ВІДГУК

офіційного опонента
на дисертаційну роботу Коваленка Олега Вікторовича
“Нерівності для похідних і екстремальні задачі теорії наближень у метричних просторах”,
подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз.

Актуальність теми дисертаційної роботи. Прийнято вважати, що основи теорії наближень започатковано роботами П. Л. Чебишова і К. Веєрштраса наприкінці XIX століття, хоча деякі задачі та ідеї, які зазвичай відносять до теорії наближень (наприклад, ідея про дослідження більш складних об’єктів за допомогою заміни їх на чимось схожі, але більш прості об’єкти), мають значно довшу історію. У XX столітті дослідження теорії наближень значно поширились і поглибились.

Поряд з задачами наближення індивідуальних функцій або класів функцій, одне з центральних місць у теорії наближень посідають задачі найкращого відновлення функціоналів і операторів. Перші задачі такого типу виникають у середині XX століття у роботах А. М. Колмогорова, С. М. Нікольського, А. Сарда та інших математиків, але як окремий клас задач теорії апроксимації, задачі оптимального відновлення починають досліджуватись починаючи з 70-х років XX століття у роботах С. А. Смоляка, М. С. Бахвалова, К. Ю. Осипенка, С. А. Мічелі, Дж. Ф. Трауба, Х. Вожняковського, Е. Новака, Л. Пласкота, О. А. Женсикбаєва та багатьох інших. Задачі оптимального відновлення знаходять свої застосування у багатьох розділах як теоретичної, так і прикладної математики, а також інших природничих наук. Зокрема, задача про оптимізацію квадратурних формул, яка є частинним випадком задачі оптимального відновлення функціоналів, є однією з найстаріших і найважливіших задач чисельних методів. Перші результати стосовно цієї задачі (у сенсі пошуку квадратурних формул, що є точними на многочленах найвищого степеня) отримав К. Ф. Гаус ще на початку XIX століття. Сучасна постановка задачі, що полягає у знаходженні квадратурних формул з найменшою похибкою на класі функцій, належить А. М. Колмогорову. Незважаючи на велику кількість результатів, які були отримані С. М. Нікольським, М. П. Корнейчуком, В. П. Моторним, А. О. Лігуном, О. А. Женсикбаєвим, К. І. Осколковим, В. Ф. Бабенком та іншими математиками, у даній тематиці залишається ще багато невирішених питань.

Однією з важливих екстремальних задач теорії наближень є задача про нерівності для похідних, в якій оцінюється норма проміжної похідної функції за допомогою норми функції та норми її старшої похідної. Перші результати такого типу були отримані на початку XX століття у роботах Ж. Адамара, Г. Г. Харді, Дж. І. Літтлвуда та Е. Ландау, і в подальшому цю проблематику досліджували багато математиків, зокрема А. М. Колмогоров (з огляду важливості отриманого ним у 1930-ті роки результату, такі нерівності часто називають нерівностями типу Колмогорова або типу Ландау–Колмогорова), І. М. Стейн, Л. В. Тайков, Дж. Шонберг, Ю. І. Любіч, М. П. Купцов, В. М. Габушин, О. Ю. Шадрін, В. Ф. Бабенко, А. О. Лігун, В. О. Кофанов та інші. Нерівності для похідних, особливо з найменшою можливою константою, а також методи їх доведення знаходять своє застосування у аналізі, диференціальних рівняннях, теоремах вкладення, та інших питаннях, а тому дослідження таких нерівностей для різних класів функцій, різних норм та різних операторів є важливим для розвитку теорії наближень.

Протягом декількох останніх десятиліть, у зв'язку з теоретичним, а також прикладним інтересом в різних областях науки, виникає питання дослідження класів функцій з нечисловими значеннями. Тому викликає інтерес і розвиток теорії наближень для нечислових функцій, зокрема класів функцій зі значеннями у метричних просторах.

З огляду на сказане вище, я вважаю, що *тема дисертаційної роботи є цікавою і актуальною.*

Зміст та наукова новизна результатів дисертаційної роботи. Дисертаційна робота має загальний обсяг 332 сторінки і складається з анотації, переліку позначень, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 207 посилань, а також додатку, який містить список публікацій здобувача.

Перший розділ дисертаційної роботи присвячено екстремальним задачам теорії наближень для класів функцій, що набувають значення у так званих L–просторах, тобто у напівлінійних метричних просторах з додатковими аксіомами, що пов'язують метрику з алгебраїчними операціями. Вперше такі простори розглядав С. А. Вахрамєєв у 1980 році. У підрозділах 1.1 та 1.2 наведено необхідні означення, приклади L–просторів (серед яких одними з найважливіших, на мою думку, є простори підмножин лінійного простору), а також ряд допоміжних результатів, які дають основну техніку для роботи з L–просторами та функціями зі значеннями у L–просторах. Одним з головних результатів першого розділу я вважаю узагальнення леми Корнєйчука–Стєчкіна (лема 1.3.2) на випадок класів функцій зі значеннями у L–просторах, які задаються мажорантою модуля неперервності. На підтвердження такої думки зазначу, що це узагальнення є ключовим кроком у розв'язанні серії задач оптимального відновлення, які наведено у підрозділах 1.4.1 і 1.4.2, а також розв'язанні задачі Стєчкіна і доведенні точних нерівностей типу Ландау–Колмогорова у підрозділі 1.5.3.

Другий розділ присвячено розв'язанню ряду екстремальних задач на класах дійснозначних функцій $d \geq 2$ змінних, які мають скінченні L_p–норми, $p \in (d, \infty]$, величини $|\nabla f|_K$, де градієнт ∇f розуміється в узагальненому сенсі, а $|\cdot|_K$ — довільна норма у просторі $\mathbb{R}^d$. Головні результати цього розділу, на мою думку, складаються з двох частин (підрозділи 2.3–2.6 та підрозділи 2.7-2.8). В першій частині основним об'єктом дослідження є гіперсингулярний оператор

$$D_{K,w}f(x) := \int_C w(|t|_K)(f(x) - f(x+t))dt, x \in C,$$

де C — це опуклий конус у $\mathbb{R}^d$, а w — це деяка вагова функція; при певному виборі w, C і норми $|\cdot|_K$, цей оператор стає дробовою похідною у сенсі Ріса. На мою думку, одним з найважливішим результатом у цій частині є нерівність типу Островського (теорема 2.4.1). Ця нерівність є ключовою для розв'язання задачі Стєчкіна про наближення цього оператора обмеженими (теорема 2.3.1), доведення точних нерівностей типу Ландау–Колмогорова (теореми 2.5.1 і 2.5.2), а також знаходження його модуля неперервності (теорема 2.6.1). Крім того, вона є важливою для розв'язання задач оптимізації кубатурних формул у другій частині цього розділу (напр. теореми 2.7.2), а також для доведення нерівностей типу Надя, які містяться у четвертому розділі.

Друга частина цього розділу присвячена задачам оптимального відновлення інтеграла. Тут отримано оптимальні та асимптотично оптимальні методи відновлення інтеграла з одиничною або неодиничною вагою для класів функцій, що задані на множинах різної 'геометричної складності', і які мають обмеження на L_p, $p \in (d, \infty]$ норму $|\nabla f|_K$ у випадку, коли $|(x_1, \ldots, x_d)|_K = \max\{|x_1|, \ldots, |x_d|\}$.

Третій розділ дисертаційної роботи присвячено точним нерівностям типу Островського. Найцікавіші, на мою думку, результати цього розділу містяться у підрозділі 3.2. Тут пропонується нові означення (які є модифікацією підходу Кронрода–Вітушкіна) поняття обмеженої варіації для неперервних функцій декількох змінних та компактних множин у скінченно-вимірному просторі. В термінах цих характеристик вдається отримати точні нерівності, що оцінюють зверху відхилення значення функції в деякій точці від її середнього значення (теорема 3.2.2), а також міри деяких компактних множин, що не містять початок координат (теорема 3.2.3).

Четвертий розділ дисертаційної роботи присвячено доведенню нерівностей для похідних типу Надя та типу Ландау–Колмогорова, а також дослідженню модуля неперервності диференціальних операторів на певних класах функцій (ця задача також тісно пов'язана з нерівностями типу Ландау–Колмогорова). На мою думку, саме результати, що стосуються дослідження модуля неперервності

$$\Omega(D^k, W^r_{g,f_+,f_-}(\mathbb{R}), \delta) := \sup_{\|x\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+),f_+,f_-} \le \delta} \|x^{(k)}\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}, \delta > 0$$

оператора k–кратного диференціювання D^k є найцікавішими у цьому розділі. Тут g, f_+, f_- є неперервними додатніми незростаючими функціями, що додатково задовольняють певним умовам, $0 < k < r$ — натуральні числа, точна верхня грань справа береться по класу $W^r_{g,f_+,f_-}(\mathbb{R}_+)$, що складається з неперервних функцій $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, які мають локально абсолютно неперервні похідні порядку $r-1$ і такі, що $|x^{(r)}(t)| \le g(t)$ майже всюди, а $\|x\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+),f_+,f_-}$ — це несиметрична норма з вагами $1/f_+$ та $1/f_-$ для додатної і від'ємної частин функції x відповідно. Для розв'язання цієї задачі (теорема 4.6.4) досліджуються узагальнені ідеальні сплайни і доводиться теорема про існування таких сплайнів, що мають найбільшу можливу кількість точок осциляції (теорема 4.6.2). Відмітимо, що поліноміальні ідеальні сплайни, що мають найбільшу можливу кількість точок осциляції, добре досліджені, і грають важливу роль при розв'язанні багатьох екстремальних задач. Тому отримані результати щодо аналогів ідеальних сплайнів потенційно можуть бути застосовані і до інших задач.

Обґрунтованість і достовірність результатів дисертаційної роботи. Усі основні результати, що містяться у дисертаційній роботі, мають строгі математичні доведення, які наведено з з достатньою повнотою на прийнятному рівні строгості. Тому, на мою думку, *усі основні результати є обґрунтованими і достовірними.*

До змісту дисертаційної роботи та її оформлення є такі **зауваження:**

1. На мою думку, вибір назви дисертаційної роботи **"Нерівності для похідних і екстремальні задачі теорії наближень у метричних просторах"** є контраверсійним, оскільки одним із напрямків в теорії екстремальних задач є задачі про отримання точних нерівностей.

2. Основні результати дисертаційної роботи узагальнюють низку класичних результатів, зокрема: узагальнення леми Корнєйчука-Стєчкіна (п.1.3), нерівності типу Островського (розділ 3), нерівності типу Надя(п.4.1). На мою думку, цікаво було б навести приклади нових ефектів, які виникають внаслідок проведених узагальнень.

3. На стор. 29 у пункті **"Практичне значенення одержаних результатів"** зазначено, що робота носить теоретичний характер, а її результати можуть бути використані при подальших дослідженнях екстремальних задач. Зважаючи на те, що при

обґрунтуванні актуальності теми підкреслюється наявність практичних застосувань (див. стор. 23, 24), доречним було б приділення більшої уваги питанню прикладних застосуваннь одержаних результаів.

4. На стор. 32 у 10 рядку знизу не визначено, які значення набуває параметр r.

5. На стор. 132 у 11 рядку зверху описка: замість $|s|^{\beta_1}$ потрібно $|s|^{\beta_2}$.

6. На стор. 134 у 3 рядку зверху описка: замість $\sum_{i=1,\ldots,d}$ потрібно $\sum\limits_{i=1}^{d}$.

7. Підрозділи 3.1.3.2 і 3.1.3.4 стосуються одержання *нерівностей* типу Островського, проте теореми в цих підрозділах містять *рівності*.

8. На стор. 198 у функцій з формули (3.8) пропущено аргумент (s).

9. В дисертаційній роботі наводяться доведення достатньо елементарних властивостей допоміжного характеру (див., наприклад, стор. 48), проте при отриманні основних результатів у доведенні окремих фактів використовується вислів "можна довести"(див, наприклад, стор. 205).

10. В тексті наявна незначна кількість помилок, зокрема: на стор. 24 у 13 рядку зверху та на стор.25 у 7 рядку зверху – пропущено кому після “зокрема”; на стор. 51 у 12 рядку знизу – зайва кома; на стор. 132 у 13 рядку знизу – потрібно “оціню**ють**”; на стор. 218 у 14 рядку зверху – потрібно “Банах**а**”.

Повнота викладу результатів дисертаційної роботи у публікаціях та їх апробація. Усі *основні результати дисертаційної роботи з достатньою повнотою відображені* у 32 наукових роботах, 17 з яких є статтями у наукових виданнях, внесених до переліку наукових фахових видань України та закордонних виданнях, а 15 – тезах міжнародних та вітчизняних конференцій. Всі 17 статей опубліковано у журналах, які входять до наукометричної бази Scopus, серед цих журналів є як вітчизняні (в тому числі категорії А), так і закордонні (Швейцарія, США, Хорватія, Угорщина). Відповідно до п. 2 Наказу № 1220 МОН України від 23.09.2019 вказані 17 статті зараховуються як 33 наукові публікації.

Результати дисертаційної роботи *пройшли достатню апробацію.* Вони доповідались як на наукових конференціях, так і на наукових семінарах провідних університетів та наукових установ України.

Академічна доброчесність. За результатами ознайомлення з текстом дисертаційної роботи не помічено ознак академічного плагіату, фабрикацій або фальсифікації. Усі наведені результати інших авторів мають посилання на відповідне джерело. У тексті дисертаційної роботи вказано внесок здобувача у всі результати з наукових статей, які опубліковані разом зі співавторами.

Практичне значення результатів дисертаційної роботи. Результати дисертаційної роботи носять теоретичний характер. Вони можуть знайти своє застосування у наукових дослідженнях з математичного аналізу, теорії функцій і інших галузей математики.

Висновки. Дисертаційна робота Коваленка О. В. є самостійною, завершеною науковою працею. Вона містить нові, обґрунтовані результати і має вагоме теоретичне значення для розвитку теорії наближень. Робота є актуально, характеризується єдністю змісту і відповідає паспорту спеціальності 01.01.01 — математичний аналіз. Структура і обсяг дисертації відповідають встановленим вимогам. Реферат в достатній повноті відображає зміст дисертаційної роботи. Результати дисертаційної роботи належним чином опубліковані і апробовані. *Наведені вище зауваження не впливають на загальну високу оцінку роботи.*

Враховуючи сказане вище, вважаю, що дисертаційна робота Коваленка О. В. "Нерівності для похідних і екстремальні задачі теорії наближень у метричних просторах" відповідає усім вимогам "Порядку присудження та позбавлення наукового ступеня доктора наук", затвердженого постановою Кабінету міністрів України № 1197 від 17 листопада 2021 р., та вимогам до оформлення дисертації, затвердженим наказом Міністерства освіти і науки України від 12.01.2017 № 40 (зі змінами), а її автор *заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук* за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз.

доктор фіз.-мат. наук, професор
проректор з науково-педагогічної роботи Донбаського державного педагогічного університету

Станіслав ЧАЙЧЕНКО

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД «ДОНБАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
ІДЕНТИФІКАЦІЙНИЙ КОД 38177113

Підпис Чайченка С.О. засвідчую.
Начальник відділу кадрів ДДПУ Є.С. Салік

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД «ДОНБАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
ВІДДІЛ КАДРІВ
Ідент. код 38177113

Надійшов до докторської ради Д 26.206.01
29.10.2024р.
Учений секретар
Інституту математики (Соколенко І.В.)
НАН України

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
Ідентифікаційний код 05417207
м. Київ