ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу

Коваленка Олега Вікторовича

«Нерівності для похідних і екстремальні задачі теорії наближень у метричних просторах»,

подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю

01.01.01 – математичний аналіз

1. Актуальність теми дослідження. Основний напрям дисертаційного дослідження О. В. Коваленка пов'язаний зі встановленням непокращуваних нерівностей для похідних та розв'язанням низки класичних екстремальних задач теорії апроксимації в абстрактних метричних просторах.

Перші результати, що містять нерівності для похідних, з'явились в математичній літературі ще у 1910-х роках завдяки дослідженням Ж. Адамара, Ґ. Г. Гарді, Дж. І. Літтлвуда та Е. Ландау. Один з найважливіших результатів в цій тематиці належить А. М. Колмогорову, який отримав точну нерівність, що оцінює рівномірну норму проміжної похідної функції, заданої на числовій прямій, через рівномірну норму самої функції і рівномірну норму її старшої похідної. Зараз такого роду нерівності називають нерівностями типу Колмогорова. При цьому розглядаються різноманітні області задання функцій як однієї змінної (вісь, піввісь, відрізок), так і багатьох змінних, до того ж розглядають різноманітні норми функцій та їх похідних в різних степенях. Останні десятиліття в застосуваннях все більш важливу роль набувають дослідження узагальнених (в тому чи іншому сенсі) похідних функцій, зокрема похідних дробового порядку. Це зумовлює інтерес до вивчення точних нерівностей типу Колмогорова для норм таких узагальнених похідних.

У даній тематиці працювали, зокрема, В. Ф. Бабенко, Б. Боянов, А. П. Буслаєв, В. М. Габушин, С. Карлін, В. О. Кофанов, В. М. Коновалов, М. П. Купцов, А. О. Лигун, Ю. І. Любіч, Г. Г. Магаріл-Ільяєв, А. П. Маторін, Б. Надь, Н. В. Парфінович, Г. Поліа, С. О. Пічугов, Д. С. Скороходов, М. Стейн, Л. В. Тайков, О. Ю. Шадрін, І. Дж. Шонберг та багато інших.

Непокращувані нерівності для похідних функцій однієї або декількох змінних знаходять застосування у різноманітних задачах, зокрема у чисельних методах, звичайних диференціальних рівняннях і рівняннях з частинними похідними та інших напрямах аналізу. Отримання нових точних нерівностей такого типу для різних класів функцій і областей їх визначення, зокрема для класів Соболєва функцій однієї і багатьох дійсних змінних, є важливим і актуальним.

Нерівності для похідних пов'язані з такими важливими екстремальними задачами теорії наближень, як задача про наближення необмежених операторів обмеженими; задача наближення одного класу функцій іншим; задача оптимального відновлення функціоналів і операторів по точно заданій інформації або по інформації заданій з деякою похибкою та ін. Ці задачі також досліджувались багатьма математиками, серед яких В. В. Арестов, В. Ф. Бабенко, В. Л. Велікін, Х. Вожняковський, О. А. Женсикбаєв, М. П. Корнєйчук, В. П. Моторний, С. М. Нікольський, Е. Новак, К. Ю. Осипенко, В. І. Рубан, С. Б. Стєчкін, Ю. М. Субботін, Д. С. Скороходов, В. М. Тихомиров, Дж. Трауб, та інші.

Впродовж останніх десятиліть відбувся деякий просув у розвитку теорії апроксимації у напівлінійних метричних просторах. Такий більш загальний підхід з одного боку дозволяє розглядати задачі для багатозначних, нечітко-значних функцій та функцій зі значеннями у банахових просторах з єдиної точки зору, а з іншого – має перспективи розробки обчислювальних алгоритмів для розв'язання різноманітних прикладних задач, пов'язаних з такими функціями. З теоретичної точки зору важливо виявити наскільки далеко можна просунутись у напрямку узагальнення відомих результатів для числових функцій на випадок функцій зі значеннями у напівлінійних метричних просторах.

Однією з важливих класичних задач теорії апроксимації (яка вкладається в контекст задачі оптимального відновлення), є задача про найкращу квадратурну формулу. Перші постановки задач оптимізації квадратур в сенсі відшукання квадратурних формул найвищої алгебраїчної точності були сформульовані К. Ф. Гаусом на початку XIX століття. А. М. Колмогоров, виходячи з ідей теорії апроксимації, у 1940-х роках запропонував іншу постановку задачі оптимізації квадратур на класах функцій. Перші точні її розв'язки містяться в роботах А. Сарда та С. М. Нікольського. Завдяки їх дослідженням задача оптимізації квадратур увійшла до числа класичних задач теорії наближення. Великий внесок в справу знаходження точних розв'язків задачі оптимізації квадратур була отримана представниками дніпропетровської (а на даний час дніпровської) школи теорії наближення, зокрема М. П. Корнєйчуком, В. П. Моторним, А. О. Лигуном, О. А. Женсикбаєвим, В. Ф. Бабенком.

В силу важливості квадратурних формул, зокрема для питань чисельного аналізу, цікавим є отримання оптимальних або асимптотично оптимальних квадратурних формул на різних класах функцій, включаючи багатозначні та нечітко-значні функції, а також функції що приймають значення у нормованих просторах.

Задачу про точну оцінку зверху на деякому класі відхилення середнього значення функції від її значення в фіксованій точці через деякі спеціально підібрані характеристики функції можна розглядати як один з найпростіших варіантів задачі оптимізації квадратурних формул. Такого роду непокращувані нерівності часто називають нерівностями типу Островського. Маючи і самостійний інтерес, вони в деяких випадках можуть бути корисними в теорії наближень зокрема для доведення нерівностей типу Колмогорова, нерівностей типу Надя, для розв'язання задач оптимізації квадратурних формул. Тому доведення нових нерівностей типу Островського, зокрема для функцій зі значеннями у напівлінійних просторах, має науковий інтерес.

Зважаючи на вищесказане, вважаю тему дисертаційного дослідження О. В. Коваленка, пов'язану з одержанням непокращуваних нерівностей для похідних і розв'язанням екстремальних задач теорії наближень у метричних просторах, актуальною і перспективною.

2. Зміст та наукова новизна результатів. Дисертація складається з анотації, переліку умовних позначень, змісту, вступу, чотирьох розділів, висновків і переліку використаних джерел. Повний обсяг роботи складає 332 сторінки.

Перший розділ роботи присвячено дослідженню екстремальних задач теорії наближень у напівлінійних метричних просторах. У підрозділах 1.1 - 1.2 наведено означення і допоміжні твердження стосовно L–просторів.

Підрозділ 1.3 містить узагальнення леми Корнєйчука–Стєчкіна на випадок класів функцій, що приймають значення у L–просторах. Нехай ω — довільний модуль неперервності, $H^{\omega}([a,b],\mathbb{R})$ — клас функцій таких, що $|f(t)-f(s)|\leq\omega(|t-s|)$ для всіх $t,s\in[a,b]$. Для двох додатних майже скрізь інтегровних функцій $\psi_1\colon[a,a']\to\mathbb{R}_+$ і $\psi_2\colon[b',b]\to\mathbb{R}_+$, $a<a'\leq b'<b$ таких, що $\int_a^{a'}\psi_1(t)dt=\int_{b'}^{b}\psi_2(t)dt$, розглядається функція $\rho\colon[a,c]\to[c,b]$, $c=(a'+b')/2$, яка означається рівністю $\int_a^s\psi_1(t)dt=\int_{\rho(s)}^{b}\psi_2(t)dt$ при $s\in[a,a']$ і $\rho(s)=a'+b'-s$ при $s\in[a',c]$. та функція $\psi(t)$, яка на сегментах $[a,a']$ та $[b',b]$ набуває значень $\psi_1(t)$ та $-\psi_2(t)$ відповідно, а на інтервалі (a',b') вона дорівнює 0. Відповідно до класичної леми Корнєйчука–Стєчкіна має місце оцінка

$$\left|\int_a^b f(t)\psi(t)dt\right|=\left|\int_a^{a'}f(t)\psi_1(t)dt-\int_{b'}^{b}f(t)\psi_2(t)dt\right|\leq$$

$$\leq\int_a^{a'}\psi_1(s)\omega(\rho(s)-s)ds=\int_{b'}^{b}\psi_2(t)\omega\big(t-\rho^{-1}(t)\big)dt,$$

яка є точною у випадку опуклого вгору модуля неперервності ω. Ця лема була встановлена М. П. Корнєйчуком і незалежно від нього С. Б. Стєчкіним у 1959 році. Зазначена лема зіграла важливу роль у розв'язанні таких важливих екстремальних задач теорії наближень для функціональних класів, що задаються модулями неперервності, як задача Колмогорова-Нікольського для лінійних методів наближення, задача Фавара для найкращих наближень, задача Колмогорова для поперечників та ін.

У підрозділі 1.3 дисертант узагальнює лему Корнєйчука–Стєчкіна на випадок функцій зі значеннями у L–просторах. А саме, в лемі 1.3.2 встановлено, що для довільного L–простору (X, h_X) і функціонала $\sup\limits_{f\in H^{\omega}([a,b],X)} h_X\left(\int_a^{a'} f(t)\psi_1(t)dt, \int_{b'}^{b} f(t)\psi_2(t)dt\right)$ наведена вище оцінка залишається в силі. Якщо ж ω є опуклим вгору модулем неперервності, а простір X є ізотропним і таким, що $X^c \cap X^{inv} \neq \{\theta\}$, то в зазначеній оцінці можна поставити знак рівності. Внаслідок застосування леми 1.3.2 доводиться теорема 1.3.2, що містить оцінку відхилень середніх значень функцій на різних відрізках. А саме, якщо задано два відрізки $[a, b]$ і $[c, d]$, $a \leq c$, то дисертантом для всіх $f \in H^{\omega}([a, \max\{b, d\}], X)$ отримано оцінку зверху функціонала $h_X\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt, \frac{1}{d-c}\int_c^d f(t)dt\right)$. Якщо X є ізотропним, виконується умова (1.41) і ω є опуклим модулем неперервності, то отримана оцінка є точною.

У підрозділі 1.4 розв'язуються задачі оптимального відновлення для функцій зі значеннями у L–просторах. Похибкою відновлення відображення Λ на класі W методом U за інформацією, що задається багатозначним відображенням I, називається величина

$$\mathcal{E}(\Lambda, W, I, U, X) = \sup_{w\in W}\sup_{y\in I(w)} h_X\big(\Lambda(w), U(y)\big).$$

Величина

$$\mathcal{E}(\Lambda, W, I, X) = \inf_{U} \mathcal{E}(\Lambda, W, I, U, X)$$

називається оптимальною похибкою відновлення відображення Λ на класі W, за інформацією, що задається відображенням I. Розгляд багатозначних інформаційних операторів дозволяє включити до розгляду випадок, коли інформація відома із похибкою. Якщо для кожного $w \in W$, $I(w)$ є одноточковою множиною, то у цьому випадку $I: W \to Y$ і

$$\mathcal{E}(\Lambda, W, I, U, X) = \sup_{w\in W} h_X\Big(\Lambda(w), U\big(I(w)\big)\Big).$$

Якщо $\mathcal{I}$ — це деякий клас інформаційних операторів, то теоретичний інтерес має знаходження величини

$$\mathcal{E}(\Lambda, W, \mathcal{I}, X) = \inf_{I\in\mathcal{I}} \mathcal{E}(\Lambda, W, I, X)$$

і оптимального інформаційного відображення, на якому досягається інфімум в останній формулі.

У пункті 1.4.1 досліджується задача оптимального відновлення опуклюючого оператора і оператора інтегрування на класі $H^{\omega}([a, b], X)$ за інформацією, що задається інформаційним оператором вигляду

$$I_t(f) = \left(\frac{1}{2h}\int_{t_1-h}^{t_1+h} f(t)dt, \dots, \frac{1}{2h}\int_{t_n-h}^{t_n+h} f(t)dt\right),$$

використовуючи довільний метод відновлення $U: X^n \to B([a, b], X)$ при відновленні опуклюючого оператора і метод відновлення $U: X^n \to X$ при відновленні інтеграла; $B([a, b], X)$ позначає простір вимірних обмежених функцій $f: [a, b] \to X$ з метрикою $h_{B([a,b],X)}(f, g) = \sup\limits_{x\in[a,b]} h_X\big(f(x), g(x)\big)$.

Головними результатами пункту 1.4.1 є теореми 1.4.1 і 1.4.2. В теоремі 1.4.1 для опуклюючого оператора P, ізотропного простору X, для якого виконується властивість (1.41), і довільного модуля неперервності ω, встановлена рівність

$$\inf_{t} \mathcal{E}\left(P, H^{\omega}([a, b], X), I_t, B([a, b], X)\right) = \frac{1}{2h}\int_{(b-a)/(2n)-h}^{(b-a)/(2n)+h} \omega(u)du.$$

Вказано оптимальний інформаційний оператор I_{t^*}, і оптимальний метод відновлення U^*.

В теоремі 1.4.2 для оператора Int інтегрування по відрізку $[a,b]$, ізотропного простору X, для якого виконується властивість $X^c \cap X^{inv} \neq \{\theta\}$, і опуклого модуля неперервності ω, встановлено рівність

$$\inf_t \mathcal{E}(Int, H^{\omega}([a,b],X), I_t, X) = 2n\left(1-\frac{2nh}{b-a}\right)\int_0^{(b-a)/(2n)} \omega(t)dt,$$

а також вказано оптимальний інформаційний оператор I_{t^*}, і оптимальний метод відновлення U^*.

У пункті 1.4.2 розглянуто задачі оптимального відновлення одиничного відображення і оператора $\mathcal{D}_H$ похідної типу Хукухара на класі $W^1H^{\omega}([a,b],X)$ функцій $f:[a,b]\to X$, чия похідна типу Хукухара належить до класу $H^{\omega}([a,b],X)$. У цих задачах інформаційними операторами виступають оператори $I_t(f) = \big(f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_n)\big)$, де $t = (t_0, \dots, t_n)$, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$.

Теорема 1.4.3 стверджує, що для довільного опуклого модуля неперервності ω, одиничного оператора Id, та ізотропного L–простору X з властивістю $X^c \cap X^{inv} \neq \{\theta\}$, виконується рівність

$$\inf_t \mathcal{E}\big(Id, W^1H^{\omega}([a,b],X), I_t, C([a,b],X)\big) = \frac{1}{4}\int_0^{(b-a)/n} \omega(t)dt.$$

Оптимальним інформаційним оператором є оператор I_{t^*} де t^* — рівномірне розбиття, також вказано оптимальний метод відновлення $U\big(I_{t^*}(f)\big)$.

Теорема 1.4.4 стверджує, що якщо задано модуль неперервності ω і $t^* = (t_0^*, \dots, t_n^*)$ позначає рівномірне розбиття відрізка $[a,b]$ то для ізотропного L–простору X з властивістю $X^c \cap X^{inv} \neq \{\theta\}$

$$\mathcal{E}\big(\mathcal{D}_H, W^1H^{\omega}([a,b],X), I_{t^*}, B([a,b],X)\big) = \frac{n}{b-a}\int_0^{(b-a)/n} \omega(u)du.$$

Оптимальним методом відновлення є $U\big(f(t_0^*), f(t_1^*), \dots, f(t_n^*)\big) = \mathcal{D}_H l_f(t^*)$. Теореми 1.4.3-1.4.4 узагальнюють результати В. Н. Малозьомова 1966-1967 років.

У пункті 1.4.3 розглянуто задачу оптимального відновлення монотонних операторів, що діють у частково впорядкованих L–просторах функцій. Задачі оптимізації квадратурних формул на класах монотонних дійснозначних функцій або на класах багатозначних функцій розглядалися у роботах Дж. Кіфера, А. Папагеоргіу, В. Ф. Бабенка, В. В. Бабенко, С. В. Бородачова та ін.

У пункті 1.4.4 дисертант розглянув так звані оператори типу (λ, φ), і навів загальну теорему (теорема 1.4.9) про оптимальне відновлення таких операторів, на основі інформації про значення функцій у n точках, які відомі із похибкою.

У підрозділі 1.5 розв'язується задача типу Стєчкіна про наближення операторів та деякі інші пов'язані з нею проблеми. Нехай X та Y — це два L–простори, а $A, S: X \to Y$ — це два оператори з областями $D_A, D_S \subset X$ відповідно. Нехай також задано деякий клас елементів $Q \subset D_A \cap D_S$. Задача знаходження відхилення між операторами A і S на множині Q, тобто величини

$$U(A,S,Q) := \sup_{x\in Q} h_Y(Ax, Sx),$$

відіграє важливу роль у теорії наближень. В частинних випадках величина $U(A,S,Q)$ виражає похибку кубатурної формули S на класі Q а також вона може бути оператором найкращого наближення елементами з деякої множини (наприклад множини поліномів). Задача Стєчкіна, у свою чергу, тісно пов'язана з нерівностями типу Ландау-Колмогорова та задачею знаходження модуля неперервності оператора A на класі Q, тобто функції $\Omega(\delta) = \Omega(A,Q;\delta) := \sup\{\| Ax \| : x \in Q, \| x \| \leq \delta\}$, $\delta \geq 0$.

У пункті 1.5.1 досліджено задачу про наближення інтегральних операторів у просторах функцій зі значеннями в L-просторах, окреслено можливості застосування одержаних результатів до задач апроксимації узагальненими тригонометричними поліномами, оптимізації формул наближеного інтегрування, та відновлення функцій за неточно заданою інформацією. Головною теоремою цього пункту є теорема 1.5.1, згідно з якою: для $p \in (1, \infty]$, функцій $K, N: Q \times S \to \mathbb{R}$ таких, що $K(t,\cdot), N(t,\cdot) \in L_{p'}(S)$ для кожного $t \in Q$, операторів

$$(\tilde{K}\phi)(t) = \int_S K(t,s)\phi(s)d\mu(s), \qquad (\tilde{N}\phi)(t) = \int_S N(t,s)\phi(s)d\mu(s),$$

довільної функції $\phi \in L_p(S, X)$ і кожного $t \in Q$ має місце нерівність

$$h_X\left((\tilde{K}\phi)(t), (\tilde{N}\phi)(t)\right) \leq \| K(t,\cdot) - N(t,\cdot) \|_{L_{p'}(S)} \| h_X(\phi, \theta) \|_{L_p(S)}.$$

Якщо простір X є ізотропним і у множині $X^c \cap X^{inv}$ знайдеться ненульовий елемент a для якого $a' = -a$, то нерівність непокращувана і перетворюється на рівність.

Другий розділ дисертації присвячено розвязанню екстремальних задач на класах функцій Соболєва багатьох змінних. Для заданого відкритого опуклого конуса $C \subset \mathbb{R}^d$, породженого скінченною кількістю точок ($C \in \mathcal{C}$), опуклої обмеженої центрально-симетричної множини $K \subset \mathbb{R}^d$, що містить початок координат у своїй внутрішності ($K \in \mathbb{K}$) розглянуто множину $L^1_{\infty,p}(C)$, $p \in [1, \infty]$, функцій $f: C \to \mathbb{R}$ таких, що $f \in L_\infty(C)$ і всі (узагальнені) частинні похідні першого порядку належать до $L_p(C)$, а також класи

$$W^K_{\infty,p} = W^K_{\infty,p}(C) := \left\{ f \in L^1_{\infty,p}(C) : \| |\nabla f|_{K^\circ} \|_{L_p(C)} \leq 1 \right\},$$

де K° — полярна до K множина, $|\cdot|_K$ позначає норму у $\mathbb{R}^d$, що породжена множиною K, тобто $|x|_K := \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda K\}$. На класі $W^K_{\infty,p}(C)$ розв'язується задача Стєчкіна найкращого наближення необмеженого гіперсингулярного інтегрального оператора

$$D_{K,w}: L^1_{\infty,p}(C) \to L_\infty(C), \ D_{K,w}f(x) = \int_C w(|t|_K)\big(f(x) - f(x+t)\big)dt$$

за допомогою обмежених, де $w: (0, \infty) \to [0, \infty)$ деяка вагова функція, що може мати неінтегровну особливість в точці 0. Якщо K — евклідова куля у $\mathbb{R}^d$, $C = \mathbb{R}^d$ і $w(t) = t^{-(d+\alpha)}$, $\alpha \in (0,1)$, цей інтеграл перетворюється на оператор дробової похідної у сенсі Ріса. Позначивши через $\mathcal{L}_p(a, b)$ простір усіх вимірних функцій $w: (a, b) \to \mathbb{R}_+$ зі скінченною нормою

$$\| w \|_{\mathcal{L}_p(a,b)} = \begin{cases} \left(\int_a^b t^{d-1} w^p(t) dt \right)^{1/p}, & p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{t \in (a,b)} t^{d-1} w(t), & p = \infty, \end{cases}$$

розглядають простір $\mathcal{W}_p(0, h)$, $h > 0$, $p \in [1, \infty]$ усіх невід'ємних функцій $w: (0, h] \to \mathbb{R}$ таких, що $w \in \mathcal{L}_1(u, h)$ для всіх $u \in (0, h)$ і функція $g_{w,h}(u) = g_w(u) = \frac{1}{u^{d-1}} \int_u^h w(t) t^{d-1} dt$ належить до $\mathcal{L}_p(0, h)$, а також простір $\mathcal{W}^*_p(0, h)$ усіх невід'ємних функцій $w: (0, h] \to \mathbb{R}$ таких, що $w \in \mathcal{L}_p(u, h)$ для всіх $u \in (0, h)$, для усіх ν достатньо близьких до 1 зліва, функція $w_\nu(u) = \sup\limits_{t \in [\nu u, u]} |w(t) - w(u)|$ належить до $\mathcal{W}_p(0, h)$, і $\lim_{\nu \to 1-0} \| g_{w_\nu,h} \|_{\mathcal{L}_p(0,h)} = 0$.

Головним результатом підроздулу 2.3 є теорема 2.3.1 в якій при всіх $p \in (d, \infty]$, $C \in \mathcal{C}$ міститься точна рівність для величини $E_N\big(D_{K,w}, W^K_{\infty,p}\big)$ у випадку, коли $K \in \mathbb{K}$ — це політоп, і $w \in \mathcal{W}_{p'}(0,1) \cap \mathcal{L}_1(1, \infty)$, або $K \in \mathbb{K}$ і $w \in \mathcal{W}^*_{p'}(0,1) \cap \mathcal{L}_1(1, \infty)$. Крім того, в теоремі вказано явний вигляд екстремального оператора.

Підрозділ 2.4 присвячений знаходженню точної оцінки величини $U\big(D_{K,w}, D_{K,w,h}, W^K_{\infty,p}\big)$. Теорема 2.4.1, яка є узагальненим багатовимірним аналогом нерівності типу Островського, стверджує, що якщо $p \in (d, \infty]$, $C \in \mathcal{C}$, $K \in \mathbb{K}$ — політоп, $h > 0$ і $f \in W^{1,p}(hK \cap C)$, то для довільної $w \in \mathcal{W}_{p'}(0, h)$

$$\left| \int_{hK \cap C} w(|y|_K)[f(y) - f(\theta)] dy \right|$$
$$\leq \big(d \cdot \operatorname{meas}(K \cap C)\big)^{\frac{1}{p'}} \|g_{w,h}\|_{\mathcal{L}_{p'}(0,h)} \| |\nabla f|_{K^\circ} \|_{L_p(hK \cap C)},$$

ця нерівність є точною. Якщо ж $w \in \mathcal{W}^*_{p'}(0,h)$, то нерівність справедлива і точна для усіх $K \in \mathbb{K}$.

Гіперсингулярні інтегральні оператори тісно пов'язані з операторами дробового диференціювання. Екстремальні задачі теорії наближення для таких операторів для функцій однієї і багатьох змінних досліджувались багатьма математиками. Точні нерівності типу Колмогорова для функцій багатьох змінних були отримані, зокрема, в роботах В. М. Коновалова, А. П. Буслаєва, В. М. Тихомирова, Динь-Дзунга, В. Ф. Бабенка, В. О. Кофанова, С. О. Пічугова, Н. В. Парфінович та ін.

У підрозділі 2.5 встановлено багатовимірний аналог точної адитивної нерівності типу Ландау–Колмогорова, де $\| D_{K,w,h} f \|_{L_\infty(C)}$ оцінюється за допомогою норм $\| |\nabla f|_{K^\circ} \|_{L_p(C)}$ і $\| f \|_{L_\infty(C)}$. Теорема 2.5.1 стверджує, що коли $p \in (d,\infty]$, $C \in \mathcal{C}$, політоп $K \in \mathbb{K}$, $h > 0$, $w \in \mathcal{W}_{p'}(0,h) \cap \mathcal{L}_1(h,\infty)$. Для кожної функції $f \in L^1_{\infty,p}(C)$

$$\| D_{K,w} f \|_{L_\infty(C)} \le \left(d \cdot \mathrm{meas}(K \cap C)\right)^{\frac{1}{p'}} \|g_{w,h}\|_{\mathcal{L}_{p'}(0,h)} \cdot \| |\nabla f|_{K^\circ} \|_{L_p(C)}$$

$$+ 2d \cdot \mathrm{meas}(K \cap C) \left(\int_h^\infty w(\rho) \rho^{d-1}\, d\rho \right) \| f \|_{L_\infty(C)}.$$

Якщо додатково $w \in \mathcal{W}^*_{p'}(0,h)$, то нерівність справедлива і точна для довільного $K \in \mathbb{K}$.

Коли вага w є степеневою функцією, то з теореми 2.5.1 автор отримує нерівність типу Ландау–Колмогорова у мультиплікативній формі: при $p \in (d,\infty]$, $C \in \mathcal{C}$, $K \in \mathbb{K}$, і $w(t) = \frac{1}{t^{d+\gamma}}$, $t > 0$, з $0 < \gamma < 1 - \frac{d}{p}$ для $f \in L^1_{\infty,p}(C)$

$$\| D_{K,w} f \|_{L_\infty(C)} \le \frac{X^{p'} + YZ}{X^{(p'-1)\alpha} \cdot Z^{1-\alpha}} \cdot \| f \|^{1-\alpha}_{L_\infty(C)} \cdot \| |\nabla f|_{K^\circ} \|^{\alpha}_{L_p(C)},$$

де $\alpha = \frac{p\gamma}{p-d}$, $X = \left(d \cdot \mathrm{meas}(K \cap C)\right)^{\frac{1}{p'}} \|g_{w,1}\|_{\mathcal{L}_{p'}(0,1)}$, $Y = \frac{2d \cdot \mathrm{meas}(K \cap C)}{\gamma}$ і $Z = \frac{1}{2}\int_0^1 g^{p'-1}_{w,1}(u)\,du$. Нерівність є точною. Якщо K – політоп, то для кожного $h > 0$ вона перетворюється на рівність.

Ряд результатів 2 розділу присвячено оптимізації квадратурних формул для класів Соболєва багатьох змінних. Головними результатами у цьому напрямі є асимптотично точні квадратурні формули. У підрозділі 2.7 розглянуто задачу оптимального відновлення оператора $Int\, f = \int_Q f(x)dx$ на класі $W^\infty_p(Q) := \{f \in W^{1,p}(Q) : \| \, |\nabla f|_1 \, \|_p \le 1\}$, $p \in (d,\infty]$ для деяких типів множин Q. Для фіксованого $n \in \mathbb{N}$ дисертант розглянув множину $\mathcal{I}_n$ інформаційних операторів $If = \left(f(x_1), \dots, f(x_n)\right)$, $x_1, \dots, x_n \in Q$.

У пункті 2.7.2 знайдено точне значення величини $\mathcal{E}\left(Int, W^\infty_p(Q), \mathcal{I}_n, \mathbb{R}\right)$ при $d \in \mathbb{N}$ у випадку, коли область $Q \subset \mathbb{R}^d$, що складена з n кубів з центрами $\bar{x}_k$, $k = 1, \dots, n$, і $p \in (d,\infty]$. Головним результатом пункту 2.7.3 є теорема 2.7.3, що дає асимптотично оптимальний розв'язок задачі оптимального відновлення інтеграла. А саме для $d \in \mathbb{N}$, $p \in (d,\infty]$, і обмеженої відкритої опуклої множини Q

$$\mathcal{E}\left(Int, W^\infty_p(Q), \mathcal{I}_n, \mathbb{R}\right) = c(d,p) \left(\frac{\mathrm{meas} Q}{2^d}\right)^{\frac{1}{d}+\frac{1}{p'}} \cdot \frac{1 + o(1)}{n^{\frac{1}{d}}}, n \to \infty,$$

де $c(d,p) := \frac{1}{d} \left\| \frac{1}{|\cdot|^{d-1}_\infty} - |\cdot|_\infty \right\|_{L_{p'}(\circ\, ^d_1)}$. При цьому пред'явлено асимптотично оптимальні набори інформаційних вузлів і методи відновлення.

У пункті 2.7.4 доведено, що теорема 2.7.3 залишається справедливою і у випадку, коли Q є зірчатою відносно деякої кулі множиною, тобто коли існує куля $B \subset Q$ така, що для всіх $x \in Q$ і $y \in B$ відрізок xy належить Q.

Третій розділ дисертації присвячено відшуканню точних нерівностей типу Островського, тобто нерівностей, які оцінюють відхилення функції від її середнього значення за допомогою деяких характеристик функції. Джерелом проблематики є результат А. Островського (1937 р.) :

для диференційовної на $[0,1]$ функції f з обмеженою похідною і $x \in [0,1]$ справедлива така точна нерівність

$$\left|\int_0^1 f(t)dt - f(x)\right| \leq \left(\frac{1}{4} + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right) \sup_{t\in(0,1)} |f'(t)|.$$

В підрозділі 3.1 дисертант пропонує загальний підхід (див. лему 3.1.1) до задачі знаходження відхилення $\sup\limits_{f\in Q} h_Y(Af, Sf)$ операторів A і S на множині Q. В рамках ефективної реалізації такого підходу автор встановлює точні нерівності типу Островського на класах функцій, старша похідна яких (або результат дії деякого загального диференціального оператора) належить до $L_p(a,b)$, $p \in [1,\infty]$, або $H^\omega([a,b],\mathbb{R})$. Зокрема, в теоремі 3.1.1 знайдено точне значення відхилення операторів

$$\sup_{f\in W^n[a,b]} \left|\int_a^b p(t)f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\left(\int_a^b p(t)(t-x)^k dt\right) f^{(k)}(x)\right|$$

на класах $W^n[a,b]$, $n \in \mathbb{N}$. Теорема 3.1.3 стверджує: якщо задано непарне $n \in \mathbb{N}$, модуль неперервності ω, інтегровну додатну майже скрізь на $[a,b]$ функцію p і точку $x \in [a,b]$ таку, що виконується умова $\int_a^b r_x^n(t)dt = 0$, де $r_x^0 = p$, $r_x^k = r_x(r_x^{k-1})$, $k = 1,\dots,n$, то

$$\sup_{f\in W^n H^\omega[a,b]} \left|\int_a^b p(t)f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\left(\int_a^b p(t)(t-x)^k dt\right) f^{(k)}(x)\right|$$

$$= \sup_{g\in H^\omega[a,b]} \left|\int_a^b r_x^n(t)g(t)dt\right| \leq \int_a^x |r_x^n(t)|\,\omega(\rho(t)-t)dt,$$

де $r_x(\varphi; s) = \begin{cases} -\int_a^s \varphi(t)dt, & s \leq x, \\ \int_s^b \varphi(t)dt, & s \geq x \end{cases}$,

а $\rho(t)$ визначається умовою $\int_a^t r_x^n(s)ds = \int_a^{\rho(t)} r_x^n(s)ds$ для всіх $t \in [a,x]$.

У підрозділі 3.2 доведено точні нерівності типу Островського для функцій багатьох змінних і множин у скінченно-вимірних просторах. При цьому для означення обмеженої варіації для функцій багатьох змінних і багатовимірних множин автор використовує підхід Кронрода–Вітушкіна. Варіацією компактної множини $F \subset \mathbb{R}^d$ означено величину

$$v_p(F) := \begin{cases} \left(\dfrac{1}{\mu\mathbb{P}^{d-1}} \displaystyle\int_{\mathbb{P}^{d-1}} v^p(F,r)dr\right)^{\frac{1}{p}}, & p \in [1,\infty), \\ \operatorname{ess\,sup}_{r\in\mathbb{P}^{d-1}} v(F,r), & p = \infty, \end{cases}$$

де $v(F,r) := \operatorname{ess\,sup}_{\beta\in\Pi^{d-1}(r)} N\big(F \cap l(r,\beta)\big)$, $\Pi^{d-1}(r)$ — гіперплощина, що містить θ і є ортогональною до прямої r, а $l(r,\beta)$ — пряма, паралельна до r, що проходить через точку β. Варіацією неперервної функції $f: F \to \mathbb{R}$ на компактній множині $F \subset \mathbb{R}^d$ для $p \in [1,\infty]$ означено величину

$$v_p(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v_p\big(L(f;t)\big)dt,$$

де $L(f;t) = \{x \in F: f(x) = t\}$ — множина рівня t для функції f.

В підрозділі 3.2.5 розглянуто сім'ю $\mathfrak{A}$ всіх компактних опуклих множин $A \subset \mathbb{R}^d$ таких, що $\theta \in int\, A$ і для всіх $\lambda \in \left(0, \frac{\mu S^{d-1}}{2}\right]$ точна нижня грань $C(A,\lambda) := \inf\limits_{\substack{\Lambda\subset S^{d-1},\, \mu\Lambda=\lambda, \\ \Lambda\cap(-\Lambda)=\emptyset}} \mu^d[\mathcal{C}(\Lambda) \cap A]$ досягається на деякій множині $\Lambda(\lambda)$ для якої конус, породжений множиною $\Lambda(\lambda)$, є опуклим.

Теорема 3.2.2 стверджує: якщо $A \in \mathfrak{A}$ і задано неперервну функцію $f: A \to \mathbb{R}$, то для всіх $p \in [1,\infty]$ виконується точна нерівність

$$\left|\int_A f(x)dx - \mu^d A \cdot f(\theta)\right| \leq C_p(A) v_p(f),$$

де константа $C_p(A)$ означена у формулі (3.43). Ця нерівність перетворюється на рівність тільки у випадку сталої f.

У підрозділі 3.3 для опуклого модуля неперервності ω розглядається клас $\mathcal{H}^\omega$ випадкових процесів $\xi_t, t \in [0,1]$, для яких $E|\xi_\tau - \xi_\theta| \le \omega(\text{ess sup}_w |\tau(w) - \theta(w)|)$ для будь-яких випадкових величин τ і θ, що приймають значення на відрізку $[0,1]$ (клас таких випадкових величин позначено через $\mathcal{R}$). Теорема 3.3.1 стверджує, що для випадкової величини $\tau \in \mathcal{R}$

$$\sup_{\xi \in \mathcal{H}^\omega} E\left|\int_0^1 \xi_t\, dt - \xi_\tau\right| = \int_0^{\frac{1}{2}-t^*} \omega(s)ds + \int_0^{\frac{1}{2}+t^*} \omega(s)ds, \qquad \partial e\ t^* := \left\|\tau(\cdot) - \frac{1}{2}\right\|_\infty .$$

В теоремі 3.3.2 отримано розв'язок задачі оптимального відновлення інтеграла $Int\, \xi_t := \int_0^1 \xi_t\, dt$ на класі випадкових процесів $\mathcal{H}^\omega$, на основі інформаційного оператора $J_t(\xi_t) = (\xi_{\tau_1}, \dots, \xi_{\tau_n})$, де $n \in \mathbb{N}$, $\tau_k = \tau + t_k$, $\tau \in \mathcal{R}$, і $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$, а числа $0 = t_1 < \dots < t_n$ є такими, що $\tau + t_n \le 1$ майже напевно, тобто вона містить точне значення величини $\mathcal{E}(Int, \mathcal{H}^\omega, J_t, \mathcal{R})$.

Четвертий розділ дисертації присвячено встановленню нерівностей типу Надя та розв'язанню деяких інших екстремальних задач. Початок досліджень в цій тематиці поклав Б. С. Надь (1941 р.), який отримав точні нерівності вигляду

$$\| x \|_{L_q(\mathbb{R})} \le K \| x \|^\alpha_{L_p(\mathbb{R})} \| x' \|^\beta_{L_s(\mathbb{R})}.$$

У просторі $L_{loc}(X)$ – усіх функцій $f : X \to \mathbb{R}$, інтегровних на кожній відкритій кулі простору X, розглядається сімейство напівнорм

$$\rfloor f \lceil_h = \sup_{x \in X} \left| \int_{x + B_h} f(u) d\mu(u) \right|, \ h > 0 \ \text{ і } \rfloor f \lceil = \sup_{h > 0} \rfloor f \lceil_h .$$

Нехай $L_{\rfloor\cdot\lceil_h}(X)$ $(L_{\rfloor\cdot\lceil}(X))$ – множина $f \in L_{loc}(X)$ зі скінченною напівнормою $\rfloor \cdot \lceil_h$ (відп. $\rfloor \cdot \lceil$), $\mathcal{B}(X)$ – простір обмежених функцій $f: X \to \mathbb{R}$ з нормою $\| f \|_{\mathcal{B}(X)} = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Для модуля неперервності ω через $H^\omega(X)$ позначено простір функцій $f: X \to \mathbb{R}$ таких, що

$$\| f \|_{H^\omega(X)} := \sup_{x, y \in X, x \ne y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\omega(\rho(x,y))} < \infty.$$

Розглядається оператор $S_h: L_{\rfloor\cdot\lceil_h}(X) \to \mathcal{B}(X)$, $S_h f(x) = \frac{1}{\mu(B_h)} \int_{B_h} f(x+u) d\mu(u)$.

У теоремі 4.1.1 стверджується: якщо $h > 0$ і $f \in H^\omega(X) \cap L_{\rfloor\cdot\lceil_h}(X)$, то виконується точна нерівність

$$\| f \|_{\mathcal{B}(X)} \le \| f - S_h f \|_{\mathcal{B}(X)} + \| S_h \|_{L_{\rfloor\cdot\lceil_h}(X) \to \mathcal{B}(X)} \| f \|_{L_{\rfloor\cdot\lceil_h}(X)}$$
$$\le \frac{\| f \|_{H^\omega(X)}}{\mu(B_h)} \int_{B_h} \omega(\rho(u, \theta)) d\mu(u) + \frac{\rfloor f \lceil_h}{\mu(B_h)}.$$

Крім того, для кожного $h > 0$ виконується нерівність

$$\| f \|_{\mathcal{B}(X)} \le \frac{\| f \|_{H^\omega(X)}}{\mu(B_h)} \int_{B_h} \omega(\rho(u, \theta)) d\mu(u) + \frac{\rfloor f \lceil}{\mu(B_h)},$$

яка є точною на класі $H^\omega(X) \cap L_{\rfloor\cdot\lceil}(X)$.

Для класів Соболєва $W^{1,p}(C)$ нерівності типу Надя містяться у теоремі 4.1.2, згідно з якою: якщо $h > 0, p \in (d, \infty]$ і $f \in W^{1,p}(C) \cap L_{\rfloor\cdot\lceil_h}(C)$, то $f \in L_\infty(C)$ і виконується точна нерівність

$$\| f \|_{L_\infty(C)} \le \| f - S_h f \|_{L_\infty(C)} + \| S_h \|_{L_{\rfloor\cdot\lceil_h}(C) \to L_\infty(C)} \cdot \rfloor f \lceil_h$$
$$\le \| g_h(|\cdot|_K) \|_{L_{p'}(hK \cap C)} \| |\nabla f|_{K^\circ} \|_{L_p(C)} + \mu^{-1}(K \cap C) h^{-d} \rfloor f \lceil_h .$$

У теоремах 4.3.1 та 4.3.3 підрозділу 4.3 наведено нерівності типу Ландау-Колмогорова для класів зарядів ν похідні Радона–Нікодима яких ($D_\mu \nu$) належать відповідно класам $H^\omega(X)$ та $W^{1,p}(C)$.

Відштовхуючись від отриманих дисертантом нерівностей для похідних і загальних взаємозв'язків між екстремальними задачами, у підрозділі 4.5 знайдено розв'язок задачі Стєчкіна про наближення деяких необмежених операторів обмеженими.

У теоремі 4.6.4 підрозділу 4.6 при деяких обмеженнях на функції $f_{\pm}$ і g, які задають вагову норму $\| x \|_{C(\mathbb{R}_+),f_-,f_+}$ знайдено точне значення величини $\Omega\left(W^r_{f_-,f_+,g}(\mathbb{R}_+), D^k, \delta\right)$ – модуля неперервності оператора k–кратного диференціювання D^k, $k = 1, \dots, r-1$, на вагових класах Соболєва $W^r_{f_-,f_+,g}(\mathbb{R}_+)$.

3. Обґрунтованість та достовірність результатів дисертації. Дисертаційна робота Коваленка Олега Вікторовича виконана на високому науковому рівні. Одержані в ній математичні результати є новими, достовірними та науково значимими. Обґрунтованість наукових результатів забезпечується повними та строгими доведеннями. Положення дисертації викладено доволі послідовно й логічно, з дотриманням сучасних математичних стандартів.

4. Публікації та апробація результатів. Основні результати дисертаційної роботи досить повно представлено у 32 наукових публікаціях, з яких 17 — статті, надруковані в закордонних наукових виданнях а також наукових виданнях, внесених до переліку наукових фахових видань України, а 15 – в збірниках тез міжнародних та вітчизняних наукових конференцій. Усі 17 статей надруковано в математичних журналах, внесених до міжнародних наукометричних баз Web of Science та/або Scopus. Відповідно до пункту 2 наказу № 1220 МОН України від 23.09.2019 зазначені 17 статей зараховуються як 33 наукові публікації.

Результати роботи пройшли достатню апробацію: вони доповідались на фахових наукових семінарах у провідних наукових та освітянських центрах України, а також на численних міжнародних та вітчизняних математичних конференціях як в Україні так і за її межами. Реферат адекватно висвітлює основні результати дисертації.

5. Дотримання академічної доброчесності. Ознак фальсифікації, фабрикації та академічного плагіату за результатами ознайомлення з текстом дисертації та реферату не виявлено. Використані у роботі результати інших авторів містять необхідні посилання і містяться у списку використаних джерел. В тесті дисертації та реферату зазначено особистий внесок здобувача у результати, що включено до дисертації зі статей, які написано у співавторстві.

6. Практичне значення результатів дисертації. Дисертаційна робота Коваленка Олега Вікторовича є завершеною науковою працею, яка містить важливі результати теоретичного характеру. Отримані у роботі результати та нові загальні підходи можуть знайти практичне застосування в багатьох галузях математики, зокрема, в теорії наближення, в обчислювальній математиці, теорії ймовірностей тощо.

7. Зауваження та недоліки.

1. Перелік умовних позначень в дисертації неповний. До нього варто було б віднести поняття характеристик $\mathcal{E}(\Lambda, W, I, U, X)$, $\mathcal{E}(\Lambda, W, I, X)$, $\mathcal{E}(\Lambda, W, \mathcal{J}, X)$, $E_{\mathfrak{S}}(A, Q)$, $E_N(A, Q)$, просторів X^c, X^{inv}, $C([a,b], X)$, $B([a,b], X)$, $E(S, Y)$, $\mathcal{L}_p(a,b)$, класів $W^1H^{\omega}([a,b], X)$, $\mathcal{H}^{\omega}(T)$, $W^K_{\infty,p}(C)$, операторів $(\widetilde{K}\phi)(t)$, $\Delta^H_{\gamma_1,\gamma_2} f(t)$, та ін.

2. На с. 33 дисертації автор цілком слушно зазначивши, що «лема Корнєйчука–Стєчкіна зіграла важливу роль у розв'язанні багатьох екстремальних задач теорії наближень», в якості прикладів узагальнень і застосувань наводить посилання на монографії М. П. Корнєйчука, С. Багдасарова та О. І. Степанця, що видані у 80-х -90-х роках минулого століття. На наш погляд, доцільно було б навести також посилання на більш свіжі результати двох останніх десятиліть по ефективному застосуванню цієї леми (принаймні, згадати монографію [201]).

3. Допущена невелика кількість помилок набору: на с.98 замість «$(C[a,b], X)$ » треба писати «$C([a,b], X)$», аналогічно на с.132 замість "$\| x \|_{H^2_{\beta 2}} := \sup\limits_{s \neq 0} \frac{\| \Delta^2_s x \|_\infty}{| s |^{\beta 1}}$" треба написати "$\| x \|_{H^2_{\beta 2}} := \sup\limits_{s \neq 0} \frac{\| \Delta^2_s x \|_\infty}{| s |^{\beta 2}}$".

4. При доведенні формули (2.17) леми 2.4.7 доцільно було зазначити, що застосовувалась лема 2.4.1 при $x=\theta$, лема 2.4.6 та нерівність Гельдера.

5. У формулюванні леми 1.3.2 (узагальнення леми Корнєйчука-Стєчкіна) треба замість слів «супремум досягається» записати «супремум в (1) досягається», оскільки в (1.40) символа sup немає. Крім того, у формулюванні леми 1.3.2 доцільно зазначити, що функцію $f_x(t)$ означено в (1.30).

6. Трапляються не зовсім вдалі висловлювання на кшталт «метод відновлення дається формулою», «властивості…даються лемою»(с.87), «ми знаходимо модуль неперервності оператора» (с. 308) тощо.

7. Наявні поодинокі недоліки при здійсненні посилань. Так на с. 31 частина джерел нумерується за списком публікацій здобувача, розміщеного на с. 12-16 (і продубльованого в додатку А на с. 327-331), а нумерація іншої частини літературних джерел на тій самій сторінці – за списком використаних джерел, розміщеного на с. 309-326.

8. Трапляється помилкове використання деяких термінів чи назв іншомовного походження: замість «теорема Хана- Банаха» треба «теорема Гана-Банаха» (с. 191), замість «майже всюди» треба «майже скрізь» (с. 32, 57, 75, 101, 107, 189, 202), замість «визначимо функцію (чи інший об'єкт)» треба «означимо функцію (чи інший об'єкт)» (с. 32, 57, 67, 150, 154, …); замість «одержання розв'язків задач» вживається «одержання розв'язань задач» (с. 32, 57), замість «оберемо (константу, множину…)» краще писати «розглянемо чи підберемо (константу, множину…)» (с. 66, 82, 91, 93, 155, 165, …), замість «опуклої догори» краще писати «опуклої вгору» (с. 76,), замість «довизначимо» треба «доозначимо» (с. 98) тощо.

9. Мають місце граматичні помилки (с. 25, 30, 175, 200, 218, 277).

Наведені недоліки не є принциповими, вони носять технічний чи редакційний характер і не впливають на загальне позитивне враження від дисертації.

8. Висновки. Зважаючи на вищесказане, вважаю, що дисертаційна робота Коваленка Олега Вікторовича «Нерівності для похідних і екстремальні задачі теорії наближень у метричних просторах» є завершеною науковою працею, що містить нові, важливі, актуальні і науково обґрунтовані теоретичні результати. Дисертація відповідає паспорту спеціальності 01.01.01 – математичний аналіз, її структура і обсяг задовольняють усім необхідним вимогам. Робота пройшла достатню апробацію, а її основні результати належним чином опубліковані. Реферат адекватно відображає зміст дисертації.

Отже, дисертаційна робота Коваленка Олега Вікторовича «Нерівності для похідних і екстремальні задачі теорії наближень у метричних просторах» відповідає усім вимогам «Порядку присудження та позбавлення наукового ступеня доктора наук», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України №1197 від 17 листопада 2021 року, а її автор заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
Ідентифікаційний код 05417207
м. Київ

Доктор фіз.-мат. наук, професор,
провідний науковий співробітник
відділу теорії функцій
Інституту математики НАН України

Анатолій СЕРДЮК

Підпис

ЗАСВІДЧУЮ
Відділ кадрів
Інститут математики НАН України
« 4 » листопада 2024 р.

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
Ідентифікаційний код 05417207
м. Київ

Надійшов до докторської ради Д 26.206.01 4 листопада 2024 р.
Учений секретар Інституту математики НАН України (Соколенко І.В.)