

## ЗАТВЕРДЖУЮ



Від директора Інституту математики

Національної академії наук України

доктор фізико-математичних наук

Віталій ВАСИЛИК

2024 p.

## ВИСНОВОК

про наукову новизну, теоретичне й практичне значення результатів дисертаційної роботи КОВАЛЕНКА Олега Вікторовича

## “Нерівності для похідних і екстремальні задачі теорії наближень у метричних просторах”

підготовленої на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук  
зі спеціальності 01.01.01 — математичний аналіз та 111 — математика  
(фізико-математичні науки)

Призначенні рішенням Вченої ради Інституту математики НАН України від 14 травня 2024 року протокол № 7 рецензенти:

- Михайлєць Володимир Андрійович — доктор фізико-математичних наук (01.01.02 – диференціальні рівняння), професор, зав. лабораторії диференціальних рівнянь з частинними похідними Інституту математики НАН України;
  - Романюк Анатолій Сергійович — доктор фізико-математичних наук (01.01.01 – математичний аналіз), професор, зав. відділу теорії функцій Інституту математики НАН України;
  - Шидліч Андрій Любомирович — доктор фізико-математичних наук (01.01.01 – математичний аналіз), старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник відділу теорії функцій Інституту математики НАН України;

за результатами попередньої експертизи докторської дисертації Коваленка Олега Вікторовича на тему “Нерівності для похідних і екстремальні задачі теорії наближень у метричних просторах” (тема дисертації затверджена на засіданні Вченої ради Інституту математики НАН України 14 травня 2024 року протокол № 7), а також розглянувши наукові публікації, в яких висвітлені основні наукові результати, і за результатами фахового семінару (витяг з протоколу № 12 від 12 липня 2024 року розширеного засідання семінару відділу теорії функцій Інституту математики НАН України), ухвалили прийняти такий висновок:

**1. Актуальність теми дослідження.** Дисертаційна робота Коваленка О. В. присвячена класичним питанням теорії наближень, зокрема розв'язанню задач оптимального відновлення, оптимізації кубатурних формул, задачам найкращого наближення операторів, доведенню нерівностей для похідних, та іншим. Ця тематика має багату історію та широкий спектр застосувань.

Перші роботи з нерівностей для похідних з'явилися ще на початку ХХ століття завдяки Ж. Адамару, Г. Г. Гарді, Дж. І. Літтлвуду, Г. Поліа та Е. Ландау. Їхні дослідження заклали фундамент для подальшого розвитку цієї тематики. Одним з найважливіших результатів у цій тематиці є отримана А. М. Колмогоровим точна нерівність, що оцінює рівномірну норму  $k$ -ї похідної функції на числовій прямій через рівномірні норми функції та її  $r$ -ї похідної. Нерівності такого типу, названі на честь А. М. Колмогорова, знайшли широке застосування в чисельних методах, теорії диференціальних рівнянь та інших галузях математики. Нерівності для похідних для різних класів функцій однієї і багатьох змінних досліджували такі відомі математики, як І. М. Сtein, Л. В. Тайков, І. Дж. Шенберг, А. Каварета, Ю. І. Любіч, М. П. Купцов, В. М. Габушин, Г. А. Калябін, В. Ф. Бабенко, А. О. Лігун, О. Ю. Шадрін, та інші. В той самий час, важливим і цікавим є подальший розвиток цієї тематики, зокрема отримання таких нерівностей для нових класів функцій однієї та багатьох змінних, для недійснозначних функцій, а також для операторів відмінних від операторів диференціювання.

Задачі наближення операторів, а також задачі оптимального відновлення функціоналів і операторів, включно з задачами оптимізації квадратурних формул, є важливим розділом теорії наближень, зокрема через велику кількість застосувань до задач прикладної математики. Ці задачі досліджувались багатьма математиками, серед них С. М. Нікольський, М. П. Корнєйчук, С. Б. Стєчкін, К. Ю. Осипенко, В. М. Тихоміров, Ю. М. Субботін, В. В. Арєстов, О. А. Женсикбаєв, В. П. Моторний, Х. Вожняковський, Е. Новак, Дж. Трауб, та інші. В останні десятиліття активно досліджуються такі задачі для багатозначних та нечіткозначних функцій. Тому цікавим є розвиток і узагальнення існуючих, а також розробка нових методів розв'язання екстремальних задач теорії наближень, які б дозволили отримувати результати на нових класах функцій, зокрема недійснозначних.

З огляду на сказане вище, тематика дисертаційної роботи є актуальну.

**2. Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Робота виконувалась у Дніпровському національному університеті імені Олеся Гончара згідно з загальними планами досліджень кафедри математичного аналізу та оптимізації (до 2022 року — кафедри математичного аналізу і теорії функцій), а також згідно з держбюджетними темами "Теоретичні та прикладні аспекти відновлення операторів та оптимізації наближення функцій" номер державної реєстрації 0122U001223 і "Екстремальні проблеми теорії наближень функцій дійсного змінного і нерівності типу Колмогорова" номер державної реєстрації 0117U001208.

**3. Наукова новизна отриманих результатів.** У представлений дисертаційний роботі за рахунок покращення існуючих і розробки деяких нових методів і підходів, отримано ряд важливих наукових результатів. Зокрема:

- Отримано узагальнення леми Корнєйчука–Стєчкіна на випадок класів функцій зі значеннями в  $L$ –просторах (тобто у напівлінійних метричних просторах з метрикою, що задовільняє додатковим аксіомам, які пов'язують її з алгебраїчними операціями). Показано ряд застосувань цього результата до екстремальних задач на класах функцій зі значеннями в  $L$ –просторах, зокрема знайдено точні оцінки відхилення між середніми значеннями функції з класу  $H^\omega([a, b], X)$  (цей клас складається з функцій заданих на відрізку  $[a, b]$  зі значеннями в  $L$ –просторі  $X$ , які мають мажоранту  $\omega$  їх модуля неперервності) на різних відрізках.

- Розв'язано ряд задач оптимального відновлення операторів на різних класах функцій зі значеннями в  $L$ -просторах. Зокрема, задачі оптимального відновлення опуклюючого оператора та оператора інтегрування на класі  $H^\omega([a, b], X)$ , а також оптимального відновлення одиничного оператора і оператора похідної типу Хукухара на класі  $W^1 H^\omega([a, b], X)$  функцій, чия похідна типу Хукухара належить до класу  $H^\omega([a, b], X)$ .
- Отримано точні нерівності типу Ландау–Колмогорова на класах функцій зі значеннями в  $L$ -просторах, а також розв'язано деякі споріднені задачі. Зокрема, задачу Стечкіна про наближення необмежених операторів обмеженими, а також задачу відновлення оператора на елементах, які відомі з похибкою.
- Розв'язано задачу Стечкіна про наближення (взагалі кажучи, необмежених) гіперсингулярних інтегральних операторів, що діють на деяких підмножинах простору Соболєва  $W^{1,p}(C)$ ,  $C \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ ,  $p > d$ , обмеженими операторами. Доведено точні нерівності типу Островського і типу Ландау–Колмогорова, а також досліджено модуль неперервності таких інтегральних операторів.
- Знайдено оптимальні або асимптотично оптимальні квадратурні формули для інтегралів з одиничною або неодиничною вагою по опуклім і зірчатим відносно кулі множинам на деяких класах неперервних функцій багатьох змінних.
- Запропоновано нове означення поняття обмеженої варіації для компактних підмножин простору  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$  та неперервних функцій багатьох змінних. Доведено точні нерівності, які оцінюють лебегову міру деяких компактних підмножин  $\mathbb{R}^d$  через їх варіацію. Доведено точні нерівності типу Островського, які оцінюють відхилення середнього значення неперервної функції багатьох змінних від її значення в точці, за допомогою варіації функції.
- Розв'язано задачу оптимального відновлення інтеграла від випадкових процесів певного класу за інформацією про значення випадкового процесу у випадкові моменту часу. Розв'язано також задачу оптимізації вибору інформаційного оператора.
- Доведено нові точні нерівності типу Надя для функцій з класів  $H^\omega(X)$  і  $W^{1,p}(C)$ , а також з метричних просторів Соболєва з верхніми градієнтами. Як наслідки отримано точні нерівності типу Колмогорова для похідної Радона–Нікодіма для зарядів певних класів, а також для оператора мішаної похідної на деяких класах функцій багатьох змінних.
- Побудовано аналоги чебишовських сплайнів з максимальною кількістю точок осциляції на класах функцій заданих на пів осі, які задаються, взагалі кажучи, неконстантними мажорантами  $r$ -ї похідної функцій,  $r \in \mathbb{N}$ . Доведено, що ці узагальнені сплайні є екстремальними у задачі знаходження модуля неперервності оператора кратного диференціювання.

**4. Ступінь обґрунтованості і достовірності наукових положень та висновків, сформульованих у дисертаційній роботі.** Усі об'єкти, які розглядаються у дисертаційній роботі, мають чіткі математичні означення. Достовірність отриманих результатів

підтверджується їх строгими математичними доведеннями. У роботі використовуються і отримують певний розвиток сучасні методи теорії функцій, математичного та функціонального аналізу, теорії наближень, топології і інших розділів математики.

**5. Теоретичне та практичне значення результатів роботи.** Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати можуть бути використані при подальшому дослідженні екстремальних задач теорії наближень, а також можуть бути корисними і в інших розділах математики, зокрема, для розробки нових чисельних методів.

**6. Оцінка змісту дисертації.** Дисертація написана українською мовою, стиль викладення матеріалу відповідає прийнятому в науковій літературі. Назва дисертації відповідає її змісту. Зміст дисертації відповідає спеціальності 111 математика і 01.01.01 математичний аналіз.

**7. Апробація результатів дисертації.** Основні результати дисертаційної роботи доповідались на міжнародних та вітчизняних математичних конференціях, а також на наукових семінарах, зокрема на таких як:

- Міжнародна математична конференція "Теорія наближень і її застосування" (3-5 жовтня 2019, Дніпро, Україна);
- Joint Mathematics Meetings (January 15-18, 2020, Colorado Convention Center, Denver, CO, USA);
- Міжнародна математична конференція "Теорія наближень і її застосування" присвячена 100-річчю з дня народження Миколи Павловича Корнєйчука (16-19 вересня 2020, Дніпро, Україна);
- International Online Workshop on Approximation Theory (March 19-21, 2021, Ivano-Frankivsk, Ukraine);
- International Conference of Young Mathematicians, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine (online) (June 3-5, 2021, Kyiv, Ukraine);
- 2022 Spring Eastern Virtual Sectional Meeting, (March 19-20, 2022, Tufts University, Medford, USA);
- International online conference "Current trends in abstract and applied analysis", (May 12-15, 2022, Ivano-Frankivsk, Ukraine);
- International Conference "Theory of Approximation of Functions and its Applications", dedicated to the 80th anniversary of Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Alexander Stepanets (1942-2007) (June 6–10, 2022, Lutsk, Ukraine);
- International Workshop on Current Trends in Analysis and Approximation Theory (July 18, 2023, Rome, Italy);
- International Conference on Approximation Theory and Beyond, (May 15-18, 2023, Nashville, TN, USA);
- Семінар з теорії функцій при кафедрі математичного аналізу і теорії функцій Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара (Дніпро, керівники семінару: член-кореспондент НАН України, д-р. фіз.-мат. наук, проф. В. П. Моторний і д-р. фіз.-мат. наук, проф. Н. В. Парфінович);
- Семінар відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник семінару д-р. фіз.-мат. наук, проф. А. С. Романюк);

- Семінар "Сучасний аналіз" у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка (керівники семінару: д-р. фіз.-мат. наук, проф. О. О. Курченко, д-р. фіз.-мат. наук, проф. В. М. Радченко, член-кореспондент НАН України, д-р. фіз.-мат. наук, проф. І. О. Шевчук);
- Семінар з теорії аналітичних функцій (Львів, керівник семінару: д-р. фіз.-мат. наук, проф. О. Б. Скасків).

**8. Повнота викладу матеріалів дисертації в публікаціях та особистий внесок автора.** Основні положення дисертаційної роботи висвітлені у 32 наукових публікаціях, з них 17 – статті у наукових виданнях, внесених до переліку наукових фахових видань України та закордонних виданнях, а також 15 публікацій у тезах доповідей міжнародних та вітчизняних конференцій. 17 статей проіндексовані у міжнародній наукометричній базі Scopus, з них (відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank) 1 стаття опублікована у виданні квартиля Q1, 4 – у виданнях квартиля Q2, 6 – у виданнях квартиля Q3 і 2 – у виданнях квартиля Q4. Серед публікацій є 8 статей, опублікованих у закордонних журналах (Journal of Inequalities and Applications – Швейцарія, Journal of Mathematical Analysis and Applications та Numerical Functional Analysis and Optimization – США, Mathematical Inequalities and Applications – Хорватія, Analysis Mathematica – Угорщина), 3 статті в Ukrainian Mathematical Journal, який є перекладом Українського математичного журналу, який також відноситься до категорії А наукових видань України, 1 стаття у Carpathian Mathematical Publications (Карпатські математичні публікації) – категорії А, і 1 стаття в Journal of Mathematical Sciences, який є перекладом Українського математичного віснику – категорії А.

У дисертаційній роботі вказано про внесок здобувача у кожну з робіт, які опубліковані у співавторстві. У всіх роботах, написаних у співавторстві, автору дисертації належить перевірка робочих гіпотез та детальне доведення тверджень.

Відповідно до п. 2 Наказу № 1220 МОН України від 23.09.2019 “Про опублікування результатів дисертації на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук” (зі змінами) вказані 17 статей зараховуються як 33 наукових публікацій.

**9. Дотримання принципів академічної добросердечності.** За результатами вивчення дисертаційної роботи та наукових публікацій Коваленко О. В. не виявлено елементів фальсифікації чи plagiatу.

## ЗАГАЛЬНИЙ ВІСНОВОК

Дисертаційна робота КОВАЛЕНКА Олега Вікторовича, що представлена на попередню експертизу, є кваліфікаційною науковою працею, виконаною здобувачем самостійно. Робота має важливе значення для розвитку теорії наближень, а також суміжних галузей науки і техніки, містить обґрунтовані й достовірні висновки, характеризується єдністю змісту, за своїм науковим рівнем, практичною та теоретичною цінністю повністю відповідає спеціальності 01.01.01 – математичний аналіз та вимогам п. 7 та 9 “Порядку при судження та позбавлення наукового ступеня доктора наук”, затвердженого постановою Кабінету міністрів України від 17 листопада 2021 р., № 1197 “Деякі питання присудження (позбавлення) наукових ступенів” (зі змінами), та вимогам до оформлення дисертації, затвердженими наказом Міністерства освіти і науки України від 12.01.2017 № 40 (зі змінами).

Рекомендувати дисертаційну роботу “Нерівності для похідних і екстремальні задачі теорії наближень у метричних просторах”, підготовлену КОВАЛЕНКОМ Олегом Вікторовичем, до захисту на спеціалізованій вченій раді із захисту дисертацій на здобуття наукового ступеня доктора наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз.

Рецензенти:

доктор фіз.-мат. наук, професор,  
зав. лабораторії диференціальних  
рівнянь з частинними похідними  
Інституту математики НАН України

Володимир МИХАЙЛЕЦЬ

доктор фіз.-мат. наук, професор,  
зав. відділу теорії функцій  
Інституту математики НАН України

Анатолій РОМАНЮК

доктор фіз.-мат. наук,  
старший науковий співробітник,  
провідний науковий співробітник  
відділу теорії функцій  
Інституту математики НАН України

Андрій ШИДЛІЧ