції. Для кожного конкретного g-зображення чисел циліндрична похідна має свою специфіку.

Означення 1.6. За заданого неперервного g-кодування чисел відрізка $[a; b]$, на якому задано функцію f, границю

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|f(\Delta^g_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)...\alpha_n(x_0)})|}{|\Delta^g_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)...\alpha_n(x_0)}|},$$

де $f(\Delta^g_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)...\alpha_n(x_0)})$ – образ циліндра $\Delta^g_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)...\alpha_n(x_0)}$, який містить точку x_0, під дією функції f, називають *циліндричною g-похідною 2-го роду функції f у точці x_0.*

Зауваження 1.4. Легко бачити, що значення виразу

$$|f(\Delta^g_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)...\alpha_n(x_0)})| = \max_{x\in\Delta^g_{\alpha_1...\alpha_n}} f(x) - \min_{x\in\Delta^g_{\alpha_1...\alpha_n}} f(x)$$

є коливанням функції на циліндрі. У випадку, коли найбільшого і найменшого значення функція набуває на кінцях циліндра, зокрема є монотонною на ньому, циліндрична похідна 2-го роду з урахуванням знака збігається з циліндричною похідною.

Висновки до розділу 1

У розділі 1 наведено означення ключових понять, формулювання фактів, які будуть використовуватися в наступних розділах, а також здійснено короткий огляд літератури, що примикає до теми дисертаційного дослідження.

У ньому здійснено акцент на системах кодування дійсних чисел, на геометрії зображення чисел, прийомах та методах задання неперервних локально складних функцій.

Результатів, які виносяться на захист, цей розділ не містить.

РОЗДІЛ 2
КАНТОРІВСЬКЕ ДВІЙКОВО-ФІБОНАЧЧІЄВЕ ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ В ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ

У цьому розділі вивчається геометрія канторівської системи числення, породженої послідовністю основ (s_n), де $s_n = 2^{\varphi_n}$, (φ_n) – класична послідовність Фібоначчі [54]: $\varphi_1 = 1 = \varphi_2$, $\varphi_{n+2} = \varphi_n + \varphi_{n+1}$. Розглядаються множини канторівського типу з нульовою й додатньою мірою Лебега, зокрема аномально фрактальні, а також вивчаються сингулярні, немонотонні і недиференційовні функції, функції з обмеженою та необмеженою варіацією.

2.1. Канторівське двійково-фібоначчієве зображення чисел

Розглядається представлення чисел $x \in [0;1]$ рядами Кантора:

$$x = \frac{\alpha_1}{s_1} + \frac{\alpha_2}{s_1 s_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s_1 s_2 \dots s_n} + \dots \equiv \triangle^{(s_n)}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}, \tag{2.1}$$

що визначається *класичною послідовністю Фібоначчі* [54]:

$$\varphi_1 = 1, \varphi_2 = 1, \dots, \varphi_{n+2} = \varphi_n + \varphi_{n+1}, n \in N, \tag{2.2}$$

загальний член якої виражається відомою формулою Біне:

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \tag{2.3}$$

а саме: $s_n = 2^{\varphi_n}$,

$$x = \frac{c_1}{2^1} + \frac{c_2}{2^1 \cdot 2^1} + \frac{c_3}{2^2 \cdot 2^2} + \frac{c_4}{2^4 \cdot 2^3} + \dots + \frac{c_n}{2^{\varphi_{n+1}-1} \cdot 2^{\varphi_n}} + \dots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^{\varphi_{n+2}-1}} \equiv \triangle_{c_1 c_2 \ldots\ c_n \ldots}, \tag{2.4}$$

де $c_n \in \{0, 1, \ldots, 2^{\varphi_n - 1}\} \equiv A_n$.

Формальний запис $\triangle_{c_1 c_2 \ldots\ c_n \ldots}$ ряду (2.4) і його суми — числа x називатимемо їх $\triangle$-*зображенням.* Тоді послідовність (c_n) з $\triangle$-зображення $\triangle_{c_1 c_2 \ldots\ c_n \ldots}$ числа x є елементом простору $L = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times \ldots$ — послідовностей елементів алфавітів (A_n) і її кодом у цьому просторі.

Переважна більшість чисел має єдине $\triangle$-зображення і лише зліченна множина чисел має їх два, а саме:

$$\triangle_{c_1 c_2 \ldots\ c_n (0)} = \triangle_{c_1 c_2 \ldots\ c_{n-1} [c_n - 1][2^{\varphi_{n+1}} - 1][2^{\varphi_{n+2}} - 1] \ldots}.$$

2.2. Зв'язок Δ-зображення з його класичним двійковим зображенням

Зосередимо свою увагу на $\triangle$-зображенні числа x. Як буде показано далі, це зображення має тісний зв'язок з класичним двійковим зображенням, а тому має деякі свої технічні переваги.

Лема 2.1. *Якщо* $\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_n \ldots}$ — Δ-*зображення числа* $x \in [0; 1]$, *тобто*

$$x = \frac{c_1}{2^1} + \frac{c_2}{2^1 \cdot 2^1} + \frac{c_3}{2^2 \cdot 2^2} + \frac{c_4}{2^4 \cdot 2^3} + \cdots + \frac{c_n}{2^{\varphi_{n+1}-1} \cdot 2^{\varphi_n}} + \ldots,$$

то його класичне двійкове зображення має вигляд:

$$\Delta^2_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots} = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \frac{\alpha_3}{2^3} + \frac{\alpha_4}{2^4} + \ldots + \frac{\alpha_n}{2^n} + \ldots, \ \textit{де } \alpha_n \in \{0, 1\},$$

причому $c_1 = \alpha_1, c_2 = \alpha_2,\ c_3 = 2 \cdot \alpha_3 + \alpha_4, c_4 = 2^2 \cdot \alpha_5 + 2 \cdot \alpha_6 + \alpha_7, \ldots,$

$$c_n = 2^{\varphi_n - 1} \cdot \alpha_{\varphi_{n+1}} + 2^{\varphi_n - 2} \cdot \alpha_{\varphi_{n+1}+1} + \ldots + 2^1 \cdot \alpha_{\varphi_{n+1}+\varphi_n-2} + 2^0 \cdot \alpha_{\varphi_{n+2}-1}.$$

Доведення. Оскільки $c_n \in A_n$, то його можна подати у вигляді:

$$c_n = 2^{\varphi_n - 1} \cdot \alpha_{\varphi_{n+1}} + 2^{\varphi_n - 2} \cdot \alpha_{\varphi_{n+1}+1} + \ldots + 2^1 \cdot \alpha_{\varphi_{n+1}+\varphi_n-2} + 2^0 \cdot \alpha_{\varphi_{n+2}-1},$$

причому це можна зробити єдиним чином. Тоді подавши дріб

$$\frac{2^{\varphi_n-1}\cdot\alpha_{\varphi_{n+1}}+2^{\varphi_n-2}\cdot\alpha_{\varphi_{n+1}+1}+2^1\cdot\alpha_{\varphi_{n+1}+\varphi_n-2}+2^0\cdot\alpha_{\varphi_{n+2}-1}}{2^{\varphi_{n+1}-1}\cdot 2^{\varphi_n}}$$

у вигляді суми φ_n доданків

$$\frac{2^{\varphi_n-1}\cdot\alpha_{\varphi_{n+1}}}{2^{\varphi_{n+1}-1}\cdot 2^{\varphi_n}}=\frac{\alpha_{\varphi_{n+1}}}{2^{\varphi_{n+1}}},\frac{2^{\varphi_n-2}\cdot\alpha_{\varphi_{n+1}+1}}{2^{\varphi_{n+1}-1}\cdot 2^{\varphi_n}}=\frac{\alpha_{\varphi_{n+1}+1}}{2^{\varphi_{n+1}+1}},\ldots,$$

$$\frac{2^1\cdot\alpha_{\varphi_{n+1}+\varphi_n-2}}{2^{\varphi_{n+1}-1}\cdot 2^{\varphi_n}}=\frac{\alpha_{\varphi_{n+1}+\varphi_n-2}}{2^{\varphi_{n+1}+\varphi_n-2}},\frac{2^0\cdot\alpha_{\varphi_{n+2}-1}}{2^{\varphi_{n+1}-1}\cdot 2^{\varphi_n}}=\frac{\alpha_{\varphi_{n+2}-1}}{2^{\varphi_{n+2}-1}}.$$

Отримаємо двійкове зображення числа:

$$x=\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{2^2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{2^n}+\cdots+=\triangle^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}.$$

□

Лема 2.2. *$\triangle$-зображення числа $x=\triangle^2_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}$ має вигляд $\triangle_{c_1\ldots c_n\ldots}$, де*

$$c_n=2^{\varphi_n-1}\cdot\alpha_{\varphi_{n+1}}+2^{\varphi_n-2}\cdot\alpha_{\varphi_{n+1}+1}+\ldots+2^1\cdot\alpha_{\varphi_{n+1}+\varphi_n-2}+2^0\cdot\alpha_{\varphi_{n+2}-1}.$$

Доведення. Нехай є двійкове зображення числа $x\in[0;1]$:

$$\Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}=\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{2^2}+\frac{\alpha_3}{2^3}+\frac{\alpha_4}{2^4}+\ldots+\frac{\alpha_n}{2^n}+\ldots,\ \text{де}\ \alpha_n\in\{0,1\}.$$

Згрупуємо почленно, починаючи з третього доданка (кількість доданків у групі рівно числу послідовності Фібоначчі), і, звівши до спільного знаменника доданки в групі, отримаємо:

$$x=\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{2^2}+\left(\frac{\alpha_3}{2^3}+\frac{\alpha_4}{2^4}\right)+\left(\frac{\alpha_5}{2^5}+\frac{\alpha_6}{2^6}+\frac{\alpha_7}{2^7}\right)+$$
$$+\left(\frac{\alpha_8}{2^8}+\frac{\alpha_9}{2^9}+\frac{\alpha_{10}}{2^{10}}+\frac{\alpha_{11}}{2^{11}}+\frac{\alpha_{12}}{2^{12}}\right)+\ldots=$$

$$=\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{2^2}+\frac{2\cdot\alpha_3+\alpha_4}{2^4}+\frac{2^2\cdot\alpha_5+2\cdot\alpha_6+\alpha_7}{2^7}+$$
$$+\frac{2^4\cdot\alpha_8+2^3\cdot\alpha_9+2^2\cdot\alpha_{10}+2\cdot\alpha_{11}+\alpha_{12}}{2^{12}}+\ldots+$$

$$+\frac{2^{\varphi_n-1}\cdot\alpha_{\varphi_{n+1}}+2^{\varphi_n-2}\cdot\alpha_{\varphi_{n+1}+1}}{2^{\varphi_{n+1}-1}\cdot 2^{\varphi_n}}+\ldots+$$

$$+\frac{+2^1\cdot\alpha_{\varphi_{n+1}+\varphi_n-2}+2^0\cdot\alpha_{\varphi_{n+2}-1}}{2^{\varphi_{n+1}-1}\cdot 2^{\varphi_n}}=$$

$$=\frac{\alpha_1}{2^1}+\frac{\alpha_2}{2^1\cdot 2^1}+\frac{2\cdot\alpha_3+\alpha_{43}}{2^2\cdot 2^2}+\frac{2^2\cdot\alpha_5+2\cdot\alpha_6+\alpha_7}{2^4\cdot 2^3}+\cdots+$$

$$+\frac{2^{\varphi_n-1}\cdot\alpha_{\varphi_{n+1}}+2^{\varphi_n-2}\cdot\alpha_{\varphi_{n+1}+1}+\ldots+2^1\cdot\alpha_{\varphi_{n+1}+\varphi_n-2}+2^0\cdot\alpha_{\varphi_{n+2}-1}}{2^{\varphi_{n+1}-1}\cdot 2^{\varphi_n}},$$

ми отримуємо його $\triangle$ - зображення $\triangle_{c_1c_2\ldots\, c_n\ldots}$, де

$$c_n=2^{\varphi_n-1}\cdot\alpha_{\varphi_{n+1}}+2^{\varphi_n-2}\cdot\alpha_{\varphi_{n+1}+1}+\ldots+2^1\cdot\alpha_{\varphi_{n+1}+\varphi_n-2}+2^0\cdot\alpha_{\varphi_{n+2}-1}.$$

$\square$

Використовуючи зв'язок Δ-зображення з класичним двійковим зображенням, легко констатувати, що сума базисного ряду

$$x=\Delta_{(1)}=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)}, \tag{2.5}$$

є ірраціональним числом, оскільки його двійкове зображення є неперіодичним.

Зауважимо, що множина неповних сум (підсум) ряду (2.5) є аномально фрактальною, тобто є континуальною множиною і має нульову фрактальну розмірність Гаусдорфа-Безиковича [65, 92].

2.3. Геометрія Δ-зображення

У кожній системі кодування (зображення) дійсних чисел цифри мають свій геометричний зміст, наслідком чого є інші геометричні тлумачення різних відношень. Геометрія зображення чисел (позиційна та метрична) в значній мірі визначається властивостями циліндрів та хвостових множин.

Нагадаємо, що циліндром рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$, що відповідає даному зображенню чисел, називається множина:

$$\triangle_{c_1c_2\ldots c_m} \equiv \{x : x = \triangle_{c_1c_2\ldots c_m u_{m+1}u_{m+2}\ldots}, (u_{m+k}) \in A_{s_{m+k}}\}, \qquad (2.6)$$

що є відрізком $[a; b]$ з кінцями:

$$a = \sum_{i=1}^{m} \frac{c_1}{2^{\varphi_{i+1}-1}}, b = a + \frac{1}{2^{\varphi_{m+2}-1}}.$$

Традиційно, означивши циліндри рівністю (2.6), можна грунтовно конкретизувати геометрію $\triangle$ - зображення чисел (геометричний зміст цифр, властивості циліндричних, напівциліндричних та хвостових множин). Її частково розкривають наступні метричні співвідношення: 1) довжина циліндра

$$\mid \triangle_{c_1c_2\ldots c_m} \mid = \frac{1}{s_1s_2\ldots s_m} = \frac{1}{2^{\varphi_1}\cdot 2^{\varphi_2}\cdot\ldots\cdot 2^{\varphi_m}} =$$
$$= \frac{1}{2^{\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_m}} = \frac{1}{2^{\varphi_{m+2}-1}},$$

2) основне метричне відношення

$$\mid \triangle_{c_1c_2\ldots c_m} \mid = s_{m+1}\cdot \mid \triangle_{c_1c_2\ldots c_m c} \mid = (2^{\varphi_1}\cdot 2^{\varphi_2}\cdot\ldots\cdot 2^{\varphi_{m+1}})\cdot \mid \triangle_{c_1c_2\ldots c_m c} \mid =$$

$$= 2^{\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_{m+1}}|\Delta_{c_1c_2\ldots c_m c}| = 2^{\varphi_{m+2}}|\Delta_{c_1c_2\ldots c_m c}|.$$

2.4. Множини канторівського типу (Метричні задачі)

Теорема 2.1. *Множина*

$$C \equiv C[\triangle; \bar{1}] = \{x : x = \triangle_{c_1c_2\ldots c_n\ldots}, c_n \neq 1\}$$

є ніде не щільною, досконалою множиною додатної міри Лебега, яка обчислюється за формолою

$$\lambda(C) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{\varphi_n}}\right) > 0. \qquad (2.7)$$

Доведення. Ніде не щільність множини C є наслідком того, що циліндр $\Delta_{c_1c_2\ldots c_m}$ містить інтервал

$$\nabla_{c_1c_2\ldots c_m 1} \equiv (\Delta_{c_1c_2\ldots c_m 1(0)}; \Delta_{c_1c_2\ldots c_m 1(1)}),$$

який не містить точок множини C.

Досконалість (замкненість, відсутність ізольованих точок) обгрунтовується стандартним способом (як і для всіх неперервних кодувань дійсних чисел).

Нехай $F_0 \equiv [0;1], F_k$ — об'єднання всіх циліндрів рангу k, серед внутрішніх точок яких є точки множини $C[\triangle;\bar{1}]$, тобто

$$\bigcup_{c_1 \neq 1} \ldots \bigcup_{c_k \neq 1} \triangle_{c_1c_2\ldots c_k},$$

$\overline{F}_{k+1} = F_k \setminus F_{k+1}$. Тоді маємо

$F_0 \supset F_1 \ldots \supset F_k \supset F_{k+1} \supset \ldots$ і $C[\triangle;\bar{1}] \subset F_k$ при $\forall k \in N$.

Тому $\lambda(C[\triangle;\bar{1}]) \leqslant \lambda(F_k)$ і більше того, оскільки

$$C[\triangle;\bar{1}] = \lim_{k\to\infty} F_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k,$$

то

$$\lambda(C[\triangle;\bar{1}]) = \lim_{k\to\infty} \lambda(F_k) = \lim_{k\to\infty} \prod_{m=1}^{k} \frac{\lambda(F_m)}{\lambda(F_{m-1})} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})}.$$

Враховуючи, що $F_{k+1} = F_k \setminus \overline{F}_{k+1}$, отримуємо

$$\lambda(C[\triangle;\bar{1}]) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_{k-1}) - \lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})}\right).$$

Але $\frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})} = \frac{1}{2^{\varphi_k}}$. Тому має місце рівність (2.7). Оскільки ж ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\varphi_k}}$ є збіжним, то збіжним є і нескінченний добуток (2.7). $\square$

Теорема 2.2. *Якщо* $g_{c_n n} = 0, g_{jn} = \frac{1}{2^{\varphi_n}-1}$ *при* $j \neq c_n$ *і* $\beta_{jn} = g_{0n} + \ldots + g_{[j-1]n}$, *то функція* f, *означена рівністю*

$$f(x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_{\alpha_k k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j j},$$

є функцією розподілу квазіканторівського типу [65].

Доведення. Спочатку доведемо, що f є функцією розподілу на відрізку $[0;1]$. Маємо $f(0=\Delta_{(0)})=0, f(1=\Delta_{(s_k-1)})=1$.

Нехай $c_i \neq 1, i=\overline{1,m}$. Тоді якщо $x\in\Delta_{c_1\ldots c_{m-1}1}$, тобто $x=\Delta_{c_1\ldots c_{m-1}1a_1a_2\ldots}$, то $f(x)=f(\Delta_{c_1\ldots c_{m-1}1(0)})=f(\Delta_{c_1\ldots c_{m-1}1(s_{m+k}-1)})=\beta_{c_1 1}+\sum\limits_{k=2}^{m-1}\beta_{c_k k}\prod\limits_{j=1}^{k-1}g_{c_j j}+\beta_{1m}\prod\limits_{j=1}^{m-1}g_{c_j j}$. А отже, функція на циліндрі $\Delta_{c_1\ldots c_{m-1}1}$ є сталою.

Якщо $x_1<x_2$, тобто $x_1\in\Delta_{c_1\ldots c_{m-1}a}$, $x_2\in\Delta_{c_1\ldots c_{m-1}b}$, де $a<b$, то очевидно, то $f(x_1)\leqslant f(x_2)$. Отже, функція f неспадна. Таким чином, f є функцією розподілу, а множина $C[\Delta,\overline{1}]$ — її спектром (множиною точок росту).

Згідно з теоремою 2.1 $C[\Delta,\overline{1}]$ є ніде не щільною множиною додатної міри Лебега. А отже, згідно з означенням $f(x)$ є функцією квазіканторівського типу. □

Теорема 2.3. *Множина, означена рівністю*

$$C\equiv C[\triangle;V_n]=\{x: x=\triangle_{c_1c_2\ldots c_n\ldots}, c_n\in V_n\ \subset A_n\},\tag{2.8}$$

є: 1) відрізком $[0;1]$, *якщо* $V_n=A_n\ \forall n\in N$; *2) об'єднанням відрізків, якщо* $V_n=A_n$ *для всіх* $n>n_0$; *3) досконалою ніде не щільною множиною, якщо для нескінченної кількості значень* n *виконується нерівність* $V_n\neq A_n$. *Її міра Лебега обчислюється за формулою*

$$\lambda(C)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{|A_n\setminus V_n|}{2^{\varphi_n}}\right).\tag{2.9}$$

Доведення. Міркування, які використовувалися при доведенні попередньої теореми, приводять до формули

$$\lambda(C)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda(\overline{F_k})}{\lambda(F_{k-1})}\right)$$

в даному випадку $\frac{\lambda(\overline{F_k})}{\lambda(F_{k-1})}=\frac{|A_k\setminus V_k|}{2^{\varphi_k}}$. Тому має місце рівність (2.9). □

Наслідок 2.1. *Множина C, означена рівністю (2.3), є нуль-множиною Лебега тоді і тільки тоді, коли*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|A_n \setminus V_n|}{2^{\varphi_n}} = \infty.$$

Наслідок 2.2. *Якщо $A_n \backslash V_n = \{c_n\}$, то $C[\Delta, V]$ є множиною додатної міри Лебега.*

Теорема 2.4. *Множина*

$$C_1 \equiv C[\triangle; V_n] = \{x : x = \triangle_{c_1 c_2 \dots c_n \dots}, c_n \in V_n = \{0, 2^{\varphi_n} - 1\}\}.$$

є досконалою аномально фрактальною множиною [65], тобто має нульову фрактальну розмірність Гаусдорфа-Безиковича.

Доведення. Досконалість множини C_1 є очевидною. Скористаємося критерієм аномальної фрактальності досконалої множини [65]. Оскільки множину C_1 можна покрити 2-ма циліндрами рангу k, кожен з яких має довжину $\frac{1}{2^{\varphi_{k+2}-1}}$, то α-об'єм цього покриття виражається

$$l_k^{\alpha} = 2^k \cdot \left(\frac{1}{2^{\varphi_{k+2}-1}} \right)^{\alpha} = \left[\frac{2}{2^{\alpha \cdot \frac{\varphi_{k+2}-1}{k}}} \right]^k.$$

Тоді для будь-якого α ($l_k^{\alpha} \to 0$ при $k \to \infty$), тобто міра Гаусдорфа множини C рівна нулю при будь-якому $\alpha > 0$, що засвідчує аномальну фрактальність множини C. $\square$

Теорема 2.5. *Нехай $g_{0n} > 0$, $g_{[2^{\varphi_n}-1]n} > 0$, $g_{0n} + g_{[2^{\varphi_n}-1]n} = 1$, $\beta_{0n} = 0$, $\beta_{jn} = g_{0n}$ при $0 < j < 2^{\varphi_n}$ функція f, означена рівністю*

$$f(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}) = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_{\alpha_k k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j j},$$

є сингулярною функцією розподілу канторівського типу [65] з аномально фрактальним спектром.

Доведення. З умови теореми випливає, що $g_{1n} = g_{2n}... = g_{2^{\varphi_n}-1} = 0$. Тоді для будь-якого $x \in \Delta_{c_1...c_{n-1}j}$, де $0 < j < 2^{\varphi_n} - 1$. $f(x) = f(\Delta_{c_1...c_{n-1}j(0)}) = f(\Delta_{c_1...c_{n-1}(2^{\varphi_n}-1)})$, тобто функція f є сталою на циліндрі $\Delta_{c_1...c_{n-1}j}$.

Якщо $x_1 = \Delta_{c_1...c_n a_1 a_2...} < \Delta_{c_1...c_m b_1 b_2...} = x_2$, то $a_1 < b_1$.

$$f(x_2) - f(x_1) = (\prod_{j=1}^{n} g_{c_j j})[\beta_{b_1,n+1} - \beta_{a_1,n+1} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \beta_{b_k[n+k]} \prod_{j=1}^{k-1} g_{b_j j} - \sum_{k=2}^{\infty} \beta_{a_k[n+k]} \prod_{j=1}^{k-1} g_{b_j j}] \geqslant 0.$$

Очевидними є рівності $f(0 = \Delta_{(0)}) = 0$ і $f(1 = \Delta_{2^{\varphi_1}-1, 2^{\varphi_2}-1,..}) = 1$.

Тому функція f є функцією розподілу на $[0;1]$. Її спектром є множина $C_1 \equiv C[\triangle; V_n]$, яка згідно з теоремою 2.4 має нульову міру Лебега і нульову розмірність Гаусдорфа-Безиковича. Отже, f — сингулярна функція канторівського типу з аномально фрактальним носієм. $\square$

2.5. Клас функцій

Інверсор цифр Δ-зображення чисел, тобто функція, що означена рівністю

$$I(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n ...}) = \Delta_{[s_1 - 1 - \alpha_1][s_2 - 1 - \alpha_2]...[s_k - 1 - \alpha_k]...},$$

має аналітичний вираз $I(x) = 1 - x$, що свідчить про відносну простоту геометрії Δ-зображення чисел. Доведемо це.

Очевидно, що

$$I(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k - 1}{s_1 s_2 ... s_k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{s_1 s_2 ... s_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k - 1}{s_1 s_2 ... s_k} - x.$$

Оскільки

$$\frac{s_1 - 1}{s_1} + \frac{s_2 - 1}{s_1 s_2} = \frac{s_1 s_2 - 1}{s_1 s_2},$$

$$\frac{s_1 - 1}{s_1} + \frac{s_2 - 1}{s_1 s_2} + \frac{s_3 - 1}{s_1 s_2 s_3} = \frac{s_1 s_2 s_3 - 1}{s_1 s_2 s_3} = 1 - \frac{1}{s_1 s_2 s_3},$$

то

$$I(x) = 1 - \left(\frac{1}{s_1 s_2 \ldots s_k} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_{k+i} - 1}{s_1 s_2 \ldots s_{k+i}}\right) - x = 1 - x.$$

Нехай задано $\overline{g}_k = (g_{0k}, g_{1k}, \ldots, g_{s_k-1,k})$ – послідовність векторів, координати яких для кожного $k \in N$ задовольняють умови:

1) $|g_{ik}| < 1$,

2) $g_{0k} > 0$,

3) $\delta_{ik} \equiv g_{0k} + g_{1k} + \ldots + g_{i-1,k} > 0,\ i \in A_{s_k}$,

4) $g_{0k} + g_{1k} + \ldots + g_{s_k-1,k} = 1,\ k \in N$,

5) $\prod\limits_{k=1}^{\infty} g_{c_k k} = 0,\ \forall (c_k) \in \Omega$.

Очевидно, що $\delta_{i+1,k} = \delta_{ik} + g_{ik}$ для будь-яких $i \in A_{s_k},\ \forall k \in N$.

Розглядається функція $y = \phi(x)$, означена рівністю

$$\phi\left(x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \delta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\delta_{\alpha_k k}\prod_{i=1}^{k-1} g_{\alpha_i i}\right) \equiv \Delta^{\phi}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}. \tag{2.10}$$

Коректність означення функції є наслідком двох умов:

1) абсолютної збіжності ряду (2.10),

2) рівності $\phi\left(\Delta_{c_1\ldots c_{m-1}c_m(0)}\right) = \phi\left(\Delta_{c_1\ldots c_{m-1}[c_m-1](s_{m+k}-1)}\right)$.

Для доведення останньої рівності досить розглянути різницю

$$\begin{aligned}
\rho \ &\equiv\ \phi\left(\Delta_{c_1\ldots c_{m-1}[c_m-1](s_{m+k}-1)}\right) - \phi\left(\Delta_{c_1\ldots c_{m-1}c_m(0)}\right) = \\
&=\ \left(\prod_{i=1}^{m-1} g_{c_i i}\right)\left[\delta_{c_m-1,m} + g_{c_m-1,m}\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{s_{m+k}-1}{s_{m+1}s_{m+2}\ldots s_{m+k}} - \delta_{c_m,m}\right] = \\
&=\ \left(\prod_{i=1}^{m-1} g_{c_i i}\right)\left[\delta_{c_m-1,m} + g_{c_m-1,m} - \delta_{c_m m}\right] = 0.
\end{aligned}$$

Якщо всі елементи матриці $\|g_{ik}\|$ є раціональними, то функція $\phi(x)$ називається *раціональною*. Її значення у Δ-бінарній точці є *раціональним числом*. Справді, $\phi\left(\Delta_{c_1\ldots c_m(0)}\right) = \Delta^{\phi}_{c_1\ldots c_m(0)}$ є раціональним числом, як скінченна сума раціональних чисел.

Лема 2.3. *Приріст* $\mu_\phi\left(\Delta_{c_1c_2...c_m}\right) \equiv \phi\left(\Delta_{c_1c_2...c_m(s_{m+k}-1)}\right) - \phi\left(\Delta_{c_1c_2...c_m(0)}\right)$ *функції* ϕ *на циліндрі* $\Delta_{c_1...c_m}$ *обчислюється за формулою*

$$\mu_\phi(\Delta_{c_1c_2...c_m}) = \prod_{i=1}^{m} g_{c_i i}. \tag{2.11}$$

Доведення. Виразимо приріст $\mu_\phi(\Delta_{c_1c_2...c_m}) =$

$$= P \cdot \left[\delta_{s_{m+1}-1,m+1} + \delta_{s_{m+2}-1,m+2} \cdot g_{s_{m+1}-1,m+1} + \right.$$

$$\left. + \delta_{s_{m+3}-1,m+3} \cdot g_{s_{m+1}-1,m+1} \cdot g_{s_{m+2}-1,m+2} + ...\right] = P,$$

P $= \prod\limits_{i=1}^{m} g_{c_i i}$.

Оскільки, $\delta_{s_{m+k}-1,m+k} = 1 - g_{s_{m+k}-1,m+k}$ для всіх $k \in N$, то вираз у квадратних дужках збігається до одиниці. Тому виконується рівність (2.11).

Лему доведено. □

У роботах [25, 56, 63, 66, 68, 73, 76, 79, 84, 85, 92] сформувалась певна методологія вивчення такого типу неперервних функцій, якої ми будемо дотримуватись у даній роботі.

2.6. Неперервність та монотонність функції

Теорема 2.6. *Функція* $y = \phi(x)$ *є неперевною в кожній точці відрізка* $[0; 1]$; *строго зростаючою, якщо* $g_{ik} > 0$ *для будь-яких* $i \in A_{s_k}$, $\forall k \in N$; *сталою на всіх циліндрах виду* $\Delta_{c_1...c_{k-1}i}$, *якщо* $g_{ik} = 0$.

Доведення. **1.** Нехай $x_0 = \Delta_{c_1...c_m...}$ — довільна Δ-унарна точка відрізка $[0; 1]$, $x_0 \neq x = \Delta_{\alpha_1...\alpha_m...}$. Тоді існує число m таке, що $\alpha_m \neq c_m$, але $\alpha_i = c_i$ при $i < m$, причому $x \to x_0$ рівносильно $m \to \infty$. Тоді

$$|\phi(x) - \phi(x_0)| = \left(\prod_{i=1}^{m} |g_{c_i,i}|\right) \cdot$$

$$\cdot \left|\delta_{\alpha_m m} + \sum_{k=m+1}^{\infty}\left(\delta_{\alpha_k k}\prod_{i=m}^{k-1} g_{\alpha_i i}\right) - \delta_{c_m m} - \sum_{k=m+1}^{\infty}\left(\delta_{c_k k}\prod_{i=m}^{k-1} g_{c_i i}\right)\right|.$$

Оскільки вираз під останнім модулем є різницею двох чисел з відрізка $[0;1]$, то сам модуль не перевищує 1. При цьому добуток

$$\prod_{i=1}^{m-1} |g_{c_i,i}| \to 0$$

при умові $m \to \infty$, що є наслідком умови 5).

Таким чином,

$$|\phi(x) - \phi(x_0)| \to 0$$

(умова $m \to \infty \Leftrightarrow x \to x_0$, що є свідченням неперервності функції $\phi(x)$ в точці x_0).

Якщо $x_0 = \Delta_{c_1 \ldots c_{m-1}[c_m - 1](s_{m+k}-1)} = \Delta_{c_1 \ldots c_{m-1} c_m (0)}$ — Δ-бінарна точка, то неперервність функції $\phi(x)$ обґрунтовується аналогічно, з тією лише різницею, що окремо доводиться неперервність зліва і справа. При цьому для доведення неперервності зліва використовується перше зображення, а для доведення неперервності справа — друге.

2. Доведемо строгу монотонність функції $\phi(x)$ при умові додатності всіх елементів матриці $\|g_{ik}\|$. З цією метою розглянемо x_1 і x_2, де $x_1 < x_2$. Нехай $x_1 = \Delta_{c_1 \ldots c_m d_1 d_2 \ldots}$, $x_2 = \Delta_{c_1 \ldots c_m d'_1 d'_2 \ldots}$. Тоді $d_1 < d'_1$. Розглянемо різницю

$$\phi(x_2) - \phi(x_1) = \left(\prod_{i=1}^{m} g_{c_i i}\right) \left[\delta_{d'_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\delta_{d'_k k} \prod_{i=1}^{k-1} g_{d'_i i}\right) - \delta_{d_1 1} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=2}^{\infty} \left(\delta_{d_k k} \prod_{i=1}^{k-1} g_{d_i i}\right) \geqslant \left(\prod_{i=1}^{m} g_{c_i i}\right) \left[\delta_{d'_1 1} - \delta_{d_1 1} - g_{d_1 1} \cdot 1\right] = \right.$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{m} g_{c_i i}\right) \left[\delta_{d'_1 1} - \delta_{[d_1+1]1}\right] > 0,$$

оскільки $x_1 \neq x_2$.

Отже, $\phi(x)$ є строго зростаючою функцією.

3. Нехай $g_{im} = 0$. Тоді для довільного $x = \Delta_{c_1 \ldots c_{m-1} i d_1 d_2 \ldots}$, що належить циліндру $\Delta_{c_1 \dots c_{m-1} i}$, маємо

$$\phi(x) = \delta_{c_1 1} + \sum_{k=2}^{m-1} \left(\delta_{c_k k} \prod_{i=1}^{k-1} \right) + \delta_{im} \prod_{i=1}^{m-1} g_{c_i i} + 0 = \phi(\Delta_{c_1 \dots c_{m-1}(0)}),$$

тобто функція $\phi(x)$ набуває сталого значення у кожній точці циліндра $\Delta_{c_1 \dots c_{m-1} i}$. □

Наслідок 2.3. *Областю визначення і множиною значень функції $\phi(x)$ є відрізок $[0;1]$, тобто $D(\phi) = [0;1] = E(\phi)$.*

Наслідок 2.4. *Нехай F_k — об'єднання циліндрів рангу k, серед внутрішніх точок яких є точки нестабільності функції ϕ, тобто*

$$F_k \equiv \bigcup_{i_1 :\ g_{i_1 1} \neq 0} \dots \bigcup_{i_k :\ g_{i_k k} \neq 0} \Delta_{i_1 i_2 \dots i_k}.$$

Функція $\phi(x)$ є сингулярною функцією канторівського типу [65] тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda\left(F_k \setminus F_{k+1}\right)}{\lambda(F_k)} = \infty, \quad \text{де } \ \lambda(\cdot) - \text{міра Лебега.}$$

2.7. Варіаційні властивості функції

Лема 2.4. *Якщо $g_{ik} > 0$ для всіх $i \in A_{s_k}$ і $k \geqslant m$, то функція $\phi(x)$ є монотонною на кожному циліндрі m-го рангу, причому на циліндрі $\Delta_{c_1 \dots c_m}$*
1) *строго зростає, якщо $P \equiv \prod_{i=1}^{m} g_{c_i i} > 0$;*
2) *строго спадає, якщо $P < 0$;*
3) *є сталою, якщо $P = 0$.*

Доведення. Нехай $x_1 = \Delta_{c_1 \dots c_m d_1 d_2 \dots}$ і $x_2 = \Delta_{c_1 \dots c_m d'_1 d'_2 \dots}$, причому $x_1 < x_2$, тобто $d_1 < d'_1$. Розглянемо різницю

$$\rho \equiv \phi(x_2) - \phi(x_1) = P \left[\delta_{d'_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\delta_{d'_k k} \prod_{i=1}^{k-1} g_{d'_i i} \right) - \delta_{d_1 1} - \sum_{k=2}^{\infty} \left(\delta_{d_k k} \prod_{i=1}^{k-1} g_{d_i i} \right) \right].$$

Оскільки вираз у квадратних дужках має додатне значення із за $x_1 < x_2$, то знак різниці ρ залежить від знаку числа P. З довільності вибору чисел x_1 і x_2 з циліндра $\Delta_{c_1 \dots c_m}$ випливає твердження, що вимагалось довести. Лему доведено. □

Наслідок 2.5. *Функція $\phi(x)$ свого найбільшого і найменшого значення на циліндрі, набуває на його кінцях.*

Наслідок 2.6. *Точки максимумів та мінімумів функції є Δ-бінарними числами.*

Теорема 2.7. *Якщо матриця $\|g_{ik}\|$ не містить нулів, але має нескінченну кількість від'ємних елементів, то функція $\phi(x)$ є ніде не монотонною.*

Доведення. Для доведення теореми досить показати, що в довільному циліндрі як завгодно великого рангу існує три точки x_1, x_2, x_3 такі, що $x_1 < x_2 < x_3$ і при цьому

$$[\phi(x_2) - \phi(x_1)]\,[\phi(x_3) - \phi(x_2)] < 0.$$

Можна скористатися іншим прийомом, а саме довести, що у кожному циліндрі існує два циліндри вищих рангів, прирости на яких мають різні знаки. З цією метою розглянемо циліндр $\Delta_{c_1 \dots c_m}$ і число $k > m$, для якого існує $g_{ik} < 0$. Згідно з лемою 1

$$\mu_\phi(\Delta_{c_1 \dots c_m \dots c_{k-1} 0}) = P \cdot g_{0k},\ \mu_\phi(\Delta_{c_1 \dots c_m \dots c_{k-1} i}) = P \cdot g_{ik},$$

де $P = \prod\limits_{i=1}^{k-1} g_{c_i i}$.

Оскільки $g_{0k} > 0$ (див. умову 2), а $g_{ik} < 0$, то

$$\mu_\phi(\Delta_{c_1 \dots c_m \dots c_{k-1} 0}) \mu_\phi(\Delta_{c_1 \dots c_m \dots c_{k-1} i}) = P^2 g_{0k} g_{ik} < 0.$$

Саме це є свідченням немонотонності функції на циліндрі $\Delta_{c_1 \dots c_m}$. Теорему доведено. □

Теорема 2.8. *Варіація $V(\phi)$ функції ϕ на відрізку $[0;1]$ обчислюється за формулою*

$$V(\phi) = \prod_{k=1}^{\infty} W_k, \tag{2.12}$$

де $W_k = g_{0k} + |g_{1k}| + ... + |g_{s_k-1,k}|$.

Доведення. Враховуючи, що функція $\phi(x)$ найменшого і найбільшого значення на циліндрі набуває на його кінцях, а також лему 1, яка виражає коливання функції на циліндрі, бачимо, що добуток

$$\prod_{k=1}^{m} W_k$$

виражає сумарне значення коливань функції на всіх циліндрах рангу m. Тоді граничний перехід дає варіацію функції ϕ на всьому відрізку $[0;1]$, тобто приводить до формули (2.12). $\square$

Наслідок 2.7. *Функція ϕ є функцією обмеженої варіації тоді і тільки тоді, коли збігається ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1 - W_k)$.

Дане твердження є наслідком попередньої теореми і теореми про зв'язок збіжності нескінченного добутку

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 - a_k) \text{ і ряду } \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

2.8. Один цікавий частковий випадок

Нехай $g_{0k} = q_{0k} > 0$, $g_{s_k-1,k} = q_{1k} > 0$, $q_{0k} + q_{1k} = 1$; $g_{ik} = 0$ при $0 \neq i \neq s_k - 1$, $\forall k \in N$. Тоді $\delta_{0k} = 0$, $\delta_{ik} = q_{0k}$, при $i \neq 0$. У цьому випадку вираз (2.10) функції $\phi(x)$ набуває Q_2^*-представлення чисел.

При виконанні вказаних умов функція $\phi(x)$ є сингулярною функцією розподілу (має похідну рівну нулю майже скрізь, у розумінні міри Лебега) з аномально фрактальним спектром (множиною точок росту).

Якщо крім цього $q_{0k} = q_0$ для будь-якого $k \in N$, то вираз функції ϕ є Q_2-зображенням числа [35, 36, 83, 84, 88], а при $q_0 = \frac{1}{2}$ — класичним двійковим. Ці додаткові обмеження дозволяють суттєво спростити дослідження локальних тополого-метричних та інтегро-диференціальних властивостей функції.

2.9. Нормальні властивості чисел

Означення 2.1. Властивість V елементів множини E називається *нормальною* [65, 72], якщо нею володіють «майже всі» (в тому чи іншому математичному сенсі) елементи цієї множини.

Цю термінологію використовують в переважній більшості тоді, коли множина E нескінченна, а словосполучення «майже всі» — розуміють в сенсі потужності, міри або категорій Бера.

Початок досліджень нормальних властивостей чисел поклав Е. Борель [5, 91], ввівши поняття нормального числа у s-ковій системі числення та абсолютно нормального числа.

Ціле століття математики вивчають нормальні властивості чисел в тій чи іншій системі кодування (зображення):

1. Q_s-зображення [35, 36, 83, 84, 88], Q_s^*-зображення [26, 29, 70], $\widetilde{Q}$-зображення [34, 71, 81].
2. G_2-зображення [22, 23, 31].
3. Зображення чисел додатними та знакозмінними рядами Люрота [48, 94], Енгеля [4, 51], Сільвестера, Остроградського [61, 62], Перрона [58], Остроградського-Серпінського-Пірса [53, 50].
4. Зображення чисел елементарними ланцюговими дробами та ланцюговими A_s-дробами [28, 33, 78].
5. Та інше.

Висновки до розділу 2

У цьому розділі розглянуто одну з канторівських систем зображення чисел, послідовність основ якої визначається класичною послідовністю Фібоначчі [54]. Вивчено специфіку цієї системи, її геометрію і розв'язано кілька метричних задач. А також у ньому розглянуто застосування цієї системи у теорії локально складних неперервних функцій, серед яких функції обмеженої та необмеженої варіації, монотонні та ніде не монотонні функції, функції з непростими диференціальними властивостями.

Основними результатами цього розділу є теореми 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.7, 2.8 та наслідки з них 2.1, 2.2, 2.7. Вони опубліковані у роботі [53].

РОЗДІЛ 3
$\widetilde{Q}$-ЗОБРАЖЕННЯ І ТЕОРІЯ ФРАКТАЛІВ

У теорії неперервних локально складних функцій з фрактальними властивостями [65], зокрема сингулярних, неперервних ніде не монотонних, включаючи недиференційовні, функцій обмеженої та необмеженої варіації, існують методологічні труднощі у їх ефективному заданні та дослідженні. Найбільш дієвим, на наш погляд, є підхід використання різних систем кодування чисел і автоматів перетворення цифр зображення аргумента в цифри зображення значення функції [7, 52, 71, 90]. При цьому одним з простих способів означення функції є прийом інверсування цифр зображення аргумента [26, 88]. На цьому шляху було описано кілька класів функцій і вивчено їх структурні, диференціальні, варіаційні та фрактальні властивості. Серед них функції, визначені у термінах різних узагальнень та аналогів класичного двійкового зображення, а також функції, означені в термінах ланцюгових дробів (елементарних, A_2-дробів та дробів Данжуа) [28, 72]. У цій роботі ми продовжуємо дослідження, розширюючи класи розглянутих функцій.

3.1. Система $\tilde{Q}$-зображення дійсних чисел як узагальнення канторівських систем числення

Нехай (m_k) — фіксована послідовність натуральних чисел,

$$A_k \equiv \{0, 1, 2, ..., m_k\}$$

— послідовність алфавітів, $L \equiv A_1 \times A_2 \times ...$ — простір (множина) послідовностей елементів алфавітів; $(q_{0k}, ..., q_{m_k k})$ — послідовність додатних векторів-стовпців $(k = 1, 2, ...)$ таких, що:

1) $0 < q_{ik} < 1$;
2) $\sum\limits_{i=0}^{m_k} q_{ik} = 1$, $k \in N$;
3) для будь-якої послідовності $(i_n) \in L$ має місце
$$\prod_{n=1}^{\infty} q_{i_n n} = 0 \Leftrightarrow \prod_{n=1}^{\infty} \max_i\{q_{in}\} = 0.$$

Відомо [71], що для довільного числа $x_0 \in [0;1]$ існує послідовність $(i_k) \in L$ така, що

$$x_0 = a_{i_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty}[a_{i_k k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{i_j(x_0)j}] \equiv \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots}, \tag{3.1}$$

де $a_{i_k k} = \sum\limits_{s=0}^{i_k - 1} q_{sk}$.

Подання числа x_0 у вигляді ряду (3.1) називається його *$\tilde{Q}$-представленням*, його скороченний запис $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots}$ – *$\tilde{Q}$-зображенням*, i_k – *k-ою цифрою* цього зображення.

Розклад числа x в ряд (3.1) і обчислення цифр $\widetilde{Q}$-зображення числа здійснюється за наступним алгоритмом:
$x_0 = a_{i_1 1} + x_1$, де $0 \leqslant x_1 \equiv x_0 - a_{i_1 1} \leqslant q_{i_1 1}$, $x_{n-1} = a_{i_n n} \prod\limits_{j=1}^{n-1} q_{i_j j} + x_n$, де $0 \leqslant x_n \equiv x_{n-1} - a_{i_n n} \prod\limits_{j=1}^{n-1} q_{i_j j} \leqslant \prod\limits_{j=1}^{n} q_{i_j j}$;
$i_1 = \{j : a_{i_1 1} \leqslant x_0 < a_{i_1+1,1},\}$ $i_n = \{j : a_{i_n n} \prod\limits_{k=1}^{n-1} q_{i_k k} \leqslant x_{n-1} \leqslant a_{n+1,n} \prod\limits_{k=1}^{n-1} q_{i_k k}\}$.

Існують числа, що мають два $\tilde{Q}$-зображення, оскільки

$$\Delta_{i_1 \ldots i_{n-1} i_n (0)} = \Delta_{i_1 \ldots i_{n-1} [i_n - 1] m_{n+1} m_{n+2} m_{n+3} \ldots}.$$

Вони називаються *$\tilde{Q}$-бінарними.* Решта чисел мають єдине $\tilde{Q}$-зображення. Вони називаються *$\tilde{Q}$-унарними.* Множина всіх $\tilde{Q}$-бінарних чисел є *зліченною, всюди щільною у відрізку* $[0;1]$.

Якщо $m_k + 1 = s$ для будь-якого $k \in N$, то $\widetilde{Q}$-зображення є Q_s^*-зображення чисел, якщо ж при цьому $q_{ik} = \frac{1}{s}$ для довільного $i \in A_k$, $k \in N$, то $\widetilde{Q}$-зображення є *класичним s-ковим зображенням чисел відрізка* $[0;1]$. Випадок $q_{ik} = \frac{1}{s_k}$ для будь-якого $i \in A_k$ приводить до класичної канторівської системи числення [90], у якій розклад числа в ряд набуває вигляду:

$$x = \frac{\alpha_1}{s_1} + \frac{\alpha_2}{s_1 s_2} + ... + \frac{\alpha_k}{s_1 s_2 ... s_k} + ...$$

Таким чином, $\widetilde{Q}$-кодування ($\widetilde{Q}$-зображення) чисел є *узагальненням канторівської системи числення* з послідовністю основ ($s_k = m_k + 1$).

Зауважимо, що $\widetilde{Q}$-зображення забезпечує суттєво ширші можливості для конструювання математичних об'єктів (множин, функцій, мір, динамічних систем, перетворень простору) з локально складними властивостями структурного, варіаційного, диференцально-інтегрального та фрактального змісту.

3.2. Геометрія $\widetilde{Q}$-зображення: $\widetilde{Q}$-циліндри та їх застосування

Геометрію $\widetilde{Q}$-зображення достатньо повно розкривають властивості циліндрів. Нагадаємо, що циліндром рангу m з основою $c_1 ... c_m$ називається *множина* $\Delta_{c_1...c_m}$ *чисел одиничного відрізка*, перші m цифр $\widetilde{Q}$-зображення яких збігаються з $c_1 ... c_m$ відповідно, тобто

$$\Delta_{c_1...c_m} = \{x = \Delta_{c_1...c_m i_1 ... i_n ...}, (i_n) \in L\}. \tag{3.2}$$

Циліндри ($\widetilde{Q}$-циліндри) мають властивості:

1) $\Delta_{c_1 c_2 ... c_k} = \bigcup\limits_{i=0}^{m_{k+1}} \Delta_{c_1 c_2 ... c_k i}$;

   $[0; 1] = \bigcup\limits_{c_1=0}^{m_1} ... \bigcup\limits_{c_k=0}^{m_k} \Delta_{c_1 ... c_k}$;

2) $\widetilde{Q}$-циліндр $\Delta_{c_1 c_2 ... c_m}$ є відрізком з кінцями a і b:

$$a = a_{i_1 1} + \sum_{k=1}^{m} (a_{c_k k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j j}), \ b = a + \prod_{j=1}^{m} q_{c_j j};$$

3) $\max \Delta_{c_1 c_2 ... c_{k-1} i} = \min \Delta_{c_1 c_2 ... c_{k-1} [i+1]}$, $i \in \{0, 1, ..., m_k\}$;

4) $\Delta_{c_1 ... c_k} = \Delta_{d_1 ... d_k} \ \Leftrightarrow c_i = d_i$, $i = \overline{1, k}$;

5) $\nabla_{c_1\ldots c_k} \cap \nabla_{d_1\ldots d_k \ldots d_n} =$
$= \begin{cases} \Delta_{d_1\ldots d_k\ldots d_n}, \text{ якщо } d_i = c_i, i = \overline{1,k} \\ \varnothing, \text{ якщо } d_i \neq c_i \text{ при } i < k, \end{cases}$ де $\nabla_{c_1\ldots c_k}$ — внутрішність циліндра $\Delta_{c_1\ldots c_k}$;

6) $|\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_k}| = \prod\limits_{i=1}^{k} q_{c_i i}$;

7) $\frac{|\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_{k-1} i}|}{|\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_{k-1}}|} = q_{ik}$;

8) $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Delta_{c_1 c_2 \ldots c_k} = \Delta_{c_1 c_2 \ldots c_k \ldots} = x$.

Останню властивість забезпечує умова 3) для матриці $||q_{ik}||$.

3.3. Множини канторівського типу

Розглядається множина

$$C = C[\widetilde{Q}; V_n] = \{x : x = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}, \alpha_n \in V_n \subset A_n\}.$$

Лема 3.1. *Якщо нерівність $V_n \neq A_n$ виконується лише скінченну кількість разів, то множина C є об'єднанням відрізків і є досконалою ніде не щільною множиною у протилежному випадку.*

Доведення. Якщо $V_n = A_n$ для всіх $n \geqslant n_0$, то множина C є об'єднанням $\widetilde{Q}$-циліндрів рангу n_0. Якщо ж $V_{n_k} = A_{n_k}$ і $j_k \in A_{n_k} \setminus V_{n_k}$, то $\nabla_{c_1\ldots c_{n_k-1} j_k} \cap$ $\cap\, C = \varnothing$. Тому в кожному як завгодно малому інтервалі (u, v) легко вказати йому належний $\widetilde{Q}$-циліндр, а в ньому циліндр серед внутрішніх точок якого немає точок множини C. Отже, C — ніде не щільна згідно з означенням. Лему доведено. □

Лема 3.2. *Міра Лебега множини C обчислюється за формулою*
$\lambda(C) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_n)}{\lambda(F_{n-1})} = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\overline{F}_n)}{\lambda(\overline{F_{n-1}})}\right)$,
де $F_0 = [0;1]$, F_n — об'єднання $\widetilde{Q}$-циліндрів рангу n, серед внутрішніх точок яких є точки множини C,

$$\overline{F}_n \equiv F_{n-1} \setminus F_n.$$

Доведення. Очевидно, що $C \subset F_k \subset F_{k-1}$ для будь-якого $k \in N$,

$$C = \lim_{k\to\infty} F_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k; \quad \lambda(C) = \lim_{k\to\infty} \lambda(F_k).$$

Тоді $\lambda(C) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})} \cdot \frac{\lambda(F_{k-1})}{\lambda(F_{k-2})} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda(F_1)}{\lambda(F_0)} = \lim\limits_{k\to\infty} \prod\limits_{n=1}^{k} \frac{\lambda(F_n)}{\lambda(F_{n-1})} = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_n)}{\lambda(F_{n-1})}$.
Оскільки $F_n = F_{n-1} \setminus \overline{F}_n$, то

$$\lambda(C) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_{n-1}) - \lambda(\overline{F}_n)}{\lambda(F_{n-1})} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\overline{F}_n)}{F_{n-1}}\right).$$

Лему доведено. □

Наслідок 3.1. $\lambda(C) = 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(\overline{F}_n)}{\lambda(F_{n-1})} = \infty$.

Це твердження випливає з відомого факту про взаємозв'язок збіжності нескінченних добутків і рядів.

Наслідок 3.2. *Якщо послідовність (m_k) є обмеженою, $\tau > 0$ і нескінченну кількість разів виконується нерівність $V_n \neq A_n$, то $\lambda(C) = 0$.*

3.4. Нормальна властивість чисел

Лема 3.3. *Якщо послідовність (m_k) є сталою, $\tau > 0$ і $d_1 ... d_m$ — фіксований набір цифр, то міра Лебега множини*

$D[\widetilde{Q}, \overline{d_1 ... d_m}] = \{x = \Delta_{\alpha_1 ... \alpha_n ...}, \overline{\alpha_k ... \alpha_{k+m}} = \overline{d_1 ... d_m} \quad \forall k \in N\}$ дорівнює нулю.

Доведення. Очевидно, що $\nabla_{d_1 ... d_m} \cap D = \varnothing$. Розглянемо множину чисел $D_0 = \{x = \Delta_{[i_1 ... i_m][i_{m+1} ... i_{2m}] ...}, \overline{i_{km+1} ... i_{[k+1]m}} \neq \overline{d_1 ... d_m}\}$.

Очевидно, що $D \subset D_0$. Покажемо, що $\lambda(D_0) = 0$. Нехай E_n — це об'єднання $\widetilde{Q}$-циліндрів рангу m, серед внутрішніх точок яких є точки множини D_0, $E_0 = [0; 1]$, $\overline{E}_n = E_{n-1} \setminus E_n$. Тоді $D_0 \subset E_n \subset E_{n-1}$,
$D_0 = \lim\limits_{n\to\infty} E_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, $\lambda(D_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda(E_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{\lambda(E_k)}{\lambda(E_{k-1})} = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(E_k)}{\lambda(E_{k-1})} =$
$= \prod\limits_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{\lambda(\overline{E}_k)}{\lambda(E_{k-1})})$.

Оскільки $\lambda(D_0) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\overline{E}_k)}{\lambda(E_{k-1})} = \infty$.

Із-за відокремленості елементів матриці $||q_{ik}||$ від нуля маємо, що

$$\frac{\lambda(\overline{E}_k)}{\lambda(E_{k-1})} > \varepsilon > 0$$

для деякого ε.

Тому вказаний ряд є розбіжним, а отже, $\lambda(D_0) = 0$. Лему доведено. □

Наслідок 3.3. *При виконанні умов леми множина*

$$D_1 = \{x = \Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \ldots}, \alpha_k \ldots \alpha_{k+m} \neq d_1 \ldots d_m \textit{ для } k \geqslant k_0\}$$

має нульову міру Лебега.

Теорема 3.1. *Якщо послідовність* (m_k) *є сталою* $(m_k = s-1)$ *і* $\tau > 0$, *то майже всі (у розумінні міри Лебега) числа відрізка* $[0;1]$ *у своїх* $\widetilde{Q}$-*зображеннях довільно вибраний набір цифр* $c_1 \ldots c_m$ *містять нескінченну кількість разів.*

Доведення. Якщо E — множина чисел, у $\widetilde{Q}$-зображеннях яких набір цифр $c_1 \ldots c_m$ в якості послідовних цифр зображення фігурує лише скінченну кількість разів, то згідно з попередньою лемою $\lambda(E) = 0$. Тоді множина $H \equiv [0;1] \setminus E$ є множиною повної міри, тобто $\lambda(H) = 1$. Теорему доведено. □

3.5. Застосування: розподіли випадкових величин

Лема 3.4. *Якщо* X *— випадкова величина, рівномірно розподілена на відрізку* $[0;1]$, *то цифри її* $\widetilde{Q}$–*зображення є незалежними випадковими величинами, які мають розподіли* $P\{\tau_k = i\} = q_{ik}$.

Доведення. Оскільки X — рівномірно розподілена випадкова величина на $[0;1]$, то $P\{\tau_1 = i\} = |\Delta_i| = q_{i1}$,

$P\{\tau_k = i\} = P\{X \in \bigcup\limits_{i_1=0}^{m_1} \ldots \bigcup\limits_{i_{k-1}=0}^{m_{k-1}} \Delta_{i_1 \ldots i_{k-1} i}\} = = \sum\limits_{i_1=0}^{m_1} \ldots \sum\limits_{i_{k-1}=0}^{m_{k-1}} |\Delta_{i_1 \ldots i_{k-1} i}| = q_{ik}$.

Незалежність цифр τ_k очевидна, оскільки
$P\{\tau_k = i/\tau_1 = i_1, ..., \tau_{k-1} = i_{k-1}\} = P\{\tau_k = i\}$. Лему доведено. $\square$

Нехай (ζ_n) — послідовність незалежних випадкових величин, які мають розподіли:

$P\{\zeta_n = i\} = p_{in} \geqslant 0$, $i = \overline{0, m_n}$, $n \in N$; $M \equiv \prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_i \{p_{in}\}$, $L \equiv \lambda(C_+)$, $C_+ \equiv C[\widetilde{Q}, V_n] = \{x = \Delta_{i_1 \ldots i_n \ldots}, p_{i_n n} > 0, n \in N\}$.

Теорема 3.2. *Якщо $M > 0$, то розподіл випадкової величини $\zeta = \Delta_{\zeta_1 \zeta_2 \ldots \zeta_n \ldots}$ є дискретним. Якщо $M = 0 = L$, то він є сингулярним розподілом канторівського типу.*

Доведення. Якщо $\Delta_{c_1 \ldots c_n \ldots} = x_0$ — $\widetilde{Q}$-унарна точка, то $P\{\zeta = x_0\} = P\{\zeta_n = c_n,\ n \in N\} = \prod\limits_{n=1}^{\infty} p_{c_n n}$.

Якщо x_0 — $\widetilde{Q}$-бінарна точка, тобто $x_0 = \Delta_{c_1 \ldots c_k (0)} = \Delta_{c_1 \ldots c_{k-1} [c_k - 1](m_{k+n})}$, то $P\{\zeta = x_0\} = P\{\zeta_1 = c_1, ..., \zeta_k = c_k, \zeta_{k+1} = 0 = \zeta_{k+n}\ \forall n \in N\} + P\{\zeta_1 = c_1, ..., \zeta_k = c_k, \zeta_{k+1} = m_{k+1}, \zeta_{k+2} = m_{k+2}, ...\}$, причому один з доданків останньої суми рівний 0.

Враховуючи сказане, при умові $M > 0$ $P\{\zeta = x_*\} > 0$, $x_* = \Delta_{c_1 \ldots c_n \ldots}$, $p_{e_k k} = \max\limits_i \{p_{ik}\}$. Тоді атомами розподілу випадкової величини ζ є всі точки x, $\widetilde{Q}$-зображення яких лише скінченною кількістю цифр відрізняються від відповідних цифр $\widetilde{Q}$-зображення x_*.

Оскільки сума всіх атомів розподілу ζ дорівнює 1, то ζ при умові $M > 0$ має чисто дискретний розподіл.

Якщо $M = 0$, то $P\{\zeta = x_0\} \leqslant P\{\zeta = x_*\} = 0$, а отже, розподіл ζ є неперервним. Але, будучи зосередженим при $L = 0$ на ніде не щільній множині канторівського типу, яка має міру Лебега 0 (згідно з лемою 3.2), ξ має сингулярний розподіл канторівського типу. Теорему доведено. $\square$

3.6. Застосування у теорії фракталів

Лема 3.5. *Якщо $\tau > 0$ і послідовність (m_k) обмежена зверху, причому $\max\{m_k\} = M$, то для довільного відрізка $u \subset [0;1]$ існує не більш $b = 2M^p$, де p — найменше натуральне число, що задовольняє нерівність $\xi^p \leqslant \tau$, $\widetilde{Q}$-циліндрів, які покривають u і мають довжину не більшу довжини u.*

Доведення. Якщо відрізок u сам є $\widetilde{Q}$-циліндром, то достатньо одного циліндра для покриття u, яке задовольняє вказані умови. Якщо це не так, то існує циліндр $\Delta_{c_1...c_k}$ мінімального рангу k, який цілком належить відрізку u, тобто жоден циліндр $(k-1)$-го рангу не є підмножиною u. Тоді існує два $\widetilde{Q}$-циліндри ω_0 і ω_1 рангу $(k-1)$, об'єднання яких містить u (але не має гарантії, що їх діаметри менші $|u|$). Нехай $\max \omega_0 = \min \omega_1$, $u_0 = \omega_0 \cap u$, $u_1 = \omega_1 \cap u$. Одному з відрізів u_0 та u_1 належить циліндр $\Delta_{c_1...c_k}$.

Проведемо загальні міркування стосовно відрізка u_0, незважаючи на те, чи належить йому циліндр $\Delta_{c_1...c_k}$ чи ні. Для відрізка u_1 вони аналогічні.

Очевидно, що існує $\widetilde{Q}$-циліндр $\Delta_{b_1...b_n m_{n+1}}$ мінімального рангу $n+1$, який цілком належить u_0 (у частинному випадку це міг бути циліндр $\Delta_{c_1...c_k}$), тобто жоден з циліндрів рангу n не належить u_0 цілком. Тоді циліндр $\Delta_{b_1...b_n}$ покриває u_0. Він є об'єднанням $\widetilde{Q}$-циліндрів рангу $(m+p)$, їх кількість є добутком $m_{n+1} \cdot m_{n+2} \cdot ... \cdot m_{n+p} \leqslant M^p$.

Оскільки $\xi^p \leqslant \tau$, то кожен з цих циліндрів рангу $(n+p)$ має довжину, що не перевищує довжини циліндра $\Delta_{b_1...b_n m_{n+1}}$, а отже, і довжини u_0. Таким чином, для покриття u_0 достатньо не більше ніж M^p $\widetilde{Q}$-циліндрів. Такої ж кількості циліндрів достатньо для покриття відрізка u_1. Лему доведено. □

Теорема 3.3. *Якщо E — довільна підножина відрізка $[0;1]$, $W_{\widetilde{Q}}$ — множина всіх $\widetilde{Q}$-циліндрів скінченного рангу, то число*

$$\alpha_* = \inf\{\alpha : \hat{H}^\alpha(E) = 0\} = \sup\{\alpha : \hat{H}^\alpha(E) = \infty\},$$

де $\hat{H}^{\alpha}(E)=\sup\limits_{\varepsilon>0}\{\inf\limits_{|\omega_i|\leqslant\varepsilon}\sum\limits_{i}|\omega_i|^{\alpha}:E\subset\bigcup\limits_{i}\omega_i,\omega_i\in W_{\widetilde{Q}}\}$, *дорівнює фрактальній розмірності Гаусдорфа-Безиковича множини* E.

Доведення. Покажемо, що для довільної множини $E\subset[0;1]$ виконується

$$m_{\varepsilon}^{\alpha}(E)\leqslant l_{\varepsilon}^{\alpha}(E)\leqslant 2M^{p}m_{\varepsilon}^{\alpha}(E),$$

де $m_{\varepsilon}^{\alpha}(E)=\inf\limits_{|u_i|\leqslant\varepsilon}\{\sum\limits_{i}|u_i|^{\alpha}:\bigcup u_i\supset E\}$, $l_{\varepsilon}^{\alpha}(E)=\inf\limits_{|\omega_i|\leqslant\varepsilon}\{\sum\limits_{i}|\omega_i|^{\alpha}:\bigcup u_i\supset E\}$.

Ліва нерівність є очевидною, оскільки клас покриттів, які беруть участь у конструкції m_{ε}^{α} ширший, ніж клас покриттів $\widetilde{Q}$-циліндрами.

Права нерівність випливає з леми 3.5.

Справді, нехай $\bigcup u_i$ — довільне ε-покриття множини E відрізками, $\sum|u_i|^{\alpha}$ — α-об'єм цього покриття.

Згідно з попередньою лемою існує покриття $\bigcup\omega_i$ відрізка $2M^p$ циліндрами з довжинами, що не перевищують $|u|$ отримуємо покриття з α-об'ємом $2m^p\sum\limits_{i}|u_i|$.

Отже, $\sum\limits_{i}|\omega_i|^{\alpha}\leqslant 2M^p\sum\limits_{i}|u_i|^{\alpha}$ і $l_{\varepsilon}^{\alpha}(E)\leqslant 2M^pm_{\varepsilon}^{\alpha}(E)$.

Виконавши граничний перехід по $\varepsilon\to 0$, маємо

$$H^{\alpha}(E)\leqslant\hat{H}^{\alpha}(E)\leqslant 2M^{p}H^{\alpha}(E).$$

Звідки бачимо, що $\hat{H}^{\alpha}(E)$ і $H^{\alpha}(E)$ одночасно перетворюються в нуль та нескінченність, а отже, фрактальна розмірність Гаусдорфа-Безиковича $\alpha_0(E)$ дорівнює числу α_*. Теорему доведено. □

Теорема 3.3 є важливою для теорії перетворень, що зберігають фрактальну розмірність [1].

3.7. Основний об'єкт дослідження

Розглядається функція, означена рівністю

$$I(x=\Delta_{i_1\ldots i_n\ldots})=\Delta_{[m_1-i_1]\ldots[m_n-i_n]\ldots}.\tag{3.3}$$

Функція I, визначена рівністю (3.3), є коректно означеною, оскільки для $k \in N$ має місце

$$I(\Delta_{i_1 \ldots i_n(0)}) = \Delta_{[m_1-i_1]\ldots[m_n-i_n](m_{n+k})} = \Delta_{[m_1-i_1]\ldots[m_n-i_n+1](0)} = I(\Delta_{i_1\ldots[i_n-1](m_{n+k})}).$$

Лема 3.6. *Інверсор I цифр $\widetilde{Q}$-зображення чисел є неперервною строго спадною функцією на* $[0;1]$.

Доведення. Для доведення неперервності функції I в точці x_0 покажемо, що виконується рівність

$$\lim_{x_n \to x_0} |I(x_n) - I(x_0)| = 0 \tag{3.4}$$

у $\widetilde{Q}$-бінарних і $\widetilde{Q}$-унарних точках. Нехай $x_0 = \Delta_{i_1 \ldots i_{n-1} i_n \ldots}$ — довільна $\widetilde{Q}$-унарна точка області визначення. Виберемо в якості послідовності $x_n = \Delta_{i_1 \ldots i_{n-1} i'_n \ldots}$, де $i_n \neq i'_n$. Тоді $x_n \to x_0 \Leftrightarrow n \to \infty$.

Оскільки $I(x_0) = I(\Delta_{i_1 \ldots i_{n-1} i_n \ldots}) = \Delta_{[m_1-i_1]\ldots[m_{n-1}-i_{n-1}][m_n-i_n]\ldots}$;
$I(x_n) = I(\Delta_{i_1 \ldots i_{n-1} i'_n \ldots}) = \Delta_{[m_1-i_1]\ldots[m_{n-1}-i_{n-1}][m_n-i'_n]\ldots}$, то очевидно, що
$\lim\limits_{x_n \to x_0} |I(x_n) - I(x_0)| = \lim\limits_{n \to \infty} |\Delta_{[m_1-i_1]\ldots[m_{n-1}-i_{n-1}][m_n-i'_n]\ldots} -$
$- \Delta_{[m_1-i_1]\ldots[m_{n-1}-i_{n-1}][m_n-i_n]\ldots}| = 0.$

Отже, функція I є неперервною на множині $\widetilde{Q}$-унарних чисел. Неперервність функції на множині $\widetilde{Q}$-бінарних чисел є наслідком коректності означення функції.

Покажемо, що функція є строго спадною на всій області визначення. Розглянемо $x_1 = \Delta_{i_1 \ldots i_{k-1} i_k \ldots} < x_2 = \Delta_{i_1 \ldots i_{k-1} i'_k \ldots}$, причому $i_k(x_1) < i'_k(x_2)$ і якщо $i_k(x+1) = i'_k(x_1) - 1$, то існує $n \in N$ таке, що $(i_{k+n}(x_1); i_{k+n}(x_2)) \neq \neq (m_{k+n}; 0)$.

Тоді
$I(x_1 = \Delta_{i_1 \ldots i_{k-1} i_k \ldots}) - I(x_1 = \Delta_{i_1 \ldots i_{k-1} i'_k \ldots}) = \Delta_{[m_1-i_1]\ldots[m_{k-1}-i_{k-1}][m_k-i_k]\ldots} -$
$- \Delta_{[m_1-i_1]\ldots[m_{k-1}-i_{k-1}][m_k-i'_k]\ldots}.$
Звідки маємо, що $m_k - i_k > m_k - i'_k$. Оскільки відповідні цифри значення функції перебувають у відношенні більше, то $I(x_1) > I(x_2)$. Причому

$I(x_1) = I(x_2)$ лише, тоді коли $m_k - i_k = m_k - i'_k + 1$ і $(m_{k+n} - i_{k+n}(x_1); (m_{k+n} - i_{k+n}(x_2)) = (0; m_{k+n})$ для будь-якого $n \in N$, що суперечить тому, що $x_1 \neq x_2$. Отже, функція $I(x)$ є строго монотонною, причому строго спадною. □

3.8. Дифренціальні властивості функції

Лема 3.7. *Якщо для елементів матриці $||q_{ik}||$ виконуються рівності*

$$q_{i_n n} = q_{[m_n - i_n]n}, \; n \in N, \tag{3.5}$$

то

$$a_{m_n - i_n} = 1 - a_{i_n + 1}, \; n \in N. \tag{3.6}$$

Доведення. Справді, має місце ряд перетворень

$$\begin{aligned} a_{m_k - i_k} =& q_{0k} + q_{1k} + ... + q_{[m_k - i_k - 1]k} = q_{m_k k} + q_{[m_k - 1]k} + ... + q_{[i_k + 1]k} = \\ =& 1 - (q_{0k} + q_{1k} + ... + q_{i k}) = 1 - a_{i_k + 1}, \end{aligned}$$

оскільки виконуються $q_{i_k k} = q_{[m_k - i_k]k}$, $k \in N$. □

Теорема 3.4. *Інверсор є лінійною функцією $I(x) = 1 - x$ тоді і тільки тоді, коли для елементів матриці $||q_{ik}||$ виконуються рівності $q_{i_n n} = q_{[m_n - i_n]n}$, $\forall n \in N$.*

Доведення. Доведемо спочатку, що коли мають місце рівності (3.5), то $I(x) = 1 - x$. Нехай мають місце рівності (3.5), тоді згідно з попередньому лемою мають місце ряд перетворень

$$\begin{aligned} I(x) = I(\Delta_{i_1 i_2 i_3 ...}) &= a_{m_1 - i_1} + a_{m_2 - i_2} q_{[m_1 - i_1]1} + a_{m_3 - i_3} q_{[m_1 - i_1]1} q_{[m_2 - i_2]2} + ... = \\ &= 1 - a_{i_1 + 1} + (1 - a_{i_2 + 1}) q_{i_1 1} + (1 - a_{i_3 + 1}) q_{i_1 1} q_{i_2 2} + ... = \\ &= 1 - a_{i_1} - q_{i_1 1} + (1 - a_{i_2} - q_{i_2 2}) q_{i_1 1} + (1 - a_{i_3} - q_{i_3 3}) q_{i_1 1} q_{i_2 2} + ... = \\ &= 1 - a_{i_1} - q_{i_1 1} + q_{i_1 1} - a_{i_2} q_{i_1 1} - q_{i_1 1} q_{i_2 2} + q_{i_1 1} q_{i_2 2} - \\ &- a_{i_2} q_{i_1 1} q_{i_2 2} - q_{i_1 1} q_{i_2 2} q_{i_3 3} - ... = 1 - a_{i_1} - a_{i_2} q_{i_1 1} - a_{i_3} q_{i_1 1} q_{i_2 2} - ... = 1 - x. \end{aligned}$$

Тепер покажемо, що коли $I(x)=1-x$, то мають місце рівності (3.5). Розглянемо вираз

$$I(x=\Delta_{i_1i_2i_3\ldots})=\Delta_{[m_1-i_1][m_2-i_2][m_3-i_3]\ldots}=a_{m_1-i_1}+a_{m_2-i_2}q_{[m_1-i_1]1}+$$
$$+a_{m_3-i_3}q_{[m_1-i_1]1}q_{[m_2-i_2]2}+\ldots=(1-q_{[m_1-i_1]1}-q_{[m_1-i_1+1]1}-\ldots-q_{m_11})+$$
$$+(1-q_{[m_2-i_2]2}-q_{[m_2-i_2+1]2}-\ldots-q_{m_22})\cdot q_{[m_1-i_1]1}+$$
$$+(1-q_{[m_3-i_3]3}-q_{[m_3-i_3+1]3}-\ldots-q_{m_33})\cdot q_{[m_1-i_1]1}q_{[m_2-i_2]2}+\ldots=$$
$$=1-q_{[m_1-i_1]1}-q_{[m_1-i_1+1]1}-\ldots-q_{m_11}+q_{[m_1-i_1]1}-$$
$$-(q_{[m_2-i_2]2}+q_{[m_2-i_2+1]2}+\ldots+q_{m_22})\cdot q_{[m_1-i_1]1}+q_{[m_1-i_1]1}q_{[m_2-i_2]2}-$$
$$-(q_{[m_3-i_3]3}+q_{[m_3-i_3+1]3}+\ldots+q_{m_33})\cdot q_{[m_1-i_1]1}q_{[m_2-i_2]2}+\ldots,$$

і вираз

$$I(x=\Delta_{i_1i_2i_3\ldots})=1-\Delta_{i_1i_2i_3\ldots}=1-a_{i_1}-a_{i_2}q_{i_11}-\ldots=$$
$$=1-(q_{01}+q_{11}+\ldots+q_{[i_1-1]1})-(q_{02}+q_{12}+\ldots q_{[i_2-1]2})q_{i_11}-$$
$$-(q_{03}+q_{13}+\ldots q_{[i_3-1]3})q_{i_11}q_{i_22}-\ldots$$

оскільки дана рівність виконується для будь-якого $i_n\in A_n$, то одночасно мають місце рівності:

$1-q_{[m_1-i_1+1]1}-\ldots-q_{m_11}=1-(q_{01}+q_{11}+\ldots+q_{[i_1-1]1})$,

$(q_{[m_2-i_2+1]2}+\ldots+q_{m_22})q_{[m_1-i_1]1}=(q_{02}+q_{12}+\ldots+q_{[i_2-1]2})q_{i_11}$,

$(q_{[m_3-i_3+1]3}+\ldots+q_{m_33})q_{[m_1-i_1]1}q_{[m_2-i_2]2}=(q_{03}+q_{13}+\ldots+q_{[i_3-1]3})q_{i_11}q_{i_22}$,

і т.д.

Звідки $q_{[m_1-i_1]1}=q_{i_11}$, $q_{[m_2-i_2]2}=q_{i_22}$, ..., що й треба було довести. □

Лема 3.8. *Якщо для елементів матриці $||q_{ik}||$ мають місце рівності*

$$\begin{cases} q_{[m_1-i_1]1}\neq q_{i_11}, \\ q_{[m_n-i_n]n}=q_{i_nn}, n=2,3,\ldots, \end{cases} \tag{3.7}$$

то функція є лінійною на циліндрах 1-го рангу, тобто функцією виду

$$I(x)=a_{m_1-i_1(x)+1}-\frac{q_{[m_1-i_1(x)]1}}{q_{i_1(x)1}}(x-a_{i_1(x)}).$$

Доведення. Справді, оскільки мають місце ряд рівностей

$$I(x=\Delta_{i_1 i_2 i_3 \ldots}) = a_{m_1-i_1} + a_{m_2-i_2} q_{[m_1-i_1]1} + \ldots =$$
$$= a_{m_1-i_1} + (1 - a_{i_2} - q_{i_2 2}) q_{[m_1-i_1]1} + \ldots = a_{m_1-i_1} + q_{[m_1-i_1]1} -$$
$$- a_{i_2 2} q_{[m_1-i_1]1} - q_{[m_1-i_1]1} q_{i_2 2} + \ldots = a_{m_1-i_1+1} - \frac{q_{[m_1-i_1]1}}{q_{i_1 1}}(-a_{i_1} + a_{i_1} + a_{i_2} q_{i_1 1} + \ldots) =$$
$$= a_{m_1-i_1+1} - \frac{q_{[m_1-i_1]1}}{q_{i_1 1}}(x - a_{i_1}),$$

то очевидно, що функція $I(x)$ за умови виконання рівностей (3.7) є лінійною на кожному циліндрі першого рангу. □

Наслідок 3.4. *Якщо для елементів матриці $||q_{ik}||$ виконуються рівності*

$$\begin{cases} q_{[m_k-i_k]1} \neq q_{i_k k}, \ k = \overline{1, 2, \ldots, n-1} \\ q_{[m_n-i_n]n} = q_{i_n n}, 1 \neq n \in N, \end{cases} \tag{3.8}$$

то інверсор $I(x)$ є кусково-лінійною функцією, причому лінійною на циліндрах $(n-1)$-го рангу $I(x) = \sum\limits_{k=1}^{n-2} a_{m_k-i_k} \prod\limits_{j=1}^{k-1} q_{[m_j-i_j]} + a_{m_{n-1}-i_{n-1}+1} \prod\limits_{j=1}^{n-2} q_{[m_j-i_j]j} + \prod\limits_{j=1}^{n-1} \frac{q_{[m_j-i_j]j}}{q_{i_j j}}(x - \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_{i_k} \prod\limits_{j=1}^{k-1} q_{i_j j})$.

Лема 3.9. *Якщо в $\widetilde{Q}$-унарній точці $x_0 = \Delta_{i_1 \ldots i_n \ldots}$ існує похідна $I'(x_0)$ функції I, то вона може бути знайдена за формулою*

$$I'(x_0) = -\prod_{n=1}^{\infty} \frac{q_{[m_n-i_n]n}}{q_{i_n n}}. \tag{3.9}$$

Твердження випливає з теореми 3.11.1 з [72], оскільки у випадку існування похідної

$$I'(x_0) = -\lim_{n\to\infty} \frac{|\Delta_{[m_1-i_1]\ldots[m_n-i_n]}|}{|\Delta_{i_1 \ldots i_n}|}.$$

Теорема 3.5. *Якщо послідовність (m_k) є сталою $(m_k = m)$ і $\lim\limits_{k\to\infty} q_{ik} = q_i$, $i = \overline{0, m}$, причому існує таке s, що $q_s \neq \frac{1}{m+1}$, то функція має похідну рівну нулю майже скрізь, тобто є сингулярною.*

Доведення. Оскільки функція I є монотонною, то майже в усіх точках відрізка $[0;1]$ вона згідно з відомою теоремою Лебега має скінченну похідну. Множину таких точок позначимо через E. Множина H всіх точок, які у своїх $\widetilde{Q}$-зображеннях цифру s використовують нескінченну кількість рядів, є множиною повної міри Лебега.

Тоді множина $W = R \cap H$ є множиною повної міри Лебега. Якщо $x \in W$, то $I'(x_0) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{q_{[m_n - i_n]n}}{q_{i_n n}} = 0$, оскільки необхідна умова збіжності нескінченного добутку (прямування його n-го члена до 1) не виконується, то він збігається до скінченного числа 0. Отже, $I'(x) = 0$ майже скрізь, що і вимагалося довести. □

3.9. Фрактальні властивості функції I

Далі розглядається випадок, коли послідовність (m_k) є сталою. Нехай для елементів матриці $||q_{ik}||$ для деякого $k \in N$ і довільного $n \in N$ мають місце рівності:

$$q_{i,k(n-1)+j} = g_{ij}, j = \overline{1,k}. \tag{3.10}$$

Розглянемо функцію, визначенну рівністю:

$$\omega^k(\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1} \ldots i_n \ldots}) = \Delta_{i_{k+1} i_{k+2} \ldots i_{n-k} \ldots}. \tag{3.11}$$

Функція ω^k не є коректно означеною для чисел, що мають два $\widetilde{Q}$-зображення ($\widetilde{Q}$-бінарних чисел), оскільки має місце рівність:

$$\omega^k(\Delta_{i_1 \ldots i_k (0)}) = \Delta_{(0)} \neq \omega^k(\Delta_{i_1 \ldots [i_k - 1](m_{n+k})}) = \Delta_{m_{k+1} m_{k+2} \ldots}.$$

Задля коректності означення функції ω^k домовимося надалі використовувати лише одне із двох існуючих $\widetilde{Q}$-бінарних зображень числа, а саме те, що містить 0 в періоді.

Функція ω^k у випадку, коли мають місце рівності (3.10) називається *оператором лівостороннього зсуву* цифр $\widetilde{Q}$-зображення.

Зауважимо, що коли для матриці $\widetilde{Q}$-зображення хоча б одна з умов (3.10) не виконується, то аргумент і значення функції ω^k мають різні $\widetilde{Q}$-зображення.

Лема 3.10. *Функція ω^k аналітично виражається:*

$$\omega^k(x = \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1}\ldots}) = \prod_{j=1}^{k} q_{i_j j}^{-1}\left(x - \sum_{m=1}^{k}\left(a_{i_m m}\prod_{j=2}^{m-1} q_{i_j j}\right)\right). \tag{3.12}$$

Вона є кусково-лінійною, причому лінійною на кожному циліндрі k-го рангу.

Доведення. Розглянемо ряд перетворень

$$x = \Delta_{i_1(x) i_2(x) \ldots i_k(x) i_{k+1}(x)\ldots} = \sum_{m=1}^{k}\left(a_{i_m m}\prod_{j=2}^{m-1} q_{i_j j}\right) +$$
$$+ \sum_{k=m+1}^{\infty}\left(a_{i_m m}\prod_{j=2}^{m-1} q_{i_j j}\right) = \sum_{m=1}^{k}\left(a_{i_m m}\prod_{j=2}^{m-1} q_{i_j j}\right) + \prod_{j=1}^{k} q_{i_j j}\cdot$$
$$\cdot\left[\sum_{k=m+1}^{\infty}\left(a_{i_m m}\prod_{j=k+1}^{m-1} q_{i_j j}\right)\right] = \sum_{m=1}^{k}\left(a_{i_m m}\prod_{j=2}^{m-1} q_{i_j j}\right) + \omega(x)\prod_{j=1}^{k} q_{i_j j}(x).$$

Звідси маємо, що

$$\omega^k(x) = \frac{x - \sum\limits_{m=1}^{k}(a_{i_m m(x)}\prod\limits_{j=2}^{m-1} q_{i_j j}(x))}{\prod\limits_{j=1}^{k} q_{i_j j(x)}},$$

а тому має місце формула (3.12).

Оскільки вирази $\prod\limits_{j=1}^{k} q_{i_j j}^{-1}(x)$ і

$$\sum_{m=1}^{k}(a_{i_m}(x)\prod_{j=2}^{m-1} q_{i_j j}(x))$$

залежать від цифр $i_1(x)$, $i_2(x)$,..., $i_k(x)$ і не залежать від усіх решти цифр аргумента, то на кожному циліндрі $\Delta_{i_1(x) i_(x)\ldots i_k(x)}$ рангу k вирази набувають сталих значень, а тому функція $\omega^k(x)$ на кожному такому циліндрі є лінійною і в усій області визначення кусково-лінійною. □

Розглядається функція $\delta_{e_1e_2...e_k}$, означена рівністю:

$$\delta_{e_1...e_k}(x=\Delta_{i_1i_2...i_n...})=\Delta_{e_1...e_ki_1i_2...i_n...}. \tag{3.13}$$

Функція $\delta_{e_1e_2...e_k}$ є коректно означеною для чисел, що мають два $\widetilde{Q}$-зображення.

Функція $\delta_{e_1e_2...e_k}$ у випадку, коли мають місце рівності (3.10) називається *оператором правостороннього зсуву* цифр $\widetilde{Q}$-зображення.

Зауважимо, що коли для матриці $\widetilde{Q}$-зображення хоча б одна з умов (3.10) не виконується, то аргумент і значення функції $\delta_{e_1e_2...e_k}$ мають різні $\widetilde{Q}$-зображення.

Лема 3.11. *Функція $\delta_{e_1...e_k}$ аналітично виражається:*

$$\delta_{e_1...e_k}(x=\Delta_{i_1...i_n...})=x\prod_{j=1}^{k}q_{e_jj}+\sum_{m=1}^{k}\left(a_{e_m}\prod_{j=2}^{m-1}q_{e_jj}\right). \tag{3.14}$$

Вона є лінійною, строго зростаючою на всій області визначення.

Доведення. Розглянемо ряд перетворень

$$\delta_{e_1e_2...e_k}(x=\Delta_{i_1i_2...i_n...})=\Delta_{e_1e_2...e_ki_1i_2...i_n...}=\sum_{m=1}^{k}\left(a_{e_m}\prod_{j=2}^{m-1}q_{e_jj}\right)+$$

$$+\sum_{k=m+1}^{\infty}\left(a_{i_m}\prod_{j=2}^{m-1}q_{i_jj}\right)=$$

$$=\sum_{m=1}^{k}\left(a_{e_m}\prod_{j=2}^{m-1}q_{e_jj}\right)+\prod_{j=1}^{k}q_{e_jj}\cdot\left[\sum_{k=m+1}^{\infty}\left(a_{i_m}(x)\prod_{j=k+1}^{m-1}q_{i_jj}(x)\right)\right]=$$

$$=\sum_{m=1}^{k}\left(a_{e_m}\prod_{j=2}^{m-1}q_{e_jj}\right)+\prod_{j=1}^{k}q_{e_jj}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{i_m}(x)\prod_{j=k+1}^{m-1}q_{i_jj}(x)\right)\right]=$$

$$=\sum_{m=1}^{k}\left(a_{e_m}\prod_{j=2}^{m-1}q_{e_jj}\right)+x\prod_{j=1}^{k}q_{e_jj}.$$

Оскільки вираз функції $\delta_{e_1e_2...e_k}$ має вигляд $\delta_{e_1e_2...e_k}(x)=Ax+B$, де значення $A=\prod\limits_{j=1}^{k}q_{e_jj}=Const>0$, $B=\sum\limits_{m=1}^{k}\left(a_{e_m}\prod\limits_{j=2}^{m-1}q_{e_jj}\right)=Const$ при фіксованому наборі $e_1e_2...e_k$, то $\delta_{e_1e_2...e_k}$ є строго зростаючою лінійною функцією. □

Теорема 3.6. *Якщо послідовність* (m_n) *є сталою* $(m_n = m)$ *і матриця* $||q_{ik}||$*, що визначає* $\widetilde{Q}$*-зображення, є періодичною, а саме виконуються рівності* $q_{i,k(n-1)+j} = g_{ij}, j = \overline{1,k}$ *для деякого фіксованого натурального* k *і всіх* $n \in N$*, то графік* Γ *функції* I *є самоафінною множиною з самоафінною структурою* $\Gamma = \bigcup\limits_{e_1=0}^{m_1} ... \bigcup\limits_{e_k=0}^{m_k} \Gamma_{e_1...e_k}, e_k \in N^0_{m_k}$*, де*
$\Gamma_{e_1...e_k} = f_{e_1...e_k}(\Gamma) = \{(x;y) \in R^2 : x = \Delta_{e_1...e_k i_1...i_n...}, y = I(x)\}$,

$$f_{e_1...e_k} : \begin{cases} x' = \delta_{e_1...e_k}(\Delta_{i_1 i_2 ... i_n ...}), \\ y' = \delta_{[m_1-e_1]...[m_n-e_n]}(\Delta_{[m_1-i_1][m_2-i_2]...}), \end{cases} \qquad (e_1...e_k) \in A_1 \times ... \times A_k.$$

Загальна схема обгрнутування аналогічна до доведення цього факту для Q_2^*-зображення [26].

Наслідок 3.5. *Самоафінна розмірність графіка* Γ *функції* I *є розв'язком рівняння*

$$\sum_{e_1=0}^{m_1} ... \sum_{e_k=0}^{m_k} \left(\prod_{j=1}^{k} (q_{e_j j} q_{[m_j - e_j] j})^{\frac{x}{2}} \right) = 1. \tag{3.15}$$

Справді, оскільки $\Gamma_{e_1 e_2 ... e_k} \overset{f_{e_1 e_2 ... e_k}}{\to} \Gamma$, де $f_{e_1...e_k}$ — афінне перетворення, що задається формулами

$$\begin{cases} x' = x \prod\limits_{j=1}^{k} q_{e_j j} + \sum\limits_{t=1}^{k} \left(a_{e_t} \prod\limits_{j=2}^{t-1} q_{e_j j} \right), \\ y' = y \prod\limits_{j=1}^{k} q_{[m_j - e_j] j} + \sum\limits_{t=1}^{k} \left(a_{[m_t - e_t]} \prod\limits_{j=2}^{t-1} q_{[m_j - e_j] j} \right), \end{cases}$$

то згідно з означенням розмірності самоафінної множини маємо рівняння (3.15).

Висновки до розділу 3

У цьому розділі встановлено зв'язок між $\widetilde{Q}$-зображенням чисел та канторівськими зображеннями (ці зображення існували і розвивались незалежно). Перше з них уводилось в дослідження як узагальнення Q^*-зображення. Як виявилося, воно є також узагальненням канторівських зображень. $\widetilde{Q}$-зображення у цьому розділі використане у задачах метричної теорії чисел і теорії сингулярних розподілів випадкових величин, вказано застосування у теорії фракталів. Основними результатами цього розділу є властивості неперервної строго спадної автомодельної функції, означеної за допомогою інверсування цифр $\widetilde{Q}$-зображення (теореми 3.4, 3.5). Основним твердженням є критерій її сингулярності, доведення якого грунтується на нормальних властивостях чисел за їх $\widetilde{Q}$-зображеннями. При додаткових умовах для параметрів задання матриці основного об'єкту встановлена структурна фрактальність графіка інверсора (теорема 3.6).

Основні результати цього розділу опубліковані в роботі [75].

РОЗДІЛ 4
B–ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

У цьому розділі обґрунтовується система кодування чисел інтервалу (0;1), алфавітом якої є множина всіх цілих чисел (B-зображення). Ця система є, взагалі кажучи, мультиосновною, але в окремих випадках вона може бути дво- або одноосновною (Ф-зображення). Тут ми вивчаємо геометрію B-зображення чисел, оператори лівостороннього та правостороннього зсувів цифр B-зображення, а також неперервні перетворення інтервалу (0;1), які зберігають хвости B-зображення чисел, розв'язуємо метричні задачі.

4.1. Означення B–зображення чисел

Нехай $A = Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ — алфавіт (набір цифр), $L = A \times A \times ...$ — простір послідовностей елементів алфавіту; (Θ_n) — послідовність додатних дійсних чисел ($n \in Z$) така, що

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_{-n} \equiv u < 1,\ 0 < \sum_{n=0}^{+\infty} \Theta_n \equiv v < 1,\ u + v = 1.$$

Прикладами таких двосторонніх послідовностей (Θ_n) є:

1) $\Theta_0 = \frac{1-3a}{1-a}$, $\Theta_{-n} = \Theta_n = a^n$, де параметр a задовольняє нерівності $0 < a < \frac{1}{3}$, $n \in N$;
2) $\Theta_{-n} = 2^{-(n+1)}, \Theta_0 = \frac{1}{3}, \Theta_n = 3^{-(n+1)}, n \in N.$
3) $a_0 = \frac{1}{2 \cdot 3}, a_n = \frac{1}{(2+n)(3+n)}.$

Сформуємо іншу двосторонню послідовність (b_n), визначену послідовністю (Θ_n), а саме

$$b_n \equiv \sum_{i=-\infty}^{n-1} \Theta_i = b_{n-1} + \Theta_{n-1}.$$

Теорема 4.1. *Для будь-якого числа $x \in (0;1)$ існує єдиний скінченний набір цілих чисел $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$ або єдина послідовність $(\alpha_n) \in L$ такі, що виконується одна з рівностей*

$$x = b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{m} b_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{\alpha_i} \equiv \Delta^B_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_m(\varnothing)}, \tag{4.1}$$

$$x = b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} b_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{\alpha_i} \equiv \Delta^B_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k...}. \tag{4.2}$$

Доведення. І с н у в а н н я. Оскільки

$$(0;1) = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} [b_n; b_{n+1}),$$

то очевидно, що існує $\alpha_1 \in A$ таке, що $b_{\alpha_1} \leqslant x < b_{\alpha_1+1}$.

Якщо $x = b_{\alpha_1}$, то отримано розклад (4.1) і $x = \triangle^B_{\alpha_1(\varnothing)}$. Якщо $x \neq b_{\alpha_1}$, тобто $b_{\alpha_1} < x < b_{\alpha_1+1}$, то $0 < x - b_{\alpha_1} \equiv x_1 < b_{\alpha_1+1} - b_{\alpha_1} = \Theta_{\alpha_1}$ і $x = b_{\alpha_1} + x_1$.

Розглянемо число $x_1 \in (0; \Theta_{\alpha_1})$. Оскільки

$$(0; \Theta_{\alpha_1}) = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} [b_n\Theta_{\alpha_1}; b_{n+1}\Theta_{\alpha_1}),$$

то очевидно, що існує $\alpha_2 \in A$ таке, що $b_{\alpha_2}\Theta_{\alpha_1} \leqslant x_1 < b_{\alpha_2+1}\Theta_{\alpha_1}$.

Якщо $x_1 = b_{\alpha_2}\Theta_{\alpha_1}$, то $x = b_{\alpha_1} + x_1 = b_{\alpha_1} + b_{\alpha_2}\Theta_{\alpha_1} = \triangle^B_{\alpha_1\alpha_2(\varnothing)}$.

Якщо $x_1 \neq b_{\alpha_2}\Theta_{\alpha_1}$, тобто $b_{\alpha_2}\Theta_{\alpha_1} < x_1 < b_{\alpha_2+1}\Theta_{\alpha_1}$, то

$$0 < x_1 - b_{\alpha_2}\Theta_{\alpha_1} \equiv x_2 < b_{\alpha_2+1}\Theta_{\alpha_1} - b_{\alpha_2}\Theta_{\alpha_1} = \Theta_{\alpha_2}\Theta_{\alpha_1} \text{ і } x_1 = b_{\alpha_2}\Theta_{\alpha_1} + x_2.$$

Далі аналогічні міркування продовжуємо стосовно числа x_2.

Оскільки

$$x_2 \in (0; \Theta_{\alpha_1}\Theta_{\alpha_2}) = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} [b_n\Theta_{\alpha_1}\Theta_{\alpha_2}; b_{n+1}\Theta_{\alpha_1}\Theta_{\alpha_2}),$$

то існує $\alpha_3 \in A$ таке, що $b_{\alpha_3}\Theta_{\alpha_1}\Theta_{\alpha_2} \leqslant x_2 < b_{\alpha_3+1}\Theta_{\alpha_1}\Theta_{\alpha_2}$.

Якщо $x_2 = b_{\alpha_3}\Theta_{\alpha_1}\Theta_{\alpha_2}$, то

$x = b_{\alpha_1} + x_1 = b_{\alpha_1} + b_{\alpha_2}\Theta_{\alpha_1} + x_2 = b_{\alpha_1} + b_{\alpha_2}\Theta_{\alpha_1} + b_{\alpha_3}\Theta_{\alpha_1}\Theta_{\alpha_2} = \Delta^B_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3(\varnothing)}$.

Якщо ж $x_2 \neq b_{\alpha_3}\Theta_{\alpha_1}\Theta_{\alpha_2}$, то $0 \leqslant x_2 - b_{\alpha_3}\Theta_{\alpha_1}\Theta_{\alpha_2} \equiv x_3 < \Theta_{\alpha_1}\Theta_{\alpha_2}\Theta_{\alpha_3}$.

Аналогічно міркуємо стосовно x_3.

Так за скінченну кількість кроків отримаємо

$$\begin{aligned} x =& b_{\alpha_1} + x_1 = b_{\alpha_1} + b_{\alpha_2}\Theta_{\alpha_1} + x_2 = \dots = \\ =& b_{\alpha_1} + b_{\alpha_2}\Theta_{\alpha_1} + b_{\alpha_3}\Theta_{\alpha_1}\Theta_{\alpha_2} + \dots + b_{\alpha_m}\Theta_{\alpha_1}\Theta_{\alpha_2}\dots\Theta_{\alpha_{m-1}} = \Delta^B_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m(\varnothing)}. \end{aligned}$$

Якщо ж при будь-якому m

$$x = b_{\alpha_1} + b_{\alpha_2}\Theta_{\alpha_1} + b_{\alpha_3}\Theta_{\alpha_1}\Theta_{\alpha_2} + \dots + b_{\alpha_m}\Theta_{\alpha_1}\Theta_{\alpha_2}\dots\Theta_{\alpha_m-1} + x_m,$$

де $x_m \neq 0$, то з того, що $\Theta_j \leqslant M \equiv \max\{\Theta_i, i \in Z\} < 1$ для будь-якого $j \in Z$ маємо

$$x_m < \prod_{i=1}^{m-1}\Theta_{\alpha_i} \leqslant M^{m-1} \to 0 (m \to 0).$$

Звідки робимо висновок про збіжність процесу розкладу числа x в суму (4.1) або ряд (4.2).

Є д и н і с т ь. Доведемо, що числа з формально різними розкладами рівними бути не можуть. Розглянемо всі можливі випадки:

1) $x_1 = \Delta^B_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}$ і $x_2 = \Delta^B_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n\dots}$,
2) $x_1 = \Delta^B_{\alpha_1\dots\alpha_m(\varnothing)}$, $x_2 = \Delta^B_{\beta_1\dots\beta_m(\varnothing)}$,
3) $x_1 = \Delta^B_{\alpha_1\dots\alpha_m(\varnothing)}$, $x_2 = \Delta^B_{\beta_1\dots\beta_m\dots\beta_k(\varnothing)}$.

У перших двох випадках можна скористатися спільними міркуваннями. Нехай 1). Оскільки їхні зображення формально різні, то існує m таке, що $\alpha_m \neq \beta_m$, але $\alpha_i = \beta_i$, коли $i < m$. Ради конкретності, нехай $\alpha_m < \beta_m$.

Розглянемо різницю $x_2 - x_1 = C\prod\limits_{i=1}^{m-1}\Theta_{\alpha_i}$, де

$$C \equiv b_{\beta_m} - b_{\alpha_m} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{\beta_{m+k}}\prod_{i=0}^{k-1}\Theta_{\beta_{m+i}} - \sum_{k=1}^{\infty} b_{\alpha_{m+k}}\prod_{i=0}^{k-1}\Theta_{\alpha_{m+i}}.$$

Оскільки $b_{\beta_m} - b_{\alpha_m} = \Theta_{\alpha_m} + \Theta_{\alpha_m+1} + \cdots + \Theta_{\beta_m-1} \geqslant \Theta_{\alpha_m}$,

$$0 < b_{\beta_{m+1}} \cdot \Theta_{\beta_m} < \sum_{k=1}^{\infty} b_{\beta_{m+k}} \prod_{i=0}^{k-1} \Theta_{\beta_{m+i}} < \Theta_{\beta_m} \cdot 1,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{\alpha_{m+k}} \prod_{i=0}^{k-1} \Theta_{\alpha_{m+i}} < \sum_{k=1}^{\infty} b_{\alpha_{m+k}} \prod_{i=0}^{k-1} \Theta_{\alpha_{m+i}} < \Theta_{\alpha_m} \cdot 1,$$

то

$$C \geqslant (\Theta_{\alpha_m} + \Theta_{\alpha_m+1}) + \cdots + \Theta_{\beta_m-1} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{\beta_{m+k}} \prod_{i=0}^{k-1} \Theta_{\beta_{m+i}} - \Theta_{\alpha_m} > 0.$$

Отже, $x_2 > x_1$.

У випадку 2), коли $\alpha_n < \beta_n$, але $\alpha_i = \beta_i$ при $i < n < m$, то аналогічно до випадку 1) обгрунтовується нерівність $x_1 < x_2$.

У випадку 3) можливі підвипадки. 3.1. Якщо $\alpha_i = \beta_i$ для всіх $i \leqslant m$, то

$$x_2 - x_1 = \sum_{i=m+1}^{k} b_{\beta_i} \prod_{j=1}^{i-1} \Theta_{\beta_j} > 0.$$

3.2. Нехай існує $\alpha_n \neq \beta_n$, але $\alpha_i = \beta_i$ при $i < n \leqslant m$. Розглянемо число $x_3 = \Delta^B_{\beta_1 \ldots \beta_m(\varnothing)}$. Згідно з пунктом 3.1 $x_3 < x_2$, а згідно з пунктом 2 маємо $x_1 = x_3$, тоді і лише тоді, коли $\alpha_i = \beta_i$ для всіх $i \leqslant m$. Тому при $\alpha_n < \beta_n$ маємо $x_1 < x_3 < x_2$. Нехай $\alpha_n > \beta_n$. Тоді $x_1 > x_3$. Розглянемо різницю $x_1 - x_2$. Маємо

$$x_1 - x_2 = C_1 \prod_{i=1}^{n-1} \Theta_{\alpha_i}, \text{ де}$$

$$C_1 = b_{\alpha_n} - b_{\beta_n} + \sum_{i=1}^{m} b_{\alpha_{n+i}} \prod_{j=0}^{i-1} \Theta_{\alpha_{n+j}} - \sum_{i=1}^{k} b_{\beta_{n+i}} \prod_{j=0}^{i-1} \Theta_{\beta_{n+j}}.$$

Оскільки $b_{\alpha_n} - b_{\beta_n} \geqslant \Theta_{\beta_n}$,

$$0 < b_{\alpha_{n+1}} \cdot \Theta_{\alpha_n} \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_{\alpha_{n+i}} \prod_{j=0}^{i-1} \Theta_{\alpha_{n+j}} < \Theta_{\alpha_n},$$

$$\sum_{i=1}^{k} b_{\beta_{n+i}} \prod_{j=0}^{i-1} \Theta_{\beta_{n+j}} < \Theta_{\beta_n},$$

то $C_1 > \Theta_{\beta_n} + 0 - \Theta_{\beta_n} = 0$ і $x_1 > x_2$. □

Символічний запис числа x рівністю (4.1) або (4.2) називатимемо *B-зображенням* цього числа, а $\alpha_n = \alpha_n(x)$ — n-ою його цифрою. Із-за єдиності B-зображення числа, α_n є коректно означеною функцією числа x.

Числа, для яких виконується рівність (4.1), називаються *B-скінченними*, а ті, для яких виконується рівність (4.2), – *B-нескінченними.*

Множина всіх B-скінченних чисел є зліченною, причому всюди щільною в інтервалі $(0; 1)$ множиною.

B-зображення є засобом кодування чисел інтервала $(0; 1)$, їх ідентифікації та порівняння: *числа $x = \Delta^B_{\alpha_1...\alpha_m...}$ і $y = \Delta^B_{\beta_1...\beta_m...}$ перебувають у відношенні $x < y$ тоді і лише тоді, коли існує $k \in N$ таке, що $\alpha_k < \beta_k$, але $\alpha_i = \beta_i$ при $i < k$.*

Обгрунтування цих висновків фактично міститься у доведенні єдиності теореми 4.1.

4.2. Геометрія B–зображення чисел: циліндричні та хвостові множини

Геометрію B-зображення чисел (геометричний зміст цифр, метричні відношення) достатньо повно розкривають властивості циліндричних і хвостових множин.

Означення 4.1. Множина $\Delta^B_{c_1...c_m}$ чисел $x \in (0; 1)$, що мають скінченне або нескінченне B-зображення з першими m-цифрами $c_1, c_2, ..., c_m$ відповідно, тобто

$$\Delta^B_{c_1...c_m} = \{x : x = \Delta^B_{c_1...c_m\alpha_{m+1}...\alpha_n(\varnothing)}, x = \Delta^B_{c_1...c_m\beta_1\beta_2...}, (\beta_n) \in L\},$$

називається *B-циліндром рангу m з основою $c_1c_2...c_m$.*

0. Безпосередньо з означення випливає рівність: $\Delta^B_{c_1...c_m} = \bigcup\limits_{i=-\infty}^{\infty} \Delta^B_{c_1...c_m i}$.

1. Порядок слідування циліндрів визначається рівністю

$$\sup \Delta^B_{c_1\ldots c_{m-1}c_m} = \min \Delta^B_{c_1\ldots c_{m-1}[c_m+1]}.$$

2. Циліндр $\Delta^B_{c_1\ldots c_m}$ є піввідрізком $[a;d)$ з кінцями:

$$a = b_{c_1} + \sum_{k=2}^{m} b_{c_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{c_i} = \Delta^B_{c_1\ldots c_m(\varnothing)},$$

$$d = a + \prod_{i=1}^{m} \Theta_{c_i} = \Delta^B_{c_1\ldots c_{m-1}[c_m+1](\varnothing)}.$$

3. Довжина циліндра: $|\Delta^B_{c_1\ldots c_m}| = \prod\limits_{i=1}^{m} \Theta_{c_i} \to 0$ при $m \to \infty$;
4. Основне метричне відношення: $|\Delta^B_{c_1\ldots c_m i}| = \Theta_i |\Delta^B_{c_1\ldots c_m}|$;
5. $\forall (c_m) \in L$: $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta^B_{c_1\ldots c_m} = \Delta^B_{c_1\ldots c_m\ldots}$.

B-циліндри задають систему подрібнюючих розбиттів інтервала $(0;1)$.

Означення 4.2. Кажуть, що B-зображення чисел $x = \Delta^B_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}$ і $y = \Delta^B_{\beta_1\ldots\beta_n\ldots}$ «*мають однаковий хвіст*» (символічно записують $x \backsim y$), якщо існують такі натуральні числа m і k, що $\alpha_{m+j} = \beta_{k+j}$ для будь-якого $j \in N$. Вважатимемо, що B-скінченні числа мають однаковий хвіст за означенням.

Очевидно, що відношення $\backsim$ є відношенням еквівалентності. Кожен з класів еквівалентності називається *хвостовою множиною.* Зрозуміло, що зображення всіх B-скінченних чисел належать одному класу еквівалентності, тобто мають однаковий хвіст.

Кожна хвостова множина є зліченною, всюди щільною у інтервалі $(0;1)$, а множина класів еквівалентності — континуальною. Змістовні метризації хвостових множин є однією з цікавих і важливих для теорії динамічних систем проблем.

4.3. Множини канторівського типу

Теорема 4.2. *Множина чисел* $C[B, V_n] = \{x : \alpha_n(x) \in V_n \subset Z\}$ *є ніде не щільною, якщо нескінченну кількість разів виконується нерівність* $V_n \neq Z$. *Її міра Лебега обчислюється за формулою*

$$\lambda(C) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(E_n)}{\lambda(E_{n-1})} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\overline{E}_n)}{\lambda(E_{n-1})}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - W_n), \tag{4.3}$$

де $E_0 = [0; 1)$, E_n *— об'єднання циліндрів* n*-го рангу, серед внутрішніх точок яких є точки множини* C, $\overline{E}_n \equiv E_{n-1} \setminus E_n$, $W_n \equiv \sum\limits_{i \in Z \setminus V_n} \Theta_i$.

Доведення. Оскільки $C \subset E_{n+1} \subset E_n \ \forall \ n \in N$, то

$$\lambda(C) \leqslant \lambda(E_n) = \frac{\lambda(E_n)}{\lambda(E_{n-1})} \cdot \frac{\lambda(E_{n-1})}{\lambda(E_{n-2})} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda(E_1)}{\lambda(E_0)} = \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda(E_k)}{\lambda(E_{k-1})};$$

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \lim_{n \to \infty} E_n.$$

Враховуючи вимірність множини C і неперервності міри Лебега, маємо

$$\lambda(C) = \lim_{n \to \infty} \lambda(E_n) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(E_n)}{\lambda(E_{n-1})}.$$

Оскільки $E_n = E_{n-1} \setminus \overline{E}_n$, то має місце передостання з рівностей (4.3), але $\frac{\lambda(\overline{E}_n)}{\lambda(E_{n-1})} = W_k$, а тому виконується остання з рівностей (4.3).

Для доведення ніде не щільності множини C при зазначених умовах досить показати, що у будь-якому B-циліндрі існує інтервал, що не містить точок множини C.

Розглянемо довільний циліндр $\Delta^B_{c_1 \ldots c_m}$. Якщо $V_k \neq Z$, де $k > m$, $j \in \in Z \setminus V_k$, то циліндричний інтервал $\nabla^B_{c_1 \ldots c_m \alpha_{m+1} \ldots \alpha_{m+k-1} j}$, який належить B-циліндру $\Delta^B_{c_1 \ldots c_m}$,точок множини C не містить. Це і вимагалось довести. $\square$

Наслідок 4.1. $\lambda(C) > 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} W_k < \infty$.

Теорема 4.3. *Множина канторівського типу*

$$C[B,V] = \{x : \alpha_n(x) \in V \neq Z\}$$

є N-самоподібною нуль-множиною Лебега, N-самоподібна розмірність якої збігається з фрактальною розмірністю Гаусдорфа-Безиковича і є розв'язком рівняння

$$\sum_{i \in V} \Theta_i^x = 1. \tag{4.4}$$

Доведення. Оскільки

$$C = \bigcup_{i \in V}, \quad \text{де } C_i' = \Delta_i^B \cap C \quad \text{і} \quad C_i' \overset{\Theta_i}{\sim} C,$$

то множина C є N-самоподібною. Її N-самоподібна розмірність є розв'язком рівняння (4.4), існування та єдиність якого легко обгрунтовується.

Оскільки множина C задовольняє умову відкритої множини, то N-самоподібна розмірність і розмірність Гаусдорфа-Безиковича збігаються [72].

□

4.4. Нормальні властивості чисел

Теорема 4.4. *Множина чисел інтервала* $(0;1)$ *з обмеженими цифрами B-зображення має нульову міру Лебега.*

Доведення. Нехай n — довільне фіксоване натуральне число, F_n — множина всіх чисел $(0;1)$, B-цифри яких належать інтервалу $(-n;n)$. Згідно з теоремою (4.2) $\lambda(F_n) = 0$. Якщо

$$F \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

то

$$\lambda(F) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(F_n) = 0.$$

Оскільки кожна точка $x \in (0;1)$, множина B-цифр якої є обмеженою, очевидно належить F_n при достатньо великому n, а отже, і множині F. Тому множина таких точок має нульову міру Лебега. $\square$

Наслідок 4.2. *Для майже всіх (в розумінні міри Лебега) точок x інтервалу $(0;1)$ виконується умова*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\alpha_n(x) = \infty,$$

де $\alpha_n(x)$ — це n-та B-цифра числа x.

4.5. Оператори лівостороннього та правостороронього зсувів цифр B-зображення чисел

Оператором лівосторонього зсуву цифр B-зображення чисел називається функція ω, означена рівностями:

$$\omega(\Delta^B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^B_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots},\ \omega(\Delta^B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(\varnothing)}) = \Delta^B_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n(\varnothing)}.$$

Оскільки

$$x = b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(b_{\alpha_k}\prod_{i=1}^{k-1}\Theta_{\alpha_i}\right) = b_{\alpha_1} + \Theta_{\alpha_i}\cdot\left(b_{\alpha_2} + \sum_{k=3}^{\infty} b_{\alpha_k}\prod_{i=2}^{k-1}\Theta_{\alpha_i}\right) = b_{\alpha_1} + \Theta_{\alpha_1}\cdot\omega(x),$$

то

$$\omega(x) = \frac{1}{\Theta_{\alpha_1(x)}}\cdot x - \frac{b_{\alpha_1(x)}}{\Theta_{\alpha_1(x)}}$$

Звідки бачимо, що оператор лівостороннього зсуву є кусково-лінійною функцією, яка є лінійною і зростаючою на кожному циліндрі 1-го рангу, зокрема на циліндрі Δ^B_0, при умові, що $\Theta_0 = \frac{1-3a}{1-a}$, вона має вигляд:

$$\omega(x) = \frac{1-a}{1-3a}\cdot x - \frac{a}{1-3a}.$$

На лівому кінці кожного циліндра першого рангу оператор лівостороннього зсуву набуває нульового значення, оскільки $\omega(\Delta^B_{\alpha_1(\varnothing)}) = \Delta^B_{(\varnothing)} = 0$.

Оператором n-кратного лівостороннього зсуву називається функція, означена рівністю

$$y = \omega^n(x) = \omega(\omega^{n-1}(x)).$$

Оператор n-кратного лівостороннього зсуву є кусково-лінійною функцією, причому лінійною на кожному B-циліндрі n-го рангу.

Оператором правостороннього зсуву цифр B-зображення з параметром $i \in Z$ називається функція δ_i, означена рівностями:

$$\delta_i(x = \Delta^B_{\alpha_1\alpha_2\ldots}) = \Delta^B_{i\alpha_1\alpha_2\ldots},\ \delta_i(x = \Delta^B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(\varnothing)}) = \Delta^B_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(\varnothing)}.$$

Коректність означення функції δ_i випливає з єдиності B-зображення чисел. Оскільки

$$\delta_i(x) = b_i + \Theta_i \cdot \left(b_{\alpha_1} + \sum_{k>1}(b_{\alpha_k}\prod_{i=1}^{k-1}\Theta_{\alpha_i})\right) = b_i + \Theta_i \cdot x,$$

то функція $\delta_i(x)$ є лінійною і зростаючою на всьому проміжку $[0;1)$, причому $\delta_i(0) = \Delta^B_{i(\varnothing)} = b_i$. Очевидними є рівності

$$\omega(\delta_i(x)) = x,\ \delta_{\alpha_1(x)}(\omega(x)) = x.$$

Рівняння $\delta_i(x) = \omega(x)$ має нескінченну множину розв'язків: $x = \Delta^B_{(ji)}$, $j \in Z$. А система рівнянь $\delta_i(x) = x = \omega(x)$ має єдиний розв'язок $x = \Delta^B_{(i)}$.

Функцію $\delta_{i_1i_2\ldots i_m}(x)$ означимо рівністю

$$\delta_{i_1\ldots i_m}(x = \Delta^B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^B_{i_1\ldots i_m\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}.$$

Тоді має місце рівність

$$\delta_{i_1\ldots i_m}(x) = \delta_{i_1} + \sum_{k=2}^{m} b_{i_k}\prod_{j=1}^{k-1}\Theta_{i_j} + \left(\prod_{j=1}^{k}\Theta_{i_j}\right)x,$$

з якої бачимо, що дана функція є лінійною і строго зростаючою.

4.6. Група неперервних перетворень одиничного інтервалу, які зберігають хвости зображення чисел

Нагадаємо, що перетворенням множини називається *взаємнооднозначне*, тобто *бієктивне*, відображення цієї множини на себе. Неперервні перетворення одиничного інтервалу вичерпуються строго зростаючими та строго спадними функціями, область визначення і множина значень яких співпадають з даним інтервалом.

Казатимемо, що зображення B-нескінченних чисел $x_1 = \Delta^B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ і $x_2 = \Delta^B_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}$ мають однаковий хвіст, якщо існують натуральні k і m такі, що $\alpha_{k+j} = \beta_{m+j}$ для всіх натуральних j, що символічно записується $x_1 \backsim x_2$. Вважатимемо, що усі B-скінченні числа мають однаковий хвіст.

Очевидно, що бінарне відношення „мати однаковий хвіст“ є *відношенням еквівалентності*. Кожен з класів еквівалентності за відношенням $\backsim$ називається *хвостовою множиною*. Легко бачити, хвостова множина є *зліченною*, а фактор-множина — *континуальною*.

Означення 4.3. Функцією, що зберігає хвости B-зображення чисел називають таку *функцію, для якої для будь-якого* $x \in (0;1)$ *і йому відповідного значення* $f(x)$ *виконується умова* $x \sim f(x)$*, тобто існують такі номери* k *і* m*, що* $\alpha_{n+i}(x) = \alpha_{m+i}(f(x))$*,* $i \in N$.

Очевидно, що оператори лівостороннього та правостороннього зсувів є *функціями, що зберігіають хвости* B*-зображення чисел.*

Теорема 4.5. *Множина* G *всіх неперервних бієкцій (перетворень) інтервала* $(0;1)$ *в* $(0;1)$*, які зберігають хвости* B*-зображення чисел, відносно операції „композиція перетворень“ утворюють нескінченну некомутативну групу (групу неперервних перетворень, що зберігають хвости* B*-зображення чисел).*

Доведення. Замкненість множини G відносно операції „композиція перетворень“ очевидна. Також очевидно, що обернене перетворення теж зберігає хвости. Враховуючи те, що тотожне перетворення зберігає хвости B-зображення чисел, для доведення теореми досить навести приклад нетривіального перетворення, залежного від натурального параметра i, яке зберігає хвости і двох перетворень, які не комутують. Зліченна множина неперервних перетворень, які зберігають хвости, задається наступною рівністю

$$f_i(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \leqslant x_1 \equiv \Delta^B_{(0)}, \\ \omega(x), & \text{якщо } x_1 \leqslant x \leqslant x_2 \equiv \Delta^B_{(0i)}, i \in N, \\ \delta_i(x), & \text{якщо } x_2 \leqslant x \leqslant x_3 \equiv \Delta^B_{(i)}, \\ x, & \text{якщо } x \geqslant x_3. \end{cases}$$

Для обгрунтування некомутативності групи G досить розглянути наступний приклад.

$$f_1(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \leqslant x_1 \equiv \Delta^B_{(0)}, \\ \omega(x), & \text{якщо } x_1 \leqslant x \leqslant x_2 \equiv \Delta^B_{(01)}, \\ \delta_1(x), & \text{якщо } x_2 \leqslant x \leqslant x_3 \equiv \Delta^B_{(1)}, \\ x, & \text{якщо } x \geqslant x_3, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \leqslant x_1 \equiv \Delta^B_{(0)}, \\ \omega^2(x), & \text{якщо } x_1 \leqslant x \leqslant x_2 \equiv \Delta^B_{(011)}, \\ \delta_1(x), & \text{якщо } x_2 \leqslant x \leqslant x_3 \equiv \Delta^B_{(1)}, \\ x, & \text{якщо } x \geqslant x_3. \end{cases}$$

$$f_2(f_1(\Delta^B_{(010)})) = f_2(\omega(\Delta^B_{(010)})) = f_2(\Delta^B_{10(010)}) = \delta_1(\Delta^B_{10(010)}) = \Delta^B_{110(010)},$$
$$f_1(f_2(\Delta^B_{(010)})) = f_1(\omega^2(\Delta^B_{(010)})) = f_1(\Delta^B_{0(010)}) = \omega(\Delta^B_{0(010)}) = \Delta^B_{(010)}.$$

Звідки бачимо, що перетворення f_1 і f_2 не комутують. □

Групи неперервних перетворень, що зберігають хвости інших зображень, розглядались в роботі [27].

4.7. Ф–зображення чисел

Частковий випадок зображення, яке має двосторонньо нескінченний алфавіт, було розглянуто в роботі Фещенка Олексія Юрійовича [38, 93], яка присвячена проблемам теорії ймовірностей, а саме сингулярним розподілам ймовірностей.

Унікальним випадком B-зображення є зображення, визначене однією основою $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.62$ — золоте відношення, яка є додатним коренем рівняння $x^2 + x - 1 = 0$. Тому

$$\tau = 1 - \tau^2 > 0, \tau^2 = 1 - \tau, \tau + 1 = \frac{1}{\tau}, \tau = \frac{1}{\tau} - 1;$$

$$\tau^3 = \tau(1-\tau) = \tau - \tau^2 = \tau - (1-\tau) = 2\tau - 1;$$

$$\tau^4 = \tau\tau^3 = \tau(2\tau - 1) = 2\tau^2 - \tau = 2(1-\tau) - \tau = 2 - 3\tau;$$

$$\tau^5 = \tau\tau^4 = \tau(2 - 3\tau) = 2\tau - 3\tau^2 = 2\tau - 3(1-\tau) = 5\tau - 3;$$

$$\tau^6 = \tau\tau^5 = \tau(5\tau - 3) = 5\tau^2 - 3\tau = 5(1-\tau) - 3\tau = 5 - 8\tau;$$

$$\tau^7 = \tau\tau^6 = \tau(5 - 8\tau) = 5\tau - 8\tau^2 = 5\tau - 8(1-\tau) = 13\tau - 8;$$

$$\tau^8 = \tau\tau^7 = \tau(13\tau - 8) = 13\tau^2 - 8\tau = 13(1-\tau) - 8\tau = 13 - 21\tau;$$

$$\tau^9 = \tau\tau^8 = \tau(13 - 21\tau) = 13\tau - 21\tau^2 = 13\tau - 21(1-\tau) = 34\tau - 21;$$

$$\tau^{10} = \tau\tau^9 = \tau(34\tau - 21) = 34\tau^2 - 21\tau = 34(1-\tau) - 21\tau = 34 - 55\tau;$$

$$\tau^{2k+1} = u_{2k+1}\tau - u_{2k};$$

$$\tau^{2k} = u_{2k-1} - u_{2k}\tau,$$

де (u_n)— n-й член класичної послідовності Фібоначчі: $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Тоді

$$\tau^3 + 2\tau^4 + 2\tau^5 + \cdots + 2\tau^n + \cdots = \tau^3 + \frac{2\tau^4}{1-\tau} = 1;$$

$$\tau^3 + \tau^4 + \tau^5 + \cdots + \tau^n + \cdots = \frac{\tau^3}{1-\tau} = \frac{\tau^3}{\tau^2} = \tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \sum_{n=0}^{-\infty} \tau^{3-n};$$

$$\tau^4+\tau^5+\cdots+\tau^n+\cdots=\frac{\tau^4}{1-\tau}=\frac{\tau^4}{\tau^2}=\tau^2=1-\tau=\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\tau^{3+n};$$

$$1=\sum_{n=-\infty}^{0}\tau^{3-n}+\sum_{n=1}^{\infty}\tau^{3+n}\equiv\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\tau^{3+|n|},$$

$$\Phi=\{\dots,\tau^n,\dots,\tau^5,\tau^4,\tau^3,\tau^4,\tau^5,\dots,\tau^n,\dots\},$$

Двосторонню послідовність Θ_n визначимо симетричною, поклавши

$$\Theta_n=\Theta_{-n}=\tau^{3+|n|}.$$

Нехай

$$b_n\equiv\sum_{i=-\infty}^{n-1}\Theta_i.$$

Тоді $b_{n+1}=b_n+\Theta_n$ і

$$b_n=\begin{cases}\tau^{2-n}, & \text{якщо } n\leqslant 0,\\ 1-\tau^{n+1}, & \text{якщо } n\geqslant 0,\end{cases}$$

Зокрема, $b_0=\tau^2=1-\tau$.

Легко бачити, що

$$0<b_{n-1}<b_n<b_{n+1}<1,\forall n\in Z.$$

Означення 4.4. Розклад числа x в суму

$$x=b_{\alpha_1}+\sum_{k=2}^{m}\left(b_{\alpha_k}\prod_{i=1}^{k-1}\Theta_{\alpha_i}\right)=b_{\alpha_1}+\sum_{k=2}^{m}\left(b_{\alpha_k}\tau^{3(k-1)+\sum\limits_{i=1}^{k-1}|\alpha_i|}\right)\equiv\Delta^{\Phi}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m(\varnothing)}$$

або в ряд

$$x=b_{\alpha_1}+\sum_{k=2}^{\infty}\left(b_{\alpha_k}\prod_{i=1}^{k-1}\Theta_{\alpha_i}\right)=b_{\alpha_1}+\sum_{k=2}^{m}\left(b_{\alpha_k}\tau^{3(k-1)+\sum\limits_{i=1}^{k-1}|\alpha_i|}\right)\equiv\Delta^{\Phi}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$$

називається *його Φ-представленням*, а символічний запис $\Delta^{\Phi}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m(\varnothing)}$ або $\Delta^{\Phi}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}$ — *його Φ-зображенням (скінченним або нескінченним відповідно)*. При цьому α_n називається *n-ою цифрою* цього Φ-зображення.

З єдиності Ф-зображення випливає, що цифра $\alpha_n = \alpha_n(x)$ Ф-зображення числа x є коректно означеною функцією числа, що зображається.

Означення 4.5. Множина $\Delta^{\Phi}_{c_1...c_m}$ всіх чисел $x \in (0;1)$, що мають скінченне або нескінченне Ф-зображення з першими m-цифрами $c_1, c_2, ..., c_m$ відповідно, тобто

$$\Delta^{\Phi}_{c_1...c_m} = \{x : x = \Delta^{\Phi}_{c_1...c_m\alpha_{m+1}...\alpha_n(\varnothing)} \text{ або } x = \Delta^{\Phi}_{c_1...c_m\beta_1\beta_2...}, (\alpha_{m+i}) \in A, (\beta_n) \in L\}$$

називається *циліндром рангу m з основою $c_1c_2...c_m$*.

0. Безпосередньо з означення випливають властивості циліндрів:

$$\Delta^{\Phi}_{c_1...c_m i} \subset \Delta^{\Phi}_{c_1...c_m}; \Delta^{\Phi}_{c_1...c_m} = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} \Delta^{\Phi}_{c_1...c_m i}.$$

1. Порядок слідування циліндрів визначається рівністю

$$\sup \Delta^{\Phi}_{c_1...c_{m-1}c_m} = \min \Delta^{\Phi}_{c_1...c_{m-1}[c_m+1]}.$$

2. Циліндр $\Delta^{\Phi}_{c_1...c_m}$ є піввідрізком $[a; d)$ з кінцями:

$$a = b_{c_1} + \sum_{k=2}^{m} b_{c_k} \tau^{3(k-1)+\sum\limits_{i=1}^{k-1}|c_i|} = \Delta^{\Phi}_{c_1...c_m(\varnothing)},$$

$$d = a + \tau^{3m+\sum\limits_{i=1}^{m}|c_i|} = \Delta^{\Phi}_{c_1...c_{m-1}[c_m+1](\varnothing)}.$$

3. Довжина циліндра: $|\Delta^{\Phi}_{c_1...c_m}| = \tau^{3m+\sum\limits_{i=1}^{m}|c_i|}$;

4. Основне метричне відношення має вигляд: $|\Delta^{\Phi}_{c_1...c_m i}| = \tau^{3+|i|}|\Delta^{\Phi}_{c_1...c_m}|$.

5. $\forall (c_m) \in L$: $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta^{\Phi}_{c_1...c_m} = \Delta^{\Phi}_{c_1...c_m...}$.

Зауважимо, що циліндри задають систему подрібнюючих розбиттів інтервала $(0;1)$ і розкривають геометрію Ф-зображення чисел.

Оператор лівостороннього зсуву Ф$-$зображення має вигляд:

$$\omega(\Delta^{\Phi}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}) = \Delta^{\Phi}_{\alpha_2\alpha_3...\alpha_n...} = \frac{1}{\Theta_{\alpha_1(x)}} \cdot x - \frac{b_{\alpha_1(x)}}{\Theta_{\alpha_1(x)}} = \tau^{-3-|\alpha_1(x)|}x - b_{\alpha_1(x)}\tau^{-3-|\alpha_1(x)|}$$

$$\omega(\Delta^{\Phi}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(\varnothing)}) = \Delta^{\Phi}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n(\varnothing)}.$$

Він є кусково-лінійною функцією, яка є лінійною на кожному циліндрі 1-го рангу, зокрема на циліндрі Δ^{Φ}_0 вона має вигляд:

$$\omega(x) = \frac{1}{\tau^3}x + \frac{\tau^2}{\tau^3} = \frac{1}{\tau^3}x + \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau^3}x + (\tau+1) = \frac{1}{(2\tau-1)}x + (\tau+1).$$

Оператор правостороннього зсуву з параметром i має вираз:

$$\delta_i(x = \Delta^{\Phi}_{\alpha_1\alpha_2\ldots}) = \Delta^{\Phi}_{i\alpha_1\alpha_2\ldots} = b_i + \Theta_i \cdot x = b_i + \tau^{3+|i|}x;$$

$$\delta_i(x = \Delta^{\Phi}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(\varnothing)}) = \Delta^{\Phi}_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(\varnothing)},$$

то функція $\delta_i(x)$ є лінійною і зростаючою на всіому інтервалі $(0;1)$.

Інверсором цифр Ф-зображення чисел називається функція I, означена рівностями:

$$I(\Delta^{\Phi}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{\Phi}_{[-\alpha_1][-\alpha_2]\ldots[-\alpha_n]\ldots},\ I(\Delta^{\Phi}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(\varnothing)}) = \Delta^{\Phi}_{[-\alpha_1][-\alpha_2]\ldots[-\alpha_n](\varnothing)}.$$

Лема 4.1. *Інверсор I цифр Ф-зображення чисел має властивості:*

1) $I(\Delta_{(0)}) = \frac{1}{2}$;
2) *є неперервною строго спадною функцією.*

Доведення. 1) Справді,

$$I(\Delta^{\Phi}_{(0)}) = b_0 + b_0\Theta_0 + b_0\Theta_0^2 + \cdots = \frac{b_0}{1-\Theta_0} = \frac{\tau^2}{1-\tau^3} = \frac{1-\tau}{1-2\tau+1} = \frac{1}{2}.$$

2) Розглянемо довільну точку $x_0 \in (0;1)$. Нехай $x_0 = \Delta^{\Phi}_{c_1c_2\ldots c_n\ldots}$, $x_0 \neq x = \Delta^{\Phi}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$. Тоді існує m таке, що $\alpha_m \neq c_m$, але $\alpha_i = c_i$, $i < m$. Тоді

$$|f(\Delta^{\Phi}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) - f(\Delta^{\Phi}_{c_1c_2\ldots{}_n\ldots})| =$$

$$= |\omega^m(x) - \omega^m(x_0)| \prod_{i=1}^{m} \Theta_{\alpha_i} \to 0\ (m \to \infty \iff x \to x_0),$$

оскільки $|\omega^m(x) - \omega^m(x_0)| < 1$.

Доведемо монотонність функції. Нехай $x_1 < x_2$ і

$$x_1 = \Delta^{\Phi}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}, \; x_2 = \Delta^{\Phi}_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n \ldots}.$$

Оскільки $x_1 < x_2$, то існує m таке, що $\alpha_m < \beta_m$ і $\alpha_j = \beta_j$ при $j < m$. Тоді

$$I(x_1) = \Delta^{\Phi}_{\gamma_1 \ldots \gamma_{m-1} \gamma_m \gamma_{m+1} \ldots}, \; I(x_2) = \Delta^{\Phi}_{\gamma_1 \ldots \gamma_{m-1} \gamma'_m \gamma'_{m+1} \ldots},$$

$\gamma_m = -\alpha_m > -\beta_m = \gamma'_{m+1}$. Тому $I(x_1) > I(x_2)$. Отже, функція I є строго спадною. $\square$

Висновки до розділу 4

У розділі 4, який є одним із основних, обґрунтовано нове мультиосновне B-зображення чисел інтервалу $(0; 1)$ з двосторонньо нескінченним алфавітом і розглянуто його частинний випадок — Ф-зображення, яке визначається однією ірраціональною основою. Описано геометричні властивості введених зображень (з'ясовано геометричний зміст цифр, описано властивості циліндричних та хвостових множин), виведено метричні співвідношення і розв'язано кілька задач про міру Лебега множин чисел з обмеженнями на вживання цифр, зокрема виведено нормальні властивості чисел за їх B-зображенням. Отримано вирази для операторів лівостороннього та правостороннього зсувів. Доведено, що множина всіх неперервних перетворень одиничного проміжка, які зберігають хвости B-зображення чисел утворюють нескінченну некомутативну групу.

Основними результати цього розділу є теореми 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 та наслідки з них 4.1, 4.2.

Всі об'єкти і результати цього розділу є новими та виносяться на захист.

Вони опубліковані у роботах [20, 74].

РОЗДІЛ 5
НЕПЕРЕРВНІ ЛОКАЛЬНО СКЛАДНІ ФУНКЦІЇ, ПОВ'ЯЗАНІ З B-ЗОБРАЖЕННЯМ ЧИСЕЛ.

У цьому розділі вважається B-зображення чисел інтервалу (0;1) фіксованим. В ньому вивчаються неперервні функції з локально складними тополого-метричними властивостями, які визначаються у термінах B-зображення аргумента. Серед них функції монотонні, ніде не монотонні і такі, що не мають проміжків монотонності, окрім проміжків сталості. Досліджуються структурні, варіаційні, інтегро-диференціальні та фрактальні властивості функцій, увага приділена і функціям канторівського типу.

5.1. Означення класу функцій

Нехай нескінченна матриця $||p_{ik}||$ $(\forall i \in Z, \forall k \in N)$ задовольняє умови:

1) $|p_{ik}| < 1$ $\forall i \in Z,\ \forall k \in N$;
2) $\sum\limits_{i \in Z} p_{ik} = 1$ $\forall k \in N$;
3) $0 < \sum\limits_{k=2}^{\infty} \prod\limits_{j=1}^{k-1} p_{i_j j} < \infty$ $\ \forall i_j \in Z$;
4) $0 < \sigma_{ik} \equiv \sum\limits_{j=-\infty}^{i-1} p_{jk} < 1$ $\forall i \in Z,\ \forall k \in N$.

Означимо функцію f на інтервалі $(0;1)$ рівностями:

$$\begin{cases} f(x = \Delta^B_{i_1 \ldots i_k \ldots}) = \sigma_{i_1 1} + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \sigma_{i_k k} \prod\limits_{j=1}^{k-1} p_{i_j j} \equiv \Delta^f_{i_1 \ldots i_k \ldots}, \\ f(x = \Delta^B_{i_1 \ldots i_m (\varnothing)}) = \sigma_{i_1 1} + \sum\limits_{k=2}^{m} \sigma_{i_k k} \prod\limits_{j=1}^{k-1} p_{i_j j} \equiv \Delta^f_{i_1 \ldots i_m (\varnothing)}. \end{cases} \tag{5.1}$$

Коректність означення функції f рівностями (5.1) є наслідком єдиності B-зображення чисел і умов 1) – 4), що гарантують збіжність ряду (5.1). Якщо

$p_{ik} = \Theta_i$ для всіх $\forall i \in Z$, $\forall k \in N$, то $f(x) = x$.

5.2. Неперервність функцій

Теорема 5.1. *Функція f, означена рівністю (5.1), неперервна в кожній точці області визначення.*

Доведення. Оскільки функція f визначена в кожній точці інтервалу $(0;1)$, то її неперервність у точці $x_0 \in (0;1)$ рівносильна рівності

$$\lim_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0.$$

1. Нехай $x_0 = \Delta^B_{c_1 \ldots c_n \ldots}$ — B-нескінченна точка, $x_0 \neq x = \Delta^B_{\alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots}$. Тоді існує $m \in N$ таке, що $\alpha_m \neq c_m$, але $\alpha_i = c_i$ при $i < m$. Розглянемо модуль різниці

$$|f(x) - f(x_0)| = |\prod_{i=1}^{m-1} p_{c_i i}||(\sigma_{\alpha_m m} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \sigma_{\alpha_k k} \prod_{j=m}^{k-1} p_{\alpha_j j} - \sigma_{c_m m} - \sum_{k=2}^{\infty} \sigma_{c_k k} \prod_{j=m}^{k-1} p_{\alpha_j j})|.$$

Оскільки вираз під останнім модулем є різницею двох чисел з інтервалу $(0;1)$, то його значенням є число, модуль якого не перевищує 1.

Враховуючи, що з умови 3) для матриці $||p_{ik}||$ випливає умова

$$\prod_{k=1}^{m-1} p_{i_k k} \to 0 (m \to \infty),\ \forall (i_k) \in L,$$

бачимо, що

$$|f(x) - f(x_0)| \to 0 \ (m \to \infty \Leftrightarrow x \to x_0).$$

Отже, функція f неперервна у точці x_0.

2. Нехай $x_0 = \Delta^B_{c_1 \ldots c_m (\varnothing)}$ — B-скінченна точка, $x \to x_0 - 0$. Для чисел $x < x_0$, достатньо близьких до x_0, маємо $x = \Delta^B_{c_1 \ldots c_{m-1} [c_m - 1] \alpha_{m+1} \alpha_{m+2} \ldots}$, причому умова $x \to x_0$ рівносильна умові $\alpha_{m+1} \to \infty$. Розглянемо різницю

$$|f(x) - f(x_0)| = |\prod_{i=1}^{m-1} p_{c_i}| \times C, \tag{5.2}$$

де $C = |\sigma_{[c_m-1]m} + p_{[c_m-1]m} \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} \sigma_{\alpha_k k} \prod\limits_{i=m}^{k-1} p_{\alpha_i i} - \sigma_{c_m m}| =$

$= |\sigma_{[c_m-1]m} + p_{[c_m-1]m}\sigma_{\alpha_{m+1}[m+1]} + p_{\alpha_m m}p_{\alpha_{m+1}[m+1]} \sum\limits_{k=m+2}^{\infty} \sigma_{\alpha_k k} \prod\limits_{i=m+1}^{k-1} p_{\alpha_i i} -$
$- \sigma_{c_m m}| \to 0$, оскільки $\sigma_{\alpha_{m+1}[m+1]} \to 1$ при $\alpha_{m+1} \to \infty$.

3. Нехай $x_0 = \Delta^B_{c_1\ldots c_m(\varnothing)}$ — B-скінченна точка,

$x \to x_0 + 0$, $x = \Delta^B_{c_1\ldots c_m \alpha_{m+1}\alpha_{m+2}\ldots}$ і $\alpha_{m+1} \to -\infty$.

Розглянемо різницю $|f(x) - f(x_0)| = |\prod\limits_{i=1}^{m} p_{c_i i}| \times C$,

де $C = |\sigma_{[c_m-1]m} + p_{[c_m-1]m} \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} \sigma_{\alpha_k k} \prod\limits_{i=m}^{k-1} p_{\alpha_i i} - \sigma_{c_m m}| =$

$= |\sigma_{[c_m-1]m} + p_{[c_m-1]m}\sigma_{\alpha_{m+1}[m+1]} + p_{\alpha_m m}p_{\alpha_{m+1}[m+1]} \sum\limits_{k=m+2}^{\infty} \sigma_{\alpha_k k} \prod\limits_{i=m+1}^{k-1} p_{\alpha_i i} -$
$- \sigma_{c_m m}| \to 0$, оскільки $\sigma_{\alpha_{m+1}[m+1]} \to 1$ при $\alpha_{m+1} \to \infty$. Отже, f неперервна у кожній точці інтервалу $(0; 1)$.

5.3. Функції канторівського типу

Множиною сталості функції називається об'єднання всіх її інтервалів сталості. *Множиною несталості функції* називається доповнення множини сталості до всієї області визначення.

Кажуть, що визначена і неперервна на проміжку функція, відмінна від константи, має канторівський тип, якщо сумарна довжина її інтервалів сталості дорівнює довжині області визначення (проміжка) [40]. Кожна функція канторівського типу є *сингулярною*, тобто *неперервною функцією*, похідна якої рівна нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега. Найпростішим прикладом такої функції є класична функція Кантора, вперше розглянута А. Лебегом.

Зауважимо, що функція канторівського типу може бути монотонною (не спадною, або не зростаючою); немонотонною і ніде не монотонною, крім проміжків сталості; мати як обмежену, так і необмежену варіацію.

Ми кажемо, що функція має *квазіканторівський тип*, якщо її множина несталості (зокрема множина точок росту для неспадних функцій) є ніде не щільною, але має додатну міру Лебега, тоді як для функцій канторівського типу вона має нульову міру Лебега.

Лема 5.1. *Якщо один із елементів матриці* $||p_{ik}||$, *а саме* $p_{cm} = 0$, *то функція* f *є сталою на кожному циліндрі* $\Delta^B_{c_1c_2\ldots c_{m-1}c}$, *де* $c_1, c_2, \ldots, c_{m-1}$ — *довільні цифри алфавіту.*

Доведення. Справді, якщо $x \in \Delta^B_{c_1\ldots c_{m-1}c} = [a, d)$, де

$$a = b_{c_1} + \sum_{k=2}^{m-1} b_{c_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{c_i} + b_c \prod_{i=1}^{m-1} \Theta_{c_i}, \; d = a + \Theta_c \prod_{i=1}^{m-1} \Theta_i,$$

то для

$$x = \Delta^B_{c_1\ldots c_{m-1}c\alpha_1\alpha_2\ldots}, \; f(x) = f(a) + 0,$$

оскільки

$$p_c \prod_{i=1}^{m-1} p_{c_i} = 0, a = \Delta^B_{c_1\ldots c_{m-1}c(\varnothing)}$$

і $f(x) = f(a)$. □

Наслідок 5.1. *Якщо в матриці* $||p_{ik}||$ *немає нулів, тобто* $p_{ik} \neq 0$ *для будь-яких* $i \in Z$, $k \in N$, *то функція* f *не має інтервалів сталості.*

Лема 5.2. *Приріст* $\mu_f(\Delta^B_{c_1\ldots c_m}) \equiv f(d) - f(a)$ *функції* f *на циліндрі* $\Delta^B_{c_1\ldots c_m} = [a; d)$ *обчислюється за формулою* $\mu_f(\Delta^B_{c_1\ldots c_m}) = \prod\limits_{i=1}^{m} p_{c_i i}$.

Доведення. Оскільки

$$a = b_{c_1} + \sum_{k=2}^{m} b_{c_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{c_i} = \Delta^B_{c_1\ldots c_m(\varnothing)}, \; d = a + \prod_{i=1}^{m} \Theta_{c_i} = \Delta^B_{c_1\ldots c_{m-1}[c_m+1](\varnothing)},$$

то враховуючи неперервність функції і те, що $\sigma_{[c_m+1]m} - \sigma_{c_m m} = p_{c_m m}$, маємо

$$f(d) - f(a) = (\prod_{i=1}^{m-1} p_{c_i i}) \left(\sigma_{[c_m+1]m} - \sigma_{c_m m}\right) = \prod_{i=1}^{m} p_{c_i i}.$$ □

Наслідок 5.2. *Якщо* $p_{c_i i} \neq 0$ *для всіх* $i \leqslant m$, *то приріст функції* f *на циліндрі* $\Delta^B_{c_1\ldots c_m}$ *є або додатним, або від'ємним, причому додатним, якщо* $\prod\limits_{i=1}^{m} p_{c_i i} > 0$, *і від'ємний в протилежному випадку.*

Наслідок 5.3. *Якщо матриця* $||p_{ik}||$ *не має від'ємних елементів, то* f *є неспадною функцією на інтервалі* $(0;1)$*, такою, що* $f(0)=0, f(1)=1$*, причому строго зростаючою, якщо матриця не містить нулів.*

Теорема 5.2. *Міра Лебега* $\lambda(S_f)$ *множини* S_f *несталості функції* f *обчислюється за формулою:*

$$\lambda(S_f)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})}=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})}\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-W_k\right), \tag{5.3}$$

де $F_0=[0;1]$*,* F_k *— це об'єднання всіх* B*-циліндрів рангу* k*, які містять циліндри вищих рангів з ненульовими приростами функції* f*,*
$\overline{F}_k \equiv F_{k-1}\setminus F_k$*,* $W_k=\sum\limits_{i:p_{ik}=0}\Theta_i$*.*

Доведення. Очевидно, що $S_f\subset F_{k+1}\subset F_k\ \forall\ k\in N$ і

$$S_f=\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k=\lim_{k\to\infty}F_k.$$

Із-за вимірності S_f і неперервності міри Лебега маємо

$$\lambda(S_f)=\lim_{k\to\infty}\lambda(F_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})}.$$

Оскільки $F_k=F_{k-1}\setminus\overline{F}_k$, то має місце передостання з рівностей (5.3), але $\frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})}=W_k$, а тому виконується остання з рівностей (5.3). □

Наслідок 5.4. $\lambda(S_f)=0\Leftrightarrow\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}W_k=\infty.$

Теорема 5.3. *Функція* f *є сингулярною функцією канторівського типу тоді і лише тоді, коли нескінченна кількість стовпців матриці* $||p_{ik}||$ *містять нулі і при цьому*

$$\sum_{k\in N}W_k=\infty.$$

Доведення. Це твердження випливає з означення функції канторівського типу, попереднього твердження і відомого взаємозв'язку між збіжністю (розбіжністю) нескінченних добутків і рядів. □

Наслідок 5.5. *Якщо $p_{i_k k} = 0$, $p_{jk} \neq 0$ при $j \neq i_k$ і $\Theta_{i_k} < \frac{1}{k^2}$ для будь-якого k, то ряд $\sum\limits_{k \in N} W_k$ збігається і f є функцією квазіканторівського типу.*

Наслідок 5.6. *Якщо всі стовпці матриці однакові, тобто $p_{ik} = p_i$ для будь-якого $k \in N$, і існує принаймі один елемент рівний нулю (нехай $p_m = 0$), то f є функцією канторівського типу.*

5.4. Розподіли значень функцій канторівського типу

Нехай $\zeta = \Delta^B_{\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_n\ldots}$ — випадкова величина з незалежними однаково розподіленими цифрами B-зображення: $P\{\zeta_n = i\} = q_i \geqslant 0, \sum\limits_{i \in Z} q_i = 1$.

Легко довести, що ζ має чистий лебегівський тип розподілу: чисто дискретний, чисто абсолютно неперервний, чисто сингулярно неперервний (загальна схема доведення цього наведена у роботі [65]), причому чисто дискретний розподіл — тоді і лише тоді, коли $\max\{q_i\} = 1$. При $\max\{q_i\} \neq 1$ розподіл ζ є чисто неперервним, причому

– рівномірним на $(0;1)$, коли $q_k = \Theta_k \ \ \forall k \in Z$,

– сингулярним розподілом канторівського, коли існує $q_i = 0$,

– сингулярним розподілом салемівського типу, якщо $q_k > 0 \ \ \forall k \in Z$ та існує $p_i \neq \Theta_i$.

Далі виключимо з розгляду випадок дискретності розподілу ζ.

Лема 5.3. *Якщо f — функція канторівського типу, а ζ — випадкова величина з незалежними однаково розподіленими цифрами B-зображення, то точка*

$$y_* = f(\Delta^B_{c_1\ldots c_{m-1}i(\varnothing)}), \text{ де } p_{c_k k} \neq 0 \neq q_{c_k}, \ \ k = \overline{1, m-1}, \ p_{im} = 0 \neq q_i, \quad (5.4)$$

є атомом розподілу випадкової величини $Y = f(\zeta)$, маса якого дорівнює значенню виразу $q_i \prod\limits_{k=1}^{m-1} q_{c_k} = P\{\zeta \in \Delta^B_{c_1\ldots c_{m-1}i}\}$.

Доведення. Якщо $p_{c_k k} \neq 0$, коли $k \in \{1, 2, ..., m-1\}$, і $p_{im} = 0$, то згідно з лемою 5.1 функція f є сталою на циліндрі $\Delta^B_{c_1 \ldots c_{m-1} i}$. Разом з цим

$$P\{\xi \in \Delta^B_{c_1 \ldots c_{m-1} i}\} = q_i \prod_{k=1}^{m-1} q_{c_k} > 0.$$

Зокрема, якщо ζ має рівномірний розподіл, то

$$P\{\zeta \in \Delta^B_{c_1 \ldots c_m i}\} = |\Delta^B_{c_1 \ldots c_m i}| = \Theta_i \prod_{j=1}^{m} \Theta_{c_j}.$$

Тоді для будь-якого $x \in \Delta^B_{c_1 \ldots c_{m-1} i}$, $f(x = \Delta^B_{c_1 \ldots c_{m-1} i(\varnothing)}) = y_*$. Тому

$$P\{Y = y_*\} = P\{\zeta \in \Delta^B_{c_1 \ldots c_{m-1} i}\} > 0.$$

Отже, y_* є атомом розподілу випадкової величини Y з вказаною масою.

□

Наслідок 5.7. *Якщо f — функція розподілу канторівського типу, а ζ — неперервна випадкова величина з незалежними однаково розподіленими цифрами B-зображення, то точковий спектр (множина атомів) випадкової величини $Y = f(\zeta)$ утворюють точки виду y_*.*

Введемо позначення $A_{0k} \equiv \{i : p_{ik} \neq 0 \neq q_i\}$, $A_{1k} \equiv \{i : p_{ik} = 0 \neq q_i\}$, $\sum\limits_{i \in A_{0k}} q_i \equiv Q_k$, $\sum\limits_{i \in A_{1k}} q_i \equiv G_k$, $k \in N$.

Теорема 5.4. *Якщо f — функція розподілу канторівського (або квазіканторівського) типу, а ζ — неперервна випадкова величина з незалежними однаково розподіленими цифрами B-зображення, причому $P\{\zeta_n = = i\} = q_i > 0, \sum\limits_{i \in Z} q_i = 1$, то випадкова величина $Y = f(\zeta)$ має чисто дискретний розподіл тоді і лише тоді, коли*

$$G \equiv \sum_{k=1}^{\infty} G_k \prod_{i=1}^{k-1} Q_i = 1, \tag{5.5}$$

$q_k = \Theta_k$ $\forall k \in Z$, атомами якого є кожна з точок виду

$$y = f(\Delta^B_{c_1 \ldots c_{m-1} i(\varnothing)}),\ \text{де}\ p_{c_k k} \neq 0 \neq q_{c_k},\ \ k = \overline{1, m-1},\ p_{im} = 0 \neq q_i, \tag{5.6}$$

маса атома якої дорівнює $q_i \prod\limits_{k=1}^{m-1} q_{c_k}$. *У решті випадків розподіл* Y *є нетривіальною сумішшю дискретного та неперервного розподілів.*

Доведення. Оскільки f — функція розподілу канторівського (квазіканторівського) типу, то вона монотонна і має нескінченну кількість B-циліндрів сталості, причому різних рангів. Із-за неперервності розподілу ζ атоми в розподілі випадкової величини Y можуть з'явитись лише за рахунок інтервалів сталості функції f. Тому розподіл випадкової величини Y має нескінченну кількість атомів згідно з лемою 5.6 лише у випадку, коли у послідовності A_{0n} нескінченна кількість непорожніх множин. І лише в тому випадку, коли сума G мас всіх атомів дорівнює 1, розподіл випадкової величини Y буде чисто дискретним, а це буде тоді, коли виконується умова (5.5).

Окремо розглянемо випадок, коли ζ має рівномірний розподіл. Якщо f — функція канторівського типу, то $q_i = \Theta_i \ \forall i \in Z$,

$$P\{\zeta \in \Delta^B_{c_1 \dots c_m i}\} = |\Delta^B_{c_1 \dots c_m i}| = \Theta_i \prod_{j=1}^{m} \Theta_{c_j}.$$

Тоді за даних умов для будь-якого $x \in \Delta^B_{c_1 \dots c_{m-1} i}$, $f(x = \Delta^B_{c_1 \dots c_{m-1} i(\varnothing)}) = y_0$. Тому

$$P\{Y = y_0\} = P\{X \in \Delta^B_{c_1 \dots c_{m-1} i}\} = |\Delta^B_{c_1 \dots c_{m-1} i}| = \Theta_i \prod_{j=1}^{m-1} \Theta_{c_j}.$$

Отже, y_0 є атомом розподілу випадкової величини Y з вказаною масою. Враховуючи канторовість функції f, а саме те, що сумарна довжина всіх її інтервалів сталості дорівнює 1, робимо висновок, що розподіл Y чисто дискретний. Нехай тепер f — функція квазіканторівського типу. Аналогічно до попереднього випадку формується її точковий спектр. Але сума довжин інтервалів сталості функції менша 1, тому сума мас всіх атомів автоматично менша 1. Отже, розподіл Y є нетривіальною сумішшю дискретного і неперервного розподілів. □

5.5. Ніде не монотонні функції

Теорема 5.5. *Функція f є ніде не монотонною тоді і лише тоді, коли серед елементів матриці $||p_{ik}||$ немає нулів і нескінченна кількість її стовпців містять від'ємні елементи.*

Доведення. Спочатку доведемо, що коли матриця не має нульових елементів і нескінченна кількість її стовпців містить від'ємні елементи, то функція f ніде не монотонна.

Оскільки в матриці $||p_{ik}||$ нулів немає, то згідно з наслідком з леми 5.2 функція f не має інтервалів сталості. Залишається довести, що f не має інтервалів монотонності. Оскільки для будь-якого інтервала $(a;b) \subset (0;1)$ легко вказати B-циліндр, який цілком належить даному інтервалу, то для доведення вказаного твердження досить показати, що функція не є монотонною на будь-якому B-циліндрі.

Нехай $\Delta^B_{c_1 \dots c_m}$ — довільний циліндр рангу m і $p_{ik} < 0$, де $k > m$. Приріст функції на B-циліндрі $\Delta^B_{c_1 \dots c_m \dots c_{k-1} c} = [a_1; d_1)$ виражається

$$f(d_1) - f(a_1) = p_{ck} \prod_{j=1}^{k-1} p_{c_j j},$$

а на B-циліндрі $\Delta^B_{c_1 \dots c_m \dots c_{k-1} c c_{k+1} \dots c_{n-1} i} = [a_2; d_2)$, де $p_{in} < 0$, причому $p_{js} > 0$ для будь-яких $j \in Z$ і $k < s < n$ має вигляд

$$f(d_2) - f(a_2) = \left(\prod_{j=1}^{k-1} p_{c_j j} \right) p_{ck} \left(\prod_{j=k+1}^{n-1} p_{c_j j} \right) p_{in}. \qquad (5.7)$$

Оскільки $[a_2; d_2) \subset [a_1; d_1)$, а $\prod\limits_{j=k+1}^{n-1} p_{c_j j} > 0$ (до речі при $n = k+1$ цей множник у добутку (5.7) просто відсутній), то прирости функції на вказаних циліндрах, які належать циліндру $\Delta^B_{c_1 \dots c_m}$, мають протилежні знаки.

Таким чином, функція на B-циліндрі $\Delta^B_{c_1 \dots c_m}$ *не є монотонною*, а отже, *є ніде не монотонною* в силу довільності вибору цього B-циліндра.

Нехай f — ніде не монотонна функція. Якщо припустити, що серед елементів матриці $||p_{ik}||$ є нулі (нехай $p_{cs}=0$), то згідно з лемою 5.1 функція має проміжки сталості, що суперечить її ніде не монотонності. Отже, нульові елементи у матриці $||p_{ik}||$ відсутні.

Припустимо тепер, що лише скінченна кількість стовпців матриці мають від'ємні елементи і $p_{ik}>0$ $\forall i\in Z, k>k_0$. Тоді згідно з наслідком 5.5 з леми 5.2 на кожному циліндрі рангу k функція f є монотонною. У цьому випадку вона є кусково-монотонною, що знову суперечить умові ніде не монотонності. Отримані суперечності з припущеннями доводять, що умова відсутності нулів у матриці $||p_{ik}||$ і наявність в ній нескінченної кількості стовпців з від'ємними елементами є необхідною і достатньою для ніде не монотонності функції. $\square$

5.6. Варіаційні властивості функції

У розглядуваному класі функцій $P(B)$ існують функції обмеженої та необмеженої варіації в залежності від властивостей матриці $||p_{ik}||$.

Лема 5.4. *Функція f свого найбільшого і найменшого значення на B-циліндрі набуває на його кінцях.*

Доведення. Розглянемо довільний B-циліндр $\Delta^B_{c_1\ldots c_m}=[a;d)$, де $a=\Delta^B_{c_1\ldots c_m(\varnothing)}$, $d=\Delta^B_{c_1\ldots c_{m-1}[c_m+1](\varnothing)}$ і точку x, що йому належить. Число x може бути B-скінченним або B-нескінченним. Розглянемо обидва можливі випадки: $x=x_1=\Delta^B_{c_1\ldots c_m i(\varnothing)}$ і $x=x_2=\Delta^B_{c_1\ldots c_m\ldots c_k\ldots}$. Якщо $D\equiv\prod\limits_{k=1}^{m-1}p_{c_kk}$, то

$$f(x_1)-f(a)=D\cdot p_{c_mm}\cdot\sigma_{i[m+1]},$$

$$f(d)-f(x_1)=D(\sigma_{[c_m+1]m}-\sigma_{c_mm}-p_{c_mm}\sigma_{i[i+1]})=Dp_{c_mm}(1-\sigma_{i[m+1]}).$$

Оскільки $\sigma_{i[m+1]}>0$ і $1-\sigma_{i[m+1]}>0$, то значення виразів $f(x_1)-f(a)$ і $f(d)-f(x_1)$ мають однакові знаки або ж одночасно рівні 0. Тому $f(a)$ є максимальним, а $f(d)$ — мінімальним, коли $f(x_1) - f(a) < 0$ і навпаки у протилежному випадку.

Аналогічно,

$$f(x_2) - f(a) = Dp_{c_m m} \cdot \sum_{k=m+1}^{\infty} \sigma_{c_k i_k} \prod_{j=m+1}^{k-1} p_{c_j j},$$

$$f(d) - f(x_2) = D(\sigma_{[c_m+1]m} - \sigma_{c_m m} - \sum_{k=m+1}^{\infty} \sigma_{c_k k} \prod_{j=m}^{k-1} p_{c_j j}) =$$

$= \mathrm{D} \cdot p_{c_m m}(1 - \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} \sigma_{c_k k} \prod_{j=m+1}^{k-1} p_{c_j j}).$

Оскільки $0 < 1 - \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} \sigma_{c_k k} \prod\limits_{j=m+1}^{k-1} p_{c_j j} < 1$, то вирази $f(x_2) - f(a)$ і $f(d) - f(x_2)$ мають однакові знаки або одночасно рівні 0. Це приводить до тих же висновків.

Отже, функція f найбільшого і найменшого значення набуває на кінцях B-циліндра, що розглядається. Лему доведено. □

Теорема 5.6. *Варіація* $V_0^1(f)$ *функції* f *на інтервалі* $(0;1)$ *обчислюється за формулою*

$$V_1^0(f) = \prod_{k=1}^{\infty} V_k, \ \textit{де}\ V_k = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |p_{ik}|. \tag{5.8}$$

Доведення. Сума приростів функції f на циліндрах 1-го рангу згідно з лемою 5.2 дорівнює:

$$V_1 = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |p_{i1}|.$$

В силу умов 1) і 2) для матриці $||p_{ik}||$ маємо $V_1 \geqslant 1$.

Сума приростів функції f на циліндрах 2-го рангу, що належать циліндру 1-го рангу $\Delta_{c_1}^B$, виражається

$$|p_{c_1 1}| \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |p_{i2}|.$$

Тоді сума B_2 приростів функції f на всіх циліндрах 2-го рангу обчислюється за формулою

$$B_2 \equiv \sum_{c_1=-\infty}^{+\infty} (|p_{c_1 1}| \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |p_{i2}|) = V_1 V_2.$$

Індуктивно міркуючи, отримуємо вираз B_m всіх приростів функції f на циліндрах рангу m:

$$B_m = \prod_{k=1}^{m} V_k.$$

Оскільки функція f свого найбільшого і найменшого значення на циліндрі набуває на його кінцях (див. лему 5.4), то варіація функції f на $(0;1)$ дорівнює

$$V_0^1(f) = \lim_{m\to\infty} B_m = \prod_{k=1}^{\infty} V_k. \qquad \square$$

Наслідок 5.8. *Функція f має необмежену варіацію тоді і лише тоді, коли*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - V_k) = -\infty.$$

Справді, оскільки $V_k = 1-(1-V_k) \geqslant 1$, то дане твердження випливає з відомої теореми про взаємозв'язок збіжності нескінченних добутків і рядів.

Наслідок 5.9. *Якщо всі стовпці матриці $||p_{ik}||$ однакові і функція f є ніде не монотонною, то вона має необмежену варіацію.*

Доведення. Справді, при виконанні умов леми $V_m = V_1$, $B_m = V_1^m$, $V_0^1(f) = \lim\limits_{m\to\infty} V_1^m$. Але з умови ніде не монотонності функції f випливає $V_1 > 1$. Отже, $V_0^1(f) = \infty$. $\square$

Наслідок 5.10. *Якщо нескінченна кількість стовпців у матриці $||p_{ik}||$ містять нульові елементи і при цьому $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1 - V_k) = -\infty$, то f є функцією канторівського або квазіканторівського типу, яка має необмежену варіацію і не має проміжків монотонності окрім проміжків сталості.*

5.7. Автомодельні та інтегральні властивості функцій

Клас $P(B)$ функцій, означених рівністю (5.1), континуальний. Його важливий континуальний підклас $P_0(B)$ утворюють функції, визначені матрицями, всі стовпці яких однакові. У цьому випадку матриця $||p_{ik}||$ визначається вектором-стовпцем

$$(..., p_{-2}, p_{-1}, p_0, p_1, p_2, ...) = \overline{p}.$$

У цій ситуації при $p_i = \Theta_i$ для будь-якого $i \in Z$, маємо $f(x) = x$.

Лема 5.5. *Графік Γ_f функції f є структурно фрактальною множиною, а саме N-самоафінною множиною з наступною структурою самоафінності:*

$$\Gamma_f = \bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} \Gamma_i, \quad \Gamma_i = \varphi_i(\Gamma_f), \quad \varphi_i : \begin{cases} x' = \Theta_i x + b_i, \\ y' = p_i y + \sigma_i, \end{cases} \quad i \in Z.$$

Доведення. Оскільки $\Gamma_f = \bigcup\limits_{i=-\infty}^{\infty} H_i$, де $H_i = \{M(x; y) : x = \Delta^B_{i\alpha_2\alpha_3...}$, $y = \Delta_{i\alpha_2\alpha_3...}\}$, то залишається показати, що $H_i = \varphi_i(\Gamma_f)$.

Нехай $M(x; y) \in \Gamma_f$, тобто $x = \Delta^B_{c_1c_2...}$, $y = \Delta_{c_1c_2...} = f(x)$. Розглянемо точку $\varphi_i(M) = M'(\delta_i(x); \rho_i(x))$ — образ точки M під дією афінного перетворення φ_i, де $\delta_i(x) \equiv \Delta^B_{i\alpha_1\alpha_2...}$, $\rho_i(x) \equiv \Delta_{i\alpha_1\alpha_2...}$. Очевидно, що $M' \in H_i$, а отже, $\Gamma_i \subset H_i$.

Доведемо, що $H_i \subset \Gamma_i$.

Нехай $K^*(x^*; y^*) \in H_i$, тобто $x^* = \Delta^B_{i\alpha_2\alpha_3...}$, $y^* = \Delta_{i\alpha_2\alpha_3...}$, тоді очевидно, що K^* є образом точки $K(\overline{x}; \overline{y})$, де $\overline{x} = \Delta^B_{\alpha_2\alpha_3...}$, $\overline{y} = \Delta_{\alpha_2\alpha_3...}$, яка належить графіку функції f, під дією перетворення φ_i, а отже, $K \in \Gamma_i$. З $\Gamma_i \subset \subset H_i$ і $H_i \subset \Gamma_i$ отримуємо рівність $G_i = H_i$ для довільного $i \in Z$. Тому твердження доведено. $\square$

Теорема 5.7. *Для випадку, коли всі стовпці матриці однакові ($p_{ik} =$*

p_i), має місце рівність

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{\sum\limits_{i\in Z}\sigma_i\Theta_i}{1-\sum\limits_{i\in Z}\Theta_i p_i},$$

де $\sigma_i \equiv \sum\limits_{j=-\infty}^{i-1} p_j$, $\forall i \in Z$.

Доведення. Оскільки функція f є неперервною, то вона інтегровна на кожному B-циліндрі. Використовуючи адитивну властивість інтеграла і N-самоафінність графіка функції, маємо

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int\limits_{b_k}^{b_{k+1}} f(x)dx;$$

$$\int\limits_{b_k}^{b_{k+1}} f(x)dx = \int\limits_0^1 (p_i f(x)+\sigma_i)d(\Theta_i x + b_i) = \Theta_i p_i \int\limits_0^1 f(x)dx + \sigma_i\Theta_i;$$

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \sum_{i\in Z}\sigma_i\Theta_i + \sum_{i\in Z}\Theta_i p_i\int\limits_0^1 f(x)dx;$$

$$(1-\sum_{i\in Z}\Theta_i p_i)\int\limits_0^1 f(x)dx = \sum_{i\in Z}\sigma_i\Theta_i,$$

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{\sum\limits_{i\in Z}\sigma_i\Theta_i}{1-\sum\limits_{i\in Z}\Theta_i p_i}. \qquad \square$$

5.8. Диференціальні властивості функції

У цьому пункті ми вважаємо, що $p_{ik} = p_i$ для будь-яких $i \in Z$, $k \in N$.

Лема 5.6. *Міра Лебега множини канторівського типу*

$$C[B,V] = \{x : x = \Delta^B_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}, \alpha_n \in V \subset Z, V \neq Z\}$$

дорівнює нулю.

Доведення. Нехай $j \in V$, $V_j = Z \backslash \{j\}$. Очевидно, що $C[B,V] \subset C[B,V_j] \equiv$ $\equiv C$, а отже, для міри Лебега маємо $\lambda(C[B,V]) \leqslant \lambda(C[B,V_j])$. Тому досить показати, що $\lambda(C[B,V_j]) = 0$.

Якщо $E_0 = [0;1]$, E_n — об'єднання B-циліндрів рангу n, серед внутрішніх точок яких є точки множини C, то для довільного $n \in N$ маємо $C \subset E_{n+1} \subset E_n$, $\overline{E}_n \equiv E_n \setminus E_{n-1}$, $\lambda(C) \leqslant \lambda(E_n)$ і

$$\lambda(C) = \lim_{n\to\infty} \lambda(E_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\lambda(E_n)}{\lambda(E_{n-1})} \cdot \frac{\lambda(E_{n-1})}{\lambda(E_{n-2})} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda(E_1)}{\lambda(E_0)}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(E_n)}{\lambda(E_{n-1})}.$$

Але $\overline{E}_n \equiv E_{n-1} \setminus E_n$, а тому $E_n = E_{n-1} \setminus \overline{E}_n$.

$$\lambda(C) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(E_{n-1}) - \lambda(\overline{E}_n)}{\lambda(E_{n-1})} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\overline{E}_n)}{\lambda(E_{n-1})}\right).$$

Оскільки $0 < \dfrac{(\overline{E}_n)}{\lambda(E_{n-1})} = \Theta_j < 1$, то $\lambda(C) = 0 = \lambda(C[B,V])$. □

Наслідок 5.11. *Міра Лебега множини $E_n(i)$ всіх чисел з інтервалу* $(0;1)$*, у B-зображенні яких цифра i може зустрічатись лише на перших n-місцях, дорівнює нулю.*

Справді, оскільки $E_n(i) = \bigcup\limits_{\alpha_1 \in A} \ldots \bigcup\limits_{\alpha_n \in A} [\Delta^B_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \cap E_n(i)]$, а згідно з лемою 5.6 $\lambda[\Delta^B_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \cap E_n(i)] = 0$, то $\lambda(E_n(i)) = 0$.

Теорема 5.8. *Множина I всіх чисел з* $(0;1)$*, у B-зображенні яких цифра $i \in A$ зустрічається лише скінченну кількість разів, має нульову міру Лебега.*

Доведення. Оскільки $I \subset \bigcup\limits_n E_n(i)$, то, враховуючи наслідок попередньої леми, маємо $\lambda(I) \leqslant \sum\limits_n \lambda(E_n(i))$. Отже, $\lambda(I) = 0$. □

Наслідок 5.12. *Майже всі (у розумінні міри Лебега) числа інтервалу* $(0;1)$ *у своїх B-зображеннях використовують всі цифри алфавіту нескінченну кількість разів.*

Наслідок 5.13. *Для майже всіх (у розумінні міри Лебега)* $x = \Delta^B_{\alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots} \in (0;1)$ $\limsup\limits_{n\to\infty} \alpha_n(x) = \infty$.

Лема 5.7. *Нехай всі елементи матриці $||p_{ik}||$ однакові. Якщо у B-нескінченній точці x_0 існує скінченна похідна функції f, то вона обчислюється за формулою*

$$f'(x_0) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{p_{\alpha_k(x_0)}}{\Theta_{\alpha_k(x_0)}}. \tag{5.9}$$

Якщо нескінченний добуток (5.9) розбігається, причому не до нуля, то не існує скінченної похідної функції f у точці x_0.

Дане твердження є наслідком теореми 3.11.1 [72, стор. 93].

Теорема 5.9. *Якщо (p_n) — послідовність додатних дійсних чисел, серед членів якої існує $p_k \neq \Theta_k$, то f є сингулярною строго зростаючою функцією розподілу ймовірностей на інтервалі $(0;1)$.*

Доведення. Враховуючи наслідок 5.5 з леми 5.2 f є строго зростаючою функцією розподілу. Функція f, будучи монотонною, згідно з відомою теоремою Лебега має скінченну похідну на множині D повної міри Лебега. Множину точок, що володіють нормальною властивістю, яку констатує перший наслідок з теореми 5.8, позначимо через B. Тоді множина $D \cap B$ є множиною повної міри.

Для доведення сингулярності функції f розглянемо довільну точку $x_* \in D \cap B$. Враховуючи лему 5.7, маємо

$$f'(x_*) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_{\alpha_n(x_*)}}{\Theta_{\alpha_n(x_*)}}. \tag{5.10}$$

Оскільки нескінченна кількість членів останнього нескінченного добутку рівна відношенню

$$\frac{p_k}{\Theta_k} \neq 1,$$

то добуток (5.10) розбігається (не виконується необхідна умова збіжності добутку). Тому майже скрізь добуток (5.10) розбігається до нуля. Це і вимагалось довести. Отже, функція f є сингулярною згідно з означенням. □

Висновки до розділу 5

Клас неперервних функцій, визначених на проміжку, дивовижно багатий не лише потужністю, а й різноманітністю функцій за властивостями. Серед них функції, локальна поведінка яких край неоднорідна. Це ніде не монотонні функції та такі, що окрім проміжків сталості не мають інших проміжків монотонності; функції, множини несталості яких (зокрема множини точок росту для монотонних) мають нульову міру Лебега і дробову фрактальну розмірність Гаусдорфа-Безиковича [65], монотонні функції, які в кожному як завгодно малому інтервалі області визначення мають точки, в яких похідна рівна нулю, рівна нескінченності, а також точки, в яких похідна не існує. Саме таким функціям, а вони вимагають специфічних способів аналітичного задання, присвячена дана робота. Для визначення функцій ми використовуємо спеціальну нескінченно-символьну систему кодування (зображення) чисел, породжену двома двосторонніми послідовностями дійсних чисел, перша з яких однопараметрична.

Неперервні ніде не монотонні, зокрема недиференційовні, сингулярні функції (монотонні, немонотонні, ніде не монотонні, окрім проміжків сталості), а також функції необмеженої варіації ми відносимо до класу локально складних. Одному нескінченнопараметричному класу $P(B)$ таких функцій присвячена дана робота.

Зрозуміло, що аналітично задати локально складну функцію виразом зі скінченною кількістю простих бінарних операцій практично неможливо. Тому з цією метою для зображення аргумента ми використовуємо одне нескінченносимвольне зображення (кодування) чисел інтервалу $(0;1)$ з алфавітом $A = Z = \{0, \pm1, \pm2, ...\}$, визначене нескінченною двосторонньою збіжною і нормованою послідовністю додатних дійсних чисел (Θ_n). Значення функції визначається нескінченною матрицею $||p_{ik}||$, $\forall i \in Z$, $\forall k \in N$, яка задовольняє ряд вимог.

Нескінченносимвольне B-зображення чисел має ряд специфічних властивостей, не притаманних іншим нескінченносимвольним зображенням (Q_∞-зображення чисел [34], зображення чисел елементарними ланцюговими дробами, зображенням чисел рядами Люрота, Енгеля, Сільвестера, Остроградського-Серпінського-Пірса тощо), які пов'язані з двосторонньо-нескінченним алфавітом і поліосновністю системи кодування чисел.

Основними результати цього розділу є теореми 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9 та наслідки з них 5.4, 5.6, 5.5, 5.8, 5.9, 5.10, 5.12, 5.13.

Всі об'єкти і результати цього розділу є новими та виносяться на захист.

Вони опубліковані у роботах [21, 74].

Залишилися нез'ясованими питання:

1) Чи існують у класі $P(B)$ функції, що мають множину рівня, яка є канторвалом?

2) Якою є розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини $H = \{x : f'(x) \neq \neq 0\}$ нульової міри Лебега для функції f, що є сингулярною функцією салемівського типу [39], диференціальні властивості якої вивчалися у попередньому пункті?

ВИСНОВКИ

Неперервні ніде не монотонні, зокрема, недиференційовні та сингулярні функції ще залишаються загадковим об'єктом математичних досліджень. Їх загальна теорія бідна, а методологія дослідження край обмежена і включає лише кілька логічних схем їх аналізу. На даний момент продовжується екстенсивний етап розвитку теорії за рахунок створення індивідуальних теорій для різних конструкцій функцій або класів функцій, визначених набором параметрів.

Двосторонні послідовності як твірні для представлення дійсних чисел є відносно новим засобом для кодування чисел за допомогою нескінченного алфавіту $A = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$. Цей засіб суттєво розширює можливості для ефективного аналітичного задання і дослідження функцій з локально складними, тополого-метричними і фрактальними властивостями. В даній роботі ми це продемонстрували на континуальному класі неперервних функцій: монотонних, строго монотонних, ніде не монотонних, сингулярних, включаючи функції канторівського типу.

Дисертаційна робота виконана в галузі метричної теорії неперервних локально складних функцій, які мають структурно фрактальні властивості. В ній отримано наступні результати:

1. Вивчено окремі класи функцій з локально складною структурою, означених у термінах зображення дійсних чисел рядами Кантора (канторівські системи числення).
2. Створено нову систему кодування дійсних чисел одиничного проміжка (B-зображення), алфавітом якої є множина цілих чисел. Описано її геометрію (геометричний зміст цифр, метричні відношення, обгрунтовано властивості циліндричних та хвостових множин),

розв'язано ряд метричних задач і встановлено нормальні властивості чисел за їх зображеннями.

3. З використанням B-зображення означено континуальний клас неперервних функцій, серед яких монотонні, немонотонні, ніде не монотонні, ніде не диференційовні; функції обмеженої та необмеженої варіації; сингулярні функції.
4. Для функцій означеного класу вичерпно розв'язано ряд задач:

4.1. Виведено формулу для обчислення міри Лебега множини несталості функцій. Доведено критерій її нульмірності.

4.2. Знайдено необхідні і достатні умови належності функції до класу сингулярних функцій канторівського типу.

4.3. Доведено критерій ніде не монотонності функції.

4.4. Виведено формулу для обчислення варіації функції та знайдено необхідні і достатні умови, за яких функція має необмежену варіацію.

4.5. Для випадку, коли функція не має проміжків сталості, встановлено структурну фрактальність графіка (його N-самоафінність) і обчислено визначений інтеграл.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension // Ergod.Th. & Dynam. Sys. — 2004, 24. — P. 1-16.
2. *Allaart Pieter, Kawamura Kiko* The Takagi function: a survey // Real Anal. Exch. – 37(1) – 52 p.
3. *Banach S.* Uber die Baire'sche Katerogie gewisser Funktionnenmengen // Stud. Math. — 1931. — 3. — P.174–179.
4. *Baranovskyi O., Pratsiovytyi M.* One class of continuous functions with complicated local properties related to Engel series // Funct. Approx. Comment. Math. — 2023. — Vol. 68, 2. — P. 143–162.
5. *Borel E.* Les probabilies denombrables et leurs applications arithmetiques. // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. — 1909. — P.247–271.
6. *Bush K.A.* Continuous functions without derivatives. // Amer. Math. Monthly. — 1952. — 58, 4. — P.222–225.
7. *Cantor G.* Uber die einfachen Zahlesysteme // Z. Math. Phys. — 1869. — 10, **Bd**. 14. — P. 121-128.
8. *Chen Y.* Fractal texture and structure of central place systems, Fractals, 2020, 28(01).
9. *Galambos J.* Representations of real numbers by infinite series.Berlin: Springer-Verlag, 1976. 146 p.
10. *Jarnicki M., Pflug P.* Continuous nowhere differentiable function. The Monsters of Analysis // Springer Monographs in Mathematics — 2015. — 299 p.
11. *Jesus Llorente Jorge* Generalized Takagi Functions. // UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID. – 2024. — 163 p.

12. *Johan Thim* Continuous nowhere differentiable functions. // The Master's of Thesis — 2003. — 94 p.
13. *Kiosak V., Lesechko O., Savchenko O.* Mappings of spaces with affine connection // 17th Conference on Applied Mathematics. – 2018. – Proceedings, Bratislava. – P. 563-569.
14. *Kono N.* On generalized Takagi functions // Acta Math. Hungar, Vol. 49., P. 315-324 (1987).
15. *Lysenko I.M., Maslova Yu.P., Pratsiovytyi M.V.* Two-symbol systen of encoding with two bases having different signs and special functions related with it. // Proceeding of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine – 2019, 16(2), P. 50-62
16. *Massopust P.R.* Fractal functions, fractal surfaces and wavelets. — Academic Press; 1 edition – 1995. — 383 p.
17. *Massopust P.R.* Fractal function and their applications. // Chaos, Solutions and Fractals. – 1997, 8(2), P.171-190.
18. *Minkowski H.* Zur Geometrie der Zahlen // Gesammeine Abhandlungen. – Berlin, 1911. – Band 2. — P. 50-51.
19. *Nikiforov R., Torbin G.* Fractal properties of random variables with independent Q^{∞}-symbols // Theory Probab. Math. Statist. — 2013. — № 86. — P. 169—182.
http://dx.doi.org/10.1090/S0094-9000-2013-00896-5
20. *Pratsiovytyi M.V., Baranovskyi O.M., Bondarenko O.I.*, Ratushniak S.P. One class of continuous locally complicated functions related to infinite-symbol Φ-representation of numbers. Matematychni Studii, 59(2). — 2023. — P. 123-131. DOI: https://doi.org/10.30970/ms.59.2.123-131
21. *Pratsiovytyi M., Bondarenko O., Lysenko I., Ratushniak S.* Continuous Functions with Locally Complicated and Fractal Properties Related to Infinite-Symbol B-Representation of Numbers. // Journal

of Mathematical Sciences (United States), 2024, 282 (6) — P. 1008–1027. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-024-07230-w

22. *Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V., Dmytrenko S.O., Lysenko I.M.,Ratushniak S.P.* About one class of function with fractal properties. // Bukovynian Mathematical Journal. 2021, 6(1), P. 273–283.
23. *Pratsiovytyi M.V., Drozdenko V.O., Lysenko I.M., Maslova Yu.P.* Inversor of digits of digits of two-base G-representation of real numbers and its structural fractality. Bukovinian Math. Journal. 2022, 10(1), 100-109.
24. *Pratsiovytyi M. V., Baranovskyi O. M., Maslova Yu. P.* Generalization of the Tribin function, J. Math. Sci., 2021., 253(2), 276–288.
25. *Pratsiovytyi M., Vasylenko N.* Fractal properties of functions defined in terms of Q-representation // International Journal of Math. Analysis Vol.7, 2013. no. 61-67 . — P. 3155-3169.
26. *Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V., Dyvliash N.V., Ratushniak S. P.* Inversor of digits of Q_2^*-representation of numbers // Matematychni Studii. —2021. – V.55, No.1. – pp. 37–43.
27. *Pratsiovytyi M., Isaieva T.* Transformations of $(0; 1]$ preserving tails of Δ^{μ}-representation of numbers// Algebra and Discrete Mathematics. — 2016. — Vol. 22, no. 1. — pp. 102–115.
28. *Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V., Lysenko I.M., Ratushniak S.P.* Continued A_2-fractions and singular functions// Matematychni Studii.— 2022. – V.58, 1. – pp. 3–12.
29. *Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V., Lysenko I.M., Ratushniak S.P.* Fractal functions of exponential type that is generated by the Q_2^*-representation of argument. // Mat. Stud. 56, 2. – 2021. P. 133–143.
30. *Pratsiovytyi M. , Lysenko I., Voitovska O.* Distribution of values of classic singular Cantor function of random argument // Random Operators and Stochastic Equations. — 2018. — Vol. 26, 4. — P.193–200.

31. *Pratsiovytyi M.V., Lysenko I.M., Maslova Yu.P.* Group of continuous transformations of real interval preserving tails of G_2-representation of numbers // Algebra and Discrete Mathematics, Volume 29(2020). Number 1. pp. 99-108.
32. *Pratsiovytyi, M.V., Lysenko, I.M., Maslova, Yu. Trebenko O.* G-representation of real numbers and some of its applications. J Math Sci, 2023, 277, 298–310.
33. *Pratsiovytyi M., Kyurchev D.* Properties of the distribution of the random variable defined by A_2-continued fraction with independent elements // Random Oper. Stochastic Equations, 2009, Vol. 17., no. 1.— P.91–101.
34. *Pratsovytyi M.V., Lechinskii O.L.* Properties of random variable defined by the distributions of elements of their $\widetilde{Q}_\infty$-representation // Theor. Probability and Math. Statist. No.57, 1998. — P.143–148.
35. *Pratsiovytyi M.V., Ratushniak S.P.* Properties and distributions of values of fractal functions related to Q_2-representations of real numbers. // Theory of Probability and Mathem. Stat. – 2019, 99, P. 211-228.
36. *Pratsiovytyi M. V., Ratushniak S. P.* Continuous nowhere differentiable function with fractal properties defined in terms of Q_2-representation// Journal of Mathematical Sciences, Vol. 258, 670–697 (2021).
37. *Prats'ovytyi M.V., Svynchuk O.V.* Spread of values of a Cantor-type fractal continuous nonmonotone function // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 240, 3, July, 2019 pp. 342 – 357.
38. *Pratsiovytyi M.V., Feshchenko O.Yu.* Topological-metric and fractal properties of the distributions on the set of the incomplete sums of series of positive terms // Theory of Stochastic Processes. — 2007. — 13(29), № 1-2. — P. 205–224.
39. *Salem R.* On Singular Monotonic Functions of the Cantor Type. Journal of Mathematics and Physics, (1942). — 21(1-4), 69–82. doi:10.1002/sapm194221169.

40. *Salem R.* On Some Singular Monotonic Functions Which Are Strictly Increasing. Transactions of the American Mathematical Society,(1943). — 53(3), 427–439. https://doi.org/10.2307/1990210.
41. *Schweiger F.* Ergodic theory of fibred systems and metric number theory. New York: Oxford University Press., 1995. 320 p.
42. *Shukla U.K.* On points of non-symmetrical differentiability of continuous function III. Ganita 8. — 1957. P. 81-104.
43. *Sierpinski W.* Arytmetyczny przyklad funkcji ciaglej nierozniczkowalnej. Wektor. — 1914. — nr. 8. P. 337-343.
44. *Takagi T.* A simple of the continuous function without derivative / T. Takagi// Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, Vol.1., P. 176-177 (1903). — також: The collected Papers of Teiji Takagi. — Springer Verlag, New York, P. 4-5. (1990).
45. *Thim Y.* Continuous nowhere differentiable functions. // Master thesis of science programme. Departament of Mathematics. – 2003. – 94 p.
46. *Triebel H.* Fractals and Spectra related to Fourier analysis and function spaces. Monographs in mathematics.// Boston: Birkhauser. — 1997. — Vol. 91. — 271 pp.
47. *Wunderlich W.* Eine uberall stetige und nirgends differenziebare funktion. Elem. Math. 1952, **7**, 73–79.
48. *Zhykharyeva Yu., Pratsiovytyi M.* Expansions of numbers in positive Luroth series and their applications to metric, probabilistic and fractal theories of numbers // Algebra and Discrete Mathematics. – Volume 14 – 2012 –Number 1 – P. 145-160.
49. *Барановський О.М.* Задання ніде не диференційовних функцій за допомогою представлення чисел рядами Остроградського // Фрактальний аналіз та суміжні питання №2. — 1998. — С. 215-221.
50. *Барановський О.М., Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Ряди Остроградського-Серпінського-Пірса та їх застосування. — К.:

Наукова думка, Київ, 2013. — 288 с.

51. *Барановський О.М., Працьовитий М.В.* Про одну сингулярну функцію канторівського типу, пов'язану з рядами Енгеля // Фрактальний аналіз та суміжні питання: Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. — 2019. — Т. 16, № 3. — С. 131–148.

52. *Бондаренко О.І., Василенко Н.М., Працьовитий М.В.* Канторівська двійково-фібоначчієва система числення у задачах теорії функцій // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2019. – Т. 16 (3). – С. 173–185.
https://trim.imath.kiev.ua/index.php/trim/article/view/515

53. *Бондаренко О.І., Працьовитий М.В.* Канторівська система числення, пов'язана з двійковим рядом і послідовністю Фібоначчі // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2017. — Т.14 (4). — Київ: Інститут математики НАН України. С.178–187.
https://trim.imath.kiev.ua/index.php/trim/article/view/414

54. *Василенко Н.М., Працьовитий М.В.* Математичні структури в просторі послідовностей Фібоначчі // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2008. — **9.** — С. 129-150.

55. *Гончаренко Я.В., Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Фрактальні властивості множин точок недиференційовності абсолютно неперервної та сингулярної функцій розподілу // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2001. – № 65. – С. 25-32.

56. *Коваль В.В.* Самоафінні графіки функцій // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2004. — № 5. — С. 292-299.

57. *Котова О.В.* Інваріантні точки одного неперервного недиференційовного відображення // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ імені М.П. Драго-

манова. — 2008. — № 9. — С. 151-160.

58. *Мороз М.П.* Зображення дійсних чисел рядами Перрона, їхня геометрія та деякі застосування // Нелінійні коливання. – 2023. – Т.6, № 2. – С. 246-260.
59. *Панасенко О.Б.* Фрактальні властивості одного класу однопараметричних неперервних недиференційовних функцій // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. – 2006, № 7. – С. 160-167.
60. *Панасенко О.Б.* Фрактальна розмірність графіків неперервних канторівських проекторів // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2008, № 9. — С. 104-111.
61. *Працьовита І.М.* Про розклади чисел в знакозмінні s-адичні ряди і ряди Остроградського 1-го та 2-го виду // Український математичний журнал – 2009. – 61 - – **10**, №7. – С. 958-968.
62. *Працьовита І.М.* Ряди Остроградського 2-го виду і розподіли їх випадкових неповних сум // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. - Київ: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова. – 2006. – **10**, №7. – С. 174-189.
63. *Працевитый Н.В.* Непрерывные канторовские проекторы // Методы исследования алгебраических и топологических структур. — Киев: КГПИ, 1989. — С. 95-105.
64. *Працевитый Н.В.* Сингулярные распределения с фрактальными носителями канторовского и салемовского типов: Автореф. дис. на соиск. учёной степени канд.физ.-мат.наук 01.01.05 — Киев, 1987. — 15с.
65. *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

66. *Працьовитий М.В.* Фрактальні властивості однієї неперервної ніде не диференційовної функції // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2002. — № 3. — С. 351-362.

67. *Працьовитий М.В.* Системи числення зі змінною основою та змінним алфавітом (або розвинення чисел в ряди Кантора) // Студентські фізико-математичні етюди. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2009. — **10**, №8. — С. 6-18.

68. *Працьовитий М.В.* Ніде не монотонні сингулярні функції // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2011. — № 12. — С. 24-36.

69. *Працьовитий М.В.* Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел. – Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2012. – **4**, № 2. – 68 с.

70. *Працьовитий М.В.* Q^*_∞-зображення і його застосування. // Єдність навчання і наукових досліджень – головний принцип університету: зб. наук. пр. – Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2012. – Частина 2. – С. 85-88.

71. *Працьовитий М.В.* Поліосновне $\widetilde{Q}$-представлення і фрактальні математичні об’єкти з ним пов’язані// Фрактальний аналіз та суміжні питання: зб. наук. пр. Ін-т математики НАН України, НПУ ім. М. П. Драгоманова. — Київ, 1998. – № 2. – С. 14–35.

72. *Працьовитий М.В.* Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування. – Київ: Наукова думка, 2022. – 316 с.

73. *Працьовитий М.В., Барановський О.М., Маслова Ю.П.* Узагальнення Трибін-функції // Нелінійні коливання, 2019, Том 22, №3. — С. 380-390.

74. *Працьовитий М.В., Бондаренко О.І., Василенко Н.М., Лисенко І.М.* Нескінченносимвольне B-зображення дійсних чисел і деякі його за-

стосування// Буковинський математичний журнал. — 2023. — Т.11 (1). — С. 94-105. DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2023.01.08

75. *Працьовитий М.В., Бондаренко О.І., Ратушняк С.П., Франчук К.В.* $\widetilde{Q}$-зображення дійсних чисел як узагальнення канторівських систем числення // Могилянський математ. журнал. — 2022. — Том 5. — С. 9–18. DOI: https://doi.org/10.18523/2617-7080520229-18

76. *Працьовитий М.В., Василенко Н.А.* Одна сім'я неперервних ніде не монотонних функцій з фрактальними властивостями // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2013. — № 14. — С. 176-188.

77. *Працьовитий М.В., Гетьман Б.І.* Ряди Енгеля та їх застосування // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико–математичні науки. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2006. – **10**, №7. – С. 105-116.

78. *Працьовитий М.В., Гончаренко Я.В., Дмитренко С.О., Лисенко І.М., Ратушняк С.П.* Про один клас функцій з фрактальними властивостями // Буковинський математичний журнал. 2021, Т. 6 ,№ 1 — С.273–283.

79. *Працьовитий М.В., Калашніков А.В.* Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, пов'язані з Q-зображенням чисел. // укр. мат. журнал. — 2013. – Т.65, № 3. — С. 381-393.

80. *Працьовитий М.В., Калашніков А.В., Безбородов В.К.* Про один клас сингулярних функцій, що містить класичну функцію Мінковського // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2010. — №11. — С. 207-2013.

81. *Працьовитий М.В., Лещинський О.Л.* Властивості випадкових величин, заданих розподілами елементів свого $\widetilde{Q}_\infty$-зображення// Теор. ймов. та матем. стат. — 1997. – № 57.– С. 134–139.

82. *Працьовитий М.В., Ратушняк С.П.* Розподіл значень однієї фрактальної функції від випадкового аргумента // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2014, № 16 (2).— С. 150–160.

83. *Працьовитий М.В., Ратушняк С.П.* Незалежність цифр Q_2-зображення випадкової величини з заданим розподілом // Збірник праць Інституту математики НАН України, 2019, Т. 16, № 3, С. 79–91.

84. *Працьовитий М.В., Ратушняк С.П.* Неперервна ніде не диференційовна функція з фрактальними властивостями, визначена в термінах Q_2-зображення // Нелінійні коливання, Т.23. № 2б 2020. — С. 231-252.

85. *Працьовитий М.В., Свинчук О.В.* Розсіювання значень однієї фрактальної неперервної немонотонної функції канторівського типу // Нелінійні коливання, 2018, Том 21, №1. — С. 116-130.

86. *Працьовитий М.В., Свинчук О.В.* Розподіл значень однієї сингулярної немонотонної функції канторівського типу. Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики. // зб. праць Ін-ту математики НАН України. Київ: Вид-во Ін-ту математики НАН України, 2017, Том 14, №2. — С. 110-121.

87. *Працьовитий М.В., Свинчук О.В.* Структура і спектральні властивості розподілу значень немонотонної функції канторівського типу. Фрактальний аналіз та суміжні питання. // зб. праць Ін-ту математики НАН України. Київ: Вид-во Ін-ту математики НАН України, 2017, Том 14, №4. — С. 111-124.

88. *Працьовитий М.В., Скрипник С.В.* Q_2-зображення дробової частини дійсного числа та інверсор його цифр// Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2013. – № 15. – С. 134–143.

89. *Працьовитий М.В., Черчук Н.В., Вовк Ю.Ю., Шевченко А.В.* Ніде не монотонні функції, пов'язані з зображеннями чисел рядами Кантора

// Збірник Ін-ту математики НАН України, 2019, т.16, № 3, С.198-209.

90. *Ралко Ю.В.* Зображення чисел рядами Кантора та деякі його застосування // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2009. — **10**, №10. — С. 132-140.

91. *Скасків О.Б., Трусевич О.М.* Співвідношення типу Бореля для узагальнень ряду експонент // Український математичний журнал. — 2001. — т. 3, №11. — С. 1580-1584.

92. *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук. думка, 1992. — 208 с.

93. *Фещенко О.Ю.* Властивості розподілів випадкових величин з незалежними символами своїх G^2_∞-кодів// Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2005, № 6— С. 225–234.

94. *Хворостіна Ю.В.* Властивості розподілу випадкової неповної суми заданого знакозмінного ряду Люрота з незалежними коефіцієнтами// Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2013, № 15— С. 74–86.

Додаток А

Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

А.1. Наукові праці, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації

1. ***Бондаренко О.І.***, *Працьовитий М.В.* Канторівська система числення, пов'язана з двійковим рядом і послідовністю Фібоначчі // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2017. — Т.14 (4). — Київ: Інститут математики НАН України. С.178–187. https://trim.imath.kiev.ua/index.php/trim/article/view/414
2. ***Бондаренко О.І.***, *Василенко Н.М.*, *Працьовитий М.В.* Канторівська двійково-фібоначчієва система числення у задачах теорії функцій // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2019. – Т. 16 (3). – С. 173–185. https://trim.imath.kiev.ua/index.php/trim/article/view/515
3. *Працьовитий М.В.*, ***Бондаренко О.І.***, *Ратушняк С.П.*, *Франчук К.В.* $\widetilde{Q}$-зображення дійсних чисел як узагальнення канторівських систем числення // Могилянський математ. журнал. — 2022. — Том 5. — С. 9–18. DOI: https://doi.org/10.18523/2617-7080520229-18
4. *Працьовитий М.В.*, ***Бондаренко О.І.***, *Василенко Н.М.*, *Лисенко І.М.* Нескінченносимвольне B-зображення дійсних чисел і деякі його застосування// Буковинський математичний журнал. — 2023. — Т.11 (1). — С. 94-105. DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2023.01.08
5. *Pratsiovytyi M.V.*, *Baranovskyi O.M.*, ***Bondarenko O.I.***, *Ratushniak S.P.* One class of continuous locally complicated functions related to

infinite-symbol Φ-representation of numbers. Matematychni Studii, 59(2). — 2023. — P. 123-131. DOI: https://doi.org/10.30970/ms.59.2.123-131

6. *Pratsiovytyi M.*, ***Bondarenko O.***, *Lysenko I.*, *Ratushniak S.* Continuous Functions with Locally Complicated and Fractal Properties Related to Infinite-Symbol B-Representation of Numbers. // Journal of Mathematical Sciences (United States), 2024, 282 (6) — P. 1008–1027. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-024-07230-w

А.2. Наукові праці, які засідчують апробацію матеріалів дисертації

1. ***Бондаренко О.І.***, *Працьовитий М.В.* Чотирьохсимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування// IV Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики. — 2015. — С.35.
2. ***Бондаренко О.І.***, *Працьовитий М.В.* Одна система числення зі змінним алфавітом як частинний випадок представлення чисел рядами Кантора// Міжнародна наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге. — 2015. — С.24.
3. ***Бондаренко О.І.*** Канторівські системи числення і послідовності Фібоначчі// VIII Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». — 2019. — С.37.
4. ***Бондаренко О.І.*** Канторівська двійково-фібоначчієва система числення у задачах теорії функцій// Всеукраїнська наукова конференція «Актуальні проблеми математики та методики її навчання у вищій школі». — 2020. — С.5–7.
5. ***Бондаренко О.І.***, *Василенко Н.М.* Нескінченно-символьне

Ф-зображення і його геометрія// XI Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків. — 2023. — С.59–60.

6. *Працьовитий М.В.*, ***Бондаренко О.І.***, *Лисенко І.М.*, *Ратушняк С.П.* Нескінченно-символьне Ф-зображення дробової частини дійсного числа і його застосування у задачах теорії функцій, теорії ймовірності та фрактального аналізу// IV Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Математика та інформатика в науці й освіті - виклики сучасності». — 2023. — С.61–65.
7. *Працьовитий М.В.*, ***Бондаренко О.І.***, *Гончаренко Я.В.*, *Ратушняк С.П.* Геометрія чисел у задачах конструктивної теорії локально складних функцій// Міжнародна наукова конференція «Algebraic and Geometric Methods of Analysis». — 2023. — С.128–130.
8. *Працьовитий М.В.*, ***Бондаренко О.І.***, *Лисенко І.М.*, *Ратушняк С.П.* Algebraic structures related to the infinitely symbolic B-representation of real numbers// 14 Міжнародна алгебраїчна конференція. — 2023. — С.108.
9. *Працьовитий М.В.*, ***Бондаренко О.І.***, *Гончаренко Я.В.*, *Лисенко І.М.* Застосування у метричній теорії чисел, фрактальному аналізі та теорії розподілів випадкових величин В-зображення чисел// Міжнародна наукова конференція, присвячена 55-річчю факультету математики та інформатики ЧНУ імені Ю. Федьковича. — 2023. — С.289–290.
10. *Працьовитий М.В.*, *Василенко Н.М.*, ***Бондаренко О.І.*** Ф-зображення чисел у теорії неперервних ніде не монотонних функцій з автомодельними властивостями// XIX міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука. — 2023. — С.95–96.
11. ***Бондаренко О.І.***, *Василенко Н.А.* Застосування В-зображення дійсних чисел у теорії функцій// XXII Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2024». — 2024. — С.16.

12. ***Бондаренко О.І.***, *Василенко Н.М.* Про деякі застосування нескінченносимвольного B-зображення чисел у теорії функцій// XII Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків. — 2024. — С. 58–59.
13. ***Бондаренко Ольга***, *Працьовитий Микола* Тополого-метричні властивості множин, визначених у термінах зображення чисел рядами Кантора, що пов'язані з послідовністю Фібоначчі// V Міжнародна конференція, присвяченої 145-річчю з дня народження Ганса Гана. —2024. — С. 21-22.
14. ***Бондаренко Ольга*** Канторівське зображення чисел одиничного відрізка, пов'язане з послідовністю Якобсталя-Люка// Міжнародна науково-практична конференція. — 2024. — С.51-52.

А.3. Відомості про апробацію результатів дисертації

Основні результати дослідження доповідалися на **наукових конференціях** різних рівнів:

— IV Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики (Київ, 23–25 квітня 2015 р.);

— Міжнародна наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге (Чернівці, 1–4 липня 2015 р.);

— VIII Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання» (Київ, 23 травня 2019 р.);

— Всеукраїнська наукова конференція «Актуальні проблеми математики та методики її навчання у вищій школі» (Київ, 17–18 грудня 2020 р.);

— XI Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків (Київ, 11–13 травня 2023 р.);

— IV Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Математика та інформатика в науці й освіті – виклики сучасності» (Вінниця, 25–26 травня 2023 р.);

— Міжнародна наукова конференція «Algebraic and Geometric Methods of Analysis» (Одеса, 29 травня–01 червня 2023 р.);

— XIV Міжнародна алгебраїчна конференція (Суми, 3–7 липня 2023 р.);

— Міжнародна наукова конференція, присвячена 55-річчю факультету математики та інформатики ЧНУ імені Ю. Федьковича (Чернівці, 28–30 вересня 2023 р.);

— XIX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука (Київ, 11–12 жовтня 2023 р.);

— XXII Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2024» (Київ, 11 квітня 2024 р.);

— XII Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків (Київ, 9–11 травня 2024 р.);

— V Міжнародна конференція, присвяченої 145-річчю з дня народження Ганса Гана (23.09.-27.09.2024, Чернівці);

— Міжнародна науково-практична конференція (28 жовтня 2024, УДУ імені Михайла Драгоманова)

та **наукових семінарах**:

— семінар з фрактального аналізу Інституту математики НАН України та УДУ імені Михайла Драгоманова (керівник: д-р фіз.-мат. наук, професор Працьовитий М.В.);

— семінар відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник: д-р фіз.-мат. наук, професор Романюк А.С.);

— семінар з теорії аналітичних функцій (Львівський національний університет імені Івана Франка, керівник: д-р фіз.-мат. наук, професор Скасків О.Б.).

Публікації. Основні результати дисертаційного дослідження опубліковано в шести статтях [20, 21, 52, 53, 74, 75] у наукових виданнях, п'ять з яких [20, 21, 52, 74, 75] входять до переліку фахових видань МОН України, серед них дві статті [20, 21], які індексуються міжнародною науковометричною базою «Scopus».