Відгук офіційного опонента
на дисертацію Олега КОВАЛЕНКА
"Нерівності для похідних і екстремальні задачі теорії наближень у метричних просторах", поданої на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз.

1. **Актуальність теми дисертації.** Теорія наближень є одним з розділів математики, що має більш ніж 150-ти річну історію, але при цьому інтенсивно розвивається. Фундамент цього розділу математики закладено класичними роботами П. Л. Чебишова, К. Ф. Веєрштраса, Д. Джексона і С. Н. Бернштейна про наближення функцій або класів функцій за допомогою многочленів. Багато задач теорії наближень є по своїй суті задачами екстремальними: знаходження верхньої грані похибки наближення даним методом на даному класі функцій, відшукання найкращого методу наближення для даного класу, обчислення найменших можливих констант у нерівностях для функцій з даного класу, знаходження найкращого інформаційного оператора, який гарантує найменшу похибку відновлення елементів даного класу, і т. д. Слід зазначити, що найбільше 'завершених' результатів щодо екстремальних задач теорії наближень відомо для дійсних функцій однієї змінної. Для функцій багатьох змінних а також функцій, що набувають нечислових значень, остаточних результатів відомо значно менше.

   Важливою екстремальною задачею теорії наближень є задача про точні нерівності для норм похідних. Перші результати такого типу з'явились на початку XX століття у роботах Ж. Адамара, Г. Г. Харді, Дж. І. Літтлвуда та Е. Ландау. Пізніше істотні результати у цьому напрямку отримали А. М. Колмогоров, І. М. Стейн, І. Дж. Шонберг, Л. В. Тайков, А. О. Лігун, О. Ю. Шадрін, В. Ф. Бабенко, та багато інших. Слід зазначити, що точні нерівності для норм похідних знаходять застосування у диференціальних рівняннях, теоремах вкладення, теорії інтерполяції операторів та інших питаннях, а тому важливим є отримання нових нерівностей такого типу.

   У 50-ті роки XX століття у деяких задачах економіки починають використовувати апарат багатозначних функцій (тобто функцій, значеннями яких є множини у скінченно-вимірних просторах). Пізніше такі функції знаходять застосування у статистиці, теорії ігор, теорії оптимального керування, чисельних методах, та інших розділах математики. У зв'язку з цим починають активно розвиватись дослідження багатозначних функцій у різних розділах математики, зокрема і питання теорії наближення для багатозначних функцій. Перші результати стосовно задач теорії наближень для багатозначних функцій з'явились у середині 1980-х років у роботах Д. Левіна, З. Арштейна, Р. А. Вітале. Крім того, задачі теорії наближень для багатозначних функцій досліджували N. Dyn, E. Farkhi, R. Baier, В. Ф. Бабенко, В. В. Бабенко, М. С. Поліщук та інші математики. Паралельно, з середини 1960-тих років, активно розвиваються дослідження нечітких множин і нечітких функцій, які виникають як спроба дати математичний апарат для роботи з об'єктами, що не мають чіткого критерія приналежності до певного класу. Цей апарат знаходить застосування у багатьох галузях знань, наприклад у лінгвістиці. Тому корисним є дослідження задач теорії наближень для функцій, що набувають нечислових значень, зокрема багатозначних або нечіткозначних функцій.

З огляду на викладене, тема дисертації є важливою і актуальною.

2. **Основний зміст і новизна дисертації.** Основні результати дисертації стосуються класичних питань теорії наближень: нерівності для похідних; задача Стєчкіна про наближення операторів (можливо і необмежених) операторами із заданими обмеженнями на їх норму; оцінки модуля неперервності операторів; розв'язання задач оптимального відновлення функціоналів та операторів, зокрема, задачі відновлення функцій та задачі оптимізації кубатурних формул за різною інформацією; та деякі інші.

   За характером задач отримані у дисертації результати можна умовно поділити на дві групи: до першої відносяться ті, що розглядаються в абстрактних постановках, наприклад, для класів функцій, які набувають нечислових значень; до другої – екстремальні задачі для числових функцій із класичних і добре вивчених класів та їх узагальнень.

   Головною складністю у дослідженні задач з першої групи є знаходження таких систем аксіом і означень класів функцій, щоб, з одного боку, започаткована абстрактна постановка включала у себе якомога більшу кількість відомих конкретних випадків як окремі, а з іншого — щоб ключові ідеї з відомих розв'язань відповідних конкретних задач (наприклад, на класах дійснозначних функцій) можна було застосувати і у абстрактній ситуації. До цієї групи слід, насамперед, віднести результати розділу 1 дисертації, в якому розглядаються екстремальні задачі на класах функцій зі значеннями у напівлінійних метричних просторах. Такий підхід є цікавим і перспективним: до розгляду з єдиної точки зору включається низка конкретних випадків, зокрема, класи багатозначних та нечіткозначних функцій; деякі результати у абстрактній постановці справедливі у майже такому ж вигляді, як і результати для дійснозначних функцій (див. напр. узагальнення леми Корнєйчука–Стєчкіна, лема 1.3.2); з іншого боку, деякі з отриманих абстрактних узагальнень є новими навіть у випадку дійснозначних функцій (див., напр., теорему 1.4.1). Відмітимо, що результати цього розділу суттєво розвивають напрямок теорії наближень, пов'язаний із класами функцій зі значеннями у напівлінійних метричних просторах, де раніше було відомо лише декілька результатів, які отримали С. А. Вахрамєєв (1980), С. М. Асєєв (1986), В. В. Бабенко (2016, 2019), В. Ф. Бабенко та В. В. Бабенко (2019). Серед інших результатів з цієї групи слід відзначити результати підрозділу 3.1, де запропоновано абстрактний підхід до розв'язання задачі знаходження відхилення між операторами (лема 3.1.1), а також нерівності для похідних типу Надя і типу Колмогорова у абстрактних постановках у розділі 4 (теорема 4.1.1, теорема 4.1.3, теорема 4.2.1, теорема 4.3.1 та інші).

   Складність результатів другої групи полягає у необхідності запровадження або нових методів і ідей, або суттєвого покращення існуючих методів розв'язання екстремальних задач. Тут в першу чергу слід відзначити леми 2.4.2 та 2.4.6, які надають можливість поширити розроблені в роботі В. Ф. Бабенка та Н. В. Парфінович (2012) методи дослідження класів функцій, евклідова норма градієнта яких сумовна в степені p, на випадок, коли замість евклідової взяти довільну норму градієнта. Використовуючи це поширення, в дисертації отримано ряд узагальнень відомих результатів для відповідних класів функцій багатьох змінних, зокрема розв'язано задачу Стєчкіна (теорема 2.3.1), доведено точні нерівності типу Колмогорова (теореми 2.5.1 та 4.4.1), розв'язано задачу оптимізації кубатурних формул (теорема 2.7.2), а також доведено точні нерівності типу Надя (теорема 4.1.2). Інша цікава нова конструкція запропонована у пункті 2.7.4. Вона надає змогу поширити отримані В. Ф. Бабенком (1976) асимптотично оптимальні кубатурні формули для функцій, заданих на опуклих множинах, на випадок так званих зірчастих множин. Нарешті, ще один важливий результат дисертації пов'язаний із відомою теоремою Чебишова про альтернанс та теоремою про порівняння Колмогорова, згідно з якими у багатьох екстремальних задачах у рівномірній метриці екстремалями є многочлени або сплайни з максимальною кількістю точок осциляції. У теоремі 4.6.2 дисертації доведено існування аналогів ідеальних сплайнів, які мають максимально можливу кількість точок осциляції між двома функціями. Показано також, що ці аналоги ідеальних сплайнів є екстремальними у задачі знаходження модуля неперервності оператора кратного диференціювання (теорема 4.6.4). Напевне, ці сплайни знайдуть застосування при розв'язанні деяких інших екстремальних задач.

3. **Значення отриманих результатів.** Дисертація носить теоретичний характер. Отримані результати мають велике значення для розвитку теорії наближень і суміжних розділів математики. Крім того, матеріали дисертації можуть бути використані для розробки нових і покращення існуючих методів розв'язання прикладних задач, зокрема для отримання нових чисельних алгоритмів.

4. **Публікації та апробація.** Основні наукові результати дисертації з достатньою повнотою опубліковано у 32 наукових публікаціях, серед яких 17 — наукові статті, і 15 — тези Всеукраїнських та міжнародних конференцій. Всі 17 наукових статей опубліковано у журналах, які проіндексовані у базах даних Web of Science Core Collection та/або Scopus. Відповідно до п. 2 Наказу № 1220 МОН України від 23.09.2019 вказані 17 статей зараховуються як 33 наукові публікації. Серед публікацій є статті у закордонних (Journal of Inequalities and Applications, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Mathematical Inequalities & Applications, Numerical Functional Analysis and Optimization, Analysis Mathematica) і вітчизняних (Український математичний журнал, Researches in Mathematics, Український математичний вісник, Карпатські математичні публікації, Математичні студії, всі — включені до категорії "А" Переліку наукових фахових видань України) журналах. Результати дисертації у достатній мірі апробовані: вони доповідались на багатьох наукових конференціях, а також на семінарах у провідних університетах і наукових установах України.

5. **Дотримання принципів академічної доброчесності.** Під час ознайомлення з дисертацією, рефератом та науковими публікаціями, які зараховано за темою дисертації, порушень принципів академічної доброчесності помічено не було.

6. **Зауваження.**

   - Перший абзац на стор. 5 реферату є важким для розуміння.
   - У теоремах 1.5.4 і 1.5.5 (стор. 124 і 125) перед нерівностями варто було б додати 'виконуються нерівності'. Крім того, у теоремі 1.5.5 фраза про умови на числа $\gamma_1, \gamma_2, h_1, h_2$ та t, за якими нерівності стають точними, складна для розуміння. Її, на мою думку, варто було б переформулювати більш прозоро.
   - Здається, що акценти у поясненні загального підходу у підрозділі 3.1.1 розставлені не зовсім чітко. З нерівності (3.2) (стор. 194) очевидним чином випливає нерівність у 6-му рядку після формули (3.3), для цього не потрібні додаткові умови про досягнення рівності у нерівності (3.2) та верхньої грані у (3.3). Мабуть, тут треба було говорити про те, що отримана нерівність буде саме точною, і, можливо, записати замість нерівності — рівність
   $$\sup_f h(\Lambda f, If) = \sup_g \varphi(g).$$
   - Важливою особливістю дисертації є точність більшості з отриманих результатів. Але при цьому не завжди зрозуміло, що мається на увазі під точністю нерівності. Наприклад, у теоремах 3.2.2 та 3.2.3 (стор. 234 та 236) незрозуміло, чи наступне речення (про те, коли нерівність перетворюється на рівність) є продовженням (поясненням) твердження про точність нерівності, чи є ще одним, не пов'язаним з попереднім, твердженням теореми.
   - У теоремі 3.3.3 варто було б більш детально пояснити, що означає фраза 'В іншому випадку' (стор. 247, 7-й рядок).
   - Перший абзац перед теоремою 4.6.2 у рефераті (стор. 35) важкий для розуміння; скоріш за все, його частина, починаючи з другого речення, мала б бути написаною після формулювання теореми.
   - Деякі позначення і поняття, які не є загальноприйнятими, вживаються у тексті без означення. Наприклад, символ $\arg\min$ (дисертація, стор. 37, 1-й рядок) варто пояснити; позначення $\square_1^d$ у теоремі 2.7.2 (реферат, стор. 24) не пояснено у рефераті (але введено у дисертації на стор. 160); слід дати означення для поняття локально абсолютно неперервної функції (реферат, стор. 34, 12-й рядок знизу та дисертація, стор. 281, 9-й рядок знизу).
   - У роботі присутня певна кількість мовних помилок. Наприклад, (реферат, стор. 16, 5-й рядок знизу) написано В. В. Арестов, а у дисертації, стор. 24, 5-й рядок — В. В. Арєстов; у декількох місцях іменники або прізвища вживаються у неправильному відмінку (див. напр., реферат, стор. 16, 6-й рядок

знизу, або формулювання теореми 1.4.5 на стор. 14 у рефераті); у теоремі 1.2.1 дисертації (стор. 74) та теоремі 1.5.3 реферату (стор. 18), на мою думку, краще писати 'за мірою' замість 'по мірі'; замість 'частковий випадок' (стор. 294, 1-й рядок) краще писати 'окремий випадок'; у пункті а) теореми 4.6.2 (стор. 282) має бути 'Існують' замість 'Існує'.

7. **Висновки.** Попри вказані недоліки, вважаю, що дисертація є закінченою науковою працею, в якій досліджуються актуальні питання. Отримані результати є новими, обґрунтованими і у достатній мірі висвітлені у наукових публікаціях. Ці результати мають важливе значення для подальшого розвитку теорії наближень.

   На мою думку, тема дисертації відповідає спеціальності 01.01.01 математичний аналіз, сама дисертація відповідає вимогам Порядку присудження та позбавлення наукового ступеня доктора наук, затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 17 листопада 2021 року № 1197, а її автор Коваленко Олег Вікторович заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз.

доктор фіз.-мат. наук, професор,
зав. каф. математичного аналізу
Одеського національного університету
імені І. І. Мечникова

Анатолій КОРЕНОВСЬКИЙ

Підпис проф. Кореновського А.О.
ЗАСВІДЧУЮ
Вчений секретар ОНУ імені І.І. Мечникова
С. В. Курандо
18. 10 2024 р.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ * ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І.І. МЕЧНИКОВА * Код в ЄДРПОУ 02071091

Надійшов до докторської ради Д 26.206.01
29.10.2024 р.
Учений секретар
Інституту математики
НАН України
Соколенко (Соколенко І.В.)

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ Ідентифікаційний код 05417287 * м. Київ *