Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Міністерство освіти і науки України

Інститут математики
Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Коваленко Олег Вікторович

УДК 517.5

ДИСЕРТАЦІЯ
Нерівності для похідних і екстремальні задачі теорії наближень у метричних просторах

01.01.01 – Математичний аналіз

111 – Математика

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_____ О. В. Коваленко

Дніпро — 2024

Анотація

Коваленко О.В. Нерівності для похідних і екстремальні задачі теорії наближень у метричних просторах — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — "Математичний аналіз" (111 — Математика). — Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара Міністерства освіти і науки України, Дніпро; Інститут математики НАН України, Київ, 2024.

Дисертаційна робота присвячена класичним задачам теорії наближень, зокрема точним нерівностям для похідних типу Ландау–Колмогорова, задачі Стєчкіна про наближення необмежених операторів обмеженими, задачі знаходження модуля неперервності операторів, а також задачам оптимального відновлення операторів і функціоналів за точною і неточною інформацією, зокрема задачам про найкращі кубатурні формули.

Перший розділ присвячено дослідженню екстремальних задач теорії наближень у просторах функцій, які набувають значення у L–просторах, тобто у напівлінійних метричних просторах з додатковими аксіомами, що пов'язують метрику з алгебраїчними операціями. Такий підхід дозволяє включити до розгляду різні класи функцій, зокрема класи багато- і нечіткозначних функцій, а також класи функцій зі значеннями у банахових просторах, зокрема класи випадкових процесів.

Ми отримуємо узагальнення леми Корнєйчука–Стєчкіна для функцій зі значеннями у L–просторах. У якості застосування цього результату, ми доводимо точні нерівності типу Островського і розв'язуємо задачу оптималь-

ного відновлення опуклюючого оператора, а також задачу відновлення інтеграла на класах функцій з заданою мажорантою модуля неперервності. Відновлення відбувається на основі n середніх значень функції по малим інтервалам. Ми розв'язуємо задачі оптимального відновлення функції і задачу відновлення похідної типу Хукухара на класах функцій з заданою мажорантою модуля неперервності їх похідної типу Хукухара. В цьому випадку відновлення відбувається на основі n значень функції. Ми доводимо точні нерівності типу Ландау і розв'язуємо аналог задачі Стєчкіна про наближення необмежених операторів обмеженими, а також задачу відновлення необмеженого оператора на класі елементів, що відомі з похибкою.

Ми розв'язуємо задачу оптимального відновлення монотонних операторів у частково впорядкованих L–просторах і досліджуємо питання оптимального вибору інформаційного оператора. Ми також розв'язуємо задачу оптимального відновлення операторів типу (λ, φ) на класах функцій з заданою мажорантою модуля неперервності по n значенням функції, які відомі з похибкою; у якості застосування цього результату, ми розв'язуємо задачу оптимального відновлення інтеграла від випадкового процесу.

Крім того, у цьому розділі ми одержуємо оцінки відхилення інтегральних операторів на класах функцій зі значеннями у L–просторах, а також інтегральне представлення для (λ, φ)–адитивних операторів і точну нерівність типу Островського для таких операторів.

Другий розділ присвячено екстремальним задачам для операторів, що задані на класах Соболєва функцій багатьох змінних. Для опуклого конуса $C \subset \mathbb{R}^d$ і опуклої обмеженої центрально-симетричної множини $K \subset \mathbb{R}^d$, що містить початок координат у своїй внутрішності, ми розглядаємо клас функцій $f\colon C \to \mathbb{R}$, для яких $f \in L_\infty(C)$ і $\||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(C)} \le 1$, де $p \in [1, \infty]$, K° — це поляра до множини K, $|\cdot|_K$ позначає норму у $\mathbb{R}^d$, що породжена множиною K, а похідні функції f розуміються в узагальненому сенсі. На цьому класі функцій ми розв'язуємо задачу найкращого наближення,

взагалі кажучи, необмеженого гіперсингулярного інтегрального оператора

$$D_{K,w}f(x) = \int_C w(|t|_K)(f(x) - f(x+t))dt, x \in C$$

за допомогою обмежених, де $w\colon (0,\infty) \to [0,\infty)$ — деяка вагова функція, що може мати неінтегровну особливість в точці 0. У випадку, коли K — це евклідова куля у $\mathbb{R}^d$, $C = \mathbb{R}^d$ і $w(t) = t^{-(d+\alpha)}$, $\alpha \in (0,1)$, цей інтеграл перетворюється на оператор дробової похідної у сенсі Ріса.

Для розв'язання цієї задачі ми отримуємо ряд допоміжних результатів, які мають самостійний інтерес. Ми знаходимо величину

$$\sup_{\||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(K\cap C)} \le 1} \int_{K\cap C} w(|y|_K)(f(y) - f(\theta))dy,$$

яку потім використовуємо при розв'язанні і деяких інших екстремальних задач, зокрема, при знаходженні оптимальних і асимптотично оптимальних квадратурних формул. Ми також доводимо точні адитивні нерівності типу Ландау, що оцінюють величину $\|D_{K,w}f\|_{L_\infty(C)}$ через $\|f\|_{L_\infty(C)}$ та $\||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(C)}$, $p \in (d,\infty]$. У випадку степеневої вагової функції w, ми отримуємо точну нерівність типу Ландау і у мультиплікативній формі.

Крім того, ми знаходимо модуль неперервності оператора $D_{K,w}$ і розв'язуємо задачу оптимального відновлення цього оператора за неточно заданими аргументами оператора.

У випадку $K = (-1,1)^d$, ми розв'язуємо задачу оптимального відновлення функціонала $f \mapsto \int_Q w(x)f(x)dx$ по n значенням функції f. У випадку одиничної ваги w і області Q, яку можна представити у вигляді об'єднання декількох зсувів множини K, ми знаходимо похибку відновлення і оптимальний метод відновлення інтеграла; у випадку більш загальної ваги та (або) більш складної множини Q, ми знаходимо асимптотично оптимальний розв'язок задачі відновлення.

Третій розділ присвячено нерівностям, що оцінюють відхилення значення функції в деякій точці від середнього значення цієї функції, використовуючи різні характеристики функції (такі нерівності часто називають нерівностями типу Островського) та деяким їх застосуванням. Нерівності

такого типу можуть бути використані для розв'язання інших екстремальних задач теорії наближень, зокрема, для функцій малої гладкості вони можуть бути застосовані при розв'язанні задач оптимального відновлення і при доведенні нерівностей типу Ландау–Колмогорова.

Відомо багато способів поширити поняття функції обмеженої варіації з випадку функцій однієї змінної на випадок функцій багатьох змінних. Ми пропонуємо ще один спосіб такого узагальнення, що заснований на підході Кронрода і Вітушкіна (який, в свою чергу, має в своїй основі теорему Банаха про індикатрису). Запропоноване означення функції обмеженої варіації, на відміну від варіацій Кронрода–Вітушкіна, має такі дві властивості: варіація функції не змінюється при множенні аргументу на ненульову константу; варіація радіальної функції декількох змінних удвічі більша за варіацію породжуючої її функції однієї змінної. Для введеного поняття множин і функцій обмеженої варіації ми доводимо точні нерівності типу Островського.

Для класу випадкових процесів, що задається мажорантою модуля неперервності, ми доводимо точну нерівність типу Островського, яка оцінює відхилення інтеграла $\int_0^1 \xi_t dt$ від випадкової величини ξ_τ, де τ — це деякий випадковий час. Застосовуючи цю нерівність, ми розв'язуємо задачу оптимального відновлення інтеграла від випадкового процесу цього класу, знаючи випадкові величини $\xi_{\tau_1}, \ldots, \xi_{\tau_n}$, де $\tau_1, \ldots, \tau_n$ — певні випадкові величини. Ми також розглядаємо задачу оптимального вибору величин $\tau_1, \ldots, \tau_n$.

Четвертий розділ присвячено нерівностям для похідних типу Ландау–Колмогорова і типу Надя, а також пов'язаним задачам.

Отримано точні нерівності типу Надя, які оцінюють рівномірну норму функції з простору Соболєва через L_p-норму її градієнта, і деяку її напівнорму, яка визначається на просторі локально інтегровних у відкритому конусі C простору $\mathbb{R}^d$ функцій. У метричному просторі (X, ρ) з мірою μ, ми доводимо точну нерівність типу Надя, яка оцінює рівномірну норму функції за допомогою її $\|\cdot\|_{H^\omega}$ – норми, що визначена модулем неперервності

ω, і пів нормою, яка визначена у просторі локально інтегровних функції.

За допомогою цих нерівностей доведено точні нерівності типу Ландау-Колмогорова, які оцінюють рівномірну норму похідної Радона-Нікодима заряду через L_p – норму градієнта цієї похідної (або через $\|\cdot\|_{H^\omega}$ – норму цієї похідної) і пів норм, що визначені на множині зарядів.

У випадку $C = \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^{d-m}$, $0 \leqslant m \leqslant d$, отримані нерівності, які оцінюють рівномірну норму деякої мішаної похідної функції $f\colon C \to \mathbb{R}$ через рівномірну норму функції та L_p–норму градієнта цієї мішаної похідної, або $\|\cdot\|_{H^\omega}$–норму цієї мішаної похідної. У випадках $m = 0, 1$ отримані нерівності є точними.

Показано, що одержані результати можуть бути застосовані для розв'язання задачі апроксимації відповідних необмежених операторів обмеженими.

Ми знаходимо модуль неперервності оператора кратного диференціювання на класах функцій визначених на пів осі, які задаються (неконстантними) мажорантами самих функцій і їх старших похідних. Ми доводимо аналог теореми про вужів, який гарантує існування аналогів ідеальних сплайнів з максимально можливою кількістю точок осциляції. Ці сплайни виступають екстремальними в задачі про модуль неперервності оператора диференціювання.

Ключові слова: нерівність для похідних, нерівність типу Надя, нерівність типу Ландау–Колмогорова, нерівність типу Островського, оптимальне відновлення, найкраще наближення, модуль неперервності оператора, L–простір, лема Корнєйчука–Стєчкіна, клас функцій з заданою мажорантою модуля неперервності.

Kovalenko O.V. Inequalities for derivatives and extremal problems of Approximation Theory in metric spaces — Manuscript.

Dissertation for the Doctor Degree in Physical and Mathematical Sciences in Speciality 01.01.01 — Mathematical Analysis (111 — Mathematics). — Oles

Honchar Dnipro National University of Ministry of Education and Science of Ukraine, Dnipro; Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2024.

The dissertation is devoted to classical problems of Approximation Theory, in particular to sharp Landau–Kolmogorov type inequalities, to the Stechkin problem about approximation of unbounded operators by bounded ones, to the problem to find the modulus of continuity of operators, as well as to problems of optimal recovery of operators and functionals given exact or inexact information, in particular to problems of optimization of cubature formulae.

Chapter 1 is devoted to a study of extremal problems in spaces of functions with values in L–spaces i.e., in semilinear metric spaces with additional axioms that connect the metric with the algebraic operations. Such approach allows to include into consideration various classes of functions, in particular classes of multi-valued and fuzzy-valued functions, as well as classes of functions with values in normed spaces, including classes of random processes.

We obtain a generalization of the Korneichuk–Stechkin lemma for functions with values in L–spaces. As applications of this result, we prove sharp Ostrowski type inequalities and solve problems of optimal recovery of the convexifying operator, as well as a problem of optimal recovery of the integral for classes of functions with given majorant of modulus of continuity. The recovery is done based on n mean over small intervals values of the function. We solve problems of optimal recovery of a function, and of the Hukuhara type derivative on the classes of functions with given majorant of the modulus of continuity of their Hukuhara type derivative. In this case the recovery is done based on n values of the function. We prove sharp Landau type inequalities, solve the Stechkin problem about approximation of unbounded operators by bounded ones, and solve the problem of optimal recovery of an unbounded operator on a class of elements known with error.

We solve a problem of optimal recovery of monotone operators in partially ordered L–spaces and study the question of the optimal choice of an information operator. We also solve a problem of optimal recovery of (λ, φ)–type operators

on the classes of functions with given majorant of modulus of continuity based on n values of a function that are given with some error; as an application of this result, we solve a problem of optimal recovery of the integral of a random process.

Moreover, in this chapter we obtain estimates for the deviation between integral operators on classes of L–space-valued functions, prove an integral representation for (λ, φ)–additive operators, and a sharp Ostrowski type inequality for such operators.

Chapter 2 is devoted to extremal problems for operators that act on the Sobolev classes of multivariate functions. For a convex cone $C \subset \mathbb{R}^d$ and a convex bounded centrally–symmetric set $K \subset \mathbb{R}^d$ that contains the origin in its interior, we consider the classes of functions $f\colon C \to \mathbb{R}$ such that $f \in L_\infty(C)$ and $\||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(C)} \le 1$, where $p \in [1, \infty]$, K° is the polar to K set, $|\cdot|_K$ denotes the norm in $\mathbb{R}^d$ that is generated by the set K, and the derivatives of the function f are understood in the distributional sense. For these classes of functions we consider the problem of the best approximation of the hypersingular integral operator

$$D_{K,w}f(x) = \int_C w(|t|_K)(f(x) - f(x+t))dt, x \in C$$

using bounded operators, where $w\colon (0, \infty) \to [0, \infty)$ is some weight function that can have non-integrable discontinuity at 0. In the case, when K is the Euclidean ball in $\mathbb{R}^d$, $C = \mathbb{R}^d$ and $w(t) = t^{-(d+\alpha)}$, $\alpha \in (0, 1)$, this operator becomes the Riesz fractional derivative.

In order to solve this problem, we obtain several auxiliary results, which are interesting on their own. We compute the quantity

$$\sup_{\||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(K\cap C)} \le 1} \int_{K\cap C} w(|y|_K)(f(y) - f(\theta))dy,$$

which then is used in the solutions of several other extremal problems, in particular in the problem of optimization of cubature formulae. We also prove sharp Landau type inequalities in the additive form that estimate $\|D_{K,w}f\|_{L_\infty(C)}$ via $\|f\|_{L_\infty(C)}$ and $\||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(C)}$, $p \in (d, \infty]$. In the case of a power weight function w, we also obtain sharp Landau type inequalities in the multiplicative form.

Moreover, we study the modulus of continuity of the operator $D_{K,w}$ and solve the problem of optimal recovery of this operator given elements known with error.

In the case $K = (-1,1)^d$, we consider the problem of optimal recovery of the functional $f \mapsto \int_Q w(x)f(x)dx$ given n values of the function f. In the case of the unit weight w and the domain Q that can be represented as a union of several shifts of the set K, we find the optimal error of recovery and an optimal method of recovery; in the case of a more general weight and (or) a more complex domain Q, we find an asymptotically optimal solution of the optimal recovery problem.

Chapter 3 is devoted to inequalities that estimate the deviation between the value of a function at some point and the mean value of the function, via some characteristics of the function. Such inequalities are often called Ostrowski type inequalities. Inequalities of this kind can be applied to solutions of other extremal problems of Approximation Theory, in particular for classes of functions of low smoothness they can be applied to problems of optimal recovery and to prove Landau–Kolmogorov type inequalities.

Many ways to extend the notion of a function of bounded variation from the case of univariate to the case of multivariate functions are known. We propose a new way for such a generalization. The approach is based on the Kronrod–Vitushkin variations (which, in turn, are based on the Banach indicatrix theorem). Unlike the Kronrod–Vitushkin variations, the proposed definition satisfies the following two properties: the variation of a function does not change after multiplication of its argument by a non-zero constant; the variation of a radial function is twice as big as the variation of the generating univariate function. Using the introduced notions of bounded variation for multidimensional sets and multivariate functions, we prove sharp Ostrowski type inequalities.

For a class of random processes that is determined by a majorant of modulus of continuity of the processes, we prove a sharp Ostrowski type inequality that estimates the deviation between the integral $\int_0^1 \xi_t dt$ and the random variable ξ_τ,

where τ is some random variable. Using this inequality, we solve a problem of optimal recovery of the integral of the random process, given the random variables $\xi_{\tau_1}, \dots, \xi_{\tau_n}$, where $\tau_1, \dots, \tau_n$ are some random variables. We also consider the problem of optimal choice of the variables $\tau_1, \dots, \tau_n$.

Chapter 4 is devoted to the inequalities for derivatives of Landau–Kolmogorov type, of Nagy type, and related extremal problems.

We obtain sharp Nagy type inequalities that estimate the uniform norm of a function from a Sobolev space using the L_p-norm of its gradient and some seminorm that is defined on the space of locally integrable on an open cone $C \subset \mathbb{R}^d$ functions. In a metric space (X, ρ) with measure μ we prove a sharp Nagy type inequality that estimates the uniform norm of a function via its $\|\cdot\|_{H^\omega}$–norm that is defined by a modulus of continuity ω, and a seminorm defined in the space of locally integrable functions.

Using this inequality, we prove a sharp Landau–Kolmogorov type inequality that estimates the uniform norm of the Radon–Nikodym derivative of a charge using the L_p–norm of the gradient of this derivative (or $\|\cdot\|_{H^\omega}$–norm of this derivative) and some seminorm that is defined on the space of charges.

In the case, when $C = \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^{d-m}$, $0 \leqslant m \leqslant d$, we prove inequalities that estimate the uniform norm of a mixed derivative of a function $f\colon C \to \mathbb{R}$ using the uniform norm of the function and the L_p–norm of the gradient of the function's mixed derivative (or the $\|\cdot\|_{H^\omega}$–norm of this mixed derivative). In the cases $m = 0, 1$ these inequalities are sharp.

We show that the obtained results can be used in order to solve the problem of approximation of the corresponding unbounded operators by bounded ones.

We find the modulus of continuity of a higher order differentiation operator on the classes of functions defined on a half-line that are determined by (non-constant) majorants of the functions and their higher derivatives. We prove a snake theorem that guarantees existence of perfect spline analogues that oscillate maximally. These splines are extremal in the problem to find the modulus of continuity of the differentiation operator.

Keywords: inequality for derivatives, Nagy type inequality, Landau–Kol-

mogorov type inequality, Ostrowski type inequality, optimal recovery, best approximation, modulus of continuity of an operator, L–space, Korneichuk–Stechkin lemma, class of function with given majorant of modulus of continuity.

Список публікацій здобувача

[1] O.V. Kovalenko. Ostrowski type inequalities for sets and functions of bounded variation. *J. Inequal. Appl.*, **151**, 2017. doi:10.1186/s13660-017-1429-5. (SJR — Q3).

[2] O. Kovalenko. On optimal recovery of integrals of random processes. *J. Math. Anal. Appl.*, **487**, №1, 123949, 2020. doi:10.1016/j.jmaa.2020.123949. (SJR — Q2).

[3] V. Babenko, Yu. Babenko, O. Kovalenko. On multivariate Ostrowski type inequalities and their applications. *Math. Ineq. Appl.*, **23**, №2, 569–583, 2020. doi:10.7153/mia-2020-23-47. (SJR — Q2).

[4] V. Babenko, V. Babenko, O. Kovalenko. Optimal recovery of monotone operators in partially ordered L-spaces. *Numer. Func. Anal. Opt.*, **41**, №11, 1373–1397, 2020. doi:10.1080/01630563.2020.1775251. (SJR — Q3).

[5] O. Kovalenko. On maximally oscillating perfect splines and some of their extremal properties. *Anal. Math.*, **46**, №3, 555–577, 2020. doi:10.1007/s10476-020-0037-7. (SJR — Q3).

[6] O.V. Kovalenko. On multidimensional Ostrowski-type inequalities. *Ukr. Math. J.*, **72**, 741–758, 2020. doi:10.1007/s11253-020-01814-w. Translation of Ukrain. Mat. Zh. **72** (5) 644–657, 2020. (SJR — Q3).

[7] V. Babenko, V. Babenko, O. Kovalenko, M. Polishchuk. Optimal recovery of operators in function L-spaces. *Anal. Math.*, **47**, 13–32, 2021. doi:10.1007/s10476-021-0065-y. (SJR — Q3).

[8] V.F. Babenko, Yu.V. Babenko, O.V. Kovalenko. On asymptotically optimal cubatures for multidimensional Sobolev spaces. *Res. Math.*, **29**, №2, 15–27, 2021. doi:10.15421/242106.

[9] V. Babenko, O. Kovalenko, N. Parfinovych. On approximation of hypersingular integral operators by bounded ones. *J. Math. Anal. Appl.*, **513**, №2, 126215, 2022. doi:10.1016/j.jmaa.2022.126215. (SJR — Q1).

[10] V.F. Babenko, V.V. Babenko, O.V. Kovalenko, N.V. Parfinovych. General form of (λ, φ)-additive operators on spaces of L-space-valued functions. *Res. Math.*, **30**, №1, 3–9, 2022. doi:10.15421/242201. (SJR — Q4).

[11] V.F. Babenko, V.V. Babenko, O.V. Kovalenko, N.V. Parfinovych. Estimates for the deviations of integral operators in semilinear metric spaces and their applications. *Ukr. Math. J.*, **74**, 685–697, 2022. doi:10.1007/s11253-022-02094-2. Translation of Ukrain. Mat. Zh. **74** (5) 599–609, 2022. (SJR — Q3).

[12] V.F. Babenko, V.V. Babenko, O.V. Kovalenko, N.V. Parfinovych. On Landau – Kolmogorov type inequalities for charges and their applications. *Res. Math.*, **31**, №1, 3–16, 2023. doi:10.15421/242301. (SJR — Q4).

[13] V. Babenko, V. Babenko, O. Kovalenko. Korneichuk-Stechkin lemma, Ostrowski and Landau inequalities, and optimal recovery problems for L-space valued functions. *Numer. Func. Anal. Opt.*, **44**, №12, 1309–1341, 2023. doi:10.1080/01630563.2023.2246540. (SJR — Q2).

[14] V.F. Babenko, V.V. Babenko, O.V. Kovalenko, N.V. Parfinovych. Nagy type inequalities in metric measure spaces and some applications. *Carpathian Math. Publ.*, **15**, №2, 563–575, 2023. doi:10.15330/cmp.15.2.563-575. (SJR — Q2).

[15] V.F. Babenko, V.V. Babenko, O.V. Kovalenko, N.V. Parfinovych. Some sharp Landau–Kolmogorov–Nagy-type inequalities in Sobolev spaces of multivariate functions. *Ukr. Math. J.*, **75**, 1525–1532, 2024. doi:10.1007/s11253-024-02275-1. Translation of Ukrain. Mat. Zh. **75** (10) 1347–1353, 2023.

[16] O. Kovalenko. On a general approach to some problems of approximation

of operators. *J. Math. Sci.*, **279**, 67–76, 2024. doi:10.1007/s10958-024-06987-4. Translation of Ukrain. Mat. Visn. **20** (4) 544–556, 2023.

[17] O. Kovalenko. On optimization of cubature formulae for Sobolev classes of functions defined on star domains. *Mat. Stud.*, **61**, №1, 84–96, 2024. doi:10.30970/ms.61.1.84-96.

[18] O.V. Kovalenko. Maximally oscillating perfect splines and some of their applications. In *Тези доповідей Міжнародної математичної конференції "Теорія наближень і її застосування"*, Україна, Дніпро, 3-5 жовтня 2019.

[19] В.Ф. Бабенко, В.В. Бабенко, О.В. Коваленко, Поліщук М.В. Екстремальні задачі теорії апроксимації для функцій зі значеннями у L-просторах. In *Тези доповідей Міжнародної математичної конференції "Теорія наближень і її застосування"*, Україна, Дніпро, 3-5 жовтня 2019.

[20] V.F. Babenko, V.V. Babenko, O.V. Kovalenko. Korneichuk-Stechkin lemma and Ostrowski type inequalities for functions with values in L-spaces. In *Thesis of Joint Mathematics Meetings*, Colorado Convention Center, Denver, CO, January 15-18, 2020.

[21] V.F. Babenko, V.V. Babenko, O.V. Kovalenko. Korneichuk–Stechkin lemma for L-space valued functions and some applications. In *Тези доповідей ТЕОРІЯ НАБЛИЖЕНЬ І ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ присвячена 100-річчю з дня народження Миколи Павловича Корнєйчука*, Дніпро, Україна, 16-19 вересня 2020.

[22] O.V. Kovalenko. On optimal recovery of integrals of random processes. In *Тези доповідей ТЕОРІЯ НАБЛИЖЕНЬ І ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ присвячена 100-річчю з дня народження Миколи Павловича Корнєйчука*, Дніпро, Україна, 16-19 вересня 2020.

[23] O. Kovalenko. Ostrowski type inequalities for sets and functions of bounded variation. In *International Online Workshop on Approximation Theory*, Ivano-Frankivsk, Ukraine, March 19-21, 2021.

[24] V. Babenko, V. Babenko, O. Kovalenko, N. Parfinovych. Approximation

of some classes of L-space valued periodic functions by generalized trigonometric polynomials. In *International Online Workshop on Approximation Theory*, Ivano-Frankivsk, Ukraine, March 19-21, 2021.

[25] V. Babenko, Yu. Babenko, O. Kovalenko. On multivariate Ostrowski type inequalities and their applications. In *International Conference of Young Mathematicians*, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine (online), Kyiv, Ukraine, June 3–5, 2021.

[26] V. Babenko, V. Babenko, O. Kovalenko. Approximation of operators in semi-linear metric spaces and some applications. In *2022 Spring Eastern Virtual Sectional Meeting*, March 19-20, 2022.

[27] V. Babenko, V. Babenko, O. Kovalenko. Approximation of operators in semi-linear metric spaces. In *The international online conference "Current trends in abstract and applied analysis"*, May 12-15, 2022.

[28] V. Babenko, V. Babenko, O. Kovalenko. Fixed sets and fixed points for mappings in generalized Fréchet spaces. In *The international online conference "Current trends in abstract and applied analysis"*, May 12-15, 2022.

[29] V. Babenko, Yu. Babenko, O. Kovalenko. On asymptotically optimal cubatures for multidimensional Sobolev spaces. In *The international online conference "Current trends in abstract and applied analysis"*, May 12-15, 2022.

[30] V. Babenko, O. Kovalenko, N. Parfinovych. On approximation of hypersingular integral operators by bounded ones. In *International Conference "Theory of Approximation of Functions and its Applications", dedicated to the 80th anniversary of Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Alexander STEPANETS (1942-2007), Lutsk, Ukraine*, June 6–10, 2022.

[31] V.F. Babenko, V.V. Babenko, O.V. Kovalenko, N.V. Parfinovych. Landau–Kolmogorov–Nagy type inequalities and some applications. In *International Workshop on Current Trends in Analysis and Approximation Theory*, July 18, 2023.

[32] V.F. Babenko, V.V. Babenko, O.V. Kovalenko, N.V. Parfinovych. On Landau-Kolmogorov-type inequalities for charges and their applications. In *International Conference on Approximation Theory and Beyond*, May 15-18, 2023 Vanderbilt University, Nashville, Tennessee, USA.

Зміст

Анотація **2**

Перелік умовних позначень **21**

Вступ **23**

1 Екстремальні задачі у функціональних L–просторах **46**

1.1 L–простори 46

1.1.1 Означення 46

1.1.2 Деякі властивості L–просторів 47

1.1.3 Частково впорядковані L–простори 51

1.1.4 Вимірні функції зі значеннями у метричних просторах 56

1.1.5 Приклади частково впорядкованих L–просторів . . . 58

1.2 Оператори зі значеннями у L–просторах 63

1.2.1 Інтеграл функції зі значеннями у L–просторі 63

1.2.2 Деякі функції зі значеннями у L–просторі 67

1.2.3 (λ, φ)–адитивні оператори 70

1.3 Лема Корнєйчука–Стєчкіна і деякі її застосування 75

1.3.1 Випадок дійснозначних функцій 75

1.3.2 Лема Корнєйчука–Стєчкіна 76

1.3.3 Оцінка для функціонала $S(\psi_1, \psi_2)$ 79

1.3.4 Відхилення між середніми значеннями функції на різних відрізках 82

1.3.5 Деякі властивості екстремальних функцій 87

1.4 Про задачі оптимального відновлення 87
1.4.1 Задачі оптимального відновлення операторів на класі $H^\omega(T, X)$ 88
1.4.2 Задачі оптимального відновлення операторів на класі $W^1H^\omega(T, X)$ 95
1.4.3 Задачі оптимального відновлення для монотонних операторів 100
1.4.4 Задачі оптимального відновлення для операторів типу (λ, φ) 108
1.5 Наближення операторів і пов'язані задачі 112
1.5.1 Відхилення між інтегральними операторами 112
1.5.2 Наближення (λ, φ)–адитивних операторів 119
1.5.3 Наближення необмежених операторів і пов'язані задачі на класі $W^1H^\omega([a, b], X)$ 121
Висновки до розділу 1 129

2 Екстремальні задачі у просторах функцій багатьох змінних 131
2.1 Вступ 131
2.2 Позначення 134
2.3 Наближення необмежених операторів 136
2.4 Нерівність типу Островського 138
2.4.1 Допоміжні результати 139
2.4.2 Доведення теореми 2.4.1 144
2.5 Нерівності типу Ландау–Колмогорова 145
2.5.1 Допоміжні результати 146
2.5.2 Доведення теореми 2.5.1 153
2.5.3 Доведення теореми 2.5.2 154
2.6 Модуль неперервності оператора і відновлення оператора за неточними даними 157
2.7 Оптимальне відновлення інтеграла з одиничною вагою . . . 159
2.7.1 Позначення і необхідні допоміжні твердження 160

2.7.2 Випадок області складеної з кубів 161
2.7.3 Випадок опуклої області 165
2.7.4 Випадок зірчатої області 170
2.8 Оптимальне відновлення інтеграла з неодиничною вагою . . 184
2.8.1 Випадок простої вагової функції 184
2.8.2 Випадок допустимої вагової функції 189
Висновки до розділу 2 191

3 Нерівності типу Островського 193
3.1 Про загальний підхід до деяких задач апроксимації операторів 193
3.1.1 Вступ 193
3.1.2 Головне спостереження 195
3.1.3 Деякі застосування 197
3.2 Множини і функції обмеженої варіації 205
3.2.1 Позначення 205
3.2.2 Варіація множини 207
3.2.3 Варіація функції 213
3.2.4 Варіація деяких множин і функцій 219
3.2.5 Сім'я множин $\mathfrak{A}$ 223
3.2.6 Нерівності типу Островського 229
3.3 Оптимальне відновлення інтеграла від випадкових процесів 236
3.3.1 Позначення 237
3.3.2 Нерівність типу Островського 237
3.3.3 Оптимальне відновлення інтеграла 241
3.3.4 Оптимізація інформаційних вузлів 245
Висновки до розділу 3 250

4 Нерівності типу Ландау–Колмогорова–Надя і пов'язані задачі 252
4.1 Нерівності типу Надя 252
4.1.1 Означення і позначення 253

4.1.2 Оператор усереднення 254
4.1.3 Нерівності типу Надя у просторах $H^{\omega}(X)$ 257
4.1.4 Нерівності типу Надя у просторах $W^{1,p}(C)$ 259
4.1.5 Нерівності типу Надя у метричних просторах 262
4.2 Нерівності для узагальнених гіперсингулярних інтегральних операторів 264
4.3 Нерівності типу Ландау–Колмогорова на класах зарядів . . 265
4.4 Нерівності для мішаної похідної функції 267
4.4.1 Припущення і позначення 267
4.4.2 Випадок класу $H^{\omega}(\mathbb{R}^d_{m,+})$ 268
4.4.3 Випадок класу $W^{1,p}(\mathbb{R}^d_{m,+})$ 271
4.5 Задача Стєчкіна і пов'язані екстремальні задачі 273
4.5.1 Загальні факти 273
4.5.2 Розв'язання екстремальних задач 276
4.6 Модуль неперервності оператора кратного диференціювання на класах Соболєва 277
4.6.1 Позначення і формулювання результатів 277
4.6.2 Ідеальні g-сплайни 284
4.6.3 Максимально осцилюючі ідеальні сплайни з заданою нормою 295
4.6.4 Доведення основних теорем 302
Висновки до розділу 4 304

Висновки **306**

Список використаних джерел **308**

Додаток А **327**

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\forall$ — квантор загальності.

$\exists$ — квантор існування.

$:=$ — дорівнює за означенням.

$x \in A$ — елемент x належить множині A.

$x \notin A$ — елемент x не належить множині A.

$A \cup B$ — об'єднання множин A та B.

$A \cap B$ — перетин множин A та B.

$A \subset B$ — множина A міститься у множині B.

A^B — множина функцій $g\colon B \to A$, де A і B — деякі непорожні множини.

$\emptyset$ — порожня множина.

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел.

$\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел.

$\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел.

$\mathbb{R}^m$ — простір точок $t = (t_1, ..., t_m)$, $t_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., m$, $m \in \mathbb{N}$.

$\operatorname{meas} A$ — міра Лебега множини A.

$\sup\limits_{x \in A} f(x)$ — точна верхня грань функції f на множині A.

$\inf\limits_{x \in A} f(x)$ — точна нижня грань функції f на множині A.

$\operatorname{ess\,sup}_{x \in A} f(x)$ — істотна верхня грань функції f на множині A.

$\operatorname{ess\,inf}_{x \in A} f(x)$ — істотна нижня грань функції f на множині A.

$\operatorname{sgn} \alpha$ — величина, що дорівнює 1, якщо $\alpha > 0$, -1, якщо $\alpha < 0$, і нулю, якщо $\alpha = 0$.

$\alpha_\pm$ — додатна (від'ємна) частина числа α, $\alpha_\pm = \max\{\pm\alpha, 0\}$.

χ_A — характеристична функція множини A.

$\mathbf{E}\xi$ — математичне сподівання випадкової величин ξ.

$H^\omega(T, X)$ — множина функцій $f\colon T \to X$ з заданою мажорантою ω їх модуля неперервності; функція $\omega\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ називається модулем неперервності, якщо вона є неперервною неспадною напівадитивною і такою, що $\omega(0) = 0$.

$\mathrm{int} A$ — внутрішність множини A.

∂A — межа множини A.

$x^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$ — похідна порядку r функції x; $x^{(0)} := x$.

$\|x\|_p = \|x\|_{L_p(G)} := \left(\int_G |x(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}$, де $p \in [1,\infty)$ та $x\colon G \to \mathbb{R}$ — інтегровна в степені p за Лебегом на множині G функція.

$L_p(G)$, $p \in [1,\infty)$ — простір функцій $x\colon G \to \mathbb{R}$ зі скінченною нормою $\|x\|_{L_p(G)}$.

$\|x\|_\infty = \|x\|_{L_\infty(G)} := \operatorname*{ess\,sup}_{t\in G} |x(t)|$, де $x\colon G \to \mathbb{R}$ — вимірна на G функція.

$L_\infty(G)$ — простір істотно обмежених функцій $x\colon G \to \mathbb{R}$.

$W^{1,p}(G)$, $G \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$ — простір Соболєва функцій $f\colon G \to \mathbb{R}$ таких, що f та усі її (узагальнені) частинні похідні належать $L_p(Q)$.

$\mathbb{K}$ — сім'я відкритих опуклих симетричних відносно початку координат θ обмежених множин $K \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, для яких $\theta \in \mathrm{int}\, K$.

$|x|_K$ — норма елемента $x \in \mathbb{R}^d$, що породжена множиною $K \in \mathbb{K}$, тобто $|x|_K := \inf\{\lambda > 0\colon x \in \lambda K\}$.

$|x|_p$, $1 \leq p \leq \infty$ — позначення для $|x|_K$ у випадку, коли K — це одинична куля у $\mathbb{R}^d_p$.

Вступ

Актуальність теми. Нерівності для похідних — це класичний розділ теорії наближень, що має більше ніж столітню історію. Перші результати Ж. Адамара, Ґ. Г. Гарді, Дж. І. Літтлвуда та Е. Ландау в цьому напрямку з'явились у 1910-х роках. Один з найважливіших результатів в цій тематиці належить А. М. Колмогорову, який отримав точну нерівність, що оцінює рівномірну норму k-ї похідної функції заданої на числовій прямій через рівномірні норми функції і її r-ї похідної, $k, r \in \mathbb{N}$, $k < r$. Саме після цієї роботи нерівності такого роду називають нерівностями типу Колмогорова. У цій тематиці працювали багато математиків, зокрема В. Ф. Бабенко, Б. Боянов, А. П. Буслаєв, В. М. Габушин, С. Карлін, В. О. Кофанов, М. П. Купцов, А. О. Лігун, Ю. І. Любіч, Г. Г. Магаріл-Ільяєв, А. П. Маторін, Б. Надь, Г. Поліа, С. О. Пічугов, І. М. Стейн, Л. В. Тайков, О. Ю. Шадрін, І. Дж. Шонберг, та багато інших. Нерівності для похідних для функцій однієї або декількох змінних, особливо нерівності з найменшою можливою константою, знаходять застосування у різноманітних задачах, зокрема у чисельних методах, звичайних диференціальних рівняннях і рівняннях у частинних похідних, та інших напрямах аналізу. Тому важливим є отримання нових точних нерівностей такого типу для різних класів функцій і областей їх визначення, зокрема для класів Соболєва функцій однієї і багатьох дійсних змінних, які, зокрема, є природними класами для пошуку розв'язків диференціальних рівнянь та варіаційних задач.

Нерівності для похідних тісно пов'язані з деякими іншими екстремальними задачами теорії наближень, зокрема з задачею Стєчкіна про наближення, взагалі кажучи, необмежених операторів обмеженими, задачею набли-

ження одного класу функцій іншим, задачами оптимального відновлення функціоналів і операторів по точно або неточно заданій інформації, та іншими задачами. Ці задачі також досліджувались багатьма математиками, серед яких В. В. Арєстов, В. Л. Велікін, Х. Вожняковський, О. А. Женсикбаєв, М. П. Корнєйчук, В. П. Моторний, С. М. Нікольський, Е. Новак, К. Ю. Осипенко, В. І. Рубан, С. Б. Стєчкін, Ю. М. Субботін, В. М. Тихоміров, Дж. Трауб, та інші.

Протягом останніх десятиліть, виходячи як з теоретичних, так і практичних міркувань, також мали місце спроби розвитку теорії апроксимації багатозначних і нечітко-значних функцій. Розвиток теорії апроксимації у напівлінійних метричних просторах по-перше дозволяє з єдиної точки зору розглядати відповідні задачі для багатозначних, нечітко-значних, а також функцій зі значеннями у банахових просторах (зокрема для випадкових процесів), а по-друге, така робота може стати основою для розробки обчислювальних алгоритмів для розв'язку різноманітних задач, пов'язаних з такими функціями. Крім того, становить теоретичний інтерес питання про те, наскільки далеко можна пройти у напрямку узагальнення відомих результатів для числових функцій на випадок функцій зі значеннями у напівлінійних метричних просторах.

Одним з найважливіших конкретних випадків загальної задачі оптимального відновлення, і однією з найстаріших задач теорії апроксимації, є задача про оптимальні квадратурні формули. Перші результати в цьому напрямку отримав К. Ф. Гаус ще на початку XIX століття. Серед математиків, які займались питаннями оптимізації квадратурних формул, слід відзначити В. Ф. Бабенка, Б. Боянова, О. А. Женсикбаєва, А. М. Колмогорова, М. П. Корнєйчука, А. О. Лігуна, Г. Л. Лоеба, В. П. Моторного, С. М. Нікольського, Е. Новака, К. І. Осколкова, А. Сарда, та інших. В силу важливості квадратурних формул, зокрема для питань чисельного аналізу, цікавим є отримання оптимальних або асимптотично оптимальних квадратурних формул на різних класах функцій, включаючи багатозначні та нечітко-значні функції, а також функції що приймають значення у нор-

мованих просторах, наприклад, випадкові процеси.

Одним з найпростіших варіантів задачі оптимізації квадратурних формул є знаходження максимального на класі відхилення середнього значення функції від її значення в деякій точці. Такого роду нерівності часто називають нерівностями типу Островського. Для класів функцій малої гладкості нерівності типу Островського можуть бути використані як основний елементу розв'язання деяких екстремальних задач, зокрема для доведення нерівностей типу Ландау–Колмогорова та Надя, а також для розв'язання задач оптимізації квадратурних формул. Тому представляє інтерес доведення нових нерівностей типу Островського, зокрема для функцій зі значеннями у напівлінійних просторах. Таким чином, екстремальні задачі теорії наближень у метричних просторах є актуальною тематикою і потребують подальших досліджень.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалась згідно з загальними планами досліджень кафедри математичного аналізу та оптимізації (до 2022 року — кафедри математичного аналізу і теорії функцій) Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, а також згідно з держбюджетними темами НДР-1-666-22 "Теоретичні та прикладні аспекти відновлення операторів та оптимізації наближення функцій" № державної реєстрації 0122U001223; НДР-1–326–17 "Екстремальні проблеми теорії наближень функцій дійсного змінного і нерівності типу Колмогорова" № державної реєстрації 0117U001208.

Мета і завдання дослідження. *Метою* роботи є доведення нових нерівностей типу Ландау–Колмогорова, Надя та Островського, одержання розв'язань задач найкращого наближення і оптимального відновлення функціоналів та операторів, а також інших екстремальних задач теорії наближень для різних класів функцій, зокрема для функцій однієї та багатьох змінних з класів Соболєва, функцій багатьох змінних з обмеженою варіацією, а також класів функцій зі значеннями у нормованих і напівлінійних просторах.

Об'єктом дослідження є класи функцій однієї і багатьох змінних, серед

яких класи Соболєва, класи функцій з обмеженою варіацією, класи функцій, що задаються мажорантою їх модуля неперервності, класи функцій зі значеннями у напівлінійних метричних просторах, та класи випадкових процесів.

Предметом дослідження є нерівності для похідних функцій різних класів; задачі оптимального відновлення операторів і функціоналів, що діють на різних класах функцій, по точно та неточно заданій інформації; задача Стєчкіна про наближення необмежених операторів обмеженими; модуль неперервності операторів.

Для реалізації поставленої мети у роботі було поставлено такі *завдання*:

- Дослідити можливість узагальнення леми Корнєйчука–Стєчкіна на класи функцій зі значеннями у напівлінійних метричних просторах.
- Дослідити можливість розв'язання задач оптимального відновлення на класах функцій зі значеннями у напівлінійних метричних просторах, що задаються мажорантою модуля неперервності функції або її похідної.
- Розв'язати задачу оптимального відновлення монотонних операторів, що задані на класах монотонних функцій зі значеннями у напівлінійному метричному просторі.
- Дослідити задачі наближення операторів, що діють на класах функцій зі значеннями у напівлінійному метричному просторі.
- Розв'язати задачу Стєчкіна про наближення гіперсингулярних інтегральних операторів, що задані на класах Соболєва функцій багатьох змінних.
- Розв'язати задачі оптимізації квадратурних формул на класах Соболєва функцій багатьох змінних.
- Дослідити можливість доведення нерівностей типу Островського для функцій багатьох змінних, що мають обмежену варіацію.

- Розв'язати задачу про оптимізацію квадратурних формул для випадкових процесів за інформацією про значення процесу у випадкові моменти часу.

- Довести нерівності типу Надя для функцій у метричних просторах з мірою та на класах Соболєва функцій багатьох змінних.

- Дослідити модуль неперервності оператора кратного диференціювання на класі Соболєва функцій, що задані на пів осі.

Методи дослідження. В роботі використовуються сучасні методи аналізу і теорії наближень, загальні методи розв'язання екстремальних задач теорії наближень, зокрема методи доведення нерівностей для похідних і методи дослідження пов'язаних задач.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи є новими, і полягають у такому:

- Отримано узагальнення леми Корнєйчука–Стєчкіна на класи, що задаються мажорантою модуля неперервності функцій зі значеннями у напівлінійних метричних просторах. Із застосуванням цього результату, отримано точні на цьому класі функцій оцінки відхилення між середніми значеннями функцій на різних відрізках.

- На класах $H^\omega([a,b],X)$ функцій зі значеннями у напівлінійному метричному просторі X, що задаються мажорантою модуля неперервності функції, отримано розв'язання задач оптимального відновлення опуклюючого оператора і оператора інтегрування на основі середніх значень функції на $n \in \mathbb{N}$ інтервалах. Для класу $W^1H^\omega([a,b],X)$ функцій, що задається мажорантою модуля неперервності похідної типу Хукухара функції, отримано розв'язання задач оптимального відновлення тотожного оператора і оператора диференціювання в сенсі Хукухара на основі $n \in \mathbb{N}$ значень функції.

- Розв'язано задачу оптимального відновлення монотонних (λ,φ)–адитивних операторів, що задані на класах монотонних функцій зі значе-

ннями у напівлінійному метричному просторі на основі $n \in \mathbb{N}$ значень функції.

- Отримано точні оцінки відхилення інтегральних операторів, що діють на класах функцій зі значеннями у напівлінійному метричному просторі. На класі $W^1H^\omega([a,b],X)$ отримано точні оцінки відхилення між різницевими операторами і оператором диференціювання (у сенсі Хукухара), а також розв'язання деяких пов'язаних задач.

- Розв'язано задачу Стєчкіна про наближення гіперсингулярних інтегральних операторів, що задано на класах Соболєва функцій багатьох змінних, обмеженими операторами. Доведено точні нерівності типу Островського і типу Ландау–Колмогорова, а також досліджено модуль неперервності такого інтегрального оператора.

- Знайдено оптимальні або асимптотично оптимальні квадратурні формули для вагових інтегралів по опуклим і зірчатим множинам на класах Соболєва функцій багатьох змінних.

- Запропоновано нове означення багатовимірних множин і функцій багатьох змінних обмеженої варіації, і для них отримано точні нерівності типу Островського.

- Розв'язано задачу про оптимальне відновлення інтеграла $\int_0^1 \xi_t dt$ на класі випадкових процесів, що задаються мажорантою модуля неперервності, на основі випадкових величин $\xi_{\tau_1}, \ldots, \xi_{\tau_n}$, де $\tau_1, \ldots, \tau_n$ — це деякі випадкові величини.

- Доведено точні нерівності типу Надя для функцій у метричних просторах з мірою та у класах Соболєва функцій багатьох змінних. Як наслідок, отримано точні нерівності типу Ландау–Колмогорова для зарядів, а також мішаних похідних функцій з класів Соболєва багатьох змінних.

- На класах диференційовних функцій $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, що задаються обмеженнями на вагові норми функції і її старшої похідної, досліджено модуль неперервності оператора кратного диференціювання та подано його у термінах норм узагальнених ідеальних сплайнів.

Практичне значення одержаних результатів. Робота носить теоретичний характер. Отримані результати та розроблені методи можуть бути використані при подальших дослідженнях екстремальних задач теорії наближень, а також при розробці нових чисельних методів.

Особистий внесок здобувача. Результати роботи опубліковано у 6-х одноосібних статтях і 11-х статтях у співавторстві. Усі результати, що виносяться на захист, одержано здобувачем самостійно. У результатах, що включено до дисертації зі статей, які написано у співавторстві, особистий внесок здобувача такий.

Ідея дослідження екстремальних задач у просторах функцій, що приймають значення у напівлінійних метричних просторах, належить професору В. Ф. Бабенку. У статтях [4, 7] (див. Список публікацій здобувача) співавтори брали участь у виборі аксіом і означень, в термінах яких формулюються основні результати, а також брали участь у перевірці робочих гіпотез; докладне доведення усіх основних тверджень належать здобувачеві. У статті [10] співавторам належить гіпотеза про можливість інтегрального представлення (λ, φ) – адитивних операторів; перевірка цієї та інших робочих гіпотез і доведення основних результатів належить здобувачеві. У статті [11] вибір напрямку дослідження належить співавторам, доведення головних теорем належить здобувачеві. У статті [13] співавторам належить гіпотези про можливість узагальнення леми Корнєйчука–Стєчкіна на класи функцій зі значеннями у L–просторах та про можливі області застосування цього узагальнення; формулювання і доведення відповідних результатів належить здобувачеві.

У статтях [3, 8, 9] співавторам належить постановка задач, вибір класів функцій, на яких розглядаються екстремальні задачі, та контроль за пра-

вильністю викладення результатів; доведення результатів належить здобувачеві.

У статтях [12,14,15] співавторам належить ідея застосування отриманої у [9] нерівності типу Островського до нерівностей типу Ландау–Колмогорова та нерівностей типу Надя. Здобувачу належить ідея побудови екстремальних функцій у нерівностях типу Надя і нерівностях типу Ландау–Колмогорова для зарядів, а також детальне доведення основних результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи були представлені та доповідались на:

– Міжнародна математична конференція "Теорія наближень і її застосування" (3-5 жовтня 2019, Дніпро, Україна);

– Joint Mathematics Meetings (January 15-18, 2020, Colorado Convention Center, Denver, CO, USA);

– Міжнародна математична конференція "Теорія наближень і її застосування" присвячена 100-річчю з дня народження Миколи Павловича Корнєйчука (16-19 вересня 2020, Дніпро, Україна);

– International Online Workshop on Approximation Theory (March 19-21, 2021, Ivano-Frankivsk, Ukraine);

– International Conference of Young Mathematicians, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine (online) (June 3–5, 2021, Kyiv, Ukraine);

– 2022 Spring Eastern Virtual Sectional Meeting, (March 19-20, 2022, Tufts University, Medford, USA);

– International online conference "Current trends in abstract and applied analysis", (May 12-15, 2022, Ivano-Frankivsk, Ukraine);

– International Conference "Theory of Approximation of Functions and its Applications", dedicated to the 80th anniversary of Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Alexander Stepanets (1942-2007) (June 6–10, 2022, Lutsk, Ukraine);

– International Workshop on Current Trends in Analysis and Approximation Theory (July 18, 2023, Rome, Italy);

– International Conference on Approximation Theory and Beyond, (May 15-18, 2023, Nashville, TN, USA).

Результати роботи також доповідались на семінарах:

– з теорії функцій при кафедрі математичного аналізу та оптимізації (до 2022 року — кафедрі математичного аналізу і теорії функцій) Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара (Дніпро, неодноразово протягом 2020–2023 років, керівники семінару: член-кореспондент НАН України, д-р. фіз.-мат. наук, проф. В. П. Моторний і д-р. фіз.-мат. наук, проф. Н. В. Парфінович);

– відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (12.01 та 19.01 2024 року, керівник семінару д-р. фіз.-мат. наук, проф. А. С. Романюк);

– "Сучасний аналіз" у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка (14.03.2024, керівники семінару: д-р. фіз.-мат. наук, проф. О. О. Курченко, д-р. фіз.-мат. наук, проф. В. М. Радченко, член-кореспондент НАН України, д-р. фіз.-мат. наук, проф. І. О. Шевчук);

– з теорії аналітичних функцій (28.03.2024, Львів, керівник семінару: д-р. фіз.-мат. наук, проф. О. Б. Скасків).

Публікації. Статті [1–17] зі Списку публікацій здобувача опубліковано у журналах, що входять до наукометричної бази Scopus. Відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, стаття [9] опублікована у виданні квартилю Q1, статті [2,3,13,14] опубліковані у виданнях квартилю Q2, статті [1,4–7,11] опубліковані у виданнях квартилю Q3, а статті [10,12] — у виданнях квартилю Q4. Джерела [18–32] — це тези доповідей.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, переліку умовних позначень, змісту, вступу, чотирьох розділів, висновків і переліку використаних джерел. Повний обсяг роботи складає 332 сторінки.

Зміст дисертації. *Перший розділ* роботи присвячено дослідженню екстремальних задач теорії наближень у напівлінійних метричних просторах. Головні результати цього розділу містяться у статтях [16,18,19,28,29].

Теорія функцій зі значеннями у банахових просторах, а також багато- і

нечітко- значних функцій активно розвивалась протягом декількох останніх десятиліть (див. напр. [13, 62, 72, 76, 194]), зокрема, через численні застосування у теорії оптимізації, теорії наближень, математичній економіці, чисельних методах, і багатьох інших розділах прикладної математики. Деякі результати стосовно багато- і нечітко- значних функцій можуть бути знайдені у [5, 76]. Банахові простори, простори множин і простори нечітких множин належать до класу так званих L–просторів (тобто напівлінійних метричних просторів (X, h_X) з двома додатковими аксіомами, що пов'язують метрику h_X з алгебраїчними операціями). Поняття L–простору було введено у [156], див. також [12]. Розгляд функцій зі значеннями у L–просторах дає уніфікований підхід до розв'язання різноманітних екстремальних задач для згаданих вище класів функцій. У підрозділах 1.1 і 1.2 ми наводимо необхідні означення і факти стосовно L–просторів.

Підрозділ 1.3 присвячено узагальненню леми Корнєйчука–Стєчкіна на випадок класів функцій, що приймають значення у L–просторах.

Нехай ω — це модуль неперервності, тобто неспадна неперервна напівадитивна функція така, що $\omega(0) = 0$. Для відрізка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ позначимо через $H^\omega([a, b], \mathbb{R})$ клас функцій $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ таких, що $|f(t) - f(s)| \leq \omega(|t - s|)$ для всіх $t, s \in [a, b]$. Модулі неперервності, як самостійні функції з вказаними вище властивостями, класи $H^\omega([a, b], \mathbb{R})$, а також класи $W^r H^\omega([a, b], \mathbb{R})$, вперше з'явились у роботі С. М. Нікольського [188]. Відмітимо, що класи $H^\omega([a, b], \mathbb{R})$ задаються обмеженнями на швидкість зміни функцій. Деякі результати щодо класів функцій, які задаються іншими характеристиками, що обмежують коливання функцій, можна знайти у [173].

Для двох додатних майже всюди, інтегровних функцій $\psi_1\colon [a, a'] \to \mathbb{R}_+$ і $\psi_2\colon [b', b] \to \mathbb{R}_+$, $a < a' \leqslant b' < b$ таких, що $\int_a^{a'} \psi_1(t)dt = \int_{b'}^b \psi_2(t)dt$, лема Корнєйчука–Стєчкіна, див. [104, § 7.1], дає оцінку для функціонала

$$(\psi_1, \psi_2) \mapsto \sup_{f \in H^\omega([a,b],\mathbb{R})} \left| \int_a^{a'} f(t)\psi_1(t)dt - \int_{b'}^b f(t)\psi_2(t)dt \right|,$$

яка є точною у випадку опуклого догори модуля неперервності ω. Ця лема була опублікована у [174,175] для класів $H^\omega([a, b], \mathbb{R})$ з $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$,

і була узагальнена на випадок довільного модуля неперервності у [176]. Лема Корнєйчука–Стєчкіна зіграла важливу роль у розв'язанні багатьох екстремальних задач теорії наближень, див. [104, Розділ 7] і наведені там посилання. Деякі її узагальнення і застосування можна знайти у [56, 200].

У підрозділі 1.3 ми узагальнюємо лему Корнєйчука–Стєчкіна на випадок функцій зі значеннями у L–просторах. Нехай (X, h_X) — це L–простір і $H^\omega([a,b], X)$ позначає клас функцій $f\colon [a,b] \to X$ таких, що для всіх $t', t'' \in [a,b]$ маємо $h_X(f(t'), f(t'')) \leqslant \omega(|t' - t''|)$. Нехай також задано ψ_1 і ψ_2 з вказаними вище властивостями. Ми отримуємо оцінку функціонала

$$S(\psi_1, \psi_2) := \sup_{f \in H^\omega([a,b],X)} h_X\left(\int_a^{a'} f(t)\psi_1(t)dt, \int_{b'}^{b} f(t)\psi_2(t)dt\right), \qquad (1)$$

яка є точною у випадку опуклого догори модуля неперервності ω і певних додаткових припущеннях про простір X. У серії застосувань, які ми наводимо далі у цьому розділі, ми показуємо, що це узагальнення може бути важливим інструментом для розв'язання екстремальних задач для функцій зі значеннями у L–просторах.

Важливим напрямком у теорії наближень і оптимальних алгоритмів є задачі оптимального відновлення функціоналів і операторів. Постановка цих задач, численні відомі результати і подальші посилання можуть бути знайдені у монографіях [122, 126, 138, 169]. У підрозділі 1.4 ми розв'язуємо деякі задачі оптимального відновлення для функцій зі значеннями у L–просторах.

Ми розглядаємо задачу оптимального відновлення у такій постановці. Для множини A через $\mathcal{P}_0(A)$ позначимо сім'ю всіх непорожніх підмножин множини A. Нехай задано метричний простір (X, h_X), множини Y і W, а також відображення $\Lambda\colon W \to X$ і $I\colon W \to \mathcal{P}_0(Y)$. Довільну функцію $U\colon Y \to X$ ми будемо називати методом відновлення відображення Λ на класі W за інформацією, що задана відображенням I. Похибкою відновлення відображення Λ на класі W методом U за інформацією, що дається

(багатозначним) відображенням I, називається величина

$$\mathcal{E}(\Lambda, W, I, U, X) = \sup_{w \in W} \sup_{y \in I(w)} h_X(\Lambda(w), U(y)).$$

Величина

$$\mathcal{E}(\Lambda, W, I, X) = \inf_{U} \mathcal{E}(\Lambda, W, I, U, X) \tag{2}$$

називається оптимальною похибкою відновлення відображення Λ на класі W, за інформацією, що задається відображенням I.

Відповідно до даного означення, ми розглядаємо багатозначні інформаційні оператори. Це дозволяє включити до розгляду випадок, коли інформація відома із похибкою. Наприклад, якщо Y — це метричний простір і для всіх $w \in W$, $I(w)$ є кулею в Y з деяким радіусом $\varepsilon > 0$, то на такий інформаційний оператор можна дивитись як на модель вимірювання з похибкою ε. Якщо для кожного $w \in W$, $I(w)$ є одноточковою множиною, тобто інформація відома точно, то ми можемо дещо спростити позначення. У цьому випадку $I \colon W \to Y$ і

$$\mathcal{E}(\Lambda, W, I, U, X) = \sup_{w \in W} h_X(\Lambda(w), U(I(w))).$$

Задача оптимального відновлення відображення Λ на класі W по інформації, що дається інформаційним відображенням I, в метриці простору X, полягає у знаходженні величини (2) і методу U^* (якщо він існує), на якому досягається інфімум в правій частині (2). Якщо $\mathcal{I}$ — це деякий клас інформаційних операторів, то цікавим також є знаходження величини

$$\mathcal{E}(\Lambda, W, \mathcal{I}, X) = \inf_{I \in \mathcal{I}} \mathcal{E}(\Lambda, W, I, X)$$

і оптимального інформаційного відображення, на якому досягається інфімум в правій частині (якщо такий оператор існує), або асимптотично оптимальної послідовності операторів, якщо оптимальний інформаційний оператор не існує, або його важко знайти.

У пункті 1.4.1 ми розглядаємо задачу оптимального відновлення опуклюючого оператора і оператора інтегрування на класі $H^\omega([a, b], X)$. При

виконанні додаткових припущень (наприклад, це так для функцій зі значеннями у нормованому просторі), опуклюючий оператор перетворюється на одиничний оператор. Для дійснозначних функцій такі задачі добре досліджені у випадку, коли інформаційний оператор дає значення функції в деяких n точках відрізка $[a, b]$. Результати з цієї тематики і подальші посилання можуть бути знайдені, наприклад, у [178, Розділи 5,6], [197, Розділ 2] і [102, 118, 202]. У [33] задача оптимізації наближеного інтегрування була розв'язана для класів багатозначних функцій.

У цьому пункті, ми розглядаємо інформаційні оператори, що дають середні значення функції по $n \in \mathbb{N}$ інтервалах з відрізка $[a, b]$. Інформаційні оператори такого роду є цікавими, оскільки на них можна дивитись як на модель аналогового вимірювального пристрою. Крім того, з результатів для таких інформаційних операторів, як правило, легко випливають відповідні результати для інформаційних операторів, що дають значення функції у n точках відрізка $[a, b]$. Результати щодо оптимального відновлення одиничного відображення, що використовують такі інформаційні оператори, наскільки нам відомо, є новими навіть у випадку $X = \mathbb{R}$. Задача оптимізації наближеного інтегрування за "інтервальною" інформацією для функцій з класу $H^\omega([a, b], \mathbb{R})$ була розв'язана у [153]. Інші пов'язані результати можна знайти у [53, 54, 63, 119, 151, 154, 155, 163, 196]. Задача оптимізації інтервальних квадратурних формул для багатозначних відображень розглядалась у [55]. Оскільки на випадкові процеси можна дивитись як на функції зі значеннями у нормованому просторі, то отримані результати також можна застосувати і до оптимального відновлення операторів від випадкових процесів. Деякі результати у цьому напрямку містяться у [111, 168].

У пункті 1.4.2 ми розглядаємо задачі оптимального відновлення одиничного відображення і оператора $\mathcal{D}_H$ похідної типу Хукухара на класі $W^1H^\omega([a, b], X)$ функцій $f\colon [a, b] \to X$, чия похідна типу Хукухара належить до класу $H^\omega([a, b], X)$. У цих задачах інформаційними операторами виступають оператори, що дають значення функцій у n точках з відрізку

$[a, b]$. Ми ще раз посилаємося на [178, Розділи 5,6] стосовно відомих результатів щодо оптимального відновлення функцій з класів $W^1H^\omega([a, b], \mathbb{R})$ і їх періодичних аналогів.

У пункті 1.4.3 ми розглядаємо задачу оптимального відновлення монотонних операторів, що діють у частково впорядкованих L–просторах функцій. Класом W виступають класи $W_{a,b}$ монотонних функцій $f\colon [0, 1] \to X$ таких, що $f(0) = a$ і $f(1) = b$, $a, b \in X$, де X — це частково впорядкований L–простір. Перші результати, що стосуються оптимального відновлення інтеграла на класах монотонних функцій, отримав Дж. Кіфер у [97]. Для багатозначних функцій ця задача розв'язана у [26]. Отримані нами результати істотно узагальнюють результати з цих статей і є новими навіть для числових функцій. Результати щодо оптимального відновлення покоординатно монотонних функцій містяться у [36, 63, 124].

У пункті 1.4.4 ми розглядаємо оператори типу (λ, φ), найважливішими прикладами яких є інтегральні оператори. Для таких операторів на класі $H^\omega(T, X)$ ми наводимо розв'язання задачі оптимального відновлення. Як застосування цього результату ми розв'язуємо задачу про оптимізацію квадратурних формул для випадкових процесів.

У підрозділі 1.5 ми розглядаємо задачі наближення операторів та деякі пов'язані задачі. Нехай X та Y — це два L–простори, а $A, S\colon X \to Y$ — це два оператори з областями $D_A, D_S \subset X$ відповідно. Нехай також задано деякий клас елементів $Q \subset D_A \cap D_S$. Задача знаходження відхилення між операторами A і S на множині Q, тобто задача знаходження величини

$$U(A, S; Q) := \sup_{x \in Q} h_Y(Ax, Sx), \tag{3}$$

має важливу роль у теорії апроксимації і чисельному аналізі. Наприклад, якщо Q є деякою множиною неперервних функцій $f\colon T \to \mathbb{R}$, оператори A і S задаються формулами $Af = \int_T f(s)ds$, $Sf = \sum_{k=1}^n c_k f(x_k)$ ($c_k \in \mathbb{R}, t_k \in T, k = 1, \ldots, n$), і h_Y — це звичайна метрика у $\mathbb{R}$, то величина (3) дає похибку кубатурної формули S на класі Q; якщо A є одиничним оператором, h_Y є деякою метрикою, і S є оператором найкращого наближення

елементами з множини R, тобто $Sf = \arg\min_{g\in R} h_Y(f,g)$, то величина (3) стає наближенням множини Q множиною R у метриці h_Y, яка означається формулою $\sup_{f\in Q}\inf_{g\in R} h_Y(f,g)$; ми припускаємо, що мінімум в означенні оператора S існує при будь-якому $f \in Q$.

Величина (3) пов'язана з низкою оптимізаційних задач. Наприклад, вважаючи оператор A, множину Q, і сім'ю $\mathfrak{S}$ операторів S заданими, ми можемо поставити задачу знаходження величини

$$E_{\mathfrak{S}}(A,Q) := \inf_{S\in\mathfrak{S}} U(A,S;Q) \tag{4}$$

і найкращого оператора $S \in \mathfrak{S}$ на якому досягається інфімум, якщо такий оператор існує. Вперше такого роду задачу розглядав С. Б. Стєчкін у 1965 році, у випадку, коли X і Y — це нормовані простори, а сім'я $\mathfrak{S}$ — це сукупність лінійних обмежених операторів з нормою, що не перевищує числа $N > 0$; зазвичай у цьому випадку пишуть $E_N(A,Q)$ замість $E_{\mathfrak{S}}(A,Q)$. Формулювання цієї задачі, перші важливі результати, а також розв'язання цієї задачі для диференціальних операторів малих порядків можна знайти у [132]. Огляд подальших результатів стосовно цієї тематики можна знайти у [9] і [144, Розділ 7]. Деякі екстремальні задачі для функцій зі значеннями у L–просторах розглядались у [14, 27].

Задача Стєчкіна, у свою чергу, тісно пов'язана з нерівностями типу Ландау–Колмогорова. Перші нерівності для похідних були отримані на початку XX століття у роботах [87, 112, 113]. Одним з найважливіших результатів у цій тематиці є результат А. М. Колмогорова [99] (див. також [100, 172], часткові випадки цього результату були отримані у [207]), після якого нерівності, що оцінюють норму проміжної похідної функції за допомогою норми функції і норми її старшої похідних, стали називати нерівностями типу Колмогорова, або, у випадках функцій малої гладкості, нерівностями типу Ландау–Колмогорова.

Огляд результатів щодо нерівностей такого типу для функцій однієї і багатьох змінних у випадку похідних цілого порядку, а також подальші посилання, можуть бути знайдені у [9, 40, 65, 101, 137, 143, 144, 193, 205]. Не-

рівності типу Ландау–Колмогорова для класів функцій зі значеннями у L–просторах містяться у [27]. У багатьох питаннях аналізу виникає необхідність працювати з похідними дробового порядку, гіперсингулярними і більш загальними інтегральними операторами, див. напр. [129]. Деякі результати і подальші посилання щодо нерівностей типу Ландау–Колмогорова для таких операторів може бути знайдена у [8, 37, 45–49, 51, 52, 81, 115, 146, 152, 186].

Ми коротко опишемо зв'язок між згаданими екстремальними задачами, оскільки така аргументація (яка є незначним узагальненням техніки Стєчкіна) буде використана при доведенні деяких результатів у подальшому.

Позначимо $\|y\| = h_Y(y,\theta)$, $y \in Y$ та $\|x\| = h_X(x,\theta)$, $x \in X$, $\|S\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Sx\|$. Для кожного $N > 0$ позначимо через $\mathfrak{S}_N$ множину операторів $S \in \mathfrak{S}$ таких, що $\|S\| \le N$, припустимо, що сім'я $\mathfrak{S}$ складається з додатно однорідних операторів, і будемо писати E_N замість $E_{\mathfrak{S}_N}$.

Знаючи значення величини (3), можна одразу написати нерівність типу Ландау–Колмогорова у адитивній формі:

$$\forall x \in Q, \quad \|Ax\| \leqslant h_Y(Ax, Sx) + \|Sx\| \leqslant U(A, S; Q) + \|S\| \cdot \|x\|.$$

Якщо додатково існує оператор $\overline{S} \in \mathfrak{S}$ і обмежена послідовність елементів $\{x_n\} \subset Q$ така, що

$$\|Ax_n\| = \big(U(A, \overline{S}; Q) + \|\overline{S}\| \cdot \|x_n\|\big)\,(1 + o(1)) \text{ при } n \to \infty, \tag{5}$$

то

$$E_{\|\overline{S}\|}(A, Q) = U(A, \overline{S}; Q).$$

Дійсно, для кожного оператора $S \in \mathfrak{S}$ з $\|S\| \leqslant \|\overline{S}\|$, маємо

$$\|Ax_n\| \leqslant U(A, S; Q) + \|S\| \cdot \|x_n\| \leqslant U(A, S; Q) + \|\overline{S}\| \cdot \|x_n\|. \tag{6}$$

Переходячи до границі при $n \to \infty$, враховуючи обмеженість $\{x_n\}$, співвідношення (5) і (6), отримаємо $U(A, \overline{S}; Q) \leqslant U(A, S; Q)$, що і треба було довести.

Задача знаходження модуля неперервності оператора A на класі Q, тобто функцію

$$\Omega(\delta) = \Omega(A, Q; \delta) := \sup\{\|Ax\| \colon x \in Q, \|x\| \leq \delta\},\ \delta \geq 0, \tag{7}$$

є абстрактною версією задачі про нерівності типу Ландау–Колмогорова.

Деяким узагальненням задачі (3) є така задача. Для $\delta \geq 0$ величину

$$U_\delta(A, S, Q) := \sup\{h_Y(Ax, S\eta) \colon x \in Q, \eta \in X, h_X(x, \eta) \leqslant \delta\},$$

називають відхиленням оператора $S \in \mathfrak{S}$ від оператора A на класі Q, при умові, що елементи відомі з похибкою δ. Задача оптимального відновлення оператора A операторами з сім'ї $\mathfrak{S}$ на класі Q елементів, що відомі з похибкою δ, полягає у знаходженні величини

$$\mathcal{E}_\delta(A, Q, \mathfrak{S}) := \inf_{S \in \mathfrak{S}} U_\delta(A, S, Q)$$

і оператора S, на якому досягається інфімум у правій частині, якщо такий оператор існує. Загальні результати про зв'язок між сформульованими задачами можна знайти у [144, Розділ 7] та оглядових статтях [10, 159, 160].

У пункті 1.5.1 ми досліджуємо задачу про оцінки відхилення інтегральних операторів у просторах функцій зі значеннями в L-просторах, обговорюємо можливі застосування одержаних результатів до задач апроксимації узагальненими тригонометричними поліномами, оптимізації формул наближеного інтегрування, а також відновлення функцій по неточно заданій інформації. У пункті 1.5.2 для (λ, φ)–адитивних операторів Λ, ми знаходимо величину $U(\Lambda, f \mapsto \Lambda(f(t_0)\chi_T), H^\omega(T, X))$, де T — це метричний компакт, χ_T — характеристична функція множини T, а $t_0 \in T$ — деяка фіксована точка. У пункті 1.5.3 на класі функцій $W^1H^\omega([a, b], X)$ ми отримуємо результати щодо відхилення між різницевими операторами (різниці розуміються у сенсі Хукухара), а також між різницевим оператором і похідною у сенсі Хукухара. Крім того, на цьому класі ми отримуємо нерівності типу Ландау–Колмогорова, результати щодо задачі Стєчкіна і задачі

оптимального відновлення оператора диференціювання у сенсі Хукухара у точці, за аргументами, що відомі з похибкою.

У *другому розділі* ми розглядаємо екстремальні задачі на класах функцій Соболєва багатьох змінних. Головні результати цього розділу містяться у статтях [20, 21, 35, 108].

Нехай задано опуклий конус $C \subset \mathbb{R}^d$ і опуклу обмежену центрально-симетричну множину $K \subset \mathbb{R}^d$, що містить початок координат у своїй внутрішності. Ми розглядаємо клас $W^K_{\infty,p}$ функцій $f\colon C \to \mathbb{R}$, для яких $f \in L_\infty(C)$ і $\||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(C)} \le 1$, де $p \in (d, \infty]$, K° — це поляра до множини K, $|\cdot|_K$ позначає норму у $\mathbb{R}^d$, що породжена множиною K, тобто

$$|x|_K := \inf\{\lambda > 0\colon x \in \lambda K\},$$

а похідні функції f розуміються в узагальненому сенсі. На цьому класі функцій ми розв'язуємо задачу Стєчкіна найкращого наближення взагалі кажучи необмеженого гіперсингулярного інтегрального оператора

$$D_{K,w}f(x) = \int_C w(|t|_K)(f(x) - f(x+t))dt, x \in C$$

за допомогою обмежених, де $w\colon (0,\infty) \to [0,\infty)$ деяка вагова функція, що може мати неінтегровну особливість в точці 0. У випадку, коли K — це евклідова куля у $\mathbb{R}^d$, $C = \mathbb{R}^d$ і $w(t) = t^{-(d+\alpha)}$, $\alpha \in (0,1)$, цей оператор є дробовою похідною у сенсі Ріса. Результати щодо екстремальних задач для інтегральних операторів можна знайти у [8, 37, 45–49, 51, 52, 81, 115, 146, 152, 186]. Виявляється, що найкращими на класі $W^K_{\infty,p}$ наближуючими операторами для задачі Стєчкіна (4) є оператори

$$D_{K,w,h}f(x) = \int_{C\setminus hK} w(|t|_K)(f(x) - f(x+t))dt, x \in C, h > 0.$$

Ми також знаходимо величину

$$U(D_{K,w}, D_{K,w,h}; W^K_{\infty,p}) \tag{8}$$

відхилення цих операторів. Ця величина має і самостійний інтерес, і використовується у подальшому для розв'язання деяких інших екстремальних

задач. Ми доводимо точну адитивну (а у випадку степеневої вагової функції w і мультиплікативну) нерівність типу Ландау–Колмогорова, що оцінює $\|D_{K,w}f\|_{L_\infty(C)}$ за допомогою $\||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(C)}$ і $\|f\|_{L_\infty(C)}$. Ми знаходимо модуль неперервності оператора $D_{K,w}$, а також розв'язуємо задачу найкращого відновлення оператора $D_{K,w}$ за неточно заданими аргументами оператора.

У випадку $K = (-1,1)^d$, ми розв'язуємо задачу про оптимальне відновлення для інтеграла $\int_Q \rho(x)f(x)dx$, де Q — опукла множина, а ρ — деяка вагова функція. Оптимальне відновлення відбувається на класі функцій $W^K_{\infty,p}$ по n значенням функції f. У випадку, коли $\rho \equiv 1$ і множину Q можна розбити на куби (тобто з точністю до множини міри нуль подати Q у вигляді об'єднання зсувів множини K, що попарно не перетинаються), ми отримуємо оптимальні квадратурні формули, а у випадку більш складних областей або вагових функцій, ми отримуємо асимптотично точні квадратурні формули. Також у випадку одиничної ваги ми отримуємо асимптотично точні квадратурні формули і для зірчатих множин Q. Результати стосовно асимптотично оптимальних квадратурних формул на різних класах і подальші посилання можна знайти у [22–24, 68, 69, 83].

У *третьому розділі* ми отримуємо точні нерівності типу Островського для деяких класів функцій. Головні результати цього розділу містяться у статтях [106, 107, 109, 110].

У 1937 році А. Островський [123] довів, що для диференційовної на $[0,1]$ функції f з обмеженою похідною і $x \in [0,1]$ справедлива така точна нерівність

$$\left|\int_0^1 f(t)dt - f(x)\right| \le \left(\frac{1}{4} + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right) \sup_{t\in(0,1)} |f'(t)|. \tag{9}$$

Нерівності, що оцінюють відхилення функції від її середнього значення за допомогою деяких характеристик функції, інколи називають нерівностями типу Островського. Такі нерівності мають багато застосувань, зокрема у чисельних методах, і вивчались у багатьох роботах, див. напр. [74, 75].

Зазначимо, що на нерівність (9) можна дивитись як на оцінку відхиле-

ння (3) на класі диференційовних функцій $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ таких, що $|f'(t)| \leq 1$, $t \in (0,1)$, між функціоналами $\Lambda\colon f \mapsto \int_0^1 f(t)dt$ і $f \mapsto \Lambda(f(x)\cdot\chi_{[0,1]}(\cdot))$, де $x \in [0,1]$ — це деяке фіксоване число; тобто точні нерівності типу Островського є частковим випадком задачі обчислення відхилень між операторами. З іншого боку, такого роду нерівності можуть бути використані для розв'язання інших екстремальних задач теорії наближень. Зокрема, зазначимо, що задача знаходження величини (8) є по суті доведенням нерівності типу Островського, і є ключовим елементом для отримання більшості результатів з розділу 2, а також деяких результатів з розділу 4.

У підрозділі 3.1 ми формулюємо деякий загальний підхід, що часто застосовується для розв'язання деяких екстремальних задач, зокрема для доведення нерівностей типу Островського. Ми наводимо серію прикладів застосування цього підходу, зокрема доводимо точні нерівності типу Островського на класах функцій, старша похідна (або результат дії більш загального диференціального оператора) яких належить до $L_p(a,b)$, $p \in [1,\infty]$, або $H^\omega([a,b],\mathbb{R})$.

У підрозділі 3.2 ми доводимо точні нерівності типу Островського для функцій багатьох змінних і множин у скінченно-вимірних просторах. Існує багато способів поширити поняття обмеженої варіації на функції багатьох змінних (див. огляд [70] різних підходів у випадку функцій двох змінних). Ми пропонуємо ще одне означення обмеженої варіації для функцій багатьох змінних і багатовимірних множин, яке засноване на підході Кронрода–Вітушкіна [157, 170, 180]. Запропоноване означення варіації функцій багатьох змінних задовольняє (на відміну від варіацій Кронрода–Вітушкіна) таким двом властивостям: варіація не змінюється, якщо аргумент функції помножити на ненульову константу; і варіація радіальної функції багатьох змінних вдвічі більша за варіацію породжуючої одновимірної функції, точні формулювання наведені у властивостях 3.2.9 і 3.2.12. Ми досліджуємо деяку сім'ю підмножин простору $\mathbb{R}^d$, і отримуємо два еквівалентних означення для цієї сім'ї. Одне з них дається у термінах деякої екстремальної характеристики, яка важлива для отримання нерівностей типу Островського,

а інше — у більш геометричних термінах. Для множин з цієї сім'ї і функцій, що задані на множинах з цієї сім'ї, ми доводимо точні нерівності типу Островського.

У підрозділі 3.3 ми розглядаємо клас випадкових процесів $\xi_t, t \in [0,1]$, для яких $\mathbf{E}|\xi_\tau - \xi_\theta| \le \omega(\operatorname{ess\,sup}_w |\tau(w) - \theta(w)|)$ для будь-яких випадкових величин τ і θ, що набувають значення на відрізку $[0,1]$, $\mathbf{E}$ позначає математичне сподівання, а ω — це деякий опуклий модуль неперервності. На цьому класі ми доводимо точну нерівність типу Островського, що оцінює відхилення $\mathbf{E}\left|\int\limits_0^1 \xi_t dt - \xi_\tau\right|$ між інтегралом випадкового процесу і його значенням у випадковий момент часу τ. Деякі результати стосовно нерівностей Островського для нечислових функцій можуть бути знайдені у [4,6,7,66,67]. Застосовуючи цю нерівність, ми отримуємо розв'язання задачі оптимального відновлення інтеграла випадкового процесу з цього класу, на основі інформації про $\xi_{\tau_1}, \ldots, \xi_{\tau_n}$, де $\tau_i = \tau + t_i$, $i = 1, \ldots, n$, τ — це деяка випадкова величина, а числа $0 = t_1 < \ldots < t_n \le 1$ є такими, що $\tau + t_n \le 1$ майже напевно. Ми також розв'язуємо задачу оптимізації вибору чисел $t_2, \ldots, t_n$ (при фіксованій випадковій величині τ) для мінімізації похибки відновлення інтеграла.

У *четвертому розділі* ми отримуємо нерівності типу Надя а також типу Ландау–Колмогорова, і розв'язуємо споріднені екстремальні задачі. Головні результати цього розділу містяться у статтях [30–32, 105].

У [135] Б. С. Надь отримав точні нерівності виду

$$\|x\|_{L_q(\mathbb{R})} \le K \|x\|^\alpha_{L_p(\mathbb{R})} \|x'\|^\beta_{L_s(\mathbb{R})}$$

для всіх допустимих значень параметрів q, p, s. Деякі результати стосовно нерівностей типу Надя містяться у [144, Розділ 2] і [98, 145].

Ми отримуємо точну нерівність типу Надя у метричному просторі з мірою, яка оцінює рівномірну норму функції за допомогою її $\|\cdot\|_{H^\omega}$–норми, що визначена модулем неперервності ω, і напівнормою, що визначена у просторі локально інтегровних функцій. Ми також отримуємо точні нерівності типу Надя, які оцінюють рівномірну норму функції з простору Соболєва

через L_p–норму її градієнта, і напівнорму, яка визначаються на просторі локально інтегровних у відкритому конусі C простору $\mathbb{R}^d$ функцій.

Використовуючи ці нерівності типу Надя, ми доводимо точні нерівності типу Ландау-Колмогорова, які оцінюють рівномірну норму похідної Радона-Нікодима заряду з певного класу зарядів через $\|\cdot\|_{H^\omega}$–норму похідної заряду, або L_p–норму градієнта цієї похідної та деяку напівнорму, визначену на просторі зарядів.

У випадку $C = \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^{d-m}$, $0 \leqslant m \leqslant d$ і $K = (-1,1)^d$, ми отримуємо нерівності, які оцінюють рівномірну норму мішаної похідної функції $f\colon C \to \mathbb{R}$ через рівномірну норму функції та $\|\cdot\|_{H^\omega}$–норму її мішаної похідної, або L_p–норму градієнта її мішаної похідної. Ці нерівності точні при $m = 0$ і $m = 1$.

Загальні результати про зв'язок між нерівностями для похідних, задачею Стєчкіна і іншими спорідненими задачами, дозволяють також отримати розв'язання цих задач у відповідних ситуаціях.

Для додатних неперервних на $\mathbb{R}_+$ функцій f_+ і f_- і неперервної на $\mathbb{R}_+$ функції x ми розглядаємо вагову норму

$$\|x\|_{C(\mathbb{R}_+),f_-,f_+} := \left\| \frac{\max\{x(\cdot),0\}}{f_+(\cdot)} + \frac{\max\{-x(\cdot),0\}}{f_-(\cdot)} \right\|_{C(\mathbb{R}_+)},$$

а для додатної неперервної на $\mathbb{R}_+$ функцій g і $x \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$, норму

$$\|x\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+),g} := \left\| \frac{x}{g} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}.$$

Для натурального числа r ми розглядаємо клас $W^r_{f_-,f_+,g}(\mathbb{R}_+)$ неперервних функцій $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ у яких похідна $x^{(r-1)}$ є локально абсолютно неперервною, $x^{(r)} \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$ і таких, що $\|x\|_{C(\mathbb{R}_+),f_-,f_+} < \infty$ і $\|x^{(r)}\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+),g} \leq 1$.

При деяких обмеженнях на функції $f_\pm$ і g, ми знаходимо модуль неперервності (7) оператора D^k k–кратного диференціювання, $k = 1,\dots,r-1$, на класі $W^r_{f_-,f_+,g}(\mathbb{R}_+)$, тобто величину

$$\Omega(W^r_{f_-,f_+,g}(\mathbb{R}_+), D^k, \delta) := \sup_{x \in W^r_{f_-,f_+,g}(\mathbb{R}_+),\, \|x\|_{C(\mathbb{R}_+),f_-,f_+} \leq \delta} \|x^{(k)}\|_{C(\mathbb{R}_+)},\ \delta > 0. \quad (10)$$

Як було зазначено раніше, модуль неперервності оператора диференціювання тісно пов'язаний з нерівностями типу Ландау–Колмогорова. Для функцій заданих на пів осі такі нерівності були отримані в роботах [87, 113, 117, 130, 131, 185] та [144, Розділ 3]. Результати підрозділу 4.6 продовжують дослідження статті [43], де було отримано інформацію про величину (10) для деяких значень δ. На дещо менш загальних класах функцій $f_\pm$ і g, ми характеризуємо величину (10) для всіх $\delta > 0$. Екстремальними в задачі (10) виступають ідеальні g–сплайни (тобто функції G такі, що $|G^{(r)}| = g$ майже всюди, причому $G^{(r)}$ змінює знак скінченну кількість разів), що мають максимальну можливу кількість точок осциляції; ці g–сплайни можна вважати аналогами сплайнів Чебишова.

Подяки. Хочу виразити щиру подяку Владиславу Федоровичу Бабенку за постійну увагу і допомогу у моїй науковій діяльності, починаючи з найперших наукових кроків. Також я дуже вдячний Наталії Вікторівні Парфінович за її допомогу у підготовці цієї роботи.

Розділ 1

Екстремальні задачі у функціональних L–просторах

Головні результати, що наведені у цьому розділі, містяться у статтях [16,18, 19,28,29]. Інші результати стосовно екстремальних задач на класах функцій зі значеннями у L–просторах можуть бути знайдені у [14, 15, 27].

1.1 L–простори

1.1.1 Означення

Означення 1.1.1. *Множина X називається напівлінійним простором, якщо операції додавання елементів і множення на дійсне число означені на X, і для всіх $x, y, z \in X$ і $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ виконуються такі властивості:*

$$\begin{gathered} x + y = y + x; \\ x + (y + z) = (x + y) + z; \\ \exists\, \theta \in X \colon x + \theta = x; \\ \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y; \end{gathered} \tag{1.1}$$

$$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)\, x; \tag{1.2}$$

$$1 \cdot x = x, 0 \cdot x = \theta. \tag{1.3}$$

Іноді для $\alpha \in \mathbb{R}$ і $x \in X$ ми будемо писати $x\alpha$ замість αx і $-\alpha x$ замість $(-\alpha)x$; зокрема, запис $-x$ означає $(-1) \cdot x$.

Означення 1.1.2. *Елемент $x \in X$ називається опуклим, якщо для всіх $\alpha, \beta \geq 0$,*

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x. \tag{1.4}$$

Через X^{c} ми будемо позначати підпростір простору X, що складається з усіх опуклих елементів.

Означення 1.1.3. *Напівлінійний простір X з метрикою h_X називається L–простором, якщо для всіх $x, y, z \in X$ і $\lambda \in \mathbb{R}$ виконуються такі властивості:*

$$h_X(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \cdot h_X(x, y); \tag{1.5}$$

$$h_X(x + z, y + z) \leq h_X(x, y). \tag{1.6}$$

Зауваження 1.1.1. *Поняття L–простору було введено у [156]. На відміну від [156], ми не вимагаємо повноти і сепарабельності простору X (до тих пір, поки ці властивості не будуть необхідними).*

Зауваження 1.1.2. *З нерівності трикутника і нерівності* (1.6) *випливає, що для всіх $x, y, z, w \in X$*

$$h_X(x + z, y + w) \leq h_X(x, y) + h_X(z, w).$$

Означення 1.1.4. *L–простір X називається ізотропним, якщо нерівність* (1.6) *перетворюється на рівність для всіх $x, y, z \in X$.*

1.1.2 Деякі властивості L–просторів

Означення 1.1.5. *Елемент $x \in X$ називається оборотним, якщо існує $x' \in X$ такий, що $x + x' = \theta$. У цьому випадку елемент x' називається*

протилежним до x. Через X^{inv} ми позначаємо множину усіх оборотних елементів простору X.

Справедливі такі твердження.

Лема 1.1.1. *Якщо $x \in X^{\mathrm{inv}}$, то існує єдиний протилежний елемент x'.*

Доведення. Якщо $x + x_1 = x + x_2 = \theta$, то $x_1 = x_1 + \theta = x_1 + x + x_2 = \theta + x_2 = x_2$. Лему доведено. □

Лема 1.1.2. *Якщо $\lambda \in \mathbb{R}$, то $\lambda \cdot \theta = \theta$.*

Доведення. $\lambda \cdot \theta \overset{(1.3)}{=} \lambda \cdot (0 \cdot \theta) \overset{(1.2)}{=} (\lambda \cdot 0) \cdot \theta = 0 \cdot \theta \overset{(1.3)}{=} \theta$. □

Лема 1.1.3. *X^c є замкненою підмножиною простору X.*

Доведення. Нехай $X^c \ni x_n \to x$, $n \to \infty$ і $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Тоді для всіх $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & h_X(\alpha \cdot x + \beta \cdot x, (\alpha + \beta) \cdot x) \\ & \leq h_X(\alpha \cdot x + \beta \cdot x, (\alpha + \beta) \cdot x_n) + h_X((\alpha + \beta) \cdot x_n, (\alpha + \beta) \cdot x) \\ & \overset{(x_n \in X^c,\ \text{зауваження 1.1.2, (1.5)})}{\leq} |\alpha| h_X(x, x_n) + |\beta| h_X(x, x_n) + |\alpha + \beta| h_X(x, x_n). \end{aligned}$$

Переходячи до границі при $n \to \infty$, отримуємо $x \in X^{\mathrm{c}}$. □

Лема 1.1.4. *Якщо $x \in X^{\mathrm{inv}} \cap X^{\mathrm{c}}$, то $x' \in X^{\mathrm{inv}} \cap X^{\mathrm{c}}$, і $\alpha x \in X^{\mathrm{inv}} \cap X^{\mathrm{c}}$ для всіх $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Доведення. Імплікація $x \in X^{\mathrm{inv}} \implies x' \in X^{\mathrm{inv}}$ є очевидною. Доведемо, що $x \in X^{\mathrm{inv}} \cap X^{\mathrm{c}} \implies x' \in X^{\mathrm{c}}$. Маємо, $x + x' = \theta$ і

$$\theta \overset{(\text{лема } 1.1.2)}{=} (\alpha + \beta)\theta = (\alpha + \beta)(x + x') \overset{(1.1)}{=} (\alpha + \beta)x + (\alpha + \beta)x'.$$

З цього випливає, що $(\alpha + \beta)x' = ((\alpha + \beta)x)'$. Оскільки x є опуклим, то

$$\alpha x + \beta x + (\alpha + \beta)x' = \theta,$$

тобто $(\alpha + \beta)x' = (\alpha x + \beta x)'$. З іншого боку, $((\alpha + \beta) \cdot x)' = \alpha x' + \beta x'$, оскільки

$$(\alpha+\beta)\cdot x+\alpha x'+\beta x' \overset{x\in X^{\mathrm{c}}}{=} \alpha x+\beta x+\alpha x'+\beta x'$$
$$\overset{(1.1)}{=} \alpha(x+x')+\beta(x+x') \overset{(\text{лема } 1.1.2)}{=} \theta.$$

З леми 1.1.1 випливає, що $\alpha x'+\beta x'=(\alpha+\beta)x'$, тобто $x'\in X^{\mathrm{c}}$.

Нарешті, використовуючи (1.1), маємо $\alpha x+\alpha x'=\alpha(x+x')=\theta$, тобто $\alpha x\in X^{\mathrm{inv}}$ і $(\alpha x)'=\alpha x'$; якщо $\beta,\gamma\geq 0$, то

$$(\beta+\gamma)(\alpha x) \overset{(1.2)}{=} \alpha((\beta+\gamma)x) \overset{x\in X^{\mathrm{c}}}{=} \alpha(\beta x)+\alpha(\gamma x) \overset{(1.2)}{=} \beta(\alpha x)+\gamma(\alpha x),$$

звідки випливає $\alpha x\in X^{\mathrm{c}}$. □

Лема 1.1.5. *Для кожного $x\in X^{\mathrm{inv}}$ справедлива рівність*

$$h_X(x,x')=h_X(x+x,\theta). \tag{1.7}$$

Якщо $x\in X^{\mathrm{inv}}\cap X^{\mathrm{c}}$, то $h_X(x,x')=2h_X(x,\theta)$.

Доведення. Маємо

$$h_X(x,x')=h_X(x+\theta,x')=h_X(x+x+x',x')$$
$$\overset{(1.6)}{\leq} h_X(x+x,\theta)=h_X(x+x,x+x') \overset{(1.6)}{\leq} h_X(x,x').$$

Тому усі нерівності перетворюються на рівності, а отже виконується рівність (1.7). Якщо елемент x є опуклим, то

$$h_X(x+x,\theta)=h_X(2x,\theta)=2h_X(x,\theta).$$

Лему доведено. □

Лема 1.1.6. *Для всіх $x\in X^{c}$ і $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,*

$$h_X(\alpha x,\beta x)\leq|\alpha-\beta|\cdot h_X(x,\theta). \tag{1.8}$$

Якщо простір X є ізотропним і $\alpha\cdot\beta\geq 0$, то нерівність перетворюється на рівність.

Доведення. Якщо $\alpha\beta \le 0$, то

$$h_X(\alpha x, \beta x) \le h_X(\alpha x, \theta) + h_X(\theta, \beta x) \overset{(1.5)}{=} (|\alpha| + |\beta|)h_X(x, \theta) = |\alpha - \beta| h_X(x, \theta).$$

Якщо $\alpha\beta \ge 0$, то беручи до уваги (1.5), ми можемо припустити, що $\alpha, \beta \ge 0$. Нехай для визначеності $\alpha \ge \beta$. З опуклості x випливає

$$h_X(\alpha x, \beta x) = h_X((\alpha - \beta)x + \beta x, \beta x) \overset{(1.6)}{\le} h_X((\alpha - \beta)x, \theta) = (\alpha - \beta)h_X(x, \theta),$$

і нерівність перетворюється на рівність для ізотропних просторів X. □

Лема 1.1.7. *Для кожного $x \in X^{\mathrm{inv}} \cap X^{\mathrm{c}}$ маємо $h_X(x', \theta) = h_X(x, \theta)$.*

Доведення. З леми 1.1.5 випливає, що

$$2h_X(x, \theta) = h_X(x, x') \le h_X(x, \theta) + h_X(x', \theta),$$

тому $h_X(x, \theta) \le h_X(x', \theta)$. Міняючи місцями x і x' в цій нерівності, отримаємо необхідне. Лему доведено. □

Означення 1.1.6. *Будемо називати елемент $x \in X^{\mathrm{inv}}$ сильно оборотним, якщо $x' = -x$.*

Лема 1.1.8. *Якщо елемент x у ізотропному просторі X є опуклим і сильно оборотним, то для всіх $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ виконується рівність* (1.4)*, а нерівність* (1.8) *стає рівністю.*

Доведення. Спочатку доведемо твердження про рівність (1.4). Якщо $\alpha \cdot \beta = 0$, то твердження є очевидним. Якщо $\alpha, \beta < 0$, то з леми 1.1.4 отримаємо

$$\alpha x + \beta x = (-\alpha)x' + (-\beta)x' = (-\alpha - \beta)x' = (\alpha + \beta)x.$$

Нарешті, якщо $\alpha \cdot \beta < 0$, то без зменшення загальності можемо вважати, що $\beta < 0 < \alpha$ і $\alpha + \beta \ge 0$. Маємо

$$h(\alpha x+\beta x,(\alpha+\beta)x)=h(\alpha x+(-\beta)x',(\alpha+\beta)x)$$
$$=h(\alpha x,(\alpha+\beta)x+(-\beta)x)=h(\alpha x,(\alpha+\beta-\beta)x)=0$$

і твердження про рівність (1.4) доведено.

Далі ми доводимо твердження про нерівність (1.8). З леми 1.1.6 маємо, що достатньо довести те, що нерівність (1.8) перетворюється на рівність для всіх $\alpha\cdot\beta<0$. Ми можемо вважати, що $\beta<0<\alpha$. Тоді

$$h(\alpha x,\beta x)=h(\alpha x,-\beta(-x))=h(\alpha x,-\beta x')=h(\alpha x+(-\beta)x,\theta)$$
$$=h((\alpha-\beta)x,\theta)=|\alpha-\beta|h(x,\theta),$$

що завершує доведення леми. □

1.1.3 Частково впорядковані L–простори

1.1.3.1 Означення

Означення 1.1.7. *Множина X називається частково впорядкованою, якщо для деяких пар $(x,y)\in X^2$ визначено відношення $x\leqslant y$, і виконуються такі властивості:*

$$\text{Для всіх } x\in X, x\leqslant x; \tag{1.9}$$

$$\text{якщо } x\leqslant y \text{ і } y\leqslant x, \text{ то } x=y; \tag{1.10}$$

$$\text{якщо } x\leqslant y \text{ і } y\leqslant z, \text{ то } x\leqslant z. \tag{1.11}$$

Означення 1.1.8. *Напівлінійний простір X називається частково впорядкованим, якщо множина X є частково впорядкованою, і для всіх елементів $x,y,z\in X$ і чисел $\alpha,\beta\geq 0$ виконуються такі властивості.*

$$\text{Якщо } x\leq y, \text{ то } x+z\leq y+z; \tag{1.12}$$

$$\text{Якщо } x\leqslant y, \text{ то } \alpha x\leq\alpha y; \tag{1.13}$$

$$(\alpha+\beta)x\leqslant\alpha x+\beta x. \tag{1.14}$$

Означення 1.1.9. *L–простір X називається частково впорядкованим, якщо він є частково впорядкованим напівлінійним простором, і порядок*

є неперервним у такому сенсі: якщо $x_n \leq y_n$ *для всіх* $n \in \mathbb{N}$ *і* $x_n \to x$, $y_n \to y$ *при* $n \to \infty$, *то* $x \leq y$.

Означення 1.1.10. *Для частково впорядкованої множини* X *і* $x, y \in X$, *множина* $[x, y] = \{z \in X : x \leqslant z \leqslant y\}$ *називається порядковим інтервалом.*

Означення 1.1.11. *Нехай* (X, h_X) *— це метричний простір і* $A \subset X$. *Число*

$$\operatorname{rad}(A) = \inf_{b \in X} \sup_{a \in A} h_X(a, b)$$

називається чебишовським радіусом (або просто радіусом) множини A. *Якщо існує точка* $c \in X$ *для якої*

$$\operatorname{rad}(A) = \sup_{a \in A} h_X(a, c),$$

то точку c *називають чебишовським центром множини* A. *Через* $\mathcal{C}(A)$ *ми позначаємо множину чебишовських центрів* A.

Означення 1.1.12. *Частково впорядкований метричний простір* (X, h_X) *називається центрованим, якщо множини* $\mathcal{C}([x, y])$ *є непорожніми для кожних* $x, y \in X$ *і*

$$\operatorname{rad}([x, y]) = \frac{1}{2} h_X(x, y).$$

Означення 1.1.13. *Ми кажемо, що частково впорядкований метричний простір* (X, h_X) *має подільну метрику, якщо для всіх*

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{n+1} \in X \tag{1.15}$$

маємо

$$\sum_{i=1}^{n} h_X(x_i, x_{i+1}) = h_X(x_1, x_{n+1}). \tag{1.16}$$

Зауваження 1.1.3. *Відмітимо, що умову* (1.15) *можна замінити умовою*

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_{n+1} \in X.$$

Означення 1.1.14. *Нехай* X *і* Y *— це дві частково впорядкованих множини. Функція* $f : X \to Y$ *називається монотонною, якщо для будь-яких* $x', x'' \in X$ *таких, що* $x' \leqslant x''$, *маємо* $f(x') \leqslant f(x'')$.

1.1.3.2 Метричний підхід до означення часткового порядку

У багатьох L–просторах існує природній частковий порядок. Наприклад, лінійний нормований простір може бути впорядкованим за допомогою конуса додатних елементів, простори множин можуть бути впорядкованими за включенням, і т.д.

Для розгляду більшості цікавих для наших цілей просторів з єдиної точки зору, ми пропонуємо новий підхід для означення часткового порядку у напівлінійних просторах. Цей підхід заснований на квазіметричній функції $e(\cdot,\cdot)$, яка визначає порядок. За допомогою цієї квазіметричної функції, напівлінійний простір перетворюється у частково впорядкований L–простір. Крім того, багато з отриманих просторів будуть мати хороші властивості, наприклад будуть центрованими, або будуть мати подільну метрику. Поняття функції, що породжує порядок, може бути корисним і для інших цілей.

У цьому пункті ми вводимо необхідні означення і факти, а у наступному ми наведемо приклади L–просторів, які можуть бути отримані за допомогою такого підходу.

Означення 1.1.15. *Ми кажемо, що функція $e\colon X \times X \to \mathbb{R}_+$ породжує порядок типу Ω у напівлінійному просторі X, якщо для всіх $x, y, z \in X$ і $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ виконуються такі аксіоми:*

$$e(x,x) = 0; \tag{1.17}$$

$$\text{якщо } e(x,y) = 0 \text{ і } e(y,x) = 0, \text{ то } x = y; \tag{1.18}$$

$$e(x,y) \leqslant e(x,z) + e(z,y); \tag{1.19}$$

$$e(x+z, y+z) \leqslant e(x,y); \tag{1.20}$$

$$e((\alpha+\beta)x, \alpha x + \beta x) = 0; \tag{1.21}$$

$$e(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| e(x,y).$$

Означення 1.1.16. *Ми кажемо, що функція $e\colon X \times X \to \mathbb{R}_+$ породжує порядок типу $\mathbb{R}$ у напівлінійному просторі X, якщо вона задовольняє вла-*

ствостям (1.17)–(1.21), *і для всіх* $x, y \in X$ *і* $\alpha \in \mathbb{R}$

$$e(\alpha x, \alpha y) = \begin{cases} \alpha e(x, y), & \alpha \geq 0, \\ -\alpha e(y, x), & \alpha < 0. \end{cases}$$

Функції, що породжують порядок типів Ω і $\mathbb{R}$, будемо називати просто функціями, що породжують порядок, якщо це не призведе до неоднозначності.

Означення 1.1.17. *За допомогою функції* e*, що породжує порядок у напівлінійному просторі* X*, введемо частковий порядок* $\leq$ *таким чином. Будемо казати, що* $x \leq y$ *тоді і тільки тоді, коли* $e(x, y) = 0$.

Легко бачити, що властивості (1.9), (1.10), (1.11), (1.12) і (1.14) виконуються. Крім того, якщо $x \leq y$, то для породжуючої порядок типу Ω функції маємо

$$\alpha \cdot x \leq \alpha \cdot y \text{ для всіх } \alpha \in \mathbb{R},$$

а для функції, що породжує порядок типу $\mathbb{R}$, маємо

$$\begin{cases} \alpha \cdot x \leq \alpha \cdot y, & \alpha \geq 0, \\ \alpha \cdot x \geq \alpha \cdot y, & \alpha < 0. \end{cases}$$

Достатньо загальний спосіб отримати частково впорядкований L–простір, маючи напівлінійний простір і функцію, що породжує порядок, міститься у наступній лемі.

Лема 1.1.9. *Нехай задано напівлінійний простір* X*, функцію* $e(\cdot, \cdot)$*, що породжує порядок в* X*, і*

$$h(x, y) = \psi(e(x, y), e(y, x)), \tag{1.22}$$

де $\psi(\cdot, \cdot)$ *є нормою у* $\mathbb{R}^2$*, для якої* $\psi(x, y) = \psi(y, x)$ *для всіх* $x, y \in \mathbb{R}$*, і для* $0 \leq x_1 \leq x_2$*,* $0 \leq y_1 \leq y_2$ *маємо* $\varphi(x_1, y_1) \leq \varphi(x_2, y_2)$*. Тоді* (X, h) *є частково впорядкованим* L*–простором і* $e(\cdot, \cdot)$ *є неперервною по кожній змінній функцією у топології, що породжена метрикою* h.

Доведення. Безпосередньою перевіркою аксіом можна впевнитись у тому, що (X, h) є L–простором. Оскільки всі норми у скінченновимірних просторах є еквівалентними, то достатньо довести покоординатну неперервність функції $e(\cdot,\cdot)$ у топології, що породжена метрикою $\max\{e(x,y), e(y,x)\}$. Нехай задано $z \in X$, $\delta > 0$ і справедлива нерівність $\max\{e(x,y), e(y,x)\} < \delta$. Використовуючи нерівність (1.19), отримаємо $e(z,x) - e(z,y) \leq e(y,x) < \delta$ і $e(z,y) - e(z,x) \leq e(x,y) < \delta$, тому $|e(z,x) - e(z,y)| < \delta$. Аналогічно $|e(x,z) - e(y,z)| \leq \delta$, тому функція e є покоординатно неперервною.

Нехай $x_n \leq y_n$, $n \in \mathbb{N}$, $x_n \to x$ і $y_n \to y$, $n \to \infty$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існує N таке, що для кожного $n > N$ маємо $e(x,y) \leq e(x_n, y) + \varepsilon$ і $e(y_n, y) \leq \varepsilon$. Для $n > N$

$$e(x,y) \leq e(x_n,y) + \varepsilon \leq \varepsilon + e(x_n,y_n) + e(y_n,y) = \varepsilon + e(y_n,y) < 2\varepsilon,$$

тому $e(x,y) = 0$ і $x \leq y$. Лему доведено. □

Відмітимо, що якщо у частково впорядкованому L–просторі метрика породжена за допомогою (1.22), то вона є подільною, якщо з умови (1.15) випливає рівність

$$\sum_{i=1}^{n} e(x_{i+1}, x_i) = e(x_{n+1}, x_1).$$

Крім того, якщо метрика h_X визначена за допомогою формули (1.22), і нерівність (1.20) перетворюється у рівність для всіх $x, y, z \in X$, то X є ізотропним.

Нам потрібна наступна лема, яка показує, що властивість центрованості виконується у багатьох частково впорядкованих L–просторах.

Лема 1.1.10. *Нехай задано функцію $e_X(\cdot,\cdot)$, що породжує порядок у напівлінійному просторі X. Якщо $h_X(a,b) = \max\{e_X(a,b), e_X(b,a)\}$ для всіх $a, b \in X$, і $x, y, z \in X$ є такими, що $\frac{x+x}{2} \leq y \leq z$, то*

$$h_X\left(y, \frac{x+z}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2} h_X(x,z).$$

Зокрема, якщо x є опуклим, то $\frac{x+z}{2} \in \mathcal{C}(x,z)$ і $\mathrm{rad}([x,z]) = \frac{1}{2} h_X(x,z)$.

Доведення. Якщо $a, b, c \in X$ є такими, що $a \le c$, то

$$e_X(c, b) = e_X(a, c) + e_X(c, b) \ge e_X(a, b). \tag{1.23}$$

Тому

$$e_X\left(y, \frac{x+z}{2}\right) \overset{(1.23)}{\le} e_X\left(z, \frac{x+z}{2}\right) \overset{(1.14),(1.23)}{\le} e_X\left(\frac{z}{2} + \frac{z}{2}, \frac{x+z}{2}\right) \overset{(1.20)}{\le} \frac{1}{2} e_X(z, x).$$

Аналогічно $e_X(b, c) \le e_X(b, a)$ для всіх $a \le c$ і

$$e_X\left(\frac{x+z}{2}, y\right) \le e_X\left(\frac{x+z}{2}, \frac{x+x}{2}\right) \le \frac{1}{2} e_X(z, x).$$

Тому $h_X\left(\frac{x+z}{2}, y\right) \le \frac{1}{2} h_X(x, z)$ для всіх $y \in \left[\frac{x+x}{2}, z\right]$.

Нехай тепер $x \in X^{\mathrm{c}}$, звідки $\frac{x+x}{2} = x$. Оскільки $\mathrm{rad}([x, z]) \ge \frac{1}{2} h_X(x, z)$, то ми отримуємо, що $\frac{x+z}{2} \in \mathcal{C}([x, z])$ і $\mathrm{rad}([x, z]) = \frac{1}{2} h_X(x, z)$. Лему доведено. □

1.1.4 Вимірні функції зі значеннями у метричних просторах

Нехай $(T, \mu) = (T, \mathcal{F}, \mu)$ — це вимірний простір з повною скінченною мірою, а (X, h_X) — це сепарабельний метричний простір. Функцію $f \colon T \to X$ будемо називати вимірною, якщо для кожної відкритої множини $A \subset X$ маємо $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$. Через $M(T, X) = M(T, \mathcal{F}, X)$ будемо позначати простір $\mathcal{F}$–вимірних функцій $f \colon T \to X$ (більш точно, множину класів еквівалентності таких функцій). З [141, Теорема I.4.20] випливає, що $f \in M(T, X)$ тоді і тільки тоді, коли для всіх $x \in X$ дійснозначна функція $h_X(x, f(\cdot))$ є вимірною. Крім того, для двох функцій $f, g \in M(T, X)$, дійснозначна функція $t \mapsto h_X(f(t), g(t))$ є вимірною згідно з [141, Теорема I.4.22]. Справедливий такий варіант теореми Єгорова, див. наприклад [141, Теорема I.4.18].

Теорема 1.1.1. *Якщо послідовність функцій $f_i \in M(T, X)$ майже всюди збігається до $f \colon T \to X$ при $i \to \infty$, то $f \in M(T, X)$. Крім того, для*

кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться множина $T_\varepsilon \in \mathcal{F}$ така, що $\mu(T \setminus T_\varepsilon) < \varepsilon$ і f_i збігається до f рівномірно на T_ε при $i \to \infty$.

Означення 1.1.18. *Функція $f \in M(T, X)$ називається простою, якщо вона приймає скінченну кількість значень $\{f_k\}_{k=1}^n$ на вимірних множинах $\{T_k\}_{k=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, що попарно не перетинаються.*

Ми будемо казати, що функція $f \in M(T, X)$ обмежена, якщо для деякого $C > 0$ і $x \in X$ маємо $h_X(f(t), x) < C$ для всіх $t \in T$ (більш точно, якщо у класі еквівалентності функції f є обмежений представник).

Справедливе таке твердження про апроксимацію вимірних функцій.

Лема 1.1.11. *Для кожної функції $f \in M(T, X)$ існує послідовність простих функцій, що збігається до f майже всюди. Якщо f є обмеженою, то послідовність простих функцій може бути вибраною рівномірно обмеженою.*

Доведення. Нехай $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ є зліченною щільною у X множиною. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ означимо $A_{k,1} = \{t \in T \colon h_X(f(t), x_1) < 1/k\}$, і для кожного $i \geq 2$, $A_{k,i} = \{t \in T \colon h_X(f(t), x_i) < 1/k\} \setminus \bigcup_{s=1}^{i-1} A_{k,s}$. Тоді кожна з множин $A_{k,i}$ є вимірною і для всіх $k \in \mathbb{N}$, множини $A_{k,i}$, $i \in \mathbb{N}$, утворюють розбиття множини T. Оскільки для кожного $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_{k,i}) = \mu(T) < \infty$, то знайдеться $N(k) \in \mathbb{N}$, для якого $\mu(B_k) < 2^{-k}$, де $B_k = \bigcup_{i=N(k)+1}^{\infty} A_{k,i}$. Покладемо

$$f_k(t) = \begin{cases} x_i, & t \in A_{k,i}, i \leq N(k), \\ x_1, & t \in B_k. \end{cases}$$

Тоді для кожного $t \in T \setminus B_k$ маємо $h_X(f(t), f_k(t)) \leq 1/k$, $k \in \mathbb{N}$. Покладемо $C_m = \bigcup_{s=m}^{\infty} B_s$, $m \in \mathbb{N}$. Для будь-якого $k \in \mathbb{N}$, всіх $s \geq k$ і всіх $t \in T \setminus C_k$ маємо $h_X(f(t), f_s(t)) \leq 1/s$, тобто послідовність простих функцій f_s, $s \in \mathbb{N}$, збігається поточково до f на множині $T \setminus C_k$. Оскільки $C_{m+1} \subset C_m$ для всіх $m \in \mathbb{N}$, $\mu(C_m) \to 0$ при $m \to \infty$, то звідси випливає, що послідовність f_s збігається до f майже всюди, і перше твердження леми доведено.

Якщо для деякого $x \in X$ маємо $C := \sup_{t\in T} h_X(f(t), x) < \infty$, то для побудованої послідовності f_k, $k \in \mathbb{N}$, і довільного $t \in T \setminus B_k$ маємо

$$h_X(f_k(t), x) \leq h_X(f_k(t), f(t)) + h_X(f(t), x) \leq 1 + C.$$

Якщо ж $t \in B_k$, то $h_X(f_k(t), x) = h_X(x_1, x)$. Тому оцінка зверху відстані $h_X(f_k(t), x)$ не залежить від k при всіх $t \in T$, тобто послідовність функцій f_i є рівномірно обмеженою. $\square$

1.1.5 Приклади частково впорядкованих L–просторів

1. **Частково впорядковані нормовані простори.** Нехай X — це нормований простір, і C — це замкнений опуклий конус (тобто замкнена опукла підмножина простору X така, що для всіх $x \in C$ і $\lambda \geq 0$ маємо $\lambda \cdot x \in C$ і $x = \theta$, якщо $x \in C$ і $-x \in C$). Тоді X стає частково впорядкованим L–простором типу $\mathbb{R}$ з таким порядком: $x \leq y$ тоді і тільки тоді, коли $y - x \in C$. У такому просторі порядковий інтервал є центрованим тоді і тільки тоді, коли $\|a - b\| \leqslant \|a + b\|$ для всіх $0 \leqslant a, b$. X є частково впорядкованим L–простором з функцією, що породжує порядок

$$e(x, y) = d(y - x, C) = \inf_{c\in C} \|y - x - c\|.$$

Відмітимо, що цей простір з метрикою

$$h_X(x, y) = \max\{e(x, y), e(y, x)\}$$

є центрованим без необхідності у додаткових гіпотезах.

2. **Простір підмножин нормованого простору.** Нехай X — це лінійний нормований простір. Позначимо через $\Omega(X)$ ($\Omega_{\text{conv}}(X)$) простір усіх непорожніх замкнених обмежених підмножин простору X (відповідно непорожніх замкнених обмежених опуклих підмножин X). Для $A, B \in \Omega(X)$ і $\alpha \in \mathbb{R}$ покладемо

$$A + B = \overline{\{a + b\colon a \in A, b \in B\}} \text{ і } \alpha \cdot A = \{\alpha \cdot a\colon a \in A\},$$

де $\overline{A}$ позначає замикання множини A. $\Omega(X)$ і $\Omega_{\mathrm{conv}}(X)$ є частково впорядкованими L–просторами типу Ω зі звичайною хаусдорфовою метрикою $h_{\Omega(X)}(A,B)$ і порядком визначеним за включенням. Ці L–простори породжуються функцією

$$e_{\Omega(X)}(A,B) = e_{\Omega_{\mathrm{conv}}(X)}(A,B) := \sup_{x\in A}\inf_{y\in B}\|x-y\|_X,$$

причому метрика означена за допомогою (1.22) з $\psi(x,y) = \max\{|x|,|y|\}$. Метрика взагалі кажучи не є подільною. Простір $\Omega_{\mathrm{conv}}(X)$ є центрованим. Властивість центрованості по суті було доведено у [26]; вона також випливає з леми 1.1.10.

3. **Простір опуклих компактних підмножин $\mathbb{R}^m$.** У випадку $X = \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, розглянемо простір $\Omega_{\mathrm{conv}}(\mathbb{R}^m)$ непорожніх опуклих компактних підмножин $\mathbb{R}^m$. Опорна функція опуклої множини $A \in \Omega_{\mathrm{conv}}(\mathbb{R}^m)$ визначається таким чином:

$$s_A(t) = \sup_{a\in A}(a,t),\ t \in \mathbb{R}^m.$$

Нехай $\mathbb{S}^{m-1}$ — це одинична сфера у $\mathbb{R}^m$ і $p \in [1,\infty)$. $\Omega_{\mathrm{conv}}(\mathbb{R}^m)$ є частково впорядкованим L–простором типу Ω з

$$h_{\Omega(\mathbb{R}^m),p}(A,B) = \left(\int\limits_{\mathbb{S}^{m-1}} |s_A(t)-s_B(t)|^p d\sigma\right)^{1/p},$$

і порядком означеним за включенням. Простір є центрованим і ізотропним. У випадку $p = 1$ метрика є подільною. $\Omega_{\mathrm{conv}}(\mathbb{R}^m)$ може бути породжений функцією

$$e_{\Omega(\mathbb{R}^m),p}(A,B) = \left(\int\limits_{\mathbb{S}^{m-1}} (s_A(t)-s_B(t))_+^p d\sigma\right)^{1/p},$$

де для $t \in \mathbb{R}$, $t_+ := \max(t,0)$. Тоді для метрики $h_{\Omega(\mathbb{R}^m),p}$ виконується рівність (1.22) з $\psi(x,y) = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}$, $p \in [1,\infty)$.

4. **Простори нечітких множин.** Розглянемо (див., напр., [71]) клас нечітких множин $\mathcal{E}^m$, що складається з функцій $u\colon \mathbb{R}^m \to I = [0,1]$ таких, що

(а) існує $x_0 \in \mathbb{R}^m$ таке, що $u(x_0) = 1$;

(б) для всіх $t, s \in \mathbb{R}^m$ і $0 \leq \lambda \leq 1$

$$u(\lambda t + (1-\lambda)s) \geq \min\{u(t), u(s)\};$$

(в) u є неперервною зверху;

(г) замикання множини $\{x \in \mathbb{R}^m \colon u(x) > 0\}$, яке позначається $[u]^0$, є компактом.

Для кожного $0 < \alpha \leqslant 1$, α-рівнем $[u]^\alpha$ множини u називається множина

$$[u]^\alpha = \{t \in \mathbb{R}^m \colon u(t) \geqslant \alpha\}.$$

У $\mathcal{E}^m$ додавання $u + v$ і множення на скаляр cu ($c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) означаються у термінах α-рівнів за формулою

$$[u+v]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha, \quad [cu]^\alpha = c[u]^\alpha$$

для всіх $0 < \alpha \leqslant 1$. Для будь-якого u, α-рівні множини $0 \cdot u$ за означенням $[0 \cdot u]^\alpha = \{\theta\}$ для всіх α.

$\mathcal{E}^m$ є частково впорядкованим L–простором типу Ω з

$$h_{\mathcal{E}^m,p}(u,v) = \left(\int\limits_0^1 \int\limits_{\mathbb{S}^{m-1}} \left| s_{[u]^\alpha}(t) - s_{[v]^\alpha}(t) \right|^p d\sigma d\alpha \right)^{1/p},$$

$u \leqslant v$ тоді і тільки тоді коли для майже всіх $\alpha \in [0,1]$, $[u]^\alpha \subset [v]^\alpha$. Простір є центрованим. У випадку $p = 1$ простір має подільну метрику.

Порядок у $\mathcal{E}^m$ може бути породженим функцією

$$e_{\mathcal{E}^m,p}(u,v) = \left(\int\limits_0^1 \int\limits_{\mathbb{S}^{m-1}} \left(s_{[u]^\alpha}(t) - s_{[v]^\alpha}(t) \right)_+^p d\sigma d\alpha \right)^{1/p}.$$

Метрика $h_{\mathcal{E}^m,p}$ означена за допомогою (1.22) з $\psi(x,y) = (x^p + y^p)^{\frac{1}{p}}$, $p \in [1, \infty)$.

5. **Квазілінійні нормовані простори.** Поняття квазілінійного нормованого простору було введено у [12]. Нехай X — це напівлінійний простір з функцією $e(\cdot,\cdot)$, що породжує порядок типу Ω. Нехай також $h_{X,\psi}$ — це метрика у просторі X означена за допомогою (1.22).

За допомогою формули $\|x\| := h_{X,\psi}(x,\theta)$, ми визначаємо норму у напівлінійному просторі X, і отримуємо квазілінійний нормований простір.

6. **Простори неперервний функцій.** Нехай задано компактний метричний простір T і частково впорядкований L–простір X. Позначимо через $C(T,X)$ простір усіх неперервних функцій $f\colon T \to X$. Він перетворюється на частково впорядкований L–простір з

$$h_{C(T,X)}(f,g) = \max_{t\in T} h_X(f(t),g(t))$$

і $f \leq_{C(T,X)} g$ тоді і тільки тоді, коли $f(t) \leq_X g(t)$ для всіх $t \in T$. Метрика взагалі кажучи не є подільною; простір центрований, якщо X є центрованим.

Якщо порядок у просторі X означений за допомогою функції $e_X(\cdot,\cdot)$ і h_X визначена за допомогою (1.22) з $\psi(x,y) = \max\{|x|,|y|\}$, то $h_{C(T,X)}(f,g)$ означена за допомогою (1.22) з

$$e_{C(T,X)}(f,g) = \max_{t\in T} e_X(f(t),g(t)),$$

і тією ж функцією ψ.

7. **Простори функцій, пов'язані з нормованими решітками.** Банаховий простір E, що є ненульовим лінійним многовидом у $M(T,\mathbb{R})$, називається банаховим функціональним простором. Банаховий функціональний простір E називається ідеальною банаховою решіткою (або просто ідеальною решіткою), якщо з того, що $|x(t)| \leq |y(t)|$ для майже всіх $t \in T$, де $x \in M(T,\mathbb{R})$ і $y \in E$, випливає, що $x \in E$ і $\|x\|_E \leq \|y\|_E$.

Маючи ідеальну решітку E і частково впорядкований L–простір X, через $E(T,X)$ ми позначаємо простір усіх вимірних функцій $f \in M(T,X)$

таких, що $h_X(f(\cdot),\theta) \in E$. Оскільки

$$h_X(f(t),g(t)) \leqslant h_X(f(t),\theta) + h_X(\theta,g(t)),$$

то $h_X(f(t),g(t)) \in E(T,\mathbb{R})$. Вводячи метрику

$$h_{E(T,X)}(f,g) = ||h_X(f(\cdot),g(\cdot))||_E \tag{1.24}$$

ми перетворюємо $E(T,X)$ у частково впорядкований L–простір з $f \leq_{E(T,X)} g$ тоді і тільки тоді, коли $f(t) \leq_X g(t)$ для майже всіх $t \in T$. Простір є центрованим, якщо X є центрованим. Метрика є подільною, якщо метрика у X є подільною, і $\|f+g\|_E = \|f\|_E + \|g\|_E$ для невід'ємних функцій $f,g \in M(T,\mathbb{R})$.

Нехай порядок у напівлінійному просторі X означений за допомогою функції $e_X(\cdot,\cdot)$ і $h_X = h_{X,\varphi}$ означена за допомогою (1.22) з $\psi = \varphi$. Покладемо

$$e_{E(T,X)}(f,g) = \|e_X(f(\cdot),g(\cdot))\|_{E(T,\mathbb{R})},$$

і означимо $h_{E(T,X),\psi}$ формулою (1.22). Отриманий частково впорядкований L–простір має той самий покоординатний порядок, але взагалі кажучи іншу ніж (1.24) метрику. Відмітимо, що якщо $E(T,X) = L_p(T,X)$, $1 \leq p < \infty$, породжена решіткою $L_p(T,\mathbb{R}) = L_p(T,\mathcal{F},\mu,\mathbb{R})$ і $\varphi(x,y) = \psi(x,y) = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}$, то $h_{E(T,X),\psi}$ співпадає з (1.24).

8. **Простори обмежених функцій.** Через $B(T,X)$ позначимо простір усіх вимірних обмежених функцій $f\colon T \to X$. Він стає частково впорядкованим L–простором, якщо ми покладемо

$$h_{B(T,X)}(f,g) = \sup_{t\in T} h_X(f(t),g(t))$$

і $f \leq_{B(T,X)} g$ тоді і тільки тоді, коли $f(t) \leq_X g(t)$ для всіх $t \in T$. $B(T,X)$ вкладений простір $E(T,X)$, якщо $\|1\|_{E(T,X)} < \infty$. Метрика не є подільною; простір є центрованим, якщо X є центрованим.

Якщо порядок у просторі X визначений за допомогою функції $e_X(\cdot,\cdot)$ і h_X визначений формулою (1.22) з $\psi(x,y) = \max\{|x|,|y|\}$, то $h_{B(T,X)}(f,g)$

задається формулою (1.22) з

$$e_{B(T,X)}(f,g) = \sup_{t\in T} e_X(f(t), g(t)),$$

і тією ж ψ.

9. **Неізотропний L–простір.** Приклад неізотропного L–простору може бути побудованим так. Нехай $X = [0,\infty)$, для $\lambda \in \mathbb{R}$, $x, y \in X$ покладемо $x \oplus y = \max\{x, y\}$, $\lambda \odot x = |\lambda| x$. Тоді $(X, \oplus, \odot)$ з метрикою $h_X(x,y) = |x-y|$, $x, y \in X$, є неізотропним L–простором. Він стає частково впорядкованим L–простором, якщо покласти $x \leq_X y$ тоді і тільки тоді, коли $x \geq y$ (у сенсі звичайного порядку у просторі $\mathbb{R}$). Цей порядок породжується функцією $e(x,y) = \max\{y-x, 0\}$.

Відмітимо, що у просторі $\Omega(X)$, де X є нормованим простором (див. приклад 2), будь-який елемент виду $\{x\}$, $x \in X$, є опуклим і оборотним.

У просторі $E(T,X)$, будь-який елемент вигляду $f(\cdot)\cdot x$, де $f \in E(T,\mathbb{R})$ і $x \in X$ є опуклим (оборотним), якщо x є опуклим (відп. оборотним).

1.2 Оператори зі значеннями у L–просторах

1.2.1 Інтеграл функції зі значеннями у L–просторі

Нехай $(T, \mathcal{F}, \mu)$ — це вимірний простір з повною скінченною мірою, (X, h_X) — повний сепарабельний L–простір, і P — це деякий опуклюючий оператор у X (означення опуклюючого оператора дано у наступному підпункті), який ми будемо вважати обраним і зафіксованим. В цьому пункті ми означимо інтеграл від функцій з простору $B(T,X)$. По суті ми повторюємо ідеї з [12, 156] побудови інтеграла.

1.2.1.1 Ліпшицеві, екстремально ліпшицеві і опуклюючі оператори

Нехай X і Y — це два L–простори.

Означення 1.2.1. *Оператор* $\lambda\colon X \to Y$ *називається ліпшицевим, якщо*

$$\forall x, y \in X,\ h_Y(\lambda(x), \lambda(y)) \leqslant h_X(x, y). \tag{1.25}$$

Означення 1.2.2. *Сюр'єктивний ліпшицевий оператор* $P\colon X \to X^{\mathrm{c}}$ *називається опуклюючим, якщо*

1. $P \circ P = P$;
2. $P(\alpha x + \beta y) = \alpha P(x) + \beta P(y)$, *для всіх* $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Якщо X *є частково впорядкованим* L*–простором, то ми додатково вимагаємо*

$$x \leq y \implies P(x) \leq P(y). \tag{1.26}$$

Зауваження 1.2.1. *Відмітимо, що якщо метрика* h_X *задається формулою* (1.22), *то властивості* (1.25) *і* (1.26) *випливають з*

$$e_X(P(x), P(y)) \leq e_X(x, y) \text{ для всіх } x, y \in X. \tag{1.27}$$

У просторі $\Omega(\mathbb{R}^n)$ оператор $P(A) = co\,(A)$ є опуклюючим; тут через $co\,(A)$ позначено опуклу оболонку множини A.

Лема 1.2.1. *Якщо* P *— це опуклюючий оператор і* $x \in X^{\mathrm{c}}$, *то* $P(x) = x$.

Доведення. Якщо $y \in X$ є таким, що $P(y) = x$, то $P(x) = P(P(y)) = P(y) = x$. □

Означення 1.2.3. *Ліпшицевий оператор* $\lambda\colon X \to Y$ *будемо називати екстремально ліпшицевим (і писати* $\lambda \in EL$*), якщо*

$$\sup_{x \in \tilde{X}} h_Y(\lambda(x), \theta) = 1, \tag{1.28}$$

де $\tilde{X} = \left\{x \in X^{\mathrm{inv}} \cap X^{\mathrm{c}}\colon h_X(x, \theta) \leq 1,\ \lambda(x) \in Y^{\mathrm{inv}},\ \lambda(x') = (\lambda(x))'\right\}$.

Лема 1.2.2. *Якщо* P *— це опуклюючий оператор у* L*–просторі* X, *і* $x \in X^{\mathrm{inv}}$, *то* $P(x) \in X^{\mathrm{inv}}$ *і* $P(x') = (P(x))'$. *Крім того,* $P \in EL$, *якщо*

$$X^{\mathrm{c}} \cap X^{\mathrm{inv}} \neq \{\theta\}, \tag{1.29}$$

Доведення. Очевидно, що $\theta \in X^{\mathrm{c}}$, а тому згідно з лемою 1.2.1, $P(\theta) = \theta$. Для кожного $x \in X^{\mathrm{inv}}$, $P(x) + P(x') = P(x + x') = P(\theta) = \theta$, тому $P(x') = (P(x))'$.

Якщо виконується умова (1.29) і $x \neq \theta$ є таким, що $x \in X^{\mathrm{c}} \cap X^{\mathrm{inv}}$, то згідно з лемою 1.1.4, для $y = \frac{x}{h_X(x,\theta)}$ маємо $y \in X^{\mathrm{c}} \cap X^{\mathrm{inv}}$ і $h_X(y, \theta) = 1$. Крім того, $h_X(P(y), \theta) = h_X(y, \theta) = 1$, тому $P \in \mathrm{EL}$. Лему доведено. □

1.2.1.2 Інтеграл простої функції

Інтеграл Лебега простої (див. означення 1.1.18) функції f за означенням дорівнює

$$\int_T f(s)d\mu(t) := \sum_{i=1}^{n} \mu(T_i)P(f_i).$$

За допомогою безпосередніх перетворень можна довести, що для простих функцій f і g виконуються такі властивості.

1. Для всіх $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_T (\alpha f(t) + \beta g(t))\, d\mu(t) = \alpha \int_T f(t)d\mu(t) + \beta \int_T g(t)d\mu(t).$$

2. Функція $t \mapsto h_X\left(f(t), g(t)\right)$ є інтегровною і

$$h_X\left(\int_T f(t)d\mu(t), \int_T g(t)d\mu(t)\right) \leq \int_T h_X\left(f(t), g(t)\right) d\mu(t).$$

3. Функція $P(f(\cdot))$ є інтегровною і

$$\int_T f(t)d\mu(t) = P\int_T f(t)d\mu(t) = \int_T Pf(t)d\mu(t).$$

4. Для вимірних множин T_1 і T_2, що мають порожній перетин, маємо

$$\int_{T_1 \cup T_2} f(t)d\mu(t) = \int_{T_1} f(t)d\mu(t) + \int_{T_2} f(t)d\mu(t).$$

5. Якщо $f(t) \leqslant g(t)$ для всіх $t \in T$, то

$$\int_T f(t)d\mu(t) \leqslant \int_T g(t)d\mu(t).$$

6. Якщо ρ є абсолютно неперервною строго монотонною функцією з відрізка $[c,d] \subset \mathbb{R}$ на $[a,b] \subset \mathbb{R}$, то для простої функції f, і міри Лебега μ (ми пишемо dt замість $d\mu(t)$ в цьому випадку)

$$\int_a^b f(t)dt = \int_c^d f(\rho(s))\rho'(s)ds.$$

7. Якщо порядок у просторі X визначається функцією $e(\cdot,\cdot)$ і виконується (1.27), то функція $t \mapsto e(f(t), g(t))$ є інтегровною і

$$e\left(\int_T f(t)d\mu(t), \int_T g(t)d\mu(t)\right) \leq \int_T e\left(f(t), g(t)\right) d\mu(t).$$

З цієї властивості випливає властивість 5. Крім того, якщо h_X задається рівністю (1.22), то з цієї властивості також випливає властивість 2.

1.2.1.3 Інтеграл для обмежених вимірних функцій

Нехай задано $f \in B(T,X)$. Згідно з лемою 1.1.11 виберемо послідовність простих функцій f_s, $s \in \mathbb{N}$, що поточково збігається до f. Покладемо $C = \sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{t\in T} h_X(f_i(t), \theta) < \infty$. Покажемо, що послідовність

$$I_s = \int_T f_s(t)d\mu(t), s \in \mathbb{N}$$

є фундаментальною. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і згідно з теоремою 1.1.1 оберемо вимірну множину T_ε таку, що $\mu(T \setminus T_\varepsilon) < \varepsilon$, і послідовність f_s збігається до f рівномірно на T_ε. Оберемо $N \in \mathbb{N}$ таке, що $h_X(f(t), f_s(t)) < \varepsilon$ для всіх $t \in T_\varepsilon$ і $s \geq N$. Тоді для всіх $n, m \geq N$

$$\begin{aligned} h_X\left(\int_T f_n(t)d\mu(t), \int_T f_m(t)d\mu(t)\right) &\leq \int_T h_X(f_n(t), f_m(t))d\mu(t) \\ &\leq \int_{T_\varepsilon} 2\varepsilon d\mu(t) + \int_{T\setminus T_\varepsilon} 2C d\mu(t) \leq 2\varepsilon\mu(T) + 2C\varepsilon, \end{aligned}$$

і фундаментальність послідовності I_s доведено. Оскільки простір X є повним, то існує границя I цієї послідовності. За означенням покладемо

$$\int_T f(t)d\mu(t) = I.$$

Міркуваннями аналогічними до доведення фундаментальності послідовності I_s можна довести, що означення інтеграла коректне, тобто не залежить від вибору апроксимуючої послідовності простих функцій; крім того, воно узгоджується з означенням інтеграла для простих функцій. Граничним переходом неважко довести, що усі властивості сформульовані у попередньому пункті, виконуються також для всіх $f, g \in B(T, X)$.

1.2.2 Деякі функції зі значеннями у L–просторі

Означення 1.2.4. *Для $f\colon T \to \mathbb{R}$ і $x \in X^{\mathrm{inv}}$ визначимо функцію*

$$f_x\colon T \to X, f_x(t) = f_+(t) \cdot x + f_-(t) \cdot x', \tag{1.30}$$

де для дійсного ξ, $\xi_\pm := \max\{\pm\xi, 0\}$.

Лема 1.2.3. *Нехай $f \in L_1(T, \mathbb{R})$ і $x \in X^{\mathrm{c}} \cap X^{\mathrm{inv}}$. Тоді $f_x \in L_1(T, X)$ і*

$$\begin{aligned}\int_T f_x(t)dt &= \int_T f_+(t)dt \cdot x + \int_T f_-(t)dt \cdot x' \\ &= \left(\int_T f(t)dt\right)_+ \cdot x + \left(\int_T f(t)dt\right)_- \cdot x'.\end{aligned} \tag{1.31}$$

Крім того, якщо x є сильно оборотним, то

$$\int_T f_x(t)dt = \left(\int_T f(t)dt\right) x. \tag{1.32}$$

Доведення. Рівність (1.31) випливає з (1.30) і опуклості елементів x і x'. Дійсно, нехай для визначеності $\int_T f_+(t)dt \geq \int_T f_-(t)dt$. Тоді

$$\begin{aligned}\int_T f_x(t)dt &= \left(\int_T f_+(t)dt\right) \cdot x + \left(\int_T f_-(t)dt\right) \cdot x' \\ = \left(\int_T f_-(t)dt\right) \cdot x &+ \left(\int_T (f_+(t) - f_-(t))dt\right) \cdot x + \left(\int_T f_-(t)dt\right) \cdot x' \\ &= \left(\int_T f(t)dt\right) \cdot x = \left(\int_T f(t)dt\right)_+ \cdot x \\ &= \left(\int_T f(t)dt\right)_+ \cdot x + \left(\int_T f(t)dt\right)_- \cdot x'.\end{aligned}$$

Якщо $\int_T f(t)dt \geq 0$, то рівність (1.32) випливає з (1.31) (і навіть для всіх $x \in X^{\mathrm{c}} \cap X^{\mathrm{inv}}$, не обов'язково сильно оборотних). В іншому випадку,

$$\int_T f_x(t)dt = \left(\int_T f(t)dt\right)_- \cdot x' = -\left(\int_T f(t)dt\right) \cdot x' = \int_T f(t)dt \cdot x,$$

що і треба було довести. □

Означення 1.2.5. *Нехай (T, r) — це метричний простір, X — це L–простір, і ω — це модуль неперервності. Через $H^\omega(T, X)$ ми будемо позначати множину функцій $f\colon T \to X$ таких, що для всіх $t, s \in T$ виконується нерівність*

$$h_X(f(t), f(s)) \leq \omega(r(t, s)).$$

В подальшому нам знадобиться таке просте твердження, яке дозволяє будувати нові функції з класів $H^\omega([a, b], \mathbb{R})$.

Лема 1.2.4. *Якщо ω є модулем неперервності, то*

1. $f \in H^\omega([0, a], \mathbb{R}) \implies f(|\cdot|) \in H^\omega([-a, a], \mathbb{R})$.
2. $f \in H^\omega([a, b], \mathbb{R}) \implies f(\cdot - c) \in H^\omega([a + c, b + c], \mathbb{R})$.
3. *Якщо $[c, d] \subset [a, b]$ і $f \in H^\omega([c, d], \mathbb{R})$, то продовження функції f формулою $f(x) = f(d)$ для $x > d$, $f(x) = f(c)$ для $x < c$ належить простору $H^\omega([a, b], \mathbb{R})$.*
4. *Якщо $f, g \in H^\omega([a, b], \mathbb{R})$, то $\max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in H^\omega([a, b], \mathbb{R})$.*
5. *Якщо ω є опуклою, то функція $f(t) = \frac{\operatorname{sgn} t}{2} \cdot \omega(2|t|)$ належить класу $H^\omega([-a, a], \mathbb{R})$ для всіх $a \in \mathbb{R}$.*

Лема 1.2.5. *Нехай задано функцію $f \in H^\omega(T, \mathbb{R})$ і ізотропний L–простір X. Якщо $x \in X^{\mathrm{inv}} \cap X^{\mathrm{c}}$ є таким, що $h_X(x, \theta) \leq 1$, то $f_x \in H^\omega(T, X)$.*

Доведення. Якщо $s, t \in T$ є такими, що $f(s), f(t) \geq 0$, то згідно з лемою 1.1.6,

$$h_X(f_x(s), f_x(t)) = h_X(f(s) \cdot x, f(t) \cdot x) \leq \omega(r(s, t)).$$

Аналогічно, використовуючи лему 1.1.7, у випадку $f(s), f(t) \leq 0$. Якщо $f(s) \geq 0 \geq f(t)$, то

$$h_X(f_x(s), f_x(t)) = h_X(f_+(s) \cdot x, f_-(t) \cdot x') = h_X(f_+(s) \cdot x + f_-(t) \cdot x, \theta)$$
$$= |f(s) - f(t)| h_X(x, \theta) \leq \omega(r(t, s)).$$

Тому $f_x \in H^\omega(T, X)$. □

Поняття різниці Хукухара для двох множин було введено у [91]. Це поняття має безпосереднє узагальнення для довільних L–просторів. Детально такого роду узагальнення розглядалось у [15].

Означення 1.2.6. *Нехай X — це L–простір. Будемо казати, що елемент $z \in X$ є різницею Хукухара елементів $x, y \in X$, якщо $x = y + z$. Ми використовуватимемо таке позначення $z = x -_H y$.*

Відмітимо, що у ізотропному L–просторі, якщо різниця Хукухара $x -_H y$ існує, то вона єдина. Дійсно, якщо $x = y + z_1$ і $x = y + z_2$, то

$$0 = h_X(x, x) = h_X(y + z_1, y + z_2) = h_X(z_1, z_2),$$

тому $z_1 = z_2$.

З іншого боку, у неізотропному L–просторі єдиності взагалі кажучи немає. Наприклад для простору $(X, \oplus, \odot)$ з прикладу 9 з пункту 1.1.5, для всіх $x \in X$, $x \neq 0$ різниця $x -_H x$ існує і не є єдиною. Всюди далі ми розглядаємо різницю Хукухара у ізотропних просторах.

Означення 1.2.7. *Якщо $t \in (a, b)$, і для всіх достатньо малих $\gamma > 0$ існують різниці $f(t + \gamma) -_H f(t)$ і $f(t) -_H f(t - \gamma)$, і обидві границі $\lim\limits_{\gamma \to +0} \gamma^{-1}(f(t + \gamma) -_H f(t))$ і $\lim\limits_{\gamma \to +0} \gamma^{-1}(f(t) -_H f(t - \gamma))$ існують і рівні, то функція $f\colon [a, b] \to X$ має похідну $\mathcal{D}_H f(t)$ типу Хукухара у точці t (якщо $t = a$ або $t = b$, то вимагаємо існування однієї з границь) і*

$$\mathcal{D}_H f(t) := \lim_{\gamma \to +0} \gamma^{-1}(f(t + \gamma) -_H f(t)).$$

Лема 1.2.6. *Нехай задано ізотропний L–простір X, $x \in X^{\mathrm{c}} \cap X^{\mathrm{inv}}$, і неперервно диференційовну функцію $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Тоді похідна $\mathcal{D}_H f_x(t)$ існує у кожній точці $t \in [a,b]$ і $\mathcal{D}_H f_x(t) = (f'(t))_x$.*

Доведення. Перш за все відмітимо, що якщо $t, t+\gamma \in [a,b]$, то $f_x(t+\gamma) -_H f_x(t) = (f(t+\gamma) - f(t))_x$. Нехай $\gamma > 0$. Якщо $f'(t) > 0$, то для всіх достатньо малих γ, $f(t+\gamma) > f(t)$, тому

$$\lim_{\gamma \to +0} \gamma^{-1}(f_x(t+\gamma) -_H f_x(t)) = \lim_{\gamma \to +0} \gamma^{-1}(f(t+\gamma) - f(t))x$$
$$= f'(t) \cdot x = (f'(t))_x.$$

Аналогічно у випадку, коли $f'(t) < 0$. Нарешті, якщо $f'(t) = 0$, то, використовуючи лему 1.1.7, отримаємо

$$h_X\left(\gamma^{-1}(f_x(t+\gamma) -_H f_x(t)), \theta\right)$$
$$= \left|\gamma^{-1}(f(t+\gamma) - f(t))\right| h_X(x,\theta) \to 0, \gamma \to +0.$$

Аналогічно для величини $\lim_{\gamma \to +0} \gamma^{-1}(f_x(t) -_H f_x(t-\gamma))$. Лему доведено.

□

1.2.3 (λ, φ)–адитивні оператори

Поняття (λ, φ)–адитивних операторів розглядалось у статтях [19, 29].

1.2.3.1 Означення

Нехай задано множину T, і алгебру $\mathcal{F}$ підмножин множини T. Ми кажемо, що множина $\{F_1, \ldots, F_n\} \subset \mathcal{F}$ є розбиттям множини T, якщо $F_i \cap F_j = \emptyset$ для $i \neq j$, і $\bigcup_{k=1}^n F_k = T$. Сім'я $\mathfrak{P}$ розбиттів множини T називається допустимою, якщо

$$\{F_1^1, \ldots, F_n^1\}, \{F_1^2, \ldots, F_m^2\} \in \mathfrak{P} \implies$$
$$\{F_i^1 \cap F_j^2 \colon 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\} \in \mathfrak{P}.$$

Нехай задано допустиму сім'ю $\mathfrak{P}$ розбиттів множини T і L–простір X. Функція $f\colon T \to X$ називається $\mathfrak{P}$–простою, якщо для деякого розбиття $F = \{F_1, \ldots, F_n\} \in \mathfrak{P}$ і елементів $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ маємо

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \chi_{F_k}(t) \cdot x_k, t \in T, \tag{1.33}$$

де χ_F позначає характеристичну функцію множини F. Відмітимо, що коли $(T, \mathcal{F})$ — це вимірних простір, і $\mathfrak{P}$ складається з усіх можливих розбиттів T на вимірні множини, то $\mathfrak{P}$–проста функція стає простою у сенсі означення 1.1.18.

Покладемо $\Xi(\mathcal{F}) = \{\chi_F\colon F \in \mathcal{F}\}$, і $\Phi = \{\varphi\colon \Xi(\mathcal{F}) \to \mathbb{R}^S\}$, де S — це деяка множини, і для двох множин A і B через A^B позначено множину функцій $g\colon B \to A$.

Нехай X, Y — це два L–простори, T, S — дві множини, $\mathcal{F}$ — алгебра підмножин множини T і $\mathfrak{P}$ — допустима множина розбиттів.

Означення 1.2.8. *Для функцій $\lambda\colon X \to Y^{\mathrm{c}}$ і $\varphi \in \Phi$ оператор $\Lambda\colon D_\Lambda \subset X^T \to Y^S$ називається (λ, φ)–адитивним, якщо для кожної $\mathfrak{P}$–простої функції* (1.33)*, яка належить D_Λ, справедлива рівність*

$$\Lambda(f)(\cdot) = \Lambda\left(\sum_{k=1}^{n} \chi_{F_k} \cdot x_k\right)(\cdot) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(\chi_{F_k})(\cdot) \cdot \lambda(x_k). \tag{1.34}$$

1.2.3.2 Приклади (λ, φ)–адитивних операторів

Найважливішими прикладами (λ, φ)–адитивних операторів є інтеграл Лебега функції зі значеннями у L–просторі, і інтегральні оператори, які означаються за допомогою інтеграла Лебега.

Якщо міра μ на відрізку $[0, 1]$ є абсолютно неперервною по відношенню до міри Лебега, то оператор

$$\Lambda(f) = \int_0^1 f(t) d\mu(t) \tag{1.35}$$

є (λ, φ)–адитивним, з $\lambda = P$ — опуклюючим оператором, і $\varphi(\chi_\Delta) = \mu(\Delta)$.

Нехай $T = [0,1]$ і S — це метричний компакт з мірою ν, а X — це сепарабельний L–простір, $1 \le p \le \infty$. Означимо оператор

$$\Lambda\colon B(T,\mu,X) \to L_p(S,\nu,X),\ \Lambda(f)(s) := \int\limits_T K(t,s)f(t)d\mu(t), \qquad (1.36)$$

де $K(t,s)$ — це невід'ємне ядро, для якого $K(\cdot,s) \in L_1(T,\mu,\mathbb{R})$ для ν–майже всіх $s \in S$, і

$$\int\limits_T K(t,\cdot)d\mu(t) \in L_p(S,\nu,\mathbb{R}).$$

Цей оператор є (λ,φ)-адитивним, де $\lambda = P$ є опуклюючим оператором, і

$$\varphi(\chi_\Delta)(s) = \int\limits_\Delta K(t,s)d\mu(t).$$

Інший приклад (λ,φ)–адитивного оператора може бути побудованим так. Якщо $S \subset T$, $X = Y$, і $g \in B(S,\mathbb{R})$ є фіксованою невід'ємною функцією, а P — це опуклюючий оператор у X, то оператор $\Lambda\colon B(T,X) \to B(S,X)$, $\Lambda f = g \cdot (P \circ f)$ є (λ,φ)–адитивним з $\lambda = P$ і $\varphi(w) = w \cdot g$, $w \in B(T,X)$.

1.2.3.3 Інтегральне представлення (λ,φ)–адитивних операторів

Інтегральне представлення для (λ,φ)–адитивних операторів було отримано у [29]. Нехай задано множину T і σ–алгебру $\mathcal{F}_T$ підмножин T. Для повного сепарабельного L–простору X у пункті 1.1.5 ми ввели простір обмежених вимірних функцій $B(T,X)$ з метрикою $h_{B(T,X)}$. Множиною розбиттів $\mathfrak{P}$ буде виступати сім'я усіх можливих розбиттів T на вимірні множини; через $B_s(T,X)$ позначимо замикання у просторі $B(T,X)$ множини $\mathfrak{P}$–простих функцій.

З сепарабельності простору X випливає, що кожна функція $g \in B(T,X)$ є рівномірною на T границею послідовності кусково-постійних функцій з не більш ніж зліченними множинами значень, тобто функцій виду

$$t \mapsto \sum_k x_k \chi_{F_k}(t), \{x_k\} \subset X, \{F_k\} \subset \mathcal{F}_T.$$

Взагалі кажучи, $B_s(T,X)$ не співпадає з $B(T,X)$, але якщо X є множиною дійсних чисел зі звичайною метрикою, то $B_s(T,X) = B(T,X)$.

Нехай Y — це ще один L–простір і $(S, \mathcal{F}_S)$ — ще один вимірний простір, $\lambda\colon X \to Y^c$ — це ліпшицевий оператор і $\varphi\colon B(T,\mathbb{R}) \to B(S,\mathbb{R})$ — це лінійний обмежений додатній оператор. Для того, щоб сформулювати результат про інтегральне представлення (λ,φ)– адитивних операторів, нам потрібне таке поняття векторної міри (зі значеннями у просторі $B(S,\mathbb{R})$), що породжується оператором φ: для кожної множини $A \in \mathcal{F}_T$,

$$\mu_\varphi(A) := \varphi(\chi_A).$$

Оскільки оператор φ є лінійним, то отримана векторна міра є адитивною.

Для простої функції f виду (1.33) маємо

$$\Lambda(f) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(\chi_{F_k})\lambda(x_k) =: \int_T \lambda(f(t))d\mu_\varphi.$$

Покажемо, що якщо послідовність простих функцій f^n рівномірно на T збігається до f, то послідовність $\{\Lambda(f^n)(s)\} = \{\sum_k \varphi(\chi_{F_k})(s)\lambda(x_k)\}$ є фундаментальною для кожного $s \in S$. Дійсно,

$$h_Y(\Lambda(f^n)(s), \Lambda(f^m)(s)) = h_Y\left(\sum_k \varphi(\chi_{F_k^n})(s)\lambda(x_k^n), \sum_l \varphi(\chi_{F_l^m})(s)\lambda(x_l^m)\right)$$

$$= h_Y\left(\sum_{k,l} \varphi(\chi_{F_k^n\cap F_l^m})(s)\lambda(x_k^n), \sum_{k,l} \varphi(\chi_{F_k^n\cap F_l^m})(s)\lambda(x_l^m)\right)$$

$$\leqslant \sum_{k,l} h_Y\left(\lambda(x_k^n), \lambda(x_l^m)\right)\varphi(\chi_{F_k^n\cap F_l^m})(s)$$

$$\leqslant \sum_{k,l} h_X\left(x_k^n, x_l^m\right)\varphi(\chi_{F_k^n\cap F_l^m})(s) = \varphi\left(\sum_{k,l} h_X\left(x_k^n, x_l^m\right)\chi_{F_k^n\cap F_l^m}\right)(s).$$

Легко бачити, що для всіх $t \in T$,

$$\sum_{k,l} h_X\left(x_k^n, x_l^m\right)\chi_{F_k^n\cap F_l^m}(t) = h_X(f^n(t), f^m(t)) \leq h_{B(T,X)}(f^n, f^m).$$

Тоді

$$h_Y(\Lambda(f^n)(s), \Lambda(f^m)(s)) \leqslant \varphi(h_X(f^n, f^m))(s) \rightrightarrows 0,\ n, m \to \infty,$$

де остання твердження про рівномірну на S збіжність справедливе через рівномірну збіжність послідовності $\{f^n\}$ і обмеженість оператора φ.

Тому для кожного $s \in S$, ця послідовність є фундаментальною, а отже через повноту простору Y має границю. Позначимо цю границю через

$$\int_T \lambda(f) d\mu_\varphi := \lim_{n\to\infty} \int_T \lambda(f^n) d\mu_\varphi,$$

де $f^n \rightrightarrows f$ на T. Легко бачити, що границя справа не залежить від вибору послідовності $\{f^n\}$ (це можна довести застосовуючи ті самі міркування, що і при доведенні фундаментальності послідовності $\{\Lambda(f^n)(s)\}$), а тому інтеграл означено коректно.

Таким чином, ми довели таку теорему.

Теорема 1.2.1. *Кожен неперервний (λ, φ)–адитивний оператор*

$$\Lambda\colon B_s(T, X) \to B(S, Y)$$

може бути представленим у вигляді

$$\Lambda(f) = \int_T \lambda(f) d\mu_\varphi, \tag{1.37}$$

де інтеграл справа — це інтеграл по векторо-значній мірі μ_φ.

Зауваження 1.2.2. *Інтеграл у (1.37) є функцією $s \in S$. Нижче для скорочення позначень, у випадках, коли це не призведе до двозначності, ми будемо писати $\int_T \lambda(f) d\mu_\varphi$ замість $\left(\int_T \lambda(f) d\mu_\varphi\right)(s)$.*

Наведені нижче властивості введеного інтеграла можна легко довести для простих функцій, а далі граничним переходом розповсюдити на довільну функцію $f \in B_s(T, X)$.

Теорема 1.2.2. *1. Якщо $x \in X$, $g \in B(T, \mathbb{R})$ є невід'ємною функцією і $f = t \mapsto g(t) \cdot x$, то*

$$\int_T \lambda(f) d\mu_\varphi = \lambda(x) \int_T g d\mu_\varphi.$$

Зокрема, якщо $g \equiv 1$, то

$$\int_T \lambda(f) d\mu_\varphi = \lambda(x)\varphi(\chi_T).$$

2. *Для всіх* $f, g \in B_s(T, X)$,

$$h_Y\left(\int_T \lambda(f)d\mu_\varphi, \int_T \lambda(g)d\mu_\varphi\right) \leqslant \int_T h_Y\left(\lambda(f), \lambda(g)\right) d\mu_\varphi.$$

3. *Якщо* $f, g \in B_s(T, \mathbb{R}) = B(T, \mathbb{R})$ *і* $f(t) \leqslant g(t)$ *для всіх* $t \in T$, *то поточково*

$$\int_T f d\mu_\varphi \leqslant \int_T g d\mu_\varphi.$$

1.3 Лема Корнєйчука–Стєчкіна і деякі її застосування

1.3.1 Випадок дійснозначних функцій

Нехай функції $\psi_1 \in B([a, a'], \mathbb{R})$, $\psi_2 \in B([b', b], \mathbb{R})$, $a < a' \leqslant b' < b$ є майже всюди додатними і такими, що $\int_a^{a'} \psi_1(t)dt = \int_{b'}^b \psi_2(t)dt$. Розглянемо функцію $\rho\colon [a, c] \to [c, b]$, $c = (a' + b')/2$, що задається співвідношеннями

$$\int_a^s \psi_1(t)dt = \int_{\rho(s)}^b \psi_2(t)dt, \text{ якщо } s \in [a, a'],$$
$$\text{і } \rho(s) = a' + b' - s, \text{ якщо } s \in [a', c], \quad (1.38)$$

Крім того, покладемо

$$\psi(t) = \begin{cases} \psi_1(t), & t \in [a, a'] \\ -\psi_2(t), & t \in [b', b] \\ 0, & t \in (a', b'). \end{cases}$$

Лему Корнєйчука–Стєчкіна (див. напр. [104, § 7.1]) можна сформулювати таким чином.

Лема 1.3.1 (Корнєйчук, Стєчкін). *Для функцій* ψ, ψ_1, ψ_2 *та* ρ *означених вище, довільних модуля неперервності* ω, *і функції* $f \in H^\omega([a, b], \mathbb{R})$

$$\left|\int_a^b f(t)\psi(t)dt\right| = \left|\int_a^{a'} f(t)\psi_1(t)dt - \int_{b'}^b f(t)\psi_2(t)dt\right|$$

$$\leq \int_a^{a'} \psi_1(s)\omega(\rho(s)-s)ds = \int_{b'}^b \psi_2(t)\omega(t-\rho^{-1}(t))dt.$$

Якщо ω є опуклим догори модулем неперервності, то нерівність є точною. У цьому випадку нерівність стає рівністю для функцій $\pm g(\cdot)+\alpha$, де $\alpha \in \mathbb{R}$, і

$$g(t) = \begin{cases} -\int_t^c \omega'(\rho(s)-s)ds, & a \leq t \leq c, \\ \int_c^t \omega'(s-\rho^{-1}(s))ds, & c \leq t \leq b. \end{cases} \tag{1.39}$$

Цей результат відіграв важливу роль при розв'язанні багатьох екстремальних задач. У монографії [200] наводяться результати, де ця лема є важливим елементом отримання оцінок зверху відхилення одиничного оператора від різних операторів підсумовування рядів Фур'є на класах періодичних функцій з мажорантою ω модуля неперервності їх r-тої похідної, $r \in \mathbb{N}$.

У монографії [56] розглядається узагальнення леми Корнейчука–Стєчкіна на випадок, коли функція ψ має більше ніж одну зміну знаку (без обмежень на розташування нулів первісної функції ψ), а також її застосування до багатьох екстремальних задач.

Лема Корнєйчука–Стєчкіна також розв'язує двоїсту задачу до проблеми перенесення мас Монжа–Канторовіча, див. напр. [93, Розділ VIII.4]. У статтях [82, 199] було отримано узагальнення леми Корнєйчука–Стєчкіна на випадок функцій багатьох змінних.

1.3.2 Лема Корнєйчука–Стєчкіна

Головні результати цього підрозділу були отримані у [18].

Лема 1.3.2. *Нехай функції ψ_1, ψ_2 та ρ є такими, як у лемі 1.3.1, і задано модуль неперервності ω. Для L–простору X і функціонала $S(\psi_1, \psi_2)$ означеного у* (1)

$$S(\psi_1,\psi_2) \leq \int_a^{a'} \psi_1(s)\omega(\rho(s)-s)ds = \int_{b'}^b \psi_2(t)\omega(t-\rho^{-1}(t))dt. \tag{1.40}$$

Якщо ω є опуклим догори модулем неперервності, а простір X є ізотропним і таким, що

$$X^{\mathrm{c}} \cap X^{\mathrm{inv}} \neq \{\theta\}, \tag{1.41}$$

то (1.40) *перетворюється на рівність. У цьому випадку супремум досягається для функцій* $(\pm g + \alpha)_x(\cdot) + y \in H^{\omega}([a,b], X)$, *де* $\alpha \in \mathbb{R}$, $y \in X$, $x \in X^{\mathrm{c}} \cap X^{\mathrm{inv}}$, $h_X(x, \theta) = 1$, *а функція* g *означена у* (1.39).

Доведення. Диференціюючи рівність (1.38), маємо $\psi_1(s) = -\psi_2(\rho(s))\rho'(s)$ для всіх $s \in [a, a']$. Після заміни $t = \rho(s)$, отримаємо

$$\int_{b'}^{b} \psi_2(t) f(t) dt = -\int_{a}^{a'} \psi_2(\rho(s))\rho'(s) f(\rho(s)) ds = \int_{a}^{a'} \psi_1(s) f(\rho(s)) ds.$$

Тому

$$\begin{aligned} & h_X\left(\int_a^{a'} \psi_1(t) f(t) dt, \int_{b'}^{b} \psi_2(t) f(t) dt\right) \\ &= h_X\left(\int_a^{a'} \psi_1(t) f(t) dt, \int_a^{a'} \psi_1(t) f(\rho(t)) dt\right) \\ &\leq \int_a^{a'} h_X\left(\psi_1(t) f(t), \psi_1(t) f(\rho(t))\right) dt \\ &= \int_a^{a'} \psi_1(t) h_X(f(t), f(\rho(t))) dt \leq \int_a^{a'} \psi_1(t) \omega(\rho(t) - t) dt \end{aligned}$$

і нерівність у (1.40) доведено. Рівність у (1.40) може бути отримана заміною $s = \rho^{-1}(t)$. Нехай тепер ω — це опуклий модуль неперервності і X є ізотропним простором. Для $y \in X$,

$$\int_a^{a'} \psi_1(t) y dt = \left(\int_a^{a'} \psi_1(t) dt\right) P(y) = \left(\int_b^{b'} \psi_2(t) dt\right) P(y) = \int_b^{b'} \psi_2(t) y dt,$$

і оскільки простір X є ізотропним, отримаємо

$$\begin{aligned} & h_X\left(\int_a^{a'} \psi_1(t) f(t) dt, \int_{b'}^{b} \psi_2(t) f(t) dt\right) \\ &= h_X\left(\int_a^{a'} \psi_1(t) f(t) dt + \int_a^{a'} \psi_1(t) y dt, \int_{b'}^{b} \psi_2(t) f(t) dt + \int_{b'}^{b} \psi_2(t) y dt\right) \end{aligned}$$

$$= h_X\left(\int_a^{a'} \psi_1(t)(f(t)+y)dt, \int_{b'}^{b} \psi_2(t)(f(t)+y)dt\right).$$

Тому якщо супремум у (1.40) досягається для деякої функції f, то він досягається і для усіх функцій $f(\cdot)+y$, $y \in X$. Нехай $G(\cdot) = g(\cdot)+\alpha$, де g означена у (1.39) і $\alpha \in \mathbb{R}$. Відомо, що (див. [104, § 7.1]) функція G належить до $H^\omega([a,b],\mathbb{R})$ і є екстремальною у (1.40) для дійсно-значних функцій, тобто для $I = \int_a^{a'} \psi_1(t)G(t)dt$ і $J = \int_{b'}^{b} \psi_2(t)G(t)dt$ виконується рівність $|I-J| = \int_a^{a'} \psi_1(t)\omega(\rho(t)-t)dt$. З формули (1.39) випливає, що функція g є неспадною. Тому можливі три варіанти: 1) $I \geq 0, J \geq 0$, 2) $I \leq 0, J \geq 0$ і 3) $I \leq 0, J \leq 0$. Розглядаючи кожний із них і беручи до уваги леми 1.1.6, 1.1.7 і 1.2.5, отримаємо

$$h_X\left(\int_a^{a'} \psi_1(t)G_x(t)dt, \int_{b'}^{b} \psi_2(t)G_x(t)dt\right) = |I-J|h_X(x,\theta)$$
$$= \int_a^{a'} \psi_1(t)\omega(\rho(t)-t)dt.$$

Ми зупинимось детальніше на доведенні випадку $I \leq 0$ і $J \geq 0$:

$$h_X\left(\int_a^{a'} \psi_1(t)G_x(t)dt, \int_{b'}^{b} \psi_2(t)G_x(t)dt\right) = h_X(I_- \cdot x', J_+ \cdot x)$$

$$= h_X(I_- \cdot x' + I_- \cdot x, I_- \cdot x + J_+ \cdot x) = h_X(\theta, (-I+J)\cdot x) = |I-J|h(x,\theta).$$

Випадок функцій $G(\cdot) = -g(\cdot)+\alpha$, може бути розглянуто аналогічно. □

Нагадаємо, що для вимірної невід'ємної функції $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, функція

$$m(f,y) := \mathrm{meas}\{t \in [a,b]\colon f(t) > y\}, y \in \mathbb{R}$$

називається функцією розподілу функції f, де meas позначає міру Лебега. Функція

$$r(f,t) := \inf\{y\colon m(f,y) \leqslant t\}, t \in [0, b-a]$$

називається незростаючою перестановкою функції f. Функція $r(f,\cdot)$ є незростаючою на $[0,b-a]$, і рівновимірною з f.

Зауваження 1.3.1. *Для опуклого модуля неперервності ω, і ізотропного простору X, лема 1.3.2 може бути переписаною так:*

$$S(\psi_1, \psi_2) = \left| \int_0^{b-a} r'(\Psi, s)\omega(s)ds \right| = \int_0^{b-a} r(\Psi, s)\omega'(s)ds, \tag{1.42}$$

де $\Psi(s) = \int_a^s (\psi_1(u) - \psi_2(u))du, s \in [a, b]$.

Рівність величин у правих частинах нерівностей (1.40) і (1.42) для опуклих ω була доведена Корнєйчуком, див. напр. [104, лема 7.1.2].

1.3.3 Оцінка для функціонала $S(\psi_1, \psi_2)$

Означення 1.3.1. *Функцію $\varphi \in C([a, b], \mathbb{R})$ будемо називати капелюхо-подібною, якщо*

1. $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, $|\varphi(t)| > 0$ *для* $a < t < b$, *і*
2. $\forall y \in (0, \max\limits_{t\in[a,b]} |\varphi(t)|)$ *рівняння* $|\varphi(t)| = y$ *має рівно два розв'язки на* (a, b).

Кожну капелюхо-подібну функцію φ продовжимо на всю пряму рівністю $\varphi(t) = 0$, $t \notin (a, b)$.

Позначимо через $D[a, b]$ множину функцій $\psi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, які мають скінченні односторонні границі $\psi(t+0)$ і $\psi(t-0)$ для всіх $t \in (a, b)$, і скінченні границі $\psi(a+0)$ і $\psi(b-0)$. Покладемо $D_0[a, b] = \{\psi \in D[a, b]\colon \int_a^b \psi(t)dt = 0\}$ і $D_0^1[a, b] = \{f(t) = \int_a^t \psi(u)du\colon \psi \in D_0[a, b]\}$. Відомо, що (див. напр. [103] і [104, Розділ 7]), що кожна функція $f \in D_0^1[a, b]$ може бути представленою у вигляді не більш ніж зліченної суми капелюхо-подібних функцій

$$f(t) = \sum_k \varphi_k(t). \tag{1.43}$$

Ця рівність називається Σ–представленням функції f. Виконуються такі властивості (див. [104, Розділ 7]).

1. $|f(t)| = \sum_k |\varphi_k(t)|, a \leqslant t \leqslant b$;

2. Інтервали (α_k, α'_k), (β'_k, β_k), на яких функції $\varphi_k(t)$ є строго монотонними, попарно не перетинаються, і на кожному з них $\varphi_k(t) = f(t)+c_k$, $c_k \in \mathbb{R}$; тому $f'(t) = \sum_k \varphi'_k(t)$ майже всюди на $[a, b]$;

3. $\int_a^b |f(t)|dt = \sum_k \int_{\alpha_k}^{\beta_k} |\varphi_k(t)|dt$;

4. $\bigvee_a^b f = \sum_k \bigvee_{\alpha_k}^{\beta_k}(\varphi_k)$.

Означення 1.3.2. *Для функції $f \in D_0^1[a, b]$ з Σ–представленням* (1.43), *Σ–перестановка Корнєйчука функції f визначається формулою*

$$R(f; t) = \sum_k r(|\varphi_k|, t), 0 \leqslant t \leqslant b - a.$$

Теорема 1.3.1. *Припустимо, що ω — це опуклий модуль неперервності і $\psi_1, \psi_2 \in B([a, b], \mathbb{R})$ є такими, що $\psi_1 - \psi_2 \in D_0[a, b]$. Покладемо $\Psi(t) = \int_a^t [\psi_1(u) - \psi_2(u)]du$. Тоді*

$$S(\psi_1, \psi_2) \leqslant \int_0^{b-a} |R'(\Psi; t)|\omega(t)dt. \tag{1.44}$$

Доведення. Нехай $E_\pm = \{t \in [a, b]\colon \pm\psi_1(t) \geqslant \pm\psi_2(t)\}$. Якщо P — це опуклюючий оператор (див. означення 1.2.2), то $\psi_1(s)P(f(s)) = (\psi_1(s) - \psi_2(s))P(f(s)) + \psi_2(s)P(f(s))$ для всіх $s \in E_+$ і $\psi_2(s)P(f(s)) = (\psi_2(s) - \psi_1(s))P(f(s)) + \psi_1(s)P(f(s))$ для всіх $s \in E_-$. Тому для кожної функції $f \in H^\omega([a, b], X)$ маємо

$$\begin{aligned}
&h_X\left(\int_a^b f(t)\psi_1(t)dt, \int_a^b f(t)\psi_2(t)dt\right)\\
&= h_X\left(\int_{E_+} f(t)(\psi_1(t) - \psi_2(t))dt + \int_{E_-} f(t)\psi_1(t)dt + \int_{E_+} f(t)\psi_2(t)dt,\right.\\
&\left.\int_{E_-} f(t)(\psi_2(t) - \psi_1(t))dt + \int_{E_-} f(t)\psi_1(t)dt + \int_{E_+} f(t)\psi_2(t)dt\right)\\
&\leq h_X\left(\int_{E_+} f(t)(\psi_1(t) - \psi_2(t))dt, \int_{E_-} f(t)(\psi_2(t) - \psi_1(t))dt\right)\\
&= h_X\left(\int_a^b f(t)(\psi_1(t) - \psi_2(t))_+dt, \int_a^b f(t)(\psi_1(t) - \psi_2(t))_-dt\right).
\end{aligned}$$

Крім того, нерівність перетворюється на рівність у ізотропному просторі X. Нехай $\Psi(t) = \sum_k \varphi_k(t)$ — це Σ–представлення функції Ψ. Оскільки $\Psi' = \psi_1 - \psi_2 = \sum_k \varphi_k'$, завдяки згаданим вище властивостям Σ–представлень, то

$$(\psi_1 - \psi_2)_+ = \sum_k (\varphi_k')_+, (\psi_1 - \psi_2)_- = \sum_k (\varphi_k')_-.$$

Крім того, для кожного k пара функцій $(\varphi_k')_+$ і $(\varphi_k')_-$ задовольняють припущенням леми 1.3.2 на відрізках $[\alpha_k, \alpha_k']$ і $[\beta_k', \beta_k]$ строгої монотонності φ_k. Застосовуючи лему 1.3.2 (більш точно, рівність (1.42)), отримаємо

$$\begin{aligned} h_X &\left(\int_a^b f(t)(\psi_1(t) - \psi_2(t))_+ dt, \int_a^b f(t)(\psi_1(t) - \psi_2(t))_- dt \right) \\ &= h_X \left(\int_a^b f(t) \sum_k (\varphi_k')_+ dt, \int_a^b f(t) \sum_k (\varphi_k')_- dt \right) \\ &\leqslant \sum_k h_X \left(\int_a^b f(t)(\varphi_k')_+ dt, \int_a^b f(t)(\varphi_k')_- dt \right) \\ &\leqslant \sum_k \int_0^{b-a} r(|\varphi_k|, t)\omega'(t) dt = \int_0^{b-a} R(\Psi, t)\omega'(t) dt. \end{aligned}$$

Нарешті, відмітимо, що $R(\Psi, \cdot)$ є незростаючою абсолютно неперервною на $[0, b-a]$ функцією, $R(\Psi, b-a) = 0$ (див.напр. [104, с. 310]), і тому інтегруючи частинами, отримаємо

$$\int_0^{b-a} R(\Psi, t)\omega'(t) dt = \int_0^{b-a} |R'(\Psi; t)|\omega(t) dt.$$

□

Зауваження 1.3.2. *У випадку ізотропного простору X, оцінка* (1.44) *є точною, якщо екстремальні у лемі 1.3.2 функції для $\psi_1 = (\varphi_k')_+$ і $\psi_2 = (\varphi_k')_-$ можуть бути "склеєні" так, щоб отримана функція належала простору $H^\omega([a, b], X)$.*

Припустимо, що Σ–представлення функції Ψ дається формулою $\Psi(t) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(t)$, якщо $[\alpha_k, \beta_k]$ — це носій функції φ_k, $k = 1, \ldots, n$, то

$$\alpha_1 < \beta_1 \leqslant \alpha_2 < \beta_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n < \beta_n,$$

і на відрізках $[\alpha_k, \beta_k]$ і $[\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]$ функції φ_k і φ_{k+1} мають протилежні знаки, $k = 1, \ldots, n-1$. Ми описуємо процедуру склеювання. Почнемо з випадку, коли $X = \mathbb{R}$. Нехай $g_k \in H^\omega([\alpha_k, \beta_k], \mathbb{R})$ — це екстремальна для функціонала $S((\varphi_k')_+, (\varphi_k')_-)$ функція. На множині $\bigcup_{k=1}^n [\alpha_k, \beta_k]$ визначимо функцію g, покладаючи $g(t) = g_k(t) + c_k$, $t \in [\alpha_k, \beta_k]$, де c_k обрано так, що $g(\beta_k) = g(\alpha_{k+1})$, $k = 1, \ldots, n-1$. Далі продовжимо функцію g на весь відрізок $[a, b]$ формулою $g(t) = g(\alpha_1)$, якщо $t \leq \alpha_1$, $g(t) = g(\beta_k)$, якщо $t \in (\beta_k, \alpha_{k+1})$, $k = 1, \ldots, n-1$, і $g(t) = g(\beta_n)$, якщо $t \geq \beta_n$. Лема 4.1 у [200] містить критерій того, що функція g належить $H^\omega([a, b], \mathbb{R})$. Зокрема $g \in H^\omega([a, b], \mathbb{R})$ у випадку, якщо для деякого m, $1 \leqslant m \leqslant n$,

$$\beta_1 - \alpha_1 \leqslant \beta_2 - \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \beta_m - \alpha_m \text{ і } \beta_m - \alpha_m \geqslant \beta_{m+1} - \alpha_{m+1} \geqslant \ldots \geqslant \beta_n - \alpha_n.$$

Якщо $g \in H^\omega([a, b], \mathbb{R})$, то функції $(g + \gamma)_x(\cdot) + y$ з $\gamma \in \mathbb{R}$, $y \in X$ і $x \in X^{\mathrm{c}} \cap X^{\mathrm{inv}}$, $h_X(x, \theta) = 1$, є склеєною екстремаллю для (1.44).

1.3.4 Відхилення між середніми значеннями функції на різних відрізках

1.3.4.1 Формулювання теореми і деякі її наслідки

Наступна теорема є широким узагальненням [58, теорема 2], у якій $X = \mathbb{R}$, $\omega(t) = t$, і $[c, d] \subset [a, b]$.

Теорема 1.3.2. *Нехай задано два відрізки $[a, b]$ і $[c, d]$. Покладемо $M = \max\{b - a, d - c\}$, $m = \min\{b - a, d - c\}$, і для $\alpha, \beta \geq 0$, $I(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta \omega(s) ds$. Для визначеності будемо вважати, що $a \leq c$. Тоді для всіх $f \in H^\omega([a, \max\{b, d\}], X)$*

$$h_X\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt, \frac{1}{d-c}\int_c^d f(t)dt\right)$$
$$\leq \begin{cases} \frac{M-m}{M^2}\left\{I\left(0, \frac{M(c-a)}{M-m}\right) + I\left(0, \frac{M(b-d)}{M-m}\right)\right\}, & [c, d] \subset [a, b], \\ \frac{1}{M+m} I\left(\frac{M(b-c)}{m}, d-a\right) + \frac{M-m}{M^2} I\left(0, \frac{M(b-c)}{m}\right), & b \in [c, d], \\ \frac{1}{M+m} I(c-b, d-a), & c \geq b. \end{cases} \tag{1.45}$$

Якщо X є ізотропним, виконується умова (1.41) *і ω є опуклим модулем неперервності, то нерівність є точною.*

Ця теорема випливає з теореми 1.3.1, застосованої до функцій $\psi_1 = \frac{1}{b-a}\chi_{[a,b]}$ і $\psi_2 = \frac{1}{d-c}\chi_{[c,d]}$. Екстремальні функції можуть бути отримані описаним вище процесом склеювання. Ми наводимо доведення цієї теореми у наступних підпунктах.

Безпосередніми обчисленнями з теореми 1.3.2 можна отримати такий результат.

Наслідок 1.3.1. *Якщо додатково до умов теореми 1.3.2 припустити, що $c + d = a + b$, тобто середини відрізків $[a, b]$ і $[c, d]$ співпадають, то*

$$h_X\left(\int_a^b f(t)dt, \frac{b-a}{d-c}\int_c^d f(t)dt\right) \leq \frac{4(c-a)}{b-a}\int_0^{(b-a)/2}\omega(t)dt.$$

Якщо X є ізотропним, виконується умова (1.41) *і ω є опуклим, то нерівність точна.*

Застосовуючи теорему 1.3.2 до відрізка, що містить точку t, і відрізка $[c, d]$ (при умові, що обидва ці відрізка містяться у $[a, b]$) і стискаючи перший з відрізків у точку, отримаємо такий результат.

Наслідок 1.3.2. *Нехай $t \in [a, b]$, $[c, d] \subset [a, b]$ і $\omega(\cdot)$ — це довільний модуль неперервності. Якщо $f \in H^\omega([a, b], X)$ і P — це опуклюючий оператор, то*

$$h_X\left(P(f(t)), \frac{1}{d-c}\int_c^d f(u)du\right) \leq \frac{1}{d-c}\int_c^d \omega(|s-t|)ds. \tag{1.46}$$

Якщо простір X є ізотропним і $X^{\mathrm{c}} \neq \{\theta\}$, то нерівність є точною. Екстремальною функцією є $(\omega(|\cdot - t|))_x$, де $x \in X^{\mathrm{c}}, h_X(x, \theta) = 1$.

Нехай задано відрізок $[a, b]$ і числа t, h такі, що $a \leqslant t < t+h \leqslant (a+b)/2$. Застосовуючи теорему 1.3.1 до

$$\psi_1 = \frac{1}{b-a}\chi_{[a,b]} \text{ і } \psi_2 = \frac{1}{2h}\left(\chi_{[t,t+h]} + \chi_{[a+b-t-h,a+b-t]}\right),$$

і переходячи до границі при $h \to 0$, можна отримати наступне узагальнення [85, теорема 2]. Ми опускаємо технічні деталі доведення, оскільки цей результат не буде використовуватись у подальшому.

Наслідок 1.3.3. *Для кожної* $f \in H^\omega([a,b],X)$ *і* $t \in [a,(a+b)/2)$

$$h_X\left(\frac{1}{2}(P(f(t))+P(f(a+b-t))), \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right) \leqslant \frac{2}{b-a}\left(\int_0^{t-a}\omega(u)du + \int_0^{(a+b-2t)/2}\omega(u)du\right). \quad (1.47)$$

Якщо простір X *є ізотропним, то нерівність* (1.47) *перетворюється на рівність для*

$$f(u) = \min\{\omega(|u-t|), \omega(|u+t-a-b|)\}\cdot x, x \in X^{\mathrm{c}}, h_X(x,\theta) = 1.$$

Зауваження 1.3.3. *Нерівності* (1.46) *і* (1.47) *можуть бути доведені безпосередньо.*

1.3.4.2 Доведення теореми 1.3.2, випадок $d = b$

У випадку, коли $d = b$, теорема 1.3.2 випливає з такого твердження.

Лема 1.3.3. *Нехай* $a < c < b$, *і задано модуль неперервності* ω. *Тоді для всіх* $f \in H^\omega([a,b],X)$

$$h_X\left(\int_a^b f(t)dt, \frac{b-a}{b-c}\int_c^b f(t)dt\right) \leq \frac{c-a}{b-a}\int_0^{b-a}\omega(t)dt. \quad (1.48)$$

Якщо ω *є опуклим, то нерівність* (1.48) *перетворюється на рівність для функцій* $g_x(\cdot)+y \in H^\omega([a,b],X)$, *де* $y \in X$, $x \in X^{\mathrm{c}} \cap X^{\mathrm{inv}}$, $h_X(x,\theta) = 1$ *і*

$$g(t) = g(a,b,c;t) = \begin{cases} -\frac{c-a}{b-a}\,\omega\left(\frac{b-a}{c-a}(c-t)\right), & t \in [a,c], \\ \frac{b-c}{b-a}\,\omega\left(\frac{b-a}{b-c}(t-c)\right), & t \in [c,b]. \end{cases} \quad (1.49)$$

Доведення. Розглянемо функції $\psi_1\colon [a,c] \to \mathbb{R}$, $\psi_1 \equiv 1$ і $\psi_2\colon [c,b] \to \mathbb{R}$, $\psi_2 \equiv \frac{c-a}{b-c}$. Вони задовольняють умовам леми 1.3.2. Для функції ρ з (1.38), маємо $\rho(t) = b - \frac{b-c}{c-a}(t-a)$, $\rho(t) - t = \frac{b-a}{c-a}(c-t)$, $\rho^{-1}(t) = a + \frac{c-a}{b-c}(b-t)$ і $t - \rho^{-1}(t) = \frac{b-a}{b-c}(t-c)$. З леми 1.3.2 для всіх $f \in H^\omega([a,b],X)$

$$h_X\left(\int_a^b f(t)dt, \frac{b-a}{b-c}\int_c^b f(t)dt\right) \leq \int_a^c \omega\left(\frac{b-a}{c-a}(c-t)\right)dt = \frac{c-a}{b-a}\int_0^{b-a}\omega(t)dt.$$

Крім того, екстремальні функції (1.39) перетворюються на (1.49). □

1.3.4.3 Доведення теореми 1.3.2, випадок $d < b$

Безпосередні обчислення показують, що для числа γ,

$$\gamma := \frac{bc - ad}{b + c - a - d} \tag{1.50}$$

маємо $\frac{\gamma - a}{\gamma - c} = \frac{b-\gamma}{d-\gamma} = \frac{b-a}{d-c}$. Для всіх функцій $f \in H^\omega([a,b], X)$

$$h_X\left(\int\limits_a^b f(t)dt, \frac{b-a}{d-c}\int\limits_c^d f(t)dt\right)$$
$$\leq h_X\left(\int\limits_a^\gamma f(s)ds, \frac{\gamma - a}{\gamma - c}\int\limits_c^\gamma f(s)ds\right) + h_X\left(\int\limits_\gamma^b f(s)ds, \frac{b-\gamma}{d-\gamma}\int\limits_\gamma^d f(s)ds\right).$$

Використовуючи лему 1.3.3 для функції f для оцінки першого доданку, і для функції $f(b + \gamma - \cdot)$ для того, щоб оцінити другий доданок, отримаємо (1.45).

Для завершення доведення теореми у цьому випадку, нам треба довести точність нерівності (1.45) у випадку, коли ω є опуклим модулем неперервності. Розглянемо функцію

$$G(t) = \begin{cases} g(a, \gamma, c; t), & t \in [a, \gamma], \\ g(\gamma, b, d; b + \gamma - t) + C, & t \in [\gamma, b], \end{cases} \tag{1.51}$$

де функція g визначена у (1.49) і $C = g(a, \gamma, c; \gamma) - g(\gamma, b, d; b)$ так, що функція g неперервна у точці γ, а отже і на всьому відрізку $[a, b]$. Відмітимо, що $G \in H^\omega([a, \gamma], \mathbb{R})$, $G \in H^\omega([\gamma, b], \mathbb{R})$ і G зростає на $[a, \gamma]$ і спадає на $[\gamma, b]$. Тому використовуючи властивості з леми 1.2.4, отримаємо $G \in H^\omega([a, b], \mathbb{R})$. Крім того, за побудовою функції G, у випадку $X = \mathbb{R}$ вона перетворює нерівність (1.40) на рівність. У випадку довільного L–простору X, ми можемо розглянути функцію $(G+c)_x(\cdot)$, де c обрано так, щоб $G(\cdot)+c$ була додатною на $[a, b]$. Використовуючи аргументи з доведення точності нерівності (1.40) у лемі 1.3.2, отримаємо точність нерівності (1.45).

1.3.4.4 Доведення теореми 1.3.2, випадок $b \in [c, d]$

Ми доводимо випадок, коли $b-a \leq d-c$, випадок, коли $b-a \geq d-c$ можна довести аналогічними міркуваннями. У цьому випадку ми застосовуємо лему 1.3.2 для відрізків $[a, b]$ і $[b, d]$, і функцій

$$\psi_1 = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & t \in [a, c], \\ \frac{1}{b-a} - \frac{1}{d-c}, & t \in [c, b], \end{cases}$$

$\psi_2(t) = \frac{1}{d-c}$, $t \in [b, d]$. З ізотропності X отримуємо

$$h_X \left(\frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(t)dt, \frac{1}{d-c} \int\limits_c^d f(t)dt \right) = h_X \left(\int\limits_a^b \psi_1(t) f(t)dt, \int\limits_b^d \psi_2(t) f(t)dt \right).$$

Безпосередні обчислення показують, що

$$\rho(t) = \begin{cases} \frac{bd-ac}{b-a} - \frac{d-c}{b-a} t, & t \in [a, c], \\ \frac{bd-bc}{b-a} - \frac{(d-c)-(b-a)}{b-a} t, & t \in [c, b]. \end{cases}$$

Права частина (1.40) стає

$$\frac{1}{(d-c)+(b-a)} \int\limits_{\frac{(b-c)(d-c)}{b-a}}^{d-a} \omega(s)ds + \frac{(d-c)-(b-a)}{(d-c)^2} \int\limits_0^{\frac{(b-c)(d-c)}{b-a}} \omega(s)ds,$$

що і треба було довести. Екстремальна функція може бути побудованою згідно з (1.39).

1.3.4.5 Доведення теореми 1.3.2, випадок $c \geq b$.

Цей випадок може бути доведеним за допомогою застосування леми 1.3.2 до відрізків $[a, b]$ і $[c, d]$, і функцій $\psi_1(t) = \frac{1}{b-a}$, $t \in [a, b]$ і $\psi_2(t) = \frac{1}{d-c}$, $t \in [c, d]$.

1.3.5 Деякі властивості екстремальних функцій

Деякі властивості екстремальних функцій у випадку $X = \mathbb{R}$ даються наступною лемою.

Лема 1.3.4. *Нехай $X = \mathbb{R}$, $[c, d] \subset [a, b]$ і ω — це опуклий модуль неперервності. Одна з екстремальних для* (1.45) *функцій G задовольняє таким властивостям:*

1. *G є неспадною на $[a, \gamma]$, де γ означена у* (1.50)*, і є незростаючою на $[\gamma, b]$.*
2. *$G(\gamma) - G(a) = \omega(\gamma - a)$, $G(\gamma) - G(b) = \omega(b - \gamma)$;*
3. *Якщо $c + d \leq a + b$, то $b - \gamma \geq \gamma - a$.*

Якщо G є екстремальною для нерівності (1.45) *функцією, то $\pm G + C$, $C \in \mathbb{R}$, є також екстремаллю.*

Доведення. Покажемо, що функція, визначена у (1.51) задовольняє сформульованим властивостям. Перші дві властивості безпосередньо випливають з формул (1.51) і (1.49). Безпосередні обчислення дають рівності $b - \gamma = \frac{(b-d)(b-a)}{b+c-a-d}$ і $\gamma - a = \frac{(b-a)(c-a)}{b+c-a-d}$, які, в свою чергу, доводять третю властивість. Останнє твердження леми є очевидним. □

1.4 Про задачі оптимального відновлення

У Вступі ми сформулювали задачі оптимального відновлення. Нам знадобиться така широко відома оцінка для величини оптимального відновлення (2). Вона, наприклад, випливає з теореми 1 і леми 2 у [169, §1.2]. Ми дамо її коротке доведення для повноти викладення.

Лема 1.4.1. *Якщо $f, g \in W$ є такими, що $I(f) \cap I(g) \neq \emptyset$, то*

$$\mathcal{E}(\Lambda, W, I, X) \geq \frac{1}{2} h_X(\Lambda(f), \Lambda(g)). \tag{1.52}$$

Зокрема, якщо $I(f)$ є одноточковою множиною для всіх $f \in W$, то нерівність (1.52) *виконується для всіх пар $f, g \in W$ таких, що $I(f) = I(g)$.*

Доведення. Нехай $h \in I(f) \cap I(g)$. Тоді для будь-якого U

$$\sup_{w \in W} \sup_{y \in I(w)} h_X(\Lambda(w), U(y)) \geq \max\{h_X(\Lambda(f), U(h)), h_X(\Lambda(g), U(h))\}$$
$$\geq \frac{1}{2}\left(h_X(\Lambda(f), U(h)) + h_X(\Lambda(g), U(h))\right) \geq \frac{1}{2} h_X(\Lambda(f), \Lambda(g)).$$

□

Основні результати пунктів 1.4.1 і 1.4.2 були отримані у статті [18], пункту 1.4.3 — у статті [16], пункту 1.4.4 — у статті [19].

1.4.1 Задачі оптимального відновлення операторів на класі $H^\omega(T, X)$

1.4.1.1 Оптимальне відновлення опуклюючого оператора

У цьому підпункті ми розглядаємо задачу оптимального відновлення опуклюючого оператора P на класі $H^\omega([a, b], X)$, $a < b$, за інформацією

$$I_{\mathbf{t}}(f) = \left(\frac{1}{2h}\int_{t_1-h}^{t_1+h} f(t)dt, \ldots, \frac{1}{2h}\int_{t_n-h}^{t_n+h} f(t)dt\right), \tag{1.53}$$

де $n \in \mathbb{N}$, $h > 0$ і $\mathbf{t} := (t_1, \ldots, t_n)$ є такими, що

$$a \leq t_1 - h < t_1 + h < t_2 - h < \ldots < t_n + h \leq b, \tag{1.54}$$

використовуючи довільний метод відновлення $U\colon X^n \to B([a, b], X)$.

Відмітимо, що опуклюючий оператор є тотожнім оператором на множині X^{c} (див. лему 1.2.1), тому задача відновлення опуклюючого оператора близька до задачі відновлення функції.

Для дійснозначних функцій однієї змінної результати щодо оптимального відновлення функції або одночасного відновлення функції і її похідної, маючи значення функції у декількох точках містяться у [178, Розділ 6.4]. У періодичному випадку відомі результати відновлення функції $f \in W_\infty^{r+1}$

та її похідної у L_p-метриці, $1 \le p \le \infty$, а також функцій $f \in W_p^{r+1}$, $1 \le p \le \infty$, у метриці L_1. Найкращим методом відновлення тут виступає сплайн порядку r дефекту 1 по рівномірному розбиттю, що інтерполює функцію у рівновіддалених точках. У неперіодичному випадку, оптимальним методом відновлення функцій класу W_∞^{r+1} у L_p-метриці, $1 \le p \le \infty$, а також функцій $f \in W_p^{r+1}$, $1 \le p \le \infty$, у метриці L_1 є інтерполяційні сплайни порядку r дефекту 1 по деякому нерівномірному розбиттю, яке залежить від p.

Для класів $W^r H^\omega$, $r \in \mathbb{N}$, у випадку опуклого модуля неперервності ω відомі такі результати. Почнемо з періодичного випадку. Для $r \ge 1$, інтерполяційні сплайни порядку r дефекту 1 з рівновіддаленими вузлами є найкращим методом відновлення функцій $f \in W^r H^\omega$, у L_1-метриці, а при $r = 1$ також функції $f \in W^1 H^\omega$ у L_p-метриці, $1 \le p \le \infty$ і одночасно їх похідних у L_p-метриці, $1 \le p \le 3$. У неперіодичному випадку, найкращим методом відновлення функції $f \in H^\omega$ у L_p-метриці, $1 \le p \le 3$ є кусково-лінійні функції, що інтерполюють середнє значення на кожному з інтервалів $((i-1)/N; i/n)$, $i = 1, \dots, N$.

Розглянемо вектор $\tau = \tau(\mathbf{t})$ з компонентами

$$\tau_1 = a, \tau_i = \frac{1}{2}(t_{i-1} + t_i), i = 2, \dots, n, \tau_{n+1} = b \tag{1.55}$$

і покладемо

$$\mathbf{t}^* = (t_1^*, t_2^* \dots, t_n^*) = \left(a + \frac{b-a}{2n}, a + \frac{3(b-a)}{2n}, \dots, a + \frac{(2n-1)(b-a)}{2n}\right). \tag{1.56}$$

Нам знадобиться таке твердження.

Лема 1.4.2. *Нехай задано числа $n \in \mathbb{N}$, $h > 0$ і вектор $\mathbf{t} := (t_1, \dots, t_n)$, що задовольняє умовам* (1.54). *Для довільного модуля неперервності ω існує функція $f_{\mathbf{t}} \in H^\omega([a,b], \mathbb{R})$ така, що*

$$\int_{t_i - h}^{t_i + h} f_{\mathbf{t}}(t) dt = 0 \text{ для всіх } i = 1, \dots, n, \tag{1.57}$$

і

$$\max_{t\in[a,b]} |f_{\mathbf{t}}(t)| \geq \frac{1}{2h}\int_{(b-a)/(2n)-h}^{(b-a)/(2n)+h} \omega(u)du.$$

Доведення. Серед $2n$ відрізків $[\tau_i, t_i]$ і $[t_i, \tau_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, n$, існує хоча б один з довжиною не менше ніж $\frac{b-a}{2n}$. Нехай для визначеності це відрізок $[\tau_{i^*}, t_{i^*}]$, $i^* \in \{1, \ldots, n\}$. Означимо функцію $f_{\mathbf{t}}$ на відрізку $[\tau_{i^*}, t_{i^*} + h] = [a, t_1 + h]$, якщо $i^* = 1$, або на відрізку $[t_{i^*-1} - h, t_{i^*} + h]$, якщо $i^* > 1$, формулою

$$f_{\mathbf{t}}(u) = \frac{1}{2h}\int_{t_{i^*}-h}^{t_{i^*}+h} \omega(|s - \tau_{i^*}|)ds - \omega(|u - \tau_{i^*}|).$$

Далі ми продовжуємо цю функцію на весь відрізок $[a, b]$ за таким правилом. Покладемо $f_{\mathbf{t}}(u) = f_{\mathbf{t}}(t_{i^*} + h)$ на $[t_{i^*} + h, t_{i^*+1} - h]$; $f_{\mathbf{t}}(u) = f_{\mathbf{t}}(t_{i^*} + t_{i^*+1} - u)$ на $[t_{i^*+1} - h, t_{i^*+1} + h]$; $f_{\mathbf{t}}(u) = f_{\mathbf{t}}(t_{i^*+1} + h)$ на $[t_{i^*+1} + h, t_{i^*+2} - h]$; $f_{\mathbf{t}}(u) = f_{\mathbf{t}}(t_{i^*+1} + t_{i^*+2} - u)$ на $[t_{i^*+2} - h, t_{i^*+2} + h]$, і так далі. У випадку $i^* > 1$ продовження функції для $u < t_{i^*-1} - h$ відбувається аналогічно.

З означення випливає, що $f_{\mathbf{t}} \in H^\omega([a, b], \mathbb{R})$, $f_{\mathbf{t}}$ задовольняє (1.57), і

$$\max_{t\in[a,b]} |f_{\mathbf{t}}(t)| \geq f_{\mathbf{t}}(\tau_{i^*}) = \frac{1}{2h}\int_{t_{i^*}-h}^{t_{i^*}+h} \omega(|u - \tau_{i^*}|)du \geq \frac{1}{2h}\int_{(b-a)/(2n)-h}^{(b-a)/(2n)+h} \omega(u)du.$$

□

Теорема 1.4.1. *Нехай задано числа $n \in \mathbb{N}$, $h > 0$ і вектор $\mathbf{t} := (t_1, \ldots, t_n)$ що задовольняє умовам* (1.54). *Для опуклюючого оператора P, ізотропного простору X для якого виконується властивість* (1.41), *і довільного модуля неперервності ω маємо*

$$\inf_{\mathbf{t}} \mathcal{E}(P, H^\omega([a, b], X), I_{\mathbf{t}}, B([a, b], X)) = \frac{1}{2h}\int_{(b-a)/(2n)-h}^{(b-a)/(2n)+h} \omega(u)du.$$

Оптимальним інформаційним оператором є $I_{\mathbf{t}^*}$, оптимальним методом відновлення є

$$U^*(I_{\mathbf{t}^*}(f))(u) = \frac{1}{2h}\int_{t_k^*-h}^{t_k^*+h} f(t)dt,\ u \in [\tau_k(\mathbf{t}^*), \tau_{k+1}(\mathbf{t}^*)],$$

де вектори $\mathbf{t}^*$ і $\tau = \tau(\mathbf{t}^*)$ визначені у (1.56) *і* (1.55) *відповідно.*

Доведення. Для $f \in H^\omega([a,b],X)$, $i \in \{1,\dots,n\}$, і $t \in [\tau_i(\mathbf{t}^*),\tau_{i+1}(\mathbf{t}^*)]$, з наслідку 1.3.2 отримуємо

$$h_X(P(f(t)),U^*(I_{\mathbf{t}^*})(t)) = h_X\left(P(f(t)),\frac{1}{2h}\int_{t_i^*-h}^{t_i^*+h} f(u)du\right)$$
$$\leqslant \frac{1}{2h}\int_{t_i^*-h}^{t_i^*+h}\omega(|u-t|)du \leqslant \frac{1}{2h}\int_{t_i^*-h}^{t_i^*+h}\omega(|u-\tau_i(\mathbf{t}^*)|)du$$
$$= \frac{1}{2h}\int_{(b-a)/(2n)-h}^{(b-a)/(2n)+h}\omega(u)du.$$

Тому

$$\mathcal{E}(P,H^\omega([a,b],X),I_{\mathbf{t}^*},B([a,b],X)) \leqslant \frac{1}{2h}\int_{(b-a)/(2n)-h}^{(b-a)/(2n)+h}\omega(u)du.$$

Оберемо $x \in X^{\mathrm{c}} \cap X^{\mathrm{inv}}$, $h_X(x,\theta)=1$, і для функції $f_{\mathbf{t}}$ з леми 1.4.2 покладемо

$$\underline{F}_n = (f_{\mathbf{t}})_{x'} \text{ і } \overline{F}_n = (f_{\mathbf{t}})_x. \tag{1.58}$$

Відмітимо, що функції $\underline{F}_n$ і $\overline{F}_n$ є опукло-значними і згідно з лемою 1.2.5 отримуємо $I(\overline{F}_n) = I(\underline{F}_n) = (\theta,\dots,\theta)$. Використовуючи лему 1.4.1, маємо

$$\mathcal{E}(P,H^\omega([a,b],X),I_{\mathbf{t}},B([a,b],X)) \geqslant \frac{1}{2}\max_{t\in[a,b]} h_X(\overline{F}_n(t),\underline{F}_n(t))$$
$$= \max_{t\in[a,b]}|f_{\mathbf{t}}(t)| \geq \frac{1}{2h}\int_{(b-a)/(2n)-h}^{(b-a)/(2n)+h}\omega(u)du.$$

Теорему доведено. □

1.4.1.2 Оптимальне відновлення інтеграла

У цьому пункті ми розглядаємо задачу оптимізації 'інтервальних' квадратурних формул для класу $H^\omega(T,X)$, тобто відновлення оператора $\mathrm{Int}f := \int_a^b f(t)dt$ за інформацією (1.53). Огляд результатів стосовно квадратурних формул для дійснозначних функцій і подальші посилання можна знайти, наприклад, у [197, Розділ 2.1], доповненні М. П. Корнєйчука у монографії [189] та оглядовій статті [121].

Ми зупинимось більш детально на результатах, що стосуються оптимізації інтервальних квадратурних формул.

У [206] розв'язано задачу оптимізації інтервальних квадратурних формул на класі Ліпшица функцій заданих на відрізку. Знайдено похибки квадратурних формул при фіксованих центрах і довжинах інформаційних інтервалів. Також розв'язана задача оптимізації інформаційних інтервалів при фіксованій сумарній довжині інтервалів.

У [142] розв'язано задачу оптимізації інформаційних інтервалів фіксованої довжини $h > 0$ на періодичних класах W_1^r. Відповідний результат для класу W_∞^r був отриманий у [119].

У статті [153] розглядалась задача оптимізації інтервальних квадратурних формул на класах H^{ω_+,ω_-} періодичних функцій з заданими мажорантами модуля неперервності по спаданню і зростанню. У [154, 155] ця задача розглядалась на класах W^1F з деякими множинами F.

У статтях [161–165] інтервальні квадратурні формули розглядались на класах W^rH^ω при $r = 2, 3$.

У [53, 151] доведено оптимальність інтервальних квадратурних формул з рівними коефіцієнтами і рівновіддаленими центрами інтервалів на класах W^rF періодичних диференційовних функцій, r-та похідна яких належить перестановочно-інваріантному класу F, а у [54] цей результат поширено на класи $K * F$, де K — це ядро, що не збільшує осциляцію, а F — перестановочно-інваріантний клас.

У статті [120] було обчислено похибку інтервальних квадратурних формул з рівними коефіцієнтами і рівновіддаленими центрами інтервалів на класах W^rH^ω, $r \geq 1$.

У [33] розглядалась задача оптимізації наближеного інтегрування на класах багатозначних функцій.

Лема 1.4.3. *Нехай задано числа $n \in \mathbb{N}$, $h > 0$, вектор $\mathbf{t} := (t_1, \ldots, t_n)$, що задовольняє умовам* (1.54) *і опуклий модуль неперервності ω. Тоді існує функція $f_{\mathbf{t}} \in H^\omega([a, b], \mathbb{R})$, що задовольняє умовам* (1.57) *і така, що*

$$\int_a^b f_{\mathbf{t}}(t)dt \geq 2n \left(1 - \frac{2nh}{b-a}\right) \int_0^{(b-a)/(2n)} \omega(t)dt.$$

Доведення. Розглянемо парну функцію y_0, що задана на $[0,\infty)$ такою формулою

$$y_0(t)=\begin{cases}-\frac{2nh}{b-a}\omega\left(\frac{b-a}{2nh}(h-t)\right), & t\in[0,h],\\ \frac{b-a-2nh}{b-a}\omega\left(\frac{b-a}{b-a-2nh}(t-h)\right), & t\in\left[h,\frac{b-a}{2n}\right],\\ y_0\left(\frac{b-a}{2n}\right), & t>\frac{b-a}{2n}.\end{cases}\tag{1.59}$$

Відмітимо, що звуження функції y_0 на відрізок $[0,(b-a)/(2n)]$ співпадає з функцією g побудованої згідно з формулою (1.39) леми 1.3.2 з $\psi_1=\frac{1}{h}\chi_{[0,h]}$ і $\psi_2=\frac{2n}{b-a-2nh}\chi_{[h,(b-a)/(2n)]}$. Тому в силу опуклості модуля неперервності ω, $y_0(t)\in H^\omega([0,(b-a)/(2n)],\mathbb{R})$. Покладемо

$$y_1(t):=\min\{y_0(t-t_1),y_0(t-t_2),\dots,y_0(t-t_n)\},\ t\in\mathbb{R}.$$

Тоді $y_1(t)\in H^\omega([a,b],\mathbb{R})$, і використовуючи позначення з (1.55), $y_1(t)=y_0(t-t_k)$, $t\in[\tau_k,\tau_{k+1}]$, $k=1,\dots,n$. Покладемо $y(t):=y_1(t)+C$, де константа C обрана таким чином, щоб $\int_{-h}^{h}(y_0(t)+C)dt=0$. Тоді

$$\int_{t_k-h}^{t_k+h}y(t)dt=0,\ k=1,\dots,n.\tag{1.60}$$

Отже, умова (1.57) виконується для функції y. Отримаємо оцінку знизу для інтеграла $\int_a^b y(t)dt$. Функція y_0 є парною, а $J(t):=\int_0^t y_0(s)ds$ є опуклою, оскільки функція, y_0 є неспадною на $[0,\infty)$. Тому

$$\int_a^b y(t)dt=C(b-a)+\int_a^b y_1(t)dt=C(b-a)+\sum_{k=1}^n\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}y_0(t-t_k)dt$$

$$=C(b-a)+\sum_{k=1}^n\int_{\tau_k-t_k}^{\tau_{k+1}-t_k}y_0(t)dt$$

$$=C(b-a)+\sum_{k=1}^n\left[J(\tau_{k+1}-t_k)+J(t_k-\tau_k)\right]\geq C(b-a)$$

$$+2nJ\left(\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^n(\tau_{k+1}-t_k)+\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^n(t_k-\tau_k)\right)=C(b-a)+2nJ\left(\frac{b-a}{2n}\right).$$

Використовуючи (1.59) і (1.60) для обчислення правої частини останньої формули, отримаємо

$$C(b-a)+2nJ\left(\frac{b-a}{2n}\right)=2n\left(1-\frac{2nh}{b-a}\right)\int_0^{(b-a)/(2n)}\omega(t)dt$$

і лему доведено. $\square$

Теорема 1.4.2. *Нехай задано числа* $n \in \mathbb{N}$, $h > 0$, *і вектор* $\mathbf{t} := (t_1, \ldots, t_n)$, *що задовольняє умовам* (1.54). *Для ізотропного простору* X, *для якого виконується властивість* (1.41), *і опуклого модуля неперервності* ω, *маємо*

$$\inf_{\mathbf{t}} \mathcal{E}(\mathrm{Int}, H^\omega([a,b],X), I_{\mathbf{t}}, X) = 2n\left(1 - \frac{2nh}{b-a}\right)\int_0^{(b-a)/(2n)} \omega(t)dt.$$

Оптимальним інформаційним оператором є $I_{\mathbf{t}^*}$, *а оптимальним методом відновлення є*

$$U^*(I_{\mathbf{t}^*}(f)) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2h}\int_{t_k^*-h}^{t_k^*+h} f(t)dt,$$

де вектор $\mathbf{t}^*$ *означений у* (1.56).

Доведення. Для кожного $f \in H^\omega([a,b],X)$, використовуючи наслідок 1.3.1, отримаємо

$$\begin{aligned} h_X&\left(\int_a^b f(t)dt, U^*(I_{\mathbf{t}^*}(f))\right) \\ &\le \sum_{k=1}^{n} h_X\left(\int_{a+\frac{(k-1)(b-a)}{n}}^{a+\frac{k(b-a)}{n}} f(t)dt, \frac{b-a}{2nh}\int_{a+\frac{(2k-1)(b-a)}{2n}-h}^{a+\frac{(2k-1)(b-a)}{2n}+h} f(t)dt\right) \\ &\le \sum_{k=1}^{n} 2\left(1-\frac{2nh}{b-a}\right)\int_0^{\frac{b-a}{2n}}\omega(t)dt = 2n\left(1-\frac{2nh}{b-a}\right)\int_0^{\frac{b-a}{2n}}\omega(t)dt. \end{aligned}$$

Тому $\inf_{\mathbf{t}} \mathcal{E}(\mathrm{Int}, H^\omega([a,b],X), I_{\mathbf{t}}, X) \le 2n\left(1-\frac{2nh}{b-a}\right)\int_0^{(b-a)/(2n)}\omega(t)dt$. Нехай тепер вектор $\mathbf{t}$ є фіксованим і функцію $f_{\mathbf{t}}$ побудовано згідно з лемою 1.4.3. Використовуючи функції (1.58) з такою $f_{\mathbf{t}}$, леми 1.4.1 і 1.4.3, отримаємо

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathrm{Int}, H^\omega([a,b],X), I_{\mathbf{t}}, X) &\ge \frac{1}{2}h_X\left(\int_a^b \overline{F}_n(t)dt, \int_a^b \underline{F}_n(t)dt\right) \\ &= \int_a^b f_{\mathbf{t}}(t)dt \ge 2n\left(1-\frac{2nh}{b-a}\right)\int_0^{(b-a)/(2n)}\omega(t)dt. \end{aligned}$$

$\square$

1.4.2 Задачі оптимального відновлення операторів на класі $W^1H^\omega(T,X)$

Означення 1.4.1. *Для заданого модуля неперервності $\omega(\cdot)$, позначимо через $W^1H^\omega([a,b],X)$ клас функцій f вигляду*

$$f(t) = x + \int_a^t \phi(s)ds, \text{ де } \phi \in H^\omega([a,b],X),\ x \in X^c.$$

Відмітимо, що такі функції f є опукло-значними, мають похідну типу Хукухара $\mathcal{D}_H f$, і $\mathcal{D}_H f = P(\phi)$, див. [15, лема 2.24], де P — це опуклюючий оператор; зазначимо, що з (1.25) випливає, що, $\mathcal{D}_H f \in H^\omega([a,b],X)$, і для всіх $f \in W^1H^\omega([a,b],X)$ і $t \in [a,b]$ справедлива рівність $f(t) -_H f(a) = \int_a^t \mathcal{D}_H f(s)ds$.

1.4.2.1 Оптимальне відновлення одиничного оператора.

Нехай задано розбиття $\mathbf{t} = (t_0,\dots,t_n)$ відрізка $[a,b]$,

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b. \tag{1.61}$$

Лема 1.4.4. *Нехай задано опуклий модуль неперервності ω і розбиття $\mathbf{t}$. Тоді існує функція $f_{\mathbf{t}} \in W^1H^\omega([a,b],\mathbb{R})$ така, що $f_{\mathbf{t}}(t_i) = 0$, $i = 0,1,\dots,n$, і*

$$\max_{t\in[a,b]} |f_{\mathbf{t}}(t)| \geq \frac{1}{4}\int_0^{(b-a)/n} \omega(u)du. \tag{1.62}$$

Якщо розбиття $\mathbf{t}$ є рівномірним, то нерівність (1.62) стає рівністю.

Доведення. У просторі $\mathbb{R}^{n+1}$ розглянемо множину

$$\mathbb{S}^n = \left\{ \xi = (\xi_1,\dots,\xi_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \sum_{i=1}^{n+1} |\xi_i| = b-a \right\}.$$

Кожна точка $\xi \in \mathbb{S}^n$ породжує набір точок на відрізку $[a,b]$: $\eta_0(\xi) = a$, $\eta_1(\xi) = a + |\xi_1|$, $\eta_2(\xi) = \eta_1(\xi) + |\xi_2|, \dots, \eta_n(\xi) = \eta_{n-1}(\xi) + |\xi_n|$, $\eta_{n+1}(\xi) = b$. Нехай $h(t) = \frac{1}{2}\omega(2|t|)$, $t \in \mathbb{R}$. Для $\xi \in \mathbb{S}^n$, покладемо $h_\xi(t) = \min_{k=1,\dots,n} h(t - \eta_k(\xi))$ і $g_\xi(t) = h_\xi(t) \cdot \operatorname{sgn} \xi_i$ для $t \in [\eta_{i-1}(\xi), \eta_i(\xi)]$, $i = 1,\dots,n+1$ (тут sgn

— це непарна функція рівна 1 на $(0,\infty)$). Тоді з опуклості ω і леми 1.2.4 випливає, що $g_\xi \in H^\omega([a,b],\mathbb{R})$. Покладемо

$$G_\xi(t) = \int_a^t g_\xi(u)du$$

і означимо векторне поле на $\mathbb{S}^n$, формулою $\xi \mapsto (G_\xi(t_1),\ldots,G_\xi(t_n))$. Легко бачити, що це поле є неперервним і непарним. З теореми Борсука [64] отримаємо існування $\xi^* = \xi^*(\mathbf{t}) = (\xi_1^*,\ldots,\xi_{n+1}^*) \in \mathbb{S}^n$ такого, що $G_{\xi^*}(t_1) = G_{\xi^*}(t_2) = \ldots = G_{\xi^*}(t_n) = 0$. Крім того, $G_{\xi^*}(a) = 0$. Тому функція G_{ξ^*} має щонайменше $n+1$ нуль на $[a,b]$, а отже $g_{\xi^*} = G'_{\xi^*}$ має не менше ніж n змін знака. Оскільки g_{ξ^*} може змінювати знак тільки у точках $\eta_1(\xi^*),\ldots,\eta_n(\xi^*)$, то усі ці точки різні, g_{ξ^*} має рівно n змін знака на $[a,b]$, і $\eta_i(\xi^*)$ є єдиною точкою локального екстремуму G_{ξ^*} всередині відрізка $[t_{i-1},t_i]$, $i=1,\ldots,n$. Оскільки функція ω є неспадною, то функція $u \mapsto \int_0^u \omega(t)dt$ є опуклою, а тому застосовуючи нерівність Єнсена, отримаємо

$$\begin{aligned}\bigvee_a^b G_{\xi^*} &= \int_a^b |g_{\xi^*}(u)|\,du = \frac{1}{2}\int_0^{|\xi_1^*|}\omega(2u)du + 2\cdot\frac{1}{2}\sum_{i=2}^n\int_0^{|\xi_i^*|/2}\omega(2u)du \\ &+\frac{1}{2}\int_0^{|\xi_{n+1}^*|}\omega(2u)du \geqslant \int_0^{(|\xi_1^*|+|\xi_{n+1}^*|)/2}\omega(2u)du + \sum_{i=2}^n\int_0^{|\xi_i^*|/2}\omega(2u)du \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{|\xi_1^*|+|\xi_{n+1}^*|}\omega(u)du + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^n\int_0^{|\xi_i^*|}\omega(u)du \geqslant \frac{n}{2}\int_0^{(b-a)/n}\omega(u)du.\end{aligned}$$

Функція G_{ξ^*} є монотонною на відрізках $[a,\eta_1(\xi^*)]$, $[\eta_i(\xi^*),\eta_{i+1}(\xi^*)]$, $i = 1,\ldots,n-1$, $[\eta_n(\xi^*),b]$ і $G_{\xi^*}(0) = G_{\xi^*}(b) = 0$. Тому

$$2n\max_i|G_{\xi^*}(\eta_i(\xi^*))| \geqslant 2\sum_{i=1}^n|G_{\xi^*}(\eta_i(\xi^*))| = \bigvee_a^b G_{\xi^*} \geq \frac{n}{2}\int_0^{(b-a)/n}\omega(u)du,$$

звідки випливає (1.62) для $f_{\mathbf{t}} = G_{\xi^*(\mathbf{t})}$. Якщо $\mathbf{t}$ — це рівномірне розбиття, то $|\xi_1^*| = |\xi_{n+1}^*| = \frac{b-a}{2n}$ і $|\xi_k^*| = \frac{b-a}{n}$ для $k = 2,\ldots,n$, (так, що $\eta_k(\xi^*) = a + \frac{2k-1}{2n}(b-a)$, $k = 1,\ldots,n$), усі нерівності у попередньому ланцюжку співвідношень стають рівностями, а отже (1.62) також стає рівністю. Лему доведено. □

Для рівномірного розбиття отримана функція G_{ξ^*} є добре відомою, і має багато екстремальних властивостей у класі $W^1H^\omega([a,b],\mathbb{R})$, див. напр. [104, розділ 7.1].

Використовуючи означення класу $W^1H^\omega([a,b],X)$, для ізотропного L–простору X, $f \in W^1H^\omega([a,b],X)$ і $t \in [a,b]$, і застосовуючи теорему 1.3.2 до $\mathcal{D}_H f \in H^\omega([a,b],X)$, маємо

$$\begin{aligned} &h_X\left(f(t), \frac{b-t}{b-a}f(a) + \frac{t-a}{b-a}f(b)\right) \\ &= h_X\left(f(a) + \int_a^t \mathcal{D}_H f(u)du, \frac{b-t}{b-a}f(a) + \frac{t-a}{b-a}f(a) + \frac{t-a}{b-a}\int_a^b \mathcal{D}_H f(u)du\right) \\ &\qquad = h_X\left(\int_a^t \mathcal{D}_H f(u)du,\ \frac{t-a}{b-a}\int_a^b \mathcal{D}_H f(u)du\right) \\ &\qquad\qquad \leqslant \frac{(b-t)(t-a)}{(b-a)^2}\int_0^{b-a}\omega(u)du. \end{aligned} \tag{1.63}$$

Далі ми застосовуємо отриману нерівність для доведення оцінки відхилення функції $f \in W^1H^\omega([a,b],X)$ від інтерполяційної кусково-лінійної функції у фіксованій точці $t \in [a,b]$. Нехай задано розбиття $\mathbf{t}$ як у (1.61). Інтерполяційна кусково-лінійна функція задається формулою

$$l_f(\mathbf{t};t) = \frac{t_{k+1}-t}{t_{k+1}-t_k}f(t_k) + \frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}f(t_{k+1}),\ t \in [t_k, t_{k+1}]. \tag{1.64}$$

Використовуючи (1.63), отримаємо, що для всіх $t \in [t_k, t_{k+1}]$

$$h_X(f(t), l_f(\mathbf{t};t)) \leqslant \frac{(t_{k+1}-t)(t-t_k)}{(t_{k+1}-t_k)^2}\int_0^{t_{k+1}-t_k}\omega(u)du.$$

Тому для рівномірного розбиття $\mathbf{t}^*$ відрізка $[a,b]$ справедливе таке узагальнення результату Малозьомова [184]: для кожної $f \in W^1H^\omega([a,b],X)$

$$\max_{t\in[a,b]} h_X(f(t), l_f(\mathbf{t}^*;t)) \leqslant \frac{1}{4}\int_0^{(b-a)/n}\omega(u)du. \tag{1.65}$$

Теорема 1.4.3. *Якщо ω — це опуклий модуль неперервності, $\mathbf{t}$ є розбиттям відрізку $[a,b]$, інформаційним оператором є*

$$I_{\mathbf{t}}(f) = (f(t_0), f(t_1), \ldots, f(t_n)),$$

а Id *— це одиничний оператор, то для ізотропного* L*–простору* X *з властивістю* (1.41)

$$\inf_{\mathbf{t}} \mathcal{E}(\mathrm{Id}, W^1H^\omega([a,b],X), I_{\mathbf{t}}, C([a,b],X)) = \frac{1}{4}\int_0^{(b-a)/n} \omega(t)dt.$$

Оптимальним інформаційним оператором є оператор $I_{\mathbf{t}^*}$ *де* $\mathbf{t}^*$ *— це рівномірне розбиття, а оптимальним методом відновлення є* $U(I_{\mathbf{t}^*}(f)) = l_f(\mathbf{t}^*)$*, де* $l_f(\mathbf{t})$ *визначена у* (1.64).

Доведення. Для довільного розбиття $\mathbf{t}$ нехай $f_{\mathbf{t}}$ позначає функцію з леми 1.4.4, і $x \in X^c \cap X^{\mathrm{inv}}$, $h_X(x,\theta) = 1$. Використовуючи леми 1.4.1 і 1.1.5, а також ізотропність простору X, отримаємо

$$\mathcal{E}(\mathrm{Id}, W^1H^\omega([a,b],X), I_{\mathbf{t}}, (C[a,b],X)) \geqslant \frac{1}{2}\max_{t\in[a,b]} h_X\left((f_{\mathbf{t}})_x(t), (f_{\mathbf{t}})_{x'}(t)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\max_{t\in[a,b]} h_X(2(f_{\mathbf{t}})_+(t)\cdot x, 2(f_{\mathbf{t}})_-(t)\cdot x) = \max_{t\in[a,b]} |f_{\mathbf{t}}(t)| \geq \frac{1}{4}\int_0^{(b-a)/n} \omega(t)dt.$$

З (1.65) випливає, що у випадку рівномірного розбиття, нерівності у цьому ланцюжку перетворюються на рівність. Теорему доведено. □

1.4.2.2 Відновлення похідної типу Хукухара

Розглянемо задачу знаходження відхилення похідної типу Хукухара функції $f \in W^1H^\omega([a,b],X)$ від похідної її інтерполяційної кусково-лінійної функції.

Похідна типу Хукухара інтерполяційної у точках розбиття $\mathbf{t}$ кусково-лінійної функції $l_f(\mathbf{t})$ для $t \in (t_k, t_{k+1})$ дорівнює

$$\mathcal{D}_H l_f(\mathbf{t};t) = \frac{f(t_{k+1}) -_H f(t_k)}{t_{k+1}-t_k} = \frac{1}{t_{k+1}-t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathcal{D}_H f(u)du,\ k = 0,\dots,n-1.$$

Довизначимо її у точках t_k, рівностями

$$\mathcal{D}_H l_f(\mathbf{t};t_k) = \begin{cases} (f(t_{k+1}) -_H f(t_k))/(t_{k+1}-t_k), & \text{якщо } k = 0,1,\dots,n-1, \\ (f(t_n) -_H f(t_{n-1}))/(t_n - t_{n-1}), & \text{якщо } k = n. \end{cases}$$

Використовуючи наслідок 1.3.2 для $t \in [t_k, t_{k+1}]$, отримаємо

$$h_X\left(\mathcal{D}_H f(t), \mathcal{D}_H l_f(\mathbf{t}; t)\right) \leqslant \frac{1}{t_{k+1} - t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \omega(|s-t|) ds. \tag{1.66}$$

Наступна теорема узагальнює результати з [116].

Теорема 1.4.4. *Нехай задано модуль неперервності ω і $\mathbf{t}^* = (t_0^*, \ldots, t_n^*)$ позначає рівномірне розбиття відрізка $[a, b]$. Тоді для ізотропного L–простору X з властивістю* (1.41),

$$\mathcal{E}(\mathcal{D}_H, W^1 H^\omega([a,b], X), I_{\mathbf{t}^*}, B([a,b], X)) = \frac{n}{b-a} \int_0^{(b-a)/n} \omega(u) du.$$

Оптимальним методом відновлення є

$$U(f(t_0^*), f(t_1^*), \ldots, f(t_n^*)) = \mathcal{D}_H l_f(\mathbf{t}^*).$$

Доведення. З (1.66) випливає, що

$$\sup_{f \in W^1 H^\omega([a,b],X)} \sup_{t \in [a,b]} h_X\left(\mathcal{D}_H f(t), \mathcal{D}_H l_f(\mathbf{t}^*, t)\right) \leq \frac{n}{b-a} \int_0^{(b-a)/n} \omega(u) du.$$

Екстремальну функцію можна побудувати так. Покладемо

$$g_0(t) = \min_{k\colon 2k \leqslant n} \omega(|t - t_{2k}^*|)$$

і

$$g(t) = g_0(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b g_0(u) du.$$

Функція $f_{\mathbf{t}^*}(t) := \int_a^t g(u) du$ належить до $W^1 H^\omega([a,b], \mathbb{R})$. Крім того, оскільки $\mathbf{t}^*$ — це рівномірне розбиття, $f_{\mathbf{t}^*}(t_k^*) = 0$, $k = 0, \ldots, n$, а отже $l_f(\mathbf{t}^*) \equiv 0$. Нарешті, застосовуючи лему 1.4.1 до функцій $(f_{\mathbf{t}^*})_x$ і $(f_{\mathbf{t}^*})_{x'}$ ($x \in X^c \cap X^{\mathrm{inv}}$, $h_X(x, \theta) = 1$) отримаємо

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathcal{D}_H, W^1 H^\omega([a,b], X), I_{\mathbf{t}^*}, B([a,b], X)) &\geq \frac{1}{2} h_X\left(\mathcal{D}_H (f_{\mathbf{t}^*})_x(a), \mathcal{D}_H (f_{\mathbf{t}^*})_{x'}(a)\right) \\ = |f'_{\mathbf{t}^*}(a)| = \frac{1}{b-a} \int_a^b g_0(u) du &= \frac{n}{b-a} \int_0^{(b-a)/n} \omega(u) du.\end{aligned}$$

Теорему доведено. □

1.4.3 Задачі оптимального відновлення для монотонних операторів

У [97] було отримано розв'язання задачі оптимального відновлення інтеграла на класі неспадних функцій $f\colon [0,1] \to [0,1]$ таких, що $f(0) = 0$ і $f(1) = 1$. У [36] цей результат було поширено на випадок покоординатно монотонних функцій двох змінних $f\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ при умові, коли інформаційні вузли розташовані у вузлах прямокутної решітки, тобто у точках (t_i, s_j), $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, $n, m \in \mathbb{N}$, $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_m \le 1$, $0 \le s_1 < s_2 < \ldots < s_n \le 1$. При цьому величина похибки найкращого метода відновлення була виписана явно. У [63] аналогічна задача розглядалась для функцій $n \ge 2$ змінних, але похибка найкращого метода відновлення була записана у термінах деякої іншої екстремальної задачі. Порядкові оцінки величини похибки найкращого метода відновлення (при довільному розташуванні інформаційних вузлів) на класі покоординатно монотонних функцій багатьох змінних містяться у [124]; в цій статті також розглядаються адаптивні та рандомізовані методи відновлення і містяться подальші посилання на роботи щодо таких постановок задач найкращого відновлення. У статті [26] ця задача розглядалась на класах багатозначних функцій.

1.4.3.1 Означення

Нехай задано частково впорядковані L–простори X і Y, метричний компакт S з борелівською мірою ν і ідеальна решітка $E(S, \mathbb{R})$. Ми будемо розглядати монотонні (λ, φ)–адитивні оператори (див. пункт 1.2.3 і означення 1.2.8)

$$\Lambda\colon B([0,1], X) \to E(S, Y),$$

при певних обмеженнях на функції λ і φ, які ми вкажемо нижче. Відмітимо, що ми також включаємо до розгляду оператори $\Lambda\colon B([0,1], X) \to Y$, якщо ототожнювати елементи простору Y з відповідними константними функціями (припускаючи, що решітка $E(S, \mathbb{R})$ містить константні функції).

Позначимо через $W_{a,b}$ клас функцій $f\colon [0,1] \to X$, монотонних відносно $t \in [0,1]$ і таких, що $f(0) = a$, $f(1) = b$, $a, b \in X$.

Інтервали $(\alpha, \beta), (\alpha, \beta], [\alpha, \beta)$ або $[\alpha, \beta]$, що містяться у $[0,1]$, будемо називати підінтервалами відрізка $[0,1]$. Позначимо через $\mathrm{si}([0,1])$ множину усіх таких підінтервалів. Множиною розбиттів $\mathfrak{P}$ виступають розбиття на підінтервали з множини $\mathrm{si}([0,1])$, класом операторів Φ виступає множина операторів $\varphi\colon \Xi(\mathfrak{P}) \to E(S, \mathbb{R})$ таких, що

1. $\varphi(\chi_T) \geq 0$ майже всюди для кожного $T \in \mathrm{si}([0,1])$,
2. $\|\varphi(\chi_{T'})\|_{E(S,\mathbb{R})} = \|\varphi(\chi_{T''})\|_{E(S,\mathbb{R})}$, якщо кінці підінтервалів T' і T'' співпадають.

Ми також припускаємо, що оператор $\lambda\colon X \to Y^{\mathrm{c}}$ є монотонним.

1.4.3.2 Оптимальне відновлення монотонних операторів

Нехай $\mathbf{t} = \{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n\} \subset [0,1]$, $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1$. Розглянемо інформаційний оператор $I_{\mathbf{t}}$:

$$I_{\mathbf{t}}(f) = (f_0, f_1, \ldots, f_n), \text{ де } f_i = f(t_i),\ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Теорема 1.4.5. *Нехай задано монотонний (λ, φ)-адитивний оператор*

$$\Lambda\colon B([0,1], X) \to E(S, Y),$$

і центрований ізотропний частково впорядкований L–простір Y з подільною метрикою. Тоді

$$\mathcal{E}(\Lambda, W_{a,b}, I_{\mathbf{t}}, E(S,Y)) = \frac{h_Y(\lambda(a), \lambda(b))}{2} \max_{i=0,\ldots,n-1} ||\varphi(\chi_{(t_i, t_{i+1})})||_{E(S,\mathbb{R})}.$$

Будь-яка однозначна гілка $U^*(f_0, \ldots, f_n)(t)$ з багатозначної функції

$$[0,1] \ni t \mapsto \mathcal{C}\left(\left[\Lambda\left(\sum_{i=0}^{n-1} \chi_{\Delta_i} f_i\right), \Lambda\left(\sum_{i=0}^{n-1} \chi_{\Delta_i} f_{i+1}\right)\right]\right)$$
$$= \mathcal{C}\left(\left[\sum_{i=0}^{n-1} \varphi(\chi_{\Delta_i})(t)\lambda(f_i), \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(\chi_{\Delta_i})(t)\lambda(f_{i+1})\right]\right)$$

є оптимальним методом відновлення, де $\Delta_i = [t_i, t_{i+1})$ *для* $i = 0, \ldots, n-2$ *і* $\Delta_{n-1} = [t_{n-1}, t_n]$.

Доведення. Використовуючи монотонність функцій з класу $f \in W_{a,b}$, отримаємо

$$\sum_{i=0}^{n-1} \chi_{\Delta_i}(t) f_i \leq f(t) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \chi_{\Delta_i}(t) f_{i+1},$$

Оператор Λ є монотонним, тому

$$\Lambda\left(\sum_{i=0}^{n-1} \chi_{\Delta_i} f_i\right) \leq \Lambda(f) \leq \Lambda\left(\sum_{i=0}^{n-1} \chi_{\Delta_i} f_{i+1}\right).$$

З означення методу U^*, для майже всіх $s \in S$

$$\begin{aligned}
&h_Y(\Lambda(f)(s), U^*(f_0, \ldots, f_n)(s)) \\
&\leq \frac{1}{2} h_Y\left(\Lambda\left(\sum_{i=0}^{n-1} \chi_{\Delta_i} f_i\right)(s), \Lambda\left(\sum_{i=0}^{n-1} \chi_{\Delta_i} f_{i+1}\right)(s)\right) \\
&\overset{(1.34)}{=} \frac{1}{2} h_Y\left(\sum_{i=0}^{n-1} \varphi(\chi_{\Delta_i})(s) \cdot \lambda(f_i), \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(\chi_{\Delta_i})(s) \cdot \lambda(f_{i+1})\right) \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} h_Y\left(\varphi(\chi_{\Delta_i})(s) \cdot \lambda(f_i), \varphi(\chi_{\Delta_i})(s) \cdot \lambda(f_{i+1})\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(\chi_{\Delta_i})(s) h_Y\left(\lambda(f_i), \lambda(f_{i+1})\right).
\end{aligned}$$

З отриманої оцінки, маємо

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\Lambda, W_{a,b}, I_{\mathbf{t}}, U^*, E(S,Y)) &\leq ||h_Y(\Lambda(f)(\cdot), U^*(f_0, \ldots, f_n)(\cdot))||_{E(S,R)} \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} ||\varphi(\chi_{\Delta_i})(\cdot)||_{E(S,R)} \cdot h_Y(\lambda(f_i), \lambda(f_{i+1})) \\
&\leq \frac{1}{2} \max_{i=0,\ldots,n-1} ||\varphi(\chi_{\Delta_i})(\cdot)||_{E(S,R)} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} h_Y(\lambda(f_i), \lambda(f_{i+1})) \\
&\overset{(1.16),\lambda \text{ є монотонним}}{=} \frac{1}{2} \max_{i=0,\ldots,n-1} ||\varphi(\chi_{\Delta_i})(\cdot)||_{E(S,R)} \cdot h_Y(\lambda(a), \lambda(b)) \\
&= \frac{1}{2} \max_{i=0,\ldots,n-1} ||\varphi(\chi_{(t_i,t_{i+1})})(\cdot)||_{E(S,R)} \cdot h_Y(\lambda(a), \lambda(b)).
\end{aligned}$$

Нехай зафіксовано $j \in \{0, \dots, n-1\}$. Для того, щоб отримати оцінку знизу, ми розглянемо дві функції

$$f^-(t) = \begin{cases} a, & t < t_{j+1}, \\ b, & t \geqslant t_{j+1}; \end{cases} \text{ і } f^+(t) = \begin{cases} a, & t \leqslant t_j, \\ b, & t > t_j. \end{cases}$$

Тоді

$$I(f^-) = I(f^+).$$

Крім того, для всіх $s \in S$

$$\begin{aligned} & h_Y(\Lambda(f^-)(s), \Lambda(f^+)(s)) \\ &= h_Y(\Lambda(\chi_{[0,t_{j+1})}a + \chi_{[t_{j+1},1]}b)(s), \Lambda(\chi_{[0,t_j]}a + \chi_{(t_j,1]}b)(s)) \\ &= h_Y(\Lambda(\chi_{[0,t_j]}a + \chi_{(t_j,t_{j+1})}a + \chi_{[t_{j+1},1]}b)(s), \Lambda(\chi_{[0,t_j]}a + \chi_{(t_j,t_{j+1})}b + \chi_{[t_{j+1},1]}b)(s)) \\ &\overset{(1.34)}{=} h_Y(\varphi(\chi_{[0,t_j]})(s)\lambda(a) + \varphi(\chi_{(t_j,t_{j+1})})(s)\lambda(a) + \varphi(\chi_{[t_{j+1},1]})(s)\lambda(b), \\ &\quad \varphi(\chi_{[0,t_j]})(s)\lambda(a) + \varphi(\chi_{(t_j,t_{j+1})})(s)\lambda(b) + \varphi(\chi_{[t_{j+1},1]})(s)\lambda(b)) \\ &\overset{Y \text{ є ізотропним}}{=} h_Y(\varphi(\chi_{(t_j,t_{j+1})})(s)\lambda(a), \varphi(\chi_{(t_j,t_{j+1})})(s)\lambda(b)) \\ &= \varphi(\chi_{(t_j,t_{j+1})})(s) h_Y(\lambda(a), \lambda(b)) \end{aligned}$$

Враховуючи довільність $j \in \{0, \dots, n-1\}$, і лему 1.4.1, отримаємо необхідну оцінку знизу. □

Зауваження 1.4.1. *Якщо для кожних $x, y \in Y$*

$$\frac{x+y}{2} \in \mathcal{C}([x,y]), \tag{1.67}$$

то оптимальний метод відновлення може бути визначений формулою

$$\begin{aligned} U^*(f_0, \dots, f_n) &= \frac{1}{2}\left(\Lambda\left(\sum_{i=0}^{n-1} \chi_{\Delta_i} \cdot f_i\right) + \Lambda\left(\sum_{i=0}^{n-1} \chi_{\Delta_i} \cdot f_{i+1}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} \varphi(\chi_{\Delta_i})(\lambda(f_i) + \lambda(f_{i+1})). \end{aligned} \tag{1.68}$$

Зауваження 1.4.2. *Якщо у означенні 1.1.12 ми опустимо вимогу існування чебишовського центру у кожного порядкового інтервалу, то похибка*

найкращого відновлення залишиться такою ж, але взагалі кажучи вже не буде існувати оптимального методу відновлення. Але для кожного $\varepsilon > 0$ *можна буде вказати такий метод відновлення* U_ε*, що*

$$\mathcal{E}(\Lambda, W_{a,b}, I_{\mathbf{t}}, U_\varepsilon, E(S,Y)) < \mathcal{E}(\Lambda, W_{a,b}, I_{\mathbf{t}}, E(S,Y)) + \varepsilon.$$

Зауваження 1.4.3. *Якщо метрика* h_Y *задовольняє рівності* (1.22) *з*

$$\psi(x,y) = \max\{|x|, |y|\},$$

то вимога теореми 1.4.5 про центрованість простору Y *може бути опущеною. Крім того, у цьому випадку оптимальним методом відновлення буде метод* (1.68).

Дійсно, оскільки λ є опукло-значною функцією, то враховуючи (1.34), $\Lambda\left(\sum_{i=0}^{n-1} \chi_{\Delta_i} \cdot f_i\right)$ також є опукло-значною. Використовуючи лему 1.1.10, можемо отримати, що права частина (1.68) є чебишовським центром порядкового інтервалу

$$\left[\Lambda\left(\sum_{i=0}^{n-1} \chi_{\Delta_i} f_i\right)(s), \Lambda\left(\sum_{i=0}^{n-1} \chi_{\Delta_i} f_{i+1}\right)(s)\right]$$

для кожного $s \in S$.

1.4.3.3 Оптимальний вибір інформаційних вузлів

Теорема 1.4.6. *Припустимо, що на додачу до умов теореми 1.4.5, функція* $F(s,t) := \|\varphi(\chi_{(s,t)})\|_{E(S,\mathbb{R})}$ *є неперервною на множині* $0 \le s \le t \le 1$ *і* $F(s_1,t_1) > F(s_2,t_2)$ *для* $(s_1,t_1) \supsetneq (s_2,t_2)$*. Оптимальне положення вузлів* $0 = t_0^* < \ldots < t_n^* = 1$ *однозначно визначається рівностями*

$$F(t_{i-1}^*, t_i^*) = F(t_i^*, t_{i+1}^*),\ i = 1, \ldots, n-1 \tag{1.69}$$

і

$$\inf_{\mathbf{t}} \mathcal{E}(\Lambda, W_{a,b}, I_{\mathbf{t}}, E(S,T)) = \frac{1}{2}\|\varphi(\chi_{(t_0^*,t_1^*)})\|_{E(S,\mathbb{R})} h_Y(\lambda(a), \lambda(b)).$$

Доведення. З умов теореми випливає, що функція

$$F(t_0, t_1, \ldots, t_n) := \max_{i=1,n} ||\varphi(\chi_{(t_{i-1},t_i)})||_{E(S,\mathbb{R})}$$

є неперервною, а тому має мінімум на симплексі $\{\mathbf{t}\colon t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_n\}$.

Покажемо, що для набору $\mathbf{t}^*$, який мінімізує $F(\mathbf{t})$, виконуються рівності (1.69). Припустимо протилежне, нехай умови (1.69) не виконуються. Тоді існує індекс j такий, що

$$\|\varphi(\chi_{(t_j^*,t_{j+1}^*)})\|_{E(S,\mathbb{R})} = F(\mathbf{t}^*) \tag{1.70}$$

і або

$$\|\varphi(\chi_{(t_{j-1}^*,t_j^*)})\|_{E(S,\mathbb{R})} < F(\mathbf{t}^*),$$

або

$$\|\varphi(\chi_{(t_{j+1}^*,t_{j+2}^*)})\|_{E(S,\mathbb{R})} < F(\mathbf{t}^*).$$

Нехай для визначеності виконується перша можливість, тобто

$$\|\varphi(\chi_{(t_j^*,t_{j+1}^*)})\|_{E(S,\mathbb{R})} > \|\varphi(\chi_{(t_{j-1}^*,t_j^*)})\|_{E(S,\mathbb{R})}.$$

Тоді для $t' > t_j^*$ достатньо близьких до t_j^* маємо

$$\max\left\{\|\varphi(\chi_{(t_{j-1}^*,t')})||_{E(S,\mathbb{R})}, \|\varphi(\chi_{(t',t_{j+1}^*)})||_{E(S,\mathbb{R})}\right\} < F(\mathbf{t}^*)$$

і число індексів $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ таких, що виконується рівність (1.70) зменшилась. Після скінченної кількості таких кроків, ми отримаємо набір $\mathbf{t}^{**}$ з $F(\mathbf{t}^{**}) < F(\mathbf{t}^*)$, що неможливо. Тому виконуються рівності (1.69). Інших векторів $\mathbf{t}$, які задовольняють цим рівностям не існує через строгу монотонність функції $F(s,t)$. □

При дещо інших додаткових умовах, ми отримуємо такий результат.

Теорема 1.4.7. *Нехай виконуються умови теореми 1.4.5. Припустимо додатково, що для $T', T'' \in \mathrm{si}([0,1])$ таких, що $T' \cap T'' = \emptyset$,*

$$\varphi_{\chi_{T'\cup T''}} = \varphi_{\chi_{T'}} + \varphi_{\chi_{T''}},$$

для невід'ємних функцій $f_1, \ldots, f_n \in E(S, \mathbb{R})$ *маємо*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} f_i \right\|_{E(S,\mathbb{R})} = \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{E(S,\mathbb{R})},$$

і що $F(t) := \|\varphi(\chi_{[0,t]})\|_{E(S,\mathbb{R})}$ *є неперервною функцією змінної* $t \in [0,1]$. *Тоді*

$$\inf_{\mathbf{t}} \mathcal{E}(\Lambda, W_{a,b}, I_{\mathbf{t}}, E(S,T)) = \frac{1}{2n} \|\varphi(\chi_{[0,1]})\|_{E(S,\mathbb{R})} h_Y(\lambda(a), \lambda(b)).$$

Для оптимального набору інформаційних вузлів $0 = t_0^* < \ldots < t_n^* = 1$ *маємо*

$$\|\varphi(\chi_{(t_{i-1}^*, t_i^*)}\|_{E(S,\mathbb{R})} = \frac{1}{n} \|\varphi(\chi_{[0,1]})\|_{E(S,\mathbb{R})}, i = 1, \ldots, n. \tag{1.71}$$

Доведення. Використовуючи припущення теореми і властивості функції φ, маємо

$$n \cdot \max_{i=0,\ldots,n-1} \|\varphi(\chi_{(t_i,t_{i+1})})\|_{E(S,\mathbb{R})} \geq \sum_{i=0}^{n-1} \|\varphi(\chi_{(t_i,t_{i+1})})\|_{E(S,\mathbb{R})}$$

$$= \left\| \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(\chi_{(t_i,t_{i+1})}) \right\|_{E(S,\mathbb{R})} = \left\| \varphi\left(\chi_{\bigcup_{i=0}^{n}(t_i,t_{i+1})}\right) \right\|_{E(S,\mathbb{R})} = \left\| \varphi\left(\chi_{[0,1]}\right) \right\|_{E(S,\mathbb{R})}.$$

Крім того, F є неспадною і неперервною а тому існують точки t_i^*, $i = 0, \ldots, n$ такі, що виконуються рівності (1.71). Теорему доведено. □

1.4.3.4 Інтегральні оператори у частково впорядкованих L–просторах

Для оператора, означеного у (1.35), вимоги теореми 1.4.7 до функції φ автоматично виконуються; якщо ми додатково припустимо, що $\mu(\Delta) > 0$ для кожного непорожнього підінтервалу $\Delta \in \mathrm{si}([0,1])$, то вимоги теореми 1.4.6 також будуть виконуватись.

Для оператора, означеного у (1.36), вимоги теореми 1.4.7 до функції φ виконуються; якщо ми додатково припустимо, що

$$\int_{\Delta} K(t,s) d\mu(t) > 0$$

для ν–майже усіх $s \in S$ і довільного непорожнього підінтервалу $\Delta \in \mathrm{si}([0,1])$, то будуть виконуватись і умови теореми 1.4.6.

Інтегральні оператори для числових функцій добре досліджені, див. напр. [78].

Застосовуючи теореми 1.4.5, 1.4.6 і 1.4.7, до оператора (1.36), отримаємо такий результат.

Теорема 1.4.8. *Нехай задано центрований ізотропний частково впорядкований L–простір з подільною метрикою. Тоді для оператора Λ означеного у* (1.36) *і $T = [0,1]$*

$$\mathcal{E}(\Lambda, W_{a,b}, I_{\mathbf{t}}, L_p(S,X)) = \frac{h_X(P(a),P(b))}{2} \max_{i=0,\dots,n-1} \left(\int_S \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} K(t,s) d\mu(t) \right)^p d\nu(s) \right)^{\frac{1}{p}},$$

і, припускаючи, що виконується (1.67)*, оптимальний метод відновлення $\overline{U}$ задається формулою*

$$\overline{U}(f_0,\dots,f_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} K(t,s) d\mu(t) \right) (P(f_i) + P(f_{i+1})).$$

Якщо ядро K є майже всюди додатним, то оптимальне розташування інформаційних вузлів $0 = t_0^* < \dots < t_n^* = 1$ однозначно визначається рівностями

$$\int_S \left(\int_{t_i^*}^{t_{i+1}^*} K(t,s) d\mu(t) \right)^p d\nu(s) = \int_S \left(\int_{t_{i+1}^*}^{t_{i+2}^*} K(t,s) d\mu(t) \right)^p d\nu(s),$$

$i = 0,\dots,n-2$. *Якщо $p = 1$, то*

$$\mathcal{E}(\Lambda, W_{a,b}, I_{\mathbf{t}}, L_1(S,X)) = \frac{h_X(P(a),P(b))}{2n} \int_S \int_0^1 K(t,s) d\mu(t) d\nu(s).$$

1.4.4 Задачі оптимального відновлення для операторів типу (λ, φ)

1.4.4.1 Означення і приклади

Нехай задано L–простори X і Y, вимірні простори T і S з борелівськими мірами μ і ν відповідно, а також ідеальна решітка $E(S, \mathbb{R})$. Ми розглядаємо оператори $\Lambda\colon B(T, X) \to E(S, Y)$.

Означення 1.4.2. *Оператор $\varphi\colon B(T, \mathbb{R}) \to E(S, \mathbb{R})$ називається монотонним (ми пишемо $\varphi \in \mathbf{M}$), якщо для всіх невід'ємних функцій $f, g \in B(T, \mathbb{R})$ таких, що $f(t) \leq g(t)$ для майже всіх $t \in T$, маємо $\varphi(f)(s) \leq \varphi(g)(s)$ для майже всіх $s \in S$.*

Нагадаємо, що через EL ми позначаємо множину екстремально ліпшицевих операторів, див. означення 1.2.3.

Означення 1.4.3. *Нехай задано оператори $\lambda \in EL$ і $\varphi \in \mathbf{M}$. Оператор $\Lambda\colon B(T, X) \to E(S, Y)$ будемо називати оператором типу (λ, φ), якщо для всіх $f, g \in B(T, X)$ і $s \in S$*

$$h_Y(\Lambda f(s), \Lambda g(s)) \leqslant \varphi(h_Y(\lambda \circ f(\cdot), \lambda \circ g(\cdot))(s), \tag{1.72}$$

і для всіх невід'ємних функцій $u \in B(T, \mathbb{R})$, і довільного $x \in X$

$$\Lambda(u(\cdot)x) = \varphi(u(\cdot))\lambda(x). \tag{1.73}$$

Нижче ми наводимо приклади таких операторів.

1. **Оператори вкладення.** Якщо $E(T, X)$ містить константи, то простір $B(T, X)$ вкладений у простір $E(T, X)$. Оператор вкладення

$$J\colon B(T, X) \to E(T, X)$$

є оператором типу (λ, φ), де λ — це одиничний оператор у X, а φ — це оператор j вкладення простора $B(T, \mathbb{R})$ у простір $E(T, \mathbb{R})$.

2. **Опуклюючий оператор.** Використовуючи опуклюючий оператор P, розглянемо оператор $\overline{P}\colon E(T,X) \to E(T,X)$, визначений формулою $\overline{P}(f)(t) := P(f(t))$, $t \in T$. Якщо X є ізотропним простором і виконується властивість (1.41), то $\overline{P}$ є оператором типу (λ, φ), де φ — це одиничний оператор, а $\lambda = P$.

3. **Інтеграл Лебега для функцій** $f \in B(T,X)$. Нехай T — це компактна множина і $\Lambda(f) := \int_T f(s)d\mu$. Тоді Λ є оператором типу (λ, φ), де φ — це інтеграл Лебега дійснозначних функцій, а λ — це опуклюючий оператор.

4. **Інтегральні оператори.** Нехай S і T — це метричні компакти з мірами μ і ν відповідно, X — це L–простір, $1 \le p \le \infty$. Визначимо оператор

$$\Lambda\colon B(S,\mu,X) \to L_p(T,\nu,X),\ \Lambda(f)(t) := \int_S K(t,s)f(s)d\mu(s),$$

де $K(t,s)$ — це додатне майже всюди ядро таке, що

$$\int_S K(\cdot,s)d\mu(s) \in L_p(T,\nu,\mathbb{R}).$$

Цей оператор є оператором типу (λ, φ), де $\varphi(u)(t) = \int_S K(t,s)u(s)d\mu(s)$, і λ — це опуклюючий оператор.

1.4.4.2 Задачі оптимального відновлення

Припустимо, що T — це метричний компакт з метрикою d_T і що решітка $E(T,X)$ (див. приклад 7 з пункту 1.1.5) містить константи. Без зменшення загальності, можемо вважати, що $\|1\|_{E(T,\mathbb{R})} = 1$. При цих припущеннях, простори $B(T,X)$ і $C(T,X)$ містяться у $E(T,X)$.

Ми розглядаємо ситуацію, коли інформаційний оператор дає значення функцій у n точках з похибкою. Більш точно, нехай $t_1,\dots,t_n \in T$, $\mathbf{t} = (t_1,\dots,t_n)$, $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ — це фіксовані невід'ємні числа, $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$; ми розглядаємо інформаційний оператор

$$I^{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{t}}(f) := (B(f(t_1),\varepsilon_1),\dots,B(f(t_n),\varepsilon_n)),$$

де для $a \in X$ і $\delta \geq 0$, $B(a,\delta) = \{x \in X \colon h_X(a,x) \leq \delta\}$. Як метод відновлення, ми розглядаємо довільну функцію $U \colon X^n \to E(S,Y)$.

Для заданих векторів $\mathbf{t}$ і $\boldsymbol{\varepsilon}$ визначимо функцію

$$f_{\omega,\mathbf{t},\boldsymbol{\varepsilon}}(t) := \min_{i=1,\ldots,n} \{\varepsilon_i + \omega(d_T(t,t_i))\} \in H^\omega(T,\mathbb{R}).$$

Через $\chi_A(x)$ позначаємо характеристичну функцію множини $A \subset T$. Нехай

$$T_i' := \{t \in T \colon \min_{j=1,\ldots,n} \{\varepsilon_j + \omega(d_T(t,t_j))\} = \varepsilon_i + d_T(t,t_i)\},\ i = 1,\ldots,n,$$

і

$$T_1 = T_1';\ T_k = T_k' \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} T_i',\ i = 2,\ldots,n.$$

Справедлива така теорема, див. [19, Теорема 2].

Теорема 1.4.9. *Нехай задано $\lambda \in EL$, $\varphi \in \mathbf{M}$, оператор $\Lambda \colon B(T,X) \to E(S,Y)$ типу (λ,φ), модуль неперервності $\omega(t)$, і вектори $\mathbf{t}$ і $\boldsymbol{\varepsilon}$. Тоді*

$$\mathcal{E}(\Lambda, H^\omega(T,X), I_{\mathbf{t}}^{\boldsymbol{\varepsilon}}, E(T,Y)) = \|\varphi(f_{\omega,\mathbf{t},\boldsymbol{\varepsilon}})\|_{E(S,\mathbb{R})},$$

Оптимальним методом відновлення є

$$U^*(a_1,\ldots,a_n) := \Lambda\left(\sum_{i=1}^n a_i \chi_{T_i}\right).$$

Зауваження 1.4.4. *Деякі з множин T_i, $i = 1,\ldots,n$ можуть бути порожніми. Це означає, що відповідні числа ε_i є занадто великими, і оптимальний метод U^* не бере до уваги відповідні значення a_i.*

Зауваження 1.4.5. *Якщо оператор Λ є адитивним, то*

$$U^*(a_1,\ldots,a_n) = \sum_{i=1}^n \varphi(\chi_{T_i})\lambda(a_i).$$

Як застосування цієї теореми, розглянемо задачу оптимального відновлення інтеграла від випадкових процесів.

Нехай $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(\Omega,\mathcal{F},P)$ — це простір випадкових величин ξ зі скінченним математичним сподіванням $\mathbf{E}(|\xi|^p)$, $p \geq 1$. Ми розглядаємо дві метрики у просторі $\mathcal{L}_p$: $\delta_X(\eta,\zeta) := (\mathbf{E}|\eta-\zeta|^p)^{\frac{1}{p}}$ і $\delta_Y(\eta,\zeta) := (\mathbf{E}\,(\tau \cdot |\eta-\zeta|^p))^{\frac{1}{p}}$,

де τ є невід'ємною випадковою величиною для якої $\operatorname{ess\,sup}_{w\in\Omega}\tau(w) = 1$. Для заданого модуля неперервності ω, і компактного метричного простору (T, d_T), розглянемо клас $\mathcal{H}^\omega(T)$ вимірних випадкових процесів ξ_t, $t \in T$ таких, що $\xi_t \in \mathcal{L}_p$ для всіх $t \in T$, і $\mathbf{E}|\xi_t - \xi_s|^p \le \omega^p(d_T(t,s))$ для всіх $t, s \in T$.

Для невід'ємної функції $\rho \in L_1(T, \mathbb{R})$, розглянемо оператор

$$\Lambda\colon B(T, (\mathcal{L}_p, \delta_X)) \to (\mathcal{L}_p, \delta_Y),\ \Lambda(\xi_t) = \int_T \rho(t)\xi_t dt.$$

Ми стверджуємо, що Λ є оператором типу (λ, φ), де $\lambda\colon (\mathcal{L}_p, \delta_X) \to (\mathcal{L}_p, \delta_Y)$ — це оператор вкладення, а $\varphi\colon B(T, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\varphi(f) = \int_T \rho(t)f(t)dt$. Дійсно, нерівності (1.25) і (1.73) очевидно виконуються. Крім того,

$$\tilde{X} = \{\zeta \in \mathcal{L}_p\colon h_X(\zeta, \theta) \le 1\} \supset \left\{\xi_\varepsilon := \frac{\chi_{A_\varepsilon}}{P^{\frac{1}{p}}(A_\varepsilon)}, A_\varepsilon = \{\tau \ge 1 - \varepsilon\}, \varepsilon > 0\right\}$$

і $\delta_Y(\xi_\varepsilon, \theta) \ge 1 - \varepsilon$, так що рівність (1.28) також виконується. Залишається довести нерівність (1.72). Нехай $\xi_t, \eta_t \in B(T, (\mathcal{L}_p, \delta_X))$ і $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$\begin{aligned}
\delta_Y^p(\Lambda(\xi_t), \Lambda(\eta_t)) &= \mathbf{E}\left(\tau\left|\int_T \rho(t)(\xi_t - \eta_t)dt\right|^p\right) \\
&= \mathbf{E}\left(\tau\left|\int_T \rho(t)(\xi_t - \eta_t)dt\right| \cdot \left|\int_T \rho(u)(\xi_u - \eta_u)du\right|^{p-1}\right) \\
&\le \mathbf{E}\left(\int_T \tau^{\frac{1}{p}}\rho(t)|\xi_t - \eta_t|dt \cdot \left|\int_T \tau^{\frac{1}{p}}\rho(u)(\xi_u - \eta_u)du\right|^{p-1}\right) \\
&= \int_T \rho(t)\mathbf{E}\left(\tau^{\frac{1}{p}}|\xi_t - \eta_t| \cdot \left|\int_T \tau^{\frac{1}{p}}\rho(u)(\xi_u - \eta_u)du\right|^{p-1}\right) dt \\
&\le \int_T \rho(t)\left(\mathbf{E}\left(\tau|\xi_t - \eta_t|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\mathbf{E}\left|\int_T \tau^{\frac{1}{p}}\rho(u)(\xi_u - \eta_u)du\right|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} dt \\
&= \varphi(\delta_Y(\lambda(\xi_t), \lambda(\eta_t))) \cdot \delta_Y^{\frac{p}{q}}(\Lambda(\xi_t), \Lambda(\eta_t)),
\end{aligned}$$

звідки випливає (1.72).

З теореми 1.4.9 тепер отримуємо, що похибка оптимального відновлення оператора Λ, знаючи випадкові величини $\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n}$ з похибками $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, дорівнює

$$\mathcal{E}(\Lambda, \mathcal{H}^\omega(T), I_{\mathbf{t}}^{\varepsilon}, (\mathcal{L}_p, \delta_Y)) = \int_T \rho(t) f_{\omega,\mathbf{t},\boldsymbol{\varepsilon}}(t)dt,$$

а оптимальний метод відновлення дається формулою

$$U^*(\eta_1, \ldots, \eta_n) = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \cdot \int_{T_k} \rho(t)dt.$$

У випадку $T = [0, 1]$, $\tau \equiv 1$, $\rho \equiv 1$ і $p = 2$ цей результат міститься у [168].

1.5 Наближення операторів і пов'язані задачі

1.5.1 Відхилення між інтегральними операторами

Головні результати цього пункту містяться у статті [28].

1.5.1.1 Оцінки відхилення інтегральних операторів

Як завжди, для $p \in [1, \infty]$ покладаємо $p' = p/(p-1)$. Нехай Q – деяка множина і $(S, \mathcal{F})$ — це вимірний простір зі скінченною повною мірою μ; $K, N\colon Q \times S \to \mathbb{R}$, $\phi\colon S \to X$. Розглянемо задачу про відхилення двох інтегральних операторів

$$(\widetilde{K}\phi)(t) = \int_S K(t,s)\phi(s)d\mu(s), (\widetilde{N}\phi)(t) = \int_S N(t,s)\phi(s)d\mu(s), \qquad (1.74)$$

$t \in Q$. Нехай $Q = S = [0, 2\pi]^d, d \in \mathbb{N}$, і μ – міра Лебега. Для просторів 2π-періодичних по кожній змінній функцій $\phi\colon \mathbb{R}^d \to X$ використовуватимемо позначення L_p^X замість $L_p([0, 2\pi]^d, X)$, $L_p = L_p^{\mathbb{R}}$. Важливим прикладом операторів (1.74) у просторах 2π-періодичних по кожній змінній функцій є оператори згортки, а саме, якщо $K(t,s) = \mathcal{K}(t-s)$ і $N(t,s) = \mathcal{N}(t-s)$, де $\mathcal{K}, \mathcal{N} \in L_1$, то оператори (1.74) перетворюються на оператори згортки

$$(\mathcal{K}*\phi)(t) = \int_S \mathcal{K}(t-s)\phi(s)d\mu(s),\ (\mathcal{N}*\phi)(t) = \int_S \mathcal{N}(t-s)\phi(s)d\mu(s),\ \ t \in Q.$$

Теорема 1.5.1. *Нехай $p \in (1, \infty]$ і функції $K, N\colon Q \times S \to \mathbb{R}$ є такими, що $K(t,\cdot), N(t,\cdot) \in L_{p'}(S)$ для кожного $t \in Q$. Тоді для довільної функції $\phi \in L_p(S, X)$ і кожного $t \in Q$ має місце нерівність*

$$h_X((\widetilde{K}\phi)(t), (\widetilde{N}\phi)(t)) \leqslant \|K(t,\cdot) - N(t,\cdot)\|_{L_{p'}(S)} \|h_X(\phi, \theta)\|_{L_p(S)}. \qquad (1.75)$$

Зокрема, для періодичних функцій і операторів згортки

$$h_X((\mathcal{K} * \phi)(t), (\mathcal{N} * \phi)(t)) \leqslant \|\mathcal{K} - \mathcal{N}\|_{L_{p'}} \|h_X(\phi, \theta)\|_{L_p(S)}. \tag{1.76}$$

Якщо простір X є ізотропним і у множині $X^c \cap X^{inv}$ знайдеться ненульовий сильно оборотний елемент a, то нерівність (1.75) *непокращувана і перетворюється на рівність для довільної функції виду*

$$\phi_t(s) = \varphi_t(s) \cdot a, t \in Q,$$

де $\varphi_t(s) = |K(t,s) - N(t,s)|^{p'-1} \mathrm{sgn}(K(t,s) - N(t,s)),\ s \in S.$

Доведення. Використовуючи властивості інтеграла, опуклюючого оператора, лему 1.1.6 і нерівність Гельдера, матимемо

$$\begin{aligned}
&h_X((\widetilde{K}\phi)(t), (\widetilde{N}\phi)(t)) \\
&= h_X\left(\int_S K(t,s)P(\phi(s))d\mu(s), \int_S N(t,s)P(\phi(s))d\mu(s)\right) \\
&\leqslant \int_S h_X\left(K(t,s)P(\phi(s)), N(t,s)P(\phi(s))\right) d\mu(s) \\
&\leqslant \int_S |K(t,s) - N(t,s)| h_X\left(P(\phi(s)), \theta\right) d\mu(s) \\
&\leqslant \|K(t,\cdot) - N(t,\cdot)\|_{L_{p'}(S)} \|h_X(\phi,\theta)\|_{L_p(S)}.
\end{aligned}$$

Нерівність (1.75) доведена.

Нехай тепер простір X є ізотропним. Встановимо точність нерівності (1.75). Враховуючи лему 1.1.8, означення функції ϕ_t і той факт, що ця функція є опукло-значною, матимемо

$$\begin{aligned}
h_X((\widetilde{K}\phi_t)(s), (\widetilde{N}\phi_t)(s)) &= h_X\left(\int_S K(t,s)\phi_t(s)d\mu(s), \int_S N(t,s)\phi_t(s)d\mu(s)\right) \\
&= h_X\left(\left[\int_S K(t,s)\varphi_t(s)d\mu(s)\right] a, \left[\int_S N(t,s)\varphi_t(s)d\mu(s)\right] a\right) \\
&= \left|\int_S (K(t,s) - N(t,s))\varphi_t(s)d\mu(s)\right| h_X(a,\theta) \\
&= \int_S |K(t,s) - N(t,s)|^{p'} d\mu(s) h_X(a,\theta)
\end{aligned}$$

$$= \|K(t,\cdot) - N(t,\cdot)\|_{L_{p'}(S)} \left(\int_S |K(t,s) - N(t,s)|^{(p'-1)p} d\mu(s) \right)^{\frac{1}{p}} h_X(a,\theta)$$
$$= \|K(t,\cdot) - N(t,\cdot)\|_{L_{p'}(S)} \|h_X(\phi_t(\cdot),\theta)\|_{L_p(S)}.$$

□

Розглянемо відхилення в інтегральній метриці. Для $p, q \in [1,\infty]$ позначимо через $L_{q,p}(Q \times S)$ сукупність функцій $K(\cdot,\cdot)$ таких, що

$$\big\| \|K(t,s)\|_{L_q(Q)} \big\|_{L_p(S)} = \|K(\cdot,\cdot)\|_{L_{q,p}(Q\times S)} < \infty.$$

Теорема 1.5.2. *Нехай $p, q \in [1,\infty)$, і $K, N \in L_{q,p'}(Q \times S)$. Тоді для довільної функції $\phi \in L_p(S,X)$*

$$\|h_X(\widetilde{K}\phi, \widetilde{N}\phi)\|_{L_q(Q)} \leqslant \|K - N\|_{L_{q,p'}(Q\times S)} \cdot \|h_X(\phi,\theta)\|_{L_p(S)}. \tag{1.77}$$

Зокрема, для періодичних за кожною змінною функцій

$$\|h_X(\mathcal{K} * \phi, \mathcal{N} * \phi)\|_{L_q} \leqslant (2\pi)^{d/p'} \|\mathcal{K} - \mathcal{N}\|_{L_q} \|h_X(\phi,\theta)\|_{L_p}. \tag{1.78}$$

Якщо простір X ізотропний і у множині $X^c \cap X^{inv}$ знайдеться ненульовий сильно оборотний елемент a, то при $p = q = 1$ нерівності (1.77) *і* (1.78) *непокращувані.*

Доведення. Застосовуючи властивості метрики в X, інтеграла, узагальнену нерівність Мінковського, а потім нерівність Гельдера, отримаємо

$$\|h_X(\widetilde{K}\phi, \widetilde{N}\phi)\|_{L_q(Q)}$$
$$= \left\| h_X \left(\int_S K(\cdot,s) P(\phi(s)) d\mu(s), \int_S N(\cdot,s) P(\phi(s)) d\mu(s) \right) \right\|_{L_q(Q)}$$
$$\leqslant \left\| \int_S |K(\cdot,s) - N(\cdot,s)|\, h_X(P(\phi(s)),\theta) d\mu(s) \right\|_{L_q(Q)}$$
$$\leq \int_S h_X(P(\phi(s)),\theta) \|K(\cdot,s) - N(\cdot,s)\|_{L_q(Q)} d\mu(s)$$
$$\leqslant \|K - N\|_{L_{q,p'}(Q\times S)} \|h_X(\phi,\theta)\|_{L_p(S)}.$$

Нерівність (1.77) доведена. Нерівність (1.78) випливає з нерівності (1.77).

Встановимо точність нерівності (1.78) при $p = q = 1$. Для $\epsilon > 0$ через F_ϵ позначимо функцію Стєклова для функції $F \in L_1$:

$$F_\epsilon(t) = \frac{1}{(2\epsilon)^d} \int_{[-\epsilon,\epsilon]^d} F(t-s)d\mu(s).$$

Покладемо $\phi_{ae}(s) = 1/(2\epsilon)^d \chi_{[-\epsilon,\epsilon]^d}(s) \cdot a$, де $a \in X^c$ є сильно оборотним і таким, що $h_X(a,\theta) = 1$. Враховуючи ізотропність простору X і лему 1.2.3, отримаємо

$$\begin{aligned}
&\left\| h_X\left(\int_{[0,2\pi]^d} \mathcal{K}(\cdot - s)\phi_{ae}(s)d\mu(s), \int_{[0,2\pi]^d} \mathcal{N}(\cdot - s)\phi_{ae}(s)d\mu(s)\right)\right\|_{L_1} \\
&\quad = 1/(2\epsilon)^d \left\| h_X\left(\int_{[-\epsilon,\epsilon]^d} \mathcal{K}(\cdot - s)ad\mu(s), \int_{[-\epsilon,\epsilon]^d} \mathcal{N}(\cdot - s)ad\mu(s)\right)\right\|_{L_1} \\
&\quad = 1/(2\epsilon)^d \left\| h_X\left(\left[\int_{[-\epsilon,\epsilon]^d} \mathcal{K}(\cdot - s)d\mu(s)\right] a, \left[\int_{[-\epsilon,\epsilon]^d} \mathcal{N}(\cdot - s)d\mu(s)\right] a\right)\right\|_{L_1} \\
&\quad = 1/(2\epsilon)^d \left\| \left| \int_{[-\epsilon,\epsilon]^d} \mathcal{K}(\cdot - s) - \mathcal{N}(\cdot - s)d\mu(s)\right| \cdot h_X(a,\theta)\right\|_{L_1} = \|\mathcal{K}_\epsilon - \mathcal{N}_\epsilon\|_{L_1}.
\end{aligned}$$

Оскільки $\|h_X(\phi_{ae},\theta)\|_{L_1} = 1$ і $\|\mathcal{K}_\epsilon - \mathcal{N}_\epsilon\|_{L_1} \to \|\mathcal{K} - \mathcal{N}\|_{L_1}$ при $\epsilon \to 0$, бачимо, що нерівність (1.78) при $p = q = 1$ дійсно точна. □

1.5.1.2 Тригонометричні наближення.

Якщо ядро $\mathcal{N}$ оператора згортки є тригонометричним поліномом, то для довільної функції $\phi \in L_1^X$ згортка $\mathcal{N} * \phi$ буде узагальненим тригонометричним поліномом з коефіцієнтами із простору X. Оцінки (1.76) з теореми 1.5.1 і (1.78) з теореми 1.5.2 показують, що з оцінок наближення ядра $\mathcal{K}$ поліномом $\mathcal{N}$ випливають оцінки наближення функції $\mathcal{K} * \phi$ узагальненими тригонометричними поліномами виду $\mathcal{N} * \phi$, $\phi \in L_1^X$. Величини $\|\mathcal{K} - \mathcal{N}\|_{L_p}$ досліджувались багатьма математиками і у багатьох випадках відомі точні, асимптотично точні або порядкові оцінки цих величин. Багато результатів у цьому напрямку, а також відповідні посилання, можна знайти у монографіях [104, 136, 166, 179, 195, 200, 201].

Нижче ми детальніше зупинимось на одновимірному випадку. Покладемо $\Phi_p^X := \{\phi \in L_p^X : \|h_X(\phi,\theta)\|_{L_p} \leqslant 1\}$. Замість $\Phi_p^{\mathbb{R}}$ писатимемо Φ_p. Нехай

також $\mathcal{N} \in L_1$ – задане дійснозначне ядро. Будемо розглядати питання наближення класів $\mathcal{K} * \Phi_p^X = \{\mathcal{K} * \phi \colon \phi \in \Phi_p^X\}$. Відзначимо, що функції з $\mathcal{K} * \Phi_p^X$ є опукло-значними. Добре відомо (див., напр., [25, 44, 77, 104, 187]), що велика кількість важливих класів числових функцій є класами типу $\mathcal{K} * \Phi_p$.

Нехай $f \in L_p^X$ і $H \subset L_p^X$. Покладемо

$$E(f, H)_{L_p^X} = \inf_{\tau \in H} \|h_X(f, \tau)\|_{L_p}, \; E(\mathcal{K} * \Phi_p^X, H)_{L_p^X} = \sup_{\phi \in \Phi_p^X} E(\mathcal{K} * \phi, H)_{L_p^X}. \tag{1.79}$$

Величини (1.79) називаються найкращим наближенням функції f і класу $\mathcal{K} * \Phi_p^X$ відповідно, множиною H в метриці простору L_p^X.

Якщо задано відображення $A \colon L_p^X \to H$, покладемо

$$U(\mathcal{K} * \Phi_p^X, A)_{L_p} = \sup_{\phi \in \Phi_p^X} \|h_X(\mathcal{K} * \phi, A\phi)\|_{L_p}.$$

Величина $U(\mathcal{K} * \Phi_p^X, A)_{L_p}$ називається похибкою наближення класу $\mathcal{K} * \Phi_p^X$ заданим методом наближення.

Для заданої сукупності $\mathcal{A}$ відображень $A \colon L_p^X \to H$ найкращим $\mathcal{A}$-наближенням класу $\mathcal{K} * \Phi_p^X$ множиною H називатимемо величину

$$\mathcal{E}(\mathcal{K} * \Phi_p^X, \mathcal{A})_{L_p} = \inf_{A \in \mathcal{A}} U(\mathcal{K} * \Phi_p^X, A)_{L_p}.$$

Позначимо через $H_{2n-1}^{T,X}$ $(n = 1, 2, \ldots, H_{2n-1}^{T,\mathbb{R}} = H_{2n-1}^T)$ множину узагальнених тригонометричних поліномів $T(t)$ порядку не вище за $n - 1$, тобто множину функцій виду

$$T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos kt + b_k \sin kt, \qquad a_k, b_k \in X.$$

В даному підрозділі через $\mathcal{A}$ будемо позначати сукупність відображень виду $T * \phi$, $T \in H_{2n-1}^T$, $\phi \in L_p^X$.

Означення 1.5.1. *(див. напр., [177, с. 309]). Нехай* $\varphi_n(t) := \operatorname{sgn} \sin nt$. *Будемо казати, що ядро* $\mathcal{K}$ *задовольняє умову* N_n^*, *якщо існує поліном* $T^* \in H_{2n-1}^T$ *і точка* $\theta \in [0, \pi/n]$, *такі що майже для всіх* t

$$(\mathcal{K}(t) - T^*(t))\varphi_n(t - \theta) \geqslant 0.$$

Добре відомо, що майже всі важливі для теорії наближень ядра задовольняють умову N_n^* (див. [25, 44, 77, 187]).

Якщо ядро $\mathcal{K}$ задовольняє умову N_n^*, то [187]

$$E(\mathcal{K}, H_{2n-1}^T)_{L_1} = \|\mathcal{K} - T^*\|_{L_1} = \|\mathcal{K} * \varphi_n\|_{L_\infty}.$$

Звідси і теорем 1.5.1 і 1.5.2 випливає наступний наслідок.

Наслідок 1.5.1. *Якщо $p = \infty$ або $p = 1$ і ядро $\mathcal{K}$ задовольняє умову N_n^*, то*

$$E(\mathcal{K} * \Phi_p^X, H_{2n-1}^T)_{L_p} \leqslant \mathcal{E}(\mathcal{K} * \Phi_p^X, \mathcal{A})_{L_p} = \|\mathcal{K} - T^*\|_{L_1} = \|\mathcal{K} * \varphi_n\|_{L_\infty},$$

де $T^* \in H_{2n-1}^T$ – поліном найкращого L_1-наближення для ядра $\mathcal{K}$.

З нерівності (1.76) отримуємо наступне узагальнення теореми 1 з роботи [50].

Наслідок 1.5.2. *Нехай $p > 1$ і $\mathcal{K} \in L_{p'}$. Тоді*

$$E(\mathcal{K} * \Phi_p^X, H_{2n-1}^{T,X})_{L_\infty} \leqslant \mathcal{E}(\mathcal{K} * \Phi_p^X, \mathcal{A})_{L_\infty} = E(\mathcal{K}, H_{2n-1}^T)L_{p'}.$$

Відзначимо тільки, що оцінка, яка міститься у наслідку (1.5.1) є точною у випадку $X = \Omega(\mathbb{R}^d)$ (див. [34]), а також у випадку, коли X — банахів простір.

1.5.1.3 Похибка наближеного інтегрування

Застосовуючи теорему 1.5.1 до інтегральних операторів з ядрами

$$K'(t,s) = \int_Q K(u,s)d\mu(u) \text{ і } N'(t,s) = \sum_{j=1}^n c_j K(t_j, s),$$

де $t_j \in Q$, $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$, отримуємо наступні оцінки похибки формул наближеного інтегрування функцій виду $(\widetilde{K}\phi)(t)$:

Наслідок 1.5.3. *Нехай $p \in (1, \infty]$ і $t_j \in Q$, $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$. Тоді для довільної функції $\phi \in L_p(S, X)$ такої, що $\|h_X(\phi, \theta)\|_{L_p(S)} \leqslant 1$,*

$$h_X\left(\int_Q(\widetilde{K}\phi)(t)d\nu(t),\sum_{j=1}^n c_j(\widetilde{K}\phi)(t_j)\right)$$
$$\leqslant\left\|\int_Q K(t,\cdot)d\nu(t)-\sum_{j=1}^n c_jK(t_j,\cdot)\right\|_{L_{p'}(S)}.$$

Якщо простір X ізотропний і у множині $X^c\cap X^{inv}$ знайдеться ненульовий сильно оборотний елемент a, то нерівність непокращувана.

Проілюструємо застосування цього наслідку до задач оптимізації формул наближеного інтегрування на класах періодичних функцій однієї змінної. Для $\bar{t}=\{t_1,\dots,t_n\}\in[0,2\pi)$, $\bar{c}=\{c_1,\dots,c_n\}\in\mathbb{R}^n$ і неперервної функції f покладемо $M_{\bar{t},\bar{c}}(f)=\sum_{j=1}^n c_jf(t_j)$. Нехай

$$R(f,M_{\bar{t},\bar{c}})=\int_0^{2\pi}f(t)d\mu(t)-M_{\bar{t},\bar{c}}(f),$$

$$\mathcal{R}(\mathcal{K}*\Phi_p^X,M_{\bar{t},\bar{c}})=\sup_{f\in\mathcal{K}*\Phi_p^X}|R(f,M_{\bar{t},\bar{c}})| \text{ і } \mathcal{R}_n(\mathcal{K}*\Phi_p^X)=\inf_{\bar{t},\bar{c}}\mathcal{R}(\mathcal{K}*\Phi_p^X,M_{\bar{t},\bar{c}}).$$

Задача про найкращу на класі $\mathcal{K}*\Phi_p^X$ квадратурну формулу полягає в знаходженні величини $\mathcal{R}_n(\mathcal{K}*\Phi_p^X)$ і наборів $\bar{t},\bar{c}$, які реалізують inf у правій частині останньої рівності.

Для числових функцій ця задача добре досліджена (див., напр. [179, 189]). Зокрема, у багатьох випадках було знайдене точне значення величини $\left\|\int_0^{2\pi}\mathcal{K}(t)d\mu(t)-\sum_{j=1}^n c_j\mathcal{K}(t_j-\cdot)\right\|_{L_{p'}}$, що в силу наслідку 1.5.3 дає оцінки і для величини $\mathcal{R}_n(\mathcal{K}*\Phi_p^X)$.

1.5.1.4 Похибка відновлення функцій

Застосовуючи теорему 1.5.1 до інтегральних операторів з ядрами $K(t,s)$ і $N(t,s)=\sum_{j=1}^n c_jK(t_j,s)$, отримаємо наступні оцінки похибки формул наближеного відновлення значення функції виду $(\widetilde{K}\phi)(t)$ в точці t по її значенням в точках t_j:

Наслідок 1.5.4. *Нехай $p\in(1,\infty]$ і $t_j\in Q$, $c_j\in\mathbb{R}$, $j=1,\dots,n$. Тоді для довільної функції $\phi\in L_p(S,X)$ такої, що $\|h_X(\phi,\theta)\|_{L_p(S)}\leqslant 1$, і довільного*

$t \in Q$

$$h_X\left((\widetilde{K}\phi)(t), \sum_{j=1}^{n} c_j(\widetilde{K}\phi)(t_j)\right) \leqslant \left\| K(t,\cdot) - \sum_{j=1}^{n} c_j K(t_j,\cdot) \right\|_{L_{p'}(S)}.$$

Розглянемо ще задачу відновлення функції $\widetilde{K}\phi$ по її значенням в n точках $t_j \in Q$ в інтегральних метриках. Метод відновлення задамо так. Виберемо n функцій $c_j\colon Q \to \mathbb{R}$ і покладемо $\Phi(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t)(\widetilde{K}\phi)(t_j)$. Застосовуючи теорему 1.5.2 до інтегральних операторів з ядрами $K(t,s)$ і $N(t,s) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t)K(t_j,s)$, отримуємо

Наслідок 1.5.5. *Нехай $p, q \in [1,\infty)$ і $t_j \in Q$, $c_j \in L_\infty(Q)$, $j = 1,\dots,n$. Тоді для довільної функції $\phi \in L_p(S,X)$ такої, що $\|h_X(\phi,\theta)\|_{L_p(S)} \leqslant 1$,*

$$\left\| h_X\left((\widetilde{K}\phi)(\cdot), \sum_{j=1}^{n} c_j(\cdot)(\widetilde{K}\phi)(t_j)\right) \right\|_{L_q(Q)} \leqslant \left\| K(\cdot,\cdot) - \sum_{j=1}^{n} c_j(\cdot)K(t_j,\cdot) \right\|_{L_{q,p'}(Q\times S)}.$$

1.5.2 Наближення (λ,φ)–адитивних операторів

В цьому пункті ми отримуємо оцінку відхилення $h_Y(\Lambda(f), \Lambda(f(t_0)\chi_T))$ для (λ,φ)–адитивного оператора Λ (див. пункт 1.2.3) на класі $H^\omega(T,X)$ функцій $f\colon T \to X$, що задається мажорантою ω модуля неперервності функції f; тут $T = (T,\rho)$ — це метричний компакт з метрикою ρ. Головні результати цього пункту містяться у [29]. Нерівності такого роду інколи називають нерівностями типу Островського. Деякі нерівності такого типу для недійсно-значних функцій можна знайти у [4, 66]. Ми будемо використовувати позначення з пункту 1.2.3.

Лема 1.5.1. *Якщо T — це компактний метричний простір, а ω є модулем неперервності, то $H^\omega(T,X) \subset B_s(T,X)$.*

Доведення. Відмітимо, що кожна функція $f \in H^\omega(T,X)$ є неперервною. Оскільки T є компактом, то $f(T)$ є також компактом. Нехай $n \in \mathbb{N}$, і

$\{f_1, \ldots, f_m\} \subset X$, $m \in \mathbb{N}$ є скінченною $\frac{1}{n}$-сіткою у $f(T)$. Для кожного $k = 1, \ldots, m$ покладемо

$$T'_k = \left\{ t \in T \colon h_X(f(t), f_k) \leq \frac{1}{n} \right\} \in \mathcal{F}_T$$

і $T_k = T'_k \setminus \bigcup_{s=1}^{k-1} T'_k$. Тоді $g_n := \sum_{k=1}^{m} f_k \chi_{T_k}$ є простою обмеженою функцією і $h_{B(T,X)}(f, g_n) \leq \frac{1}{n}$, що доводить твердження леми. □

Будемо казати, що оператор $\lambda \colon X \to Y$ є додатно-однорідним, якщо для кожного $\alpha \geq 0$ і $x \in X^c$, $\lambda(\alpha x) = \alpha \lambda(x)$. Для додатно-однорідного оператора λ маємо

$$\lambda(\theta_X) = \lambda(0 \cdot \theta_X) = 0 \cdot \lambda(\theta_X) = \theta_Y.$$

Послідовність $\{x_n\} \subset X$ будемо називати λ–екстремальною, якщо для всіх $n \in \mathbb{N}$ маємо $h_X(x_n, \theta_X) = 1$, і $h_Y(\lambda(x_n), \theta_Y) \to 1$ при $n \to \infty$.

Теорема 1.5.3. *Нехай задано неперервний (λ, φ)–адитивний оператор*

$$\Lambda \colon B_s(T, X) \to B(S, Y)$$

і модуль неперервності ω. Тоді для будь-якої функції $f \in H^\omega(T, X)$ і довільного $t_0 \in T$ справедлива нерівність

$$h_Y(\Lambda f(s), \Lambda(f(t_0)\chi_T)(s)) \leqslant \left(\int_T \omega(\rho(t, t_0)) d\mu_\varphi \right)(s), s \in S. \tag{1.80}$$

Якщо додатково оператор λ є додатно-однорідним і існує λ–екстремальна послідовність $\{x_n\} \subset X^c$, то нерівність (1.80) є точною.

Доведення. Використовуючи теорему 1.2.1, властивість 2 теореми 1.2.2, ліпшицевість оператора λ, належність $f \in H^\omega(T, X)$, і властивість 3 теореми 1.2.2 матимемо для кожного $s \in S$ (яке ми для спрощення позначень опускаємо)

$$h_Y(\Lambda(f), \Lambda(f(t_0)\chi_T)) = h_Y\left(\int_T \lambda(f) d\mu_\varphi, \int_T \lambda(f(t_0)\chi_T) d\mu_\varphi \right)$$
$$\leqslant \int_T h_Y\left(\lambda(f), \lambda(f(t_0)\chi_T)\right) d\mu_\varphi \leqslant \int_T h_X\left(f, f(t_0)\chi_T\right) d\mu_\varphi$$

$$\leqslant \int_T \omega(\rho(t_0,t))d\mu_\varphi.$$

Нерівність (1.80) доведено.

Нехай тепер λ є додатно-однорідним і $\{x_n\} \subset X^c$ — це λ–екстремальна послідовність. Для кожного $n \in \mathbb{N}$, покладемо

$$f_e(t) = f_e^n(t) = \omega(\rho(t,t_0)) \cdot x_n.$$

Для довільних $t_1, t_2 \in T$, використовуючи лему 1.1.6, отримаємо

$$\begin{aligned} h_X(f_e(t_1), f_e(t_2)) &= h_X(\omega(\rho(t_1,t_0)) \cdot x_n, \omega(\rho(t_1,t_0)) \cdot x_n) \\ &\leq |\omega(\rho(t_1,t_0)) - \omega(\rho(t_2,t_0))| h_X(x_n,\theta) \\ &\leq \omega(|\rho(t_1,t_0) - \rho(t_2,t_0)|) \leq \omega(\rho(t_1,t_2)), \end{aligned}$$

тому $f_e \in H^\omega(T,X)$. Використовуючи властивість 1 теореми 1.2.2, маємо для кожного $s \in S$ (яке ми для спрощення позначень опускаємо)

$$\begin{aligned} h_Y(\Lambda(f_e), \Lambda(f_e(t_0)\chi_T)) &= h_Y\left(\int_T \lambda(f_e)d\mu_\varphi, \int_T \lambda(f_e(t_0)\chi_T)d\mu_\varphi\right) \\ = h_Y\left(\lambda(x_n)\int_T \omega(\rho(t,t_0))d\mu_\varphi, \theta_Y\right) &= h_Y\left(\lambda(x_n), \theta_Y\right)\int_T \omega(\rho(t,t_0))d\mu_\varphi \\ &\to \int_T \omega(\rho(t,t_0))d\mu_\varphi \text{ при } n \to \infty, \end{aligned}$$

що доводить точність нерівності (1.80). Теорему доведено. □

1.5.3 Наближення необмежених операторів і пов'язані задачі на класі $W^1H^\omega([a,b],X)$

Відмітимо, що розв'язання деяких екстремальних задач для оператора кратного диференціювання на класах $W^rH^\omega(I,\mathbb{R})$, де I — це відрізок, напівпряма, або пряма містяться у [56]. Головні результати цього пункту містяться у [18].

1.5.3.1 Відхилення розділеної різниці і похідної типу Хукухара

Нехай $t \in [a,b]$ і задано невід'ємні числа $\gamma_1, \gamma_2, h_1, h_2$ такі, що

$$\gamma_1 + \gamma_2 > 0, h_1 + h_2 > 0, \text{ і } [t-\gamma_1, t+\gamma_2] \subset [t-h_1, t+h_2] \subset [a,b]. \quad (1.81)$$

Для функції $f \in W^1H^\omega([a,b],X)$ покладемо

$$\Delta^H_{\gamma_1,\gamma_2} f(t) = \frac{f(t+\gamma_2) -_H f(t-\gamma_1)}{\gamma_1+\gamma_2}.$$

Використовуючи теорему 1.3.2 до відрізків $[t-\gamma_1, t+\gamma_2]$ і $[t-h_1, t+h_2]$, і пишучи $I(\alpha)$ замість $I(0,\alpha)$, отримаємо

$$\begin{aligned} &h_X(\Delta^H_{\gamma_1,\gamma_2} f(t), \Delta^H_{h_1,h_2} f(t)) \\ &= h_X\left(\frac{1}{\gamma_1+\gamma_2}\int_{t-\gamma_1}^{t+\gamma_2} \mathcal{D}_H f(u)du, \frac{1}{h_1+h_2}\int_{t-h_1}^{t+h_2} \mathcal{D}_H f(u)du\right) \\ &\leqslant \frac{(h_1-\gamma_1)+(h_2-\gamma_2)}{(h_1+h_2)^2}\left\{I\left(\frac{(h_1+h_2)(h_1-\gamma_1)}{(h_1-\gamma_1)+(h_2-\gamma_2)}\right)\right. \\ &\left. + I\left(\frac{(h_1+h_2)(h_2-\gamma_2)}{(h_1-\gamma_1)+(h_2-\gamma_2)}\right)\right\} =: K(\gamma_1,\gamma_2;h_1,h_2). \end{aligned}$$

Якщо ω є опуклим модулем неперервності і X є ізотропним, то оцінка

$$h_X(\Delta^H_{\gamma_1,\gamma_2} f(t), \Delta^H_{h_1,h_2} f(t)) \leqslant K(\gamma_1,\gamma_2;h_1,h_2) \tag{1.82}$$

є точною. Екстремальні функції можуть бути побудованими у такий спосіб. Починаємо з екстремальної функції g з теореми 1.3.2 для відрізків $[t-\gamma_1, t+\gamma_2]$ і $[t-h_1, t+h_2]$. Продовжуємо її за правилом

$$g(u) = g(t-h_1) \text{ для } u \leqslant t-h_1 \text{ і } g(u) = g(t+h_2) \text{ для } t \geqslant t+h_2. \tag{1.83}$$

Нерівність (1.82) стає рівністю для функції $f(u) = \int_a^u g(s)ds + y,\ u \in [a,b]$, $y \in X^{\mathrm{c}}$. Стискаючи відрізок $[t-\gamma_1, t+\gamma_2]$ у точку t, отримаємо

$$h_X(\mathcal{D}_H f(t), \Delta^H_{h_1,h_2} f(t)) \leqslant \frac{I(h_1)+I(h_2)}{h_1+h_2}. \tag{1.84}$$

У ізотропному просторі X ця нерівність є точною для довільного модуля неперервності ω. Екстремальна функція може бути побудованою аналогічно екстремальній функції для нерівності (1.82), тільки починати треба з екстремальної функції у наслідку 1.3.2.

1.5.3.2 Нерівності типу Ландау

Перші результати стосовно нерівностей для похідних отримали Ґ. Г. Гарді та Дж. Літтлвуд [87] у 1912 році. В цій роботі було показано, що якщо f, g —

це дві додатні монотонні функції (обидві зростаючі, або обидві спадні) і для функції x при $t \to +\infty$ справедливі співвідношення $x(t) = O(f(t))$ і $x''(t) = O(g(t))$, то $x'(t) = O(\sqrt{f(t) \cdot g(t)})$. Якщо ж при $t \to +\infty$ справедливі співвідношення $x(t) = O(f(t))$ і $x''(t) = o(g(t))$, або $x(t) = o(f(t))$ і $x''(t) = O(g(t))$, то $x'(t) = o(\sqrt{f(t) \cdot g(t)})$.

Перші точні (тобто з найменшою можливою константою) нерівності для проміжних похідних були отримані Е. Ландау [112] (1913 р.) і Ж. Адамаром [86] (1914 р.). В цих роботах для функцій, що задані на осі або на пів осі, були отримані точні нерівності, що оцінюють рівномірну норму похідної функції через рівномірну норму самої функції та рівномірну норму другої похідної функції.

Нерівності виду

$$\|f^{(k)}\|_{L_q(G)} \leq K\|f\|^{\mu}_{L_p(G)}\|f^{(r)}\|^{\lambda}_{L_s(G)}, \tag{1.85}$$

де $0 < k < r$, $1 \leq q, p, s \leq \infty$, $\mu = 1 - \lambda$, $\lambda = \frac{k-1/q+1/p}{r-1/s+1/p}$, а G — деяка область, називають нерівностями типу Колмогорова; це пов'язано з результатом А. М. Колмогорова [99,172], в якому він довів точні нерівності такого типу для усіх натуральних r і k у випадку $G = \mathbb{R}$, $q = p = s = \infty$ (частинні випадки були відомі раніше у [86, 207]). Як сам результат Колмогорова, так і методи його доведення мали великий вплив на становлення всієї проблематики. Детальний огляд тематики пов'язаної з нерівностями для похідних можна знайти у монографії [144]. Для функцій однієї змінної точні нерівності типу Колмогорова для усіх значень k і r відомі у таких випадках.

У випадку $G = \mathbb{R}$:

1. $p = q = s = \infty$, Е. Ландау [112] ($k = 1$, $r = 2$), Г. Є. Шилов [207] ($0 < k < r$, $r = 3, 4$ та $k = 2$, $r = 5$), А. М. Колмогоров [99] ($r \geq 4$).

2. $p = q = s = 2$, Ґ. Г. Гарді, Дж. І. Літлвуд, Г. Пойа [88, §7.8], див. також [144, §1.6].

3. $p = q = s = 1$, Е. М. Стейн [133].

4. $q = \infty$, $p = s = 2$, Л. В. Тайков [203].

У випадку $G = \mathbb{R}_+$:

1. $p = q = s = \infty$, Е. Ландау [112] (r = 2), А. П. Маторін [185] ($r = 3$), І. Дж. Шенберг та А. Каварета [130] ($r \geq 4$).

2. $p = q = s = 2$, Ю. І. Любіч [183], М. П. Купцов [181].

3. $q = \infty$, $p = s = 2$, В. М. Габушин [158], М. П. Купцов [182], Г. А. Калябін [171].

Огляд відомих результатів стосовно нерівностей для похідних функцій заданих на скінченному відрізку можна знайти у [197, Розділ 5.1.2]; огляд результатів стосовно нерівностей для дробових похідних функції однієї змінної можна знайти у [197, Розділ 5.1.1] та [193, Розділ 4]. Нерівності для похідної Хукухара і розв'язання деяких пов'язаних задач для функцій зі значеннями у L–просторах заданих на $\mathbb{R}_+$ і $\mathbb{R}$ містяться у [27]. Про нерівності типу Ландау–Колмогорова для функції декількох змінних ми будемо говорити більш детально у Розділі 2.

Ми використовуємо такі позначення:

$$\overline{W}^1 H^\omega([a,b],X) = \bigcup_{k>0} k \cdot W^1 H^\omega([a,b],X),$$

$$\|x\|_X = h_X(x,\theta),\ \|f\|_{\omega,X} = \sup_{\substack{t',t''\in[a,b]\\ t'\neq t''}} \tfrac{h_X(f(t'),f(t''))}{\omega(|t'-t''|)} \text{ і } \|f\|_{C([a,b],X)} = \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|_X.$$

Теорема 1.5.4. *Нехай задано модуль неперервності ω та ізотропний простір X. Для всіх $t \in [a,b]$, невід'ємних $\gamma_1, \gamma_2, h_1, h_2$, що задовольняють* (1.81), *і $f \in \overline{W}^1 H^\omega([a,b],X)$,*

$$\|\Delta^H_{\gamma_1,\gamma_2} f(t)\|_X \leqslant K(\gamma_1,\gamma_2;h_1,h_2)\|\mathcal{D}_H f\|_{\omega,X} + \|\Delta^H_{h_1,h_2} f(t)\|_X, \tag{1.86}$$

$$\|\mathcal{D}_H f(t)\|_X \leqslant \frac{I(h_1)+I(h_2)}{h_1+h_2}\|\mathcal{D}_H f\|_{\omega,X} + \|\Delta^H_{h_1,h_2} f(t)\|_X. \tag{1.87}$$

Нерівність (1.86) *є точною для опуклого модуля неперервності ω. Нерівність* (1.87) *є точною для довільного ω.*

Доведення. Нерівності (1.86) і (1.87) випливають з (1.82) і (1.84) відповідно. Екстремальну функцію для (1.86) можна побудувати так. Нехай g — це невід'ємна екстремальна функція для теореми 1.3.2 у випадку $X = \mathbb{R}$ і відрізків $[t-h_1, t+h_2]$, $[t-\gamma_1, t+\gamma_2]$. Продовжимо її на весь відрізок $[a,b]$ за допомогою (1.83). Згідно з лемою 1.3.4 існує $\gamma \in (t-\gamma_1, t+\gamma_2)$ таке, що g зростає на $(t-h_1, \gamma)$ і спадає на $(\gamma, t+h_2)$. Тому

$$\frac{1}{\gamma_1+\gamma_2}\int_{t-\gamma_1}^{t+\gamma_2} g(u)du \geq \frac{1}{h_1+h_2}\int_{t-h_1}^{t+h_2} g(u)du,$$

і функція $f(u) = \int_a^u g(s)ds$ перетворює нерівність (1.86) у рівність у випадку $X = \mathbb{R}$. Дійсно,

$$\Delta^H_{\gamma_1,\gamma_2} f(t) = \left(\frac{1}{\gamma_1+\gamma_2}\int_{t-\gamma_1}^{t+\gamma_2} g(u)du - \frac{1}{h_1+h_2}\int_{t-h_1}^{t+h_2} g(u)du\right)$$
$$+\frac{1}{h_1+h_2}\int_{t-h_1}^{t+h_2} g(u)du = K(\gamma_1,\gamma_2,h_1,h_2) + \Delta^H_{h_1,h_2} f(t).$$

У загальному випадку функція f_x з $x \in X^{\mathrm{c}}$, $\|x\|_X = 1$ є екстремальною у нерівності (1.86).

Екстремальна функція для (1.87) може бути побудованою аналогічно, тільки починати треба з невід'ємної екстремалі у наслідку 1.3.2 для точки t і відрізка $[t-h_1, t+h_2]$. □

Теорема 1.5.5. *При виконанні умов теореми 1.5.4 для кожної функції* $f \in \overline{W}^1 H^\omega([a,b],X)$,

$$\|\Delta^H_{\gamma_1,\gamma_2} f(t)\|_X \leqslant K(\gamma_1,\gamma_2;h_1,h_2)\|\mathcal{D}_H f\|_{\omega,X} + \frac{2}{h_1+h_2}\|f\|_{C([a,b],X)}, \tag{1.88}$$

$$\|\mathcal{D}_H f(t)\|_X \leqslant \frac{I(h_1)+I(h_2)}{h_1+h_2}\|\mathcal{D}_H f\|_{\omega,X} + \frac{2}{h_1+h_2}\|f\|_{C([a,b],X)}. \tag{1.89}$$

Якщо для фіксованих $t \in [a,b]$ *і* $h > \gamma > 0$

$$\gamma_1 = \min\{\gamma, t-a\},\ \gamma_2 = \min\{\gamma, b-t\},\ h_1 = \min\{h, t-a\},\ h_2 = \min\{h, b-t\} \tag{1.90}$$

і ω *є опуклим модулем неперервності, то нерівність* (1.88) *є точною. Якщо для* $t \in [a,b]$ *і* $h > 0$

$$h_1 = \min\{h, t-a\},\ h_2 = \min\{h, b-t\}, \tag{1.91}$$

і ω є довільним модулем неперервності, то нерівність (1.89) *є точною.*

Доведення. Нерівності (1.88) і (1.89) випливають відповідно з нерівностей (1.86) і (1.87), оскільки

$$\|\Delta^H_{h_1,h_2} f(t)\|_X \leqslant \frac{2}{h_1+h_2}\|f\|_{C([a,b],X)}.$$

Доведемо їх точність у припущенні виконання вказаних додаткових умов на числа t, γ_1, γ_2, h_1 і h_2. Нехай для визначеності $t \leqslant (a+b)/2$. Тоді $h_2 \geq h_1$ і $(t+\gamma_2)+(t-\gamma_1) \leq (t+h_2)+(t-h_1)$. Для нерівності (1.88) за функцію g беремо невід'ємну екстремальну функцію з теореми 1.3.2 для відрізків $[t-\gamma_1, t+\gamma_2]$ і $[t-h_1, t+h_2]$ і $X=\mathbb{R}$, і таку, що $g(t+h_2)=0$. Продовжуємо її на відрізок $[a,b]$ формулою $g(u)=0$, $u \notin [t-h_1, t+h_2]$, З леми 1.3.4 випливає існування такої функції g і неперервність вказаного продовження. Для нерівності (1.89) покладемо $g(s) = (\omega(h_2)-\omega(|s-t|))_+$, $s \in [a,b]$. Обидві функції належать до $H^\omega([a,b],\mathbb{R})$ (перша з них при умові опуклості догори функції ω) і є невід'ємні на $[a,b]$. Оберемо $\xi \in [t-h_1, t+h_2]$ так, що $\int_{t-h_1}^{\xi} g(u)du = \int_{\xi}^{t+h_2} g(u)du$. Функція

$$f(u) = \left(\int_{\xi}^{u} g(s)ds\right)_x, \ x \in X^{\mathrm{c}} \cap X^{\mathrm{inv}}, \ \|x\|_X = 1 \tag{1.92}$$

є екстремальною. Теорему доведено. □

Відмітимо, що для екстремальної у нерівності (1.89) функції маємо

$$\|f\|_{C([a,b],X)} = \frac{1}{2}\int_{t-h_1}^{t+h_2}[\omega(h_2)-\omega(|s-t|)]ds = \frac{h_1+h_2}{2}\omega(h_2) - \frac{I(h_1)+I(h_2)}{2}$$
$$= \frac{h_1+h_2}{2}\max\{\omega(h_1),\omega(h_2)\} - \frac{I(h_1)+I(h_2)}{2}. \tag{1.93}$$

1.5.3.3 Наближення операторів за допомогою операторів з меншими нормами

У просторі $C([a,b],X)$ розглянемо конус $C^H([a,b],X)$, що складається з функцій f таких, що для всіх $t \in [a,b]$ і $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ таких, що $[t-\gamma_1, t+$

$\gamma_2] \subset [a,b]$, існують різниці Хукухара $\Delta^H_{\gamma_1,\gamma_2} f(t)$. Будемо називати додатно-однорідний оператор $T\colon C^H([a,b],X) \to X$ обмеженим, якщо

$$\|T\| = \sup\{\|Tf\|_X \ : \ f \in C^H([a,b],X), \ \|f\|_{C([a,b],X)} \leqslant 1\} < \infty.$$

Припустимо, що задані оператор $A\colon \overline{W}^1 H^\omega([a,b],X) \to X$, число $N > 0$ і оператор $T\colon C^H([a,b],X) \to X$ для якого $\|T\| \leqslant N$. Покладемо

$$U(A,T) = \sup_{f \in W^1 H^\omega([a,b],X)} h_X(Af, Tf).$$

Величина

$$E(A,N) = \inf_{\|T\| \leqslant N} U(A,T)$$

називається найкращим наближенням оператора A операторами T з $\|T\| \leqslant N$. Легко бачити, що якщо обмежений оператор A визначений на конусі $C^H([a,b],X)$ і $N \geqslant \|A\|$, то $E(A,N) = 0$.

Для $t \in [a,b]$ позначимо через $\Delta_{\gamma_1,\gamma_2}(t)$ і $\mathcal{D}_H(t)$ оператори, що діють за формулами

$$\Delta_{\gamma_1,\gamma_2}(t) f = \Delta^H_{\gamma_1,\gamma_2} f(t) \text{ і } \mathcal{D}_H(t) f = \mathcal{D}_H f(t).$$

Теорема 1.5.6. *Нехай задано модуль неперервності ω, ізотропний простір X, $t \in [a,b]$, і числа $h > \gamma > 0$. Нехай також $\gamma_1, \gamma_2, h_1, h_2$ — це числа означені у* (1.90). *Якщо ω є опуклим модулем неперервності, то*

$$E\left(\Delta_{\gamma_1,\gamma_2}(t), \frac{2}{h_1+h_2}\right) = U\left(\Delta_{\gamma_1,\gamma_2}(t), \Delta_{h_1,h_2}(t)\right) = K(\gamma_1,\gamma_2;h_1,h_2). \quad (1.94)$$

Для довільного модуля неперервності ω

$$E\left(\mathcal{D}_H(t), \frac{2}{h_1+h_2}\right) = U\left(\mathcal{D}_H(t), \Delta_{h_1,h_2}(t)\right) = \frac{I(h_1)+I(h_2)}{h_1+h_2}. \quad (1.95)$$

Доведення. Зрозуміло, що $\|\Delta_{h_1,h_2}(t)\| \leqslant \frac{2}{h_1+h_2}$. Згідно з (1.82) і (1.84) маємо

$$E\left(\Delta_{\gamma_1,\gamma_2}(t), \frac{2}{h_1+h_2}\right) \leqslant U(\Delta_{\gamma_1,\gamma_2}(t), \Delta_{h_1,h_2}(t)) \leqslant K(\gamma_1,\gamma_2;h_1,h_2)$$

і

$$E\left(\mathcal{D}_H(t), \frac{2}{h_1+h_2}\right) \leqslant U(\mathcal{D}_H(t), \Delta_{h_1,h_2}(t)) \leqslant \frac{I(h_1)+I(h_2)}{h_1+h_2}.$$

Ми також довели існування функцій $f_1, f_2 \in W^1H^\omega([a,b],X)$ для яких

$$\|\Delta^H_{\gamma_1,\gamma_2} f_1(t)\|_X = K(\gamma_1,\gamma_2;h_1,h_2) + \frac{2}{h_1+h_2}\|f_1\|_{C([a,b],X)} \tag{1.96}$$

і

$$\|\mathcal{D}_H f_2(t)\|_X = \frac{I(h_1)+I(h_2)}{h_1+h_2} + \frac{2}{h_1+h_2}\|f_2\|_{C([a,b],X)}.$$

Для того, щоб довести (1.94), припустимо, що існує оператор T, $\|T\| \leqslant \frac{2}{h_1+h_2}$ такий, що

$$U(\Delta_{\gamma_1,\gamma_2}(t),T) < K(\gamma_1,\gamma_2;h_1,h_2).$$

Тоді для функції f_1 ми отримуємо строгу нерівність

$$\|\Delta^H_{\gamma_1,\gamma_2} f_1(t)\|_X < K(\gamma_1,\gamma_2;h_1,h_2) + \frac{2}{h_1+h_2}\|f_1\|_{C([a,b],X)},$$

що суперечить (1.96). Рівність (1.95) доводиться аналогічно. □

1.5.3.4 Відновлення оператора за неточно заданими даними

Ми розглядаємо задачу оптимального відновлення оператора A на елементах класу $W^1H^\omega([a,b],X)$, які відомі з похибкою. Для оператора A, обмеженого оператора T і числа $\delta > 0$ покладемо

$$U_\delta(A,T) = \sup\{h_X(Af,Tg)\colon f \in W^1H^\omega([a,b],X),$$
$$g \in C([a,b],X), h_{C([a,b],X)}(f,g) \leqslant \delta\}.$$

Задача полягає у знаходженні величини

$$\mathcal{E}_\delta(A) = \inf_T U_\delta(A,T)$$

і оператора T^* на якому досягається інфімум у правій частині рівності.

Теорема 1.5.7. *Нехай задано модуль неперервності ω, $t \in [a,b]$, $h > 0$, і $\mathcal{D}_H(t)f = \mathcal{D}_H f(t)$ для $f \in W^1H^\omega([a,b],X)$. Якщо числа h_1, h_2 задовольняють умовам* (1.91), *і*

$$\delta = \frac{h_1+h_2}{2}\max\{\omega(h_1),\omega(h_2)\} - \frac{I(h_1)+I(h_2)}{2},$$

то для оператора $\Delta_{h_1,h_2}(t)f = \Delta^H_{h_1,h_2}f(t)$ маємо

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{D}_H(t)) = U_\delta(\mathcal{D}_H(t),\Delta_{h_1,h_2}(t)) = \max\{\omega(h_1),\omega(h_2)\}.$$

Доведення. Для функцій $f \in W^1H^\omega([a,b],X)$, $g \in C([a,b],X)$ таких, що $h_{C([a,b],X)}(f,g) \le \delta$, згідно з (1.84),

$$h_X(\mathcal{D}_H f(t), \Delta^H_{h_1,h_2} g(t)) \leqslant h_X(\mathcal{D}_H f(t), \Delta^H_{h_1,h_2} f(t)) + h_X(\Delta^H_{h_1,h_2} f(t), \Delta^H_{h_1,h_2} g(t))$$
$$\leqslant \frac{I(h_1)+I(h_2)}{h_1+h_2} + \frac{2}{h_1+h_2}\delta = \max\{\omega(h_1), \omega(h_2)\}.$$

Тому, $\mathcal{E}_\delta(\mathcal{D}_H(t)) \leqslant \max\{\omega(h_1), \omega(h_2)\}$. З іншого боку, для функції f з (1.92), згідно з (1.93),

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{D}_H(t)) \geqslant \|\mathcal{D}_H f(t)\|_X = \frac{I(h_1)+I(h_2)}{h_1+h_2} + \frac{2}{h_1+h_2}\|f\|_{C([a,b],X)}$$
$$= \max\{\omega(h_1), \omega(h_2)\}$$

і теорему доведено. □

Висновки до розділу 1

У даному розділі вивчаються екстремальні задачі теорії наближень на класах функцій зі значеннями у L–просторах. Такий підхід дозволяє включити до розгляду з єдиної точки зору класи багатозначних та нечітко-значних функцій, а також класи функцій зі значеннями у нормованих просторах. Основними результатами даного розділу є:

1. Отримано узагальнення леми Корнєйчука–Стєчкіна на випадок класів функцій зі значеннями у L–просторах.

2. Розв'язано серію задач оптимального відновлення операторів на класах $H^\omega(T,X)$ функцій заданих на множині T зі значеннями у L–просторі X із заданою мажорантою ω модуля неперервності функцій, на класі $W^1H^\omega(T,X)$ функцій, похідна типу Хукухара яких належить класу $H^\omega(T,X)$, а також на класах монотонних функцій зі значеннями у частково впорядкованих L–просторах.

3. Отримано розв'язання задач найкращого наближення операторів на класах функцій зі значеннями у L–просторах, зокрема деякі задачі наближення необмежених операторів обмеженими.

Розділ 2

Екстремальні задачі у просторах функцій багатьох змінних

2.1 Вступ

У цьому розділі ми розглядаємо екстремальні задачі теорії наближень для класів функцій багатьох змінних. Головні результати цього розділу містяться у статтях [20, 21, 35, 108]. Велика частина розділу присвячена дослідженню екстремальних задач для (взагалі кажучи необмежених) гіперсингулярних інтегральних операторів. Зокрема, для таких операторів ми розв'язуємо задачу Стєчкіна, доводимо точні нерівності типу Островського і типу Ландау–Колмогорова і знаходимо модуль неперервності гіперсингулярного оператора.

Гіперсингулярні інтегральні оператори тісно пов'язані з операторами дробового диференціювання. Екстремальні задачі теорії наближення для таких операторів для функцій однієї і багатьох змінних досліджувались багатьма математиками. У [193, Розділи 4,5] міститься огляд відомих результатів стосовно нерівностей типу Ландау–Колмогорова для дробових похідних. Ми детальніше зупинимось на відомих точних нерівностях типу

Ландау–Колмогорова для функцій декількох змінних.

Покладемо $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in (0,1)^2$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{-1,1\}^2$, для функції двох змінних x і $t, s \in \mathbb{R}$ покладемо $\Delta_t^1 x(u,v) = x(u,v) - x(u+t,v)$, $\Delta_s^2 x(u,v) = x(u,v) - x(u,v+s)$. У статті [51] отримано точну нерівність типу Колмогорова, що оцінює мішану похідну у сенсі Маршо функції двох змінних через її рівномірну норму і її норму у просторах Гельдера (відповідний одновимірний результат міститься у [152]), тобто оцінку рівномірної норми величини

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\Delta^1_{-\varepsilon_1 t} \Delta^2_{-\varepsilon_2 s} x(u,v)}{t^{1+\alpha_1} s^{1+\alpha_2}} dt ds$$

через рівномірну норму x і норми у просторах Гельдера

$$\|x\|_{H^1_{\beta_1}} := \sup_{t \neq 0} \frac{\|\Delta_t^1 x\|_\infty}{|t|^{\beta_1}} \text{ і } \|x\|_{H^2_{\beta_2}} := \sup_{s \neq 0} \frac{\|\Delta_s^2 x\|_\infty}{|s|^{\beta_1}}.$$

У [147] і [150] було отримано узагальнення цього результату на випадок функцій довільної $d \in \mathbb{N}$ кількості змінних; результати [150], у свою чергу, було узагальнено у [48], заміною норм у просторах Гельдера на норми, що задаються модулями неперервності. Пов'язані результати містяться у [125].

У статті [37] доведено точні нерівності типу Колмогорова, що оцінює рівномірну норму гіперсингулярного оператора

$$f \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(x) - f(x-\xi)}{|\xi|_2^{d+\alpha}} \Omega\left(\frac{\xi}{|\xi|_2}\right) d\xi$$

через $\|f\|_C$ і $\|f\|_{H^\omega}$, де Ω — це однорідна степеня 0 функція змінної ξ (яку називають характеристикою), що є невід'ємною і інтегровною на одиничній сфері. У [191] було отримано точну нерівність, що оцінює рівномірну норму цього гіперсингулярного оператора через рівномірну норму функції f і величини $\|\Omega^{1/s} |\nabla f|_2\|_{L_s}$, $s > d$, $0 < \alpha < d/s$. У статті [146] аналогічну до результатів [37] нерівність доведено у випадку знакозмінної характеристики $\Omega(t_1, \ldots, t_n) = \operatorname{sgn} \prod_{k=1}^n t_k$.

У статтях [137, 204] отримано точні нерівності типу Ландау–Колмогорова, що оцінюють рівномірну норму похідної u'_{x_1} неперервної обмеженої функції $u\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ через рівномірну норму самої функції та рівномірну норму її лапласіана, $d \geq 2$.

Для функцій двох змінних відомі точні нерівності типу Колмогорова, що оцінюють рівномірну норму мішаної похідної $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ через рівномірну норму функції і

- рівномірні норми похідних $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ та $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$, див. [101];
- рівномірні норми похідних $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ та $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, див. [205];
- рівномірні норми похідних $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ та $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$, див. [143].

Нерівності, що оцінюють рівномірні норми "проміжних" похідних через L_2-норми самих функцій і їх "старших" похідних були отримані у [65] (функції задані на $\mathbb{R}^d$ або $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{d-1}$). Нерівності для L_2-норм були отримані у [167].

У періодичному випадку нерівності, що оцінюють L_2-норми деяких частинних похідних функцій $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ через рівномірні норми функції і її похідних $\frac{\partial^r f}{\partial x_i^r}$, $i = 1, \ldots, d$ були отримані у роботах [38–40].

У статті [148] отримано точну нерівність типу Колмогорова, що оцінює рівномірну норму похідної Ріса порядку $\alpha \in (0, 1)$

$$f \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(x) - f(x+t)}{|t|_2^{d+\alpha}} dt$$

через рівномірну норму функції і L_s-норму $|\nabla f|_2$, $s > d$, $0 < \alpha < 1 - d/s$. У [49, 149] отримано точні нерівності типу Колмогорова, що оцінюють рівномірну норму похідної Ріса порядку $\alpha \in (0, 2)$

$$f \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \frac{2f(x) - f(x-t) - f(x+t)}{|t|_2^{d+\alpha}} dt$$

через рівномірну норму функції і L_s-норму Δf, $\frac{d}{2} < s \leq \infty$ і $0 < \alpha < 2 - d/s$. У [190, 192] ці результати поширені на функції зі скінченними в ідеальній структурі нормами градієнта або лапласіана.

Інша частина цього розділу присвячена оптимізації квадратурних формул для класів Соболєва багатьох змінних. Головними результатами у цьому напрямі є асимптотично точні квадратурні формули. Ми наведемо деякі відомі результати, у яких знайдено асимптотично точні методи відновлення інтеграла.

У статті [22] розглядаються класи H_j^ω функцій $f\colon G \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ таких, що $|f(x) - f(y)| \le \omega(\rho_j(x,y))$, $j = 1,2$, де ω — це модуль неперервності, $\rho_1(x,y) = \max_{i=1,\dots,d} |x_i - y_i|$, $\rho_2(x,y) = \sum_{i=1,\dots,d} |x_i - y_i|$. На цих класах отримано асимптотично точні квадратурні формули

$$\int_G P(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{m} c_k f(x_k) \tag{2.1}$$

при $P \equiv 1$, а у випадку $\omega(t) = t^\alpha$, $\alpha \in (0,1]$, і при невід'ємних обмежених вагових функцій P таких, що множини $\{x\colon P(x) \le c\}$ є вимірними за Жорданом для всіх $c \in \mathbb{R}$. У [23] при таких самих обмеженнях на вагу P асимптотично точні квадратурні формули виду (2.1) були отримані на класах функцій, для яких $|f(x) - f(y)| \le (\rho_j(x,y))^\alpha$, $j = 1,2,3$, та класах функцій, для яких $|f(x) + f(y) - 2f((x+y)/2)| \le (\rho_j(x,y))^\alpha$, $j = 1,2,3$, де $\rho_3(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^d (x_k - y_k)^2}$ (при $j = 2,3$ у випадку $d = 2$). У [24] у випадку одиничної ваги асимптотично точні квадратурні формули були отримані для класу H_3^ω у випадку $d = 2$, а також асимптотично точні квадратурні формули для аналогічної задачі на одиничній сфері $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Пов'язані результати містяться у статтях [68, 69]. У [83], зокрема, вивчається асимптотична поведінка величини

$$\inf_{S \subset \mathbb{R}^d, |S| = n} \int_J \min_{s \in S} f(\|u - s\|) w(u) du,$$

яка тісно пов'язана з питаннями оптимізації квадратурних формул. Тут $|S|$ позначає кількість елементів множини S, f є зростаюча функція певного класу, $\|\cdot\|$ — деяка норма у $\mathbb{R}^d$, w — неперервна на компактній вимірній множині $J \subset \mathbb{R}^d$ функція.

2.2 Позначення

Для $x, y \in \mathbb{R}^d$ позначимо через (x,y) скалярний добуток векторів x і y. Нехай $K \subset \mathbb{R}^d$ — це відкрита опукла симетрична відносно початку координат θ обмежена множина з $\theta \in \operatorname{int} K$. Позначимо через $\mathbb{K}$ сім'ю усіх таких

множин K. Для $K \in \mathbb{K}$ і $x \in \mathbb{R}^d$ позначимо через $|x|_K$ норму елемента x, що породжена множиною K, тобто

$$|x|_K := \inf\{\lambda > 0 \colon x \in \lambda K\}. \tag{2.2}$$

Якщо K — це одинична куля у просторі $\mathbb{R}^d_p$, $p \in [1, \infty]$, то будемо писати $|\cdot|_p$ замість $|x|_K$. Для множини $K \in \mathbb{K}$, позначимо через K° її поляру, тобто

$$K^\circ = \left\{ y \in \mathbb{R}^d \colon \sup_{x \in K} (x, y) \le 1 \right\}.$$

Добре відомо (див., напр. [127, Розділи 14,15]), що норма $|\cdot|_{K^\circ}$ є спряженою до $|\cdot|_K$ тобто

$$|z|_{K^\circ} = \sup\{(x, z) \colon |x|_K \le 1\}.$$

Зокрема, для всіх $x, y \in \mathbb{R}^d$, $(x, y) \le |x|_K \cdot |y|_{K^\circ}$.

Нехай задано відкриту множину $Q \subset \mathbb{R}^d$. Через $W^{1,p}(Q)$, $p \in [1, \infty]$, ми позначаємо простір Соболєва функцій $f \colon Q \to \mathbb{R}$ таких, що f і усі її (узагальнені) частинні похідні першого порядку належать до $L_p(Q)$. Зафіксуємо деяку множину $K \in \mathbb{K}$. Оскільки усі норми у скінченно-вимірному просторі $\mathbb{R}^d$ еквівалентні, і $|\nabla f|_1 \in L_p(Q)$ для всіх $f \in W^{1,p}(Q)$, то $|\nabla f|_K \in L_p(Q)$. Для $p \in [1, \infty]$ покладемо

$$W^K_p(Q) := \left\{ f \in W^{1,p}(Q) \colon \||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(Q)} \le 1 \right\}.$$

Через $\mathcal{C}$ ми позначаємо множину усіх відкритих конусів, що породжені скінченною кількістю точок, тобто сім'ю усіх непорожніх множин вигляду

$$\operatorname{int} \left\{ \sum_{k=1}^n c_k x_k \colon c_k \ge 0, k = 1, \ldots, n \right\} \subset \mathbb{R}^d$$

з $n \in \mathbb{N}$ і $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$. Відмітимо, що сім'я $\mathcal{C}$ містить простір $\mathbb{R}^d$ як свій елемент; крім того, для кожного $C \in \mathcal{C}$ і політопа $K \in \mathbb{K}$ (під політопом мається на увазі опукла оболонка скінченної кількості точок з $\mathbb{R}^d$) множина $K \cap C$, також є політопом.

Всюди у цьому розділі ми вважаємо, що $d \ge 2$, $p \in (d, \infty]$ і p' є таким, що $p^{-1} + (p')^{-1} = 1$. Ми також фіксуємо деякий конус $C \in \mathcal{C}$.

Означення 2.2.1. *Непорожню обмежену відкриту множину $Q \subset \mathbb{R}^d$ ми називаємо допустимою, якщо існує вкладення простору $W^{1,p}(Q)$ у простір неперервних на Q функцій.*

Сім'я допустимих множин Q є достатньо широкою. Наприклад, усі множини Q, що задовольняють так званій умові конуса (див. розділ 4 і теорему 4.12 у [1]) є допустимими для віх $p > d$. Якщо множина Q є допустимою, то ми можемо говорити про значення $f(x)$, $x \in Q$, функції $f \in W^{1,p}(Q)$.

Для $C \in \mathcal{C}$ через $L^1_{\infty,p}(C)$, $p \in [1, \infty]$, ми позначаємо множину функцій $f\colon C \to \mathbb{R}$ таких, що $f \in L_\infty(C)$ і всі (узагальнені) частинні похідні першого порядку належать до $L_p(C)$. Для $p \in [1, \infty]$ і $C \in \mathcal{C}$ покладемо

$$W^K_{\infty,p} = W^K_{\infty,p}(C) := \left\{ f \in L^1_{\infty,p}(C) \colon \||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(C)} \le 1 \right\}.$$

2.3 Наближення необмежених операторів

У декількох наступних підрозділах ми вивчаємо екстремальні задачі для гіперсингулярних інтегральних операторів $D_{K,w}\colon L^1_{\infty,p}(C) \to L_\infty(C)$

$$(D_{K,w}f)(x) := \int_C w(|t|_K)(f(x) - f(x+t))dt, x \in C, \tag{2.3}$$

обмеженими операторами, де "радіальна" вага $w(|t|_K)$ породжується функцією $w\colon (0, \infty) \to [0, \infty)$ однієї змінної, обмеження на яку будуть дані пізніше. Відмітимо, що у випадку, коли K — це евклідова одинична куля у $\mathbb{R}^d$, $C = \mathbb{R}^d$ і $w(t) = t^{-(d+\alpha)}$, $0 < \alpha < 1$, ми отримуємо похідну Ріса D^α порядку α, див. [129, §26.7]. Варто відмітити, що похідна Ріса D^α відповідає (див. [129, §25.4]) дробовому степеню $(-\Delta)^{\alpha/2}$ оператора Лапласа.

Результати підрозділів 2.3, 2.4, 2.5 і 2.6 містяться у статті [21].

Для того, щоб означити класи вагових функцій, нам потрібні декілька означень.

Означення 2.3.1. *Для $0 \le a < b \le +\infty$ і $p \in [1, \infty]$, позначимо через $\mathcal{L}_p(a, b)$ простір усіх вимірних функцій $w\colon (a, b) \to \mathbb{R}_+$ зі скінченною*

нормою

$$\|w\|_{\mathcal{L}_p(a,b)} = \begin{cases} \left(\int_a^b t^{d-1} w^p(t)dt\right)^{1/p}, & p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{t\in(a,b)} t^{d-1} w(t), & p = \infty. \end{cases}$$

Відмітимо, що умова $w \in \mathcal{L}_p(0,1)$ у випадку $p \in [1,\infty)$ гарантує, що інтеграл $\int_{K\cap C} w^p(|t|_K)dt$ існує для будь-якого політопа $K \in \mathbb{K}$ і конуса $C \in \mathcal{C}$, див. лему 2.4.3 далі.

Означення 2.3.2. *Для $h > 0$ і $p \in [1,\infty]$ позначимо через $\mathcal{W}_p(0,h)$ простір усіх невід'ємних функцій $w\colon (0,h] \to \mathbb{R}$ таких, що $w \in \mathcal{L}_1(u,h)$ для всіх $u \in (0,h)$ і функція*

$$g_{w,h}(u) = g_w(u) = \frac{1}{u^{d-1}} \int_u^h w(t)t^{d-1}dt \tag{2.4}$$

належить до $\mathcal{L}_p(0,h)$.

Означення 2.3.3. *Для $h > 0$ і $p \in [1,\infty]$ позначимо через $\mathcal{W}_p^*(0,h)$ простір усіх невід'ємних функцій $w\colon (0,h] \to \mathbb{R}$ таких, що $w \in \mathcal{L}_p(u,h)$ для всіх $u \in (0,h)$, для усіх ν достатньо близьких до 1 зліва, функція*

$$w_\nu(u) = \sup_{t\in[\nu u,u]} |w(t) - w(u)| \tag{2.5}$$

належить до $\mathcal{W}_p(0,h)$, і

$$\lim_{\nu\to 1-0} \|g_{w_\nu,h}\|_{\mathcal{L}_p(0,h)} = 0. \tag{2.6}$$

Можна довести (використовуючи аргументи з доведення леми 2.5.3), що оператор $D_{K,w}$ з (2.3) є необмеженим, якщо інтеграл $\int_0^\infty w(\rho)\rho^{d-1}\,d\rho$ розбігається, і є обмеженим з нормою $2d \cdot \operatorname{meas}(K \cap C) \int_0^\infty w(\rho)\rho^{d-1}\,d\rho$, якщо інтеграл збігається. У формулюваннях теорем далі ми використовуємо функцію $g_{w,h}$, яка була визначена у (2.4). Головним результатом цього підрозділу є така теорема.

Теорема 2.3.1. *Нехай $p \in (d,\infty]$, $C \in \mathcal{C}$, $K \in \mathbb{K}$ — це політоп, і $w \in \mathcal{W}_{p'}(0,1) \cap \mathcal{L}_1(1,\infty)$, або $K \in \mathbb{K}$ і $w \in \mathcal{W}_{p'}^*(0,1) \cap \mathcal{L}_1(1,\infty)$. Для всіх*

$$N \in \begin{cases} (0,\infty), & D_{K,w} \text{ є необмеженим}, \\ (0, \|D_{K,w}\|), & D_{K,w} \text{ є обмеженим}, \end{cases}$$

нехай h_N *є таким, що* $2d \cdot \mathrm{meas}(K \cap C) \int_{h_N}^{\infty} w(\rho)\rho^{d-1}\, d\rho = N$. *Тоді*

$$E_N(D_{K,w}, W^K_{\infty,p}) = (d \cdot \mathrm{meas}(K \cap C))^{\frac{1}{p'}} \|g_{w,h_N}\|_{\mathcal{L}_{p'}(0,h_N)}.$$

Крім того, екстремальним оператором є

$$(D_{K,w,h_N} f)(x) := \int_{C \setminus h_N K} w(|t|_K)(f(x) - f(x+t))dt, x \in C. \tag{2.7}$$

Для того, щоб довести цю теорему, достатньо використати підхід, описаний у Вступі. Точна оцінка норми різниці операторів $D_{K,w} - D_{K,w,h}$ буде отримана у підрозділі 2.4. Нерівність типу Ландау – Колмогорова для оператора $D_{K,w}$ буде отримана у підрозділі 2.5.

У випадку, коли K є політопом, екстремальна послідовність $\{x_n\}$ може бути вибраною константною, $x_n = \psi_{K,w,h_N}$, де функції ψ_{K,w,h_N} визначені у (2.23), $n \in \mathbb{N}$. У випадку, коли множина $K \in \mathbb{K}$ є довільною, можна розглянути послідовність функцій $\psi_{K_{\varepsilon_n},w,h_N}$, де $K_{\varepsilon_n} \subset K$ — це політопи, що як завгодно точно наближають K, $n \in \mathbb{N}$.

2.4 Нерівність типу Островського

Головним результатом цього підрозділу є така теорема.

Теорема 2.4.1. *Нехай* $p \in (d, \infty]$, $C \in \mathcal{C}$, $K \in \mathbb{K}$ *— це політоп,* $h > 0$ *і* $f \in W^{1,p}(hK \cap C)$. *Для кожного* $w \in \mathcal{W}_{p'}(0,h)$ *маємо*

$$\left| \int_{hK \cap C} w(|y|_K)[f(y) - f(\theta)]dy \right| \\ \leq (d \cdot \mathrm{meas}(K \cap C))^{\frac{1}{p'}} \|g_{w,h}\|_{\mathcal{L}_{p'}(0,h)} \||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(hK \cap C)}. \tag{2.8}$$

Нерівність є точною. Вона перетворюється на рівність для функцій $a \cdot f_e + b$, *де* $a, b \in \mathbb{R}$ *і*

$$f_e(y) = f_{e,h}(y) = \int_0^{|y|_K} g_{w,h}^{p'-1}(u)du,\ y \in hK \cap C. \tag{2.9}$$

Якщо додатково $w \in \mathcal{W}^*_{p'}(0,h)$, *то нерівність* (2.8) *справедлива і точна для усіх* $K \in \mathbb{K}$.

Відмітимо, що вже у випадку $w \equiv 1$, маємо $\|g_{w,h}\|_{\mathcal{L}_{p'}(0,h)} \to \infty$ при $p \to d+0$ (див. теорему 2.7.1, де величина $\|g_{w,h}\|_{\mathcal{L}_{p'}(0,h)}$ записана у більш явному вигляді при $w \equiv 1$). Тому, взагалі кажучи, неможливо написати нерівність виду (2.8) при $p = d$.

2.4.1 Допоміжні результати

Нам потрібна така лема, яка випливає з результатів у [114, Розділ 6.9].

Лема 2.4.1. *Припустимо, що $Q \subset \mathbb{R}^d$ — це відкрита опукла множина, $f \in W^{1,p}(Q)$ і $x, y \in Q$. Тоді*

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 (y - x, \nabla f[(1-t)x + ty])\, dt.$$

Ми будемо використовувати такий наслідок формули (див. напр. [79, теорема 3.2.12]) коплощі.

Лема 2.4.2. *Нехай $C \in \mathcal{C}$, $K \in \mathbb{K}$ — це політоп, γ — це грань $K \cap C$, що не містить початок координат θ, і δ — це відстань від θ до площини, що містить γ. Покладемо*

$$\Gamma := \operatorname{conv}(\{\theta\} \cup \gamma). \tag{2.10}$$

Для всіх $h > 0$ і інтегровних $g\colon hK \cap C \to \mathbb{R}$

$$\int_{h\Gamma} g(x)dx = \delta \int_0^h \rho^{d-1} \int_\gamma g(\rho y) dy d\rho.$$

Доведення. Нехай n — це одинична зовнішня нормаль грані γ. Розглянемо функцію $u(x) = \frac{1}{\delta}(n, x)$. Тоді $|\nabla u(x)|_2 = \frac{1}{\delta}$ для всіх $x \in \mathbb{R}^d$, $\gamma \subset \{x \in \mathbb{R}^d\colon u(x) = 1\}$, і використовуючи формулу коплощі, отримаємо

$$\int_{h\Gamma} g(x)dx = \delta \int_{h\Gamma} g(x)|\nabla u(x)|_2 dx$$
$$= \delta \int_0^h \int_{\rho\cdot\gamma} g(y) dy d\rho = \delta \int_0^h \rho^{d-1} \int_\gamma g(\rho z) dz d\rho.$$

□

Лема 2.4.3. *Якщо $C \in \mathcal{C}$, $h > 0$, $p \in [1, \infty)$ і $w \in \mathcal{L}_p(0, h)$, то для кожного політопа $K \in \mathbb{K}$*

$$\int_{hK \cap C} w^p(|y|_K) dy = d \cdot \operatorname{meas}(K \cap C) \int_0^h w^p(t) t^{d-1} dt.$$

Доведення. Нехай $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ — це усі грані політопа $K \cap C$, що не містять початок координат θ, $\delta_1, \ldots, \delta_k$ — це відстані від відповідних площин до початку координат. Покладемо $\Gamma_s = \operatorname{conv}(\{\theta\} \cup \gamma_s)$, $s = 1, \ldots, k$. Використовуючи лему 2.4.2, отримаємо

$$\int\limits_{hK \cap C} w^p(|x|_K) dx = \sum_{s=1}^{k} \int\limits_{h\Gamma_s} w^p(|x|_K) dx = \sum_{s=1}^{k} \delta_s \int\limits_0^h \rho^{d-1} \int\limits_{\gamma_s} w^p(|\rho z|_K) dz d\rho$$

$$= \sum_{s=1}^{k} d \cdot \operatorname{meas} \Gamma_s \int\limits_0^h \rho^{d-1} w^p(\rho) d\rho = d \cdot \operatorname{meas}(K \cap C) \int\limits_0^h w^p(\rho) \rho^{d-1} d\rho.$$

□

Лема 2.4.4. *Нехай $K \in \mathbb{K}$ — це політоп, γ — це його грань, δ — це відстань від початку координат θ до площини, що містить грань γ, і n — це одинична зовнішня нормаль грані γ. Тоді $|n|_{K^\circ} = \delta$.*

Доведення. Оскільки множина K є опуклою, то вона лежить з одного боку площини, що містить γ. Тому

$$|n|_{K^\circ} = \sup\{(x, n) \colon |x|_K \leq 1\} \leq \delta.$$

З іншого боку, якщо $y \in \gamma$, то $|y|_K = 1$ і $(y, n) = \delta$. □

Лема 2.4.5. *Нехай $K \in \mathbb{K}$ — це політоп, $h > 0$, $p \in (d, \infty]$, $g \in \mathcal{L}_p(0, h)$ і*

$$f(y) = \int_0^{|y|_K} g(u) du, \; y \in hK.$$

Якщо γ — це грань K з одиничною зовнішньою нормаллю n, δ — це відстань між початком координат θ і площиною, що містить γ, і Γ означена у (2.10), то для $y \in \operatorname{int} h\Gamma$

$$\nabla f(y) = \frac{g(|y|_K)}{\delta} \cdot n. \tag{2.11}$$

Крім того, для майже всіх $y \in hK$

$$|\nabla f(y)|_{K^\circ} = g(|y|_K). \tag{2.12}$$

Якщо $p < \infty$, то $f \in W^{1,p}(hK)$.

Доведення. Відмітимо, що для всіх $y \in \operatorname{int} h\Gamma$,

$$|y|_K = \frac{1}{\delta}(y, n). \tag{2.13}$$

Нехай $n = (n_1, \dots, n_d)$ і для $j \in \{1, \dots, d\}$, e_j — це j-ий елемент звичайного базису у $\mathbb{R}^d$. Використовуючи (2.13), отримаємо

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(y) = \lim_{\eta \to 0} \frac{1}{\eta} \int_{|y|_K}^{|y+\eta e_j|_K} g(u)du = \lim_{\eta \to 0} \frac{1}{\eta} \int_{|y|_K}^{|y|_K + \frac{\eta}{\delta} n_j} g(u)du = g(|y|_K) \cdot \frac{n_j}{\delta}.$$

З цього випливає (2.11), і використовуючи лему 2.4.4, отримаємо (2.12). З леми 2.4.3 випливає, що $|\nabla f(\cdot)|_{K^\circ} \in L_p(hK)$, якщо $p < \infty$. □

Лема 2.4.6. *Нехай задано $C \in \mathcal{C}$, $p \in (d, \infty]$, політоп $K \in \mathbb{K}$, $h > 0$ і $f \in W^{1,p}(hK \cap C)$. Для кожного $w \in \mathcal{W}_{p'}(0, h)$ маємо*

$$\int_{hK \cap C} \int_0^1 w(|y|_K)|y|_K |\nabla f(ty)|_{K^\circ} dtdy = \int_{hK \cap C} |\nabla f(y)|_{K^\circ} g_{w,h}(|y|_K)dy. \tag{2.14}$$

Доведення. Нехай γ, n, δ і Γ такі ж як і у лемі 2.4.2. Розділимо множину $hK \cap C$ на симплекси $h\Gamma$ і перетворимо кожен з доданків, які ми отримаємо з лівої частини (2.14).

$$\int_{h\Gamma} \int_0^1 w(|y|_K)|y|_K |\nabla f(ty)|_{K^\circ} dtdy$$

$$(\text{лема } 2.4.2) = \delta \int_\gamma \int_0^h \int_0^1 w(|\rho z|_K)\rho^{d-1}|\rho z|_K |\nabla f(\rho tz)|_{K^\circ} dtd\rho dz$$

$$\left(\text{заміна } t = \frac{s}{\rho}; \text{ відмітимо, що } |\rho z|_K = \rho \text{ для всіх } z \in \gamma\right)$$

$$= \delta \int_\gamma \int_0^h \int_0^\rho w(\rho)\rho^{d-1} |\nabla f(sz)|_{K^\circ} dsd\rho dz$$

(зміна порядку інтегрування у внутрішніх інтегралах)

$$= \delta \int_\gamma \int_0^h |\nabla f(sz)|_{K^\circ} \int_s^h w(\rho)\rho^{d-1} d\rho ds dz$$
$$= \delta \int_0^h s^{d-1} \int_\gamma |\nabla f(sz)|_{K^\circ} g_{w,h}(|sz|_K) dz ds$$
$$(\text{лема } 2.4.2) = \int_{h\Gamma} |\nabla f(y)|_{K^\circ} g_{w,h}(|y|_K) dy.$$

Додаючи усі такі доданки, отримаємо необхідне. □

Нам буде потрібна така технічна лема, яка дозволить переносити результати з політопів $K_\varepsilon \in \mathbb{K}$ на довільні множини $K \in \mathbb{K}$.

Лема 2.4.7. *Нехай $C \in \mathcal{C}$, $p \in (d, \infty]$, $K \in \mathbb{K}$, $h > 0$, $f \in W^{1,p}(hK \cap C)$ і $w \in \mathcal{W}^*_{p'}(0,h)$. Для кожного $\varepsilon > 0$ виберемо політоп $K_\varepsilon \in \mathbb{K}$, $K \supset K_\varepsilon$ такий, що*

$$\max\left\{\sup_{x\in K}\inf_{y\in K_\varepsilon}|x-y|_2, \sup_{x\in K_\varepsilon}\inf_{y\in K}|x-y|_2\right\} < \varepsilon. \tag{2.15}$$

Тоді при $\varepsilon \to 0$

$$\int_{hK_\varepsilon\cap C}[w(|y|_{K_\varepsilon}) - w(|y|_K)][f(y) - f(\theta)]dy \to 0 \tag{2.16}$$

і

$$\int_{h(K\setminus K_\varepsilon)\cap C} w(|y|_K)[f(y) - f(\theta)]dy \to 0. \tag{2.17}$$

Доведення. Спочатку доведемо (2.16). Оскільки $\theta \in \operatorname{int} K_\varepsilon$ і $K_\varepsilon \subset K$, то існує $\nu = \nu(\varepsilon) \in (0,1)$ таке, що для всіх $y \in K$,

$$\nu|y|_{K_\varepsilon} \le |y|_K \le |y|_{K_\varepsilon},$$

і $\nu(\varepsilon) \to 1$ при $\varepsilon \to 0$. Крім того, оскільки $K_\varepsilon \subset K$, маємо $K_\varepsilon^\circ \supset K^\circ$, і тому

$$|y|_{K_\varepsilon^\circ} \le |y|_{K^\circ},\ y \in \mathbb{R}^d. \tag{2.18}$$

Використовуючи лему 2.4.1, отримаємо

$$\left|\int_{hK_\varepsilon\cap C}[w(|y|_{K_\varepsilon}) - w(|y|_K)][f(y) - f(\theta)]dy\right|$$

$$= \left| \int_{hK_\varepsilon \cap C} [w(|y|_{K_\varepsilon}) - w(|y|_K)] \int_0^1 (y, \nabla f(ty)) dt dy \right|$$
$$\leq \int_{hK_\varepsilon \cap C} \int_0^1 |w(|y|_{K_\varepsilon}) - w(|y|_K)| |y|_{K_\varepsilon} |\nabla f(ty)|_{K_\varepsilon^\circ} dt dy$$
$$\leq \int_{hK_\varepsilon \cap C} \int_0^1 w_\nu(|y|_{K_\varepsilon}) |y|_{K_\varepsilon} |\nabla f(ty)|_{K_\varepsilon^\circ} dt dy,$$

де w_ν означено у (2.5). Використовуючи лему 2.4.6 і нерівність Гельдера, отримаємо оцінку

$$\left| \int_{hK_\varepsilon \cap C} [w(|y|_{K_\varepsilon}) - w(|y|_K)][f(y) - f(\theta)] dy \right|$$
$$\leq \||\nabla f|_{K_\varepsilon^\circ}\|_{L_p(hK_\varepsilon \cap C)} \|g_{w_\nu,h}(|\cdot|_{K_\varepsilon})\|_{L_{p'}(hK_\varepsilon \cap C)}.$$

Застосовуючи нерівність (2.18), лему 2.4.3 і припущення (2.6), отримаємо необхідне. Далі ми доводимо (2.17).

$$\left| \int_{h(K \setminus K_\varepsilon) \cap C} w(|y|_K)[f(y) - f(\theta)] dy \right|$$
$$\leq \int_0^1 \int_{h(K \setminus K_\varepsilon) \cap C} w(|y|_K) |y|_K |\nabla f(ty)|_{K^\circ} dy dt$$
$$\leq \int_0^1 \left(\int_{h(K \setminus K_\varepsilon) \cap C} (w(|y|_K)|y|_K)^{p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{h(K \setminus K_\varepsilon) \cap C} |\nabla f(ty)|_{K^\circ}^p dy \right)^{\frac{1}{p}} dt$$
$$= \left(\int_{h(K \setminus K_\varepsilon) \cap C} (w(|y|_K)|y|_K)^{p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \int_0^1 t^{-\frac{d}{p}} \left(\int_{ht(K \setminus K_\varepsilon) \cap C} |\nabla f(z)|_{K^\circ}^p dz \right)^{\frac{1}{p}} dt.$$

Оскільки $p > d$, а отже $-\frac{d}{p} > -1$, і $\operatorname{meas} ht(K \setminus K_\varepsilon) \leq \operatorname{meas} h(K \setminus K_\varepsilon) \to 0$, при $\varepsilon \to 0$, ми отримаємо

$$\int_0^1 t^{-\frac{d}{p}} \left(\int_{ht(K \setminus K_\varepsilon) \cap C} |\nabla f(z)|_{K^\circ}^p dz \right)^{\frac{1}{p}} dt \to 0, \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Множина $h(K \setminus K_\varepsilon)$ відділена від θ для всіх достатньо малих $\varepsilon > 0$, тому $\int_{h(K \setminus K_\varepsilon) \cap C} (w(|y|_K)|y|_K)^{p'} dy$ є збіжним, оскільки $w \in \mathcal{L}_{p'}(\eta, h)$ для кожного $\eta > 0$. $\square$

2.4.2 Доведення теореми 2.4.1

Доведення. Спочатку доведемо твердження теореми у випадку, коли K — це політоп. Використовуючи леми 2.4.1 і 2.4.6, а також нерівність Гельдера, отримаємо

$$\left|\int_{hK\cap C} w(|y|_K)[f(y)-f(\theta)]dy\right| = \left|\int_{hK\cap C} w(|y|_K)\int_0^1 (y,\nabla f(ty))dtdy\right|$$
$$\leq \int_{hK\cap C}\int_0^1 w(|y|_K)|y|_K|\nabla f(ty)|_{K^\circ}dtdy = \int_{hK\cap C}|\nabla f(y)|_{K^\circ}g_{w,h}(|y|_K)dy$$
$$\leq \|\,|\nabla f|_{K^\circ}\,\|_{L_p(hK\cap C)}\,\|g_{w,h}(|\cdot|_K)\|_{L_{p'}(hK\cap C)}\,, \quad (2.19)$$

і нерівність (2.8) випливає з леми 2.4.3.

Той факт, що функція f_e з (2.9) належить класу $W^{1,p}(hK\cap C)$, випливає з рівності $(p'-1)p=p'$ і лем 2.4.3 і 2.4.5.

Для того, щоб довести, що функція f_e перетворює нерівність (2.8) у рівність, розглянемо нерівності, які були використані у процесі доведення. Перш за все відмітимо, що всередині кожної з множин $\operatorname{int}\Gamma$, які розбивають множину $hK\cap C$ (див. лему 2.4.2), згідно з лемою 2.4.5, маємо

$$(y,\nabla f_e(ty)) = (y,n)\frac{g_{w,h}^{p'-1}(|ty|_K)}{\delta} = |y|_K\cdot|\nabla f_e(ty)|_{K^\circ},$$

а отже перша з нерівностей у (2.19) перетворюється на рівність на функції f_e. Крім того, оскільки $p(p'-1)=p'$, то використовуючи лему 2.4.5, отримаємо $|\nabla f_e(y)|_{K^\circ}^p = g_{w,h}^{p'}(|y|_K)$, і отже і друга нерівність у (2.19) також перетворюється на рівність для функції f_e. Тому функція f_e (а отже і функції $a\cdot f+b$ для будь-яких $a,b\in\mathbb{R}$) перетворює нерівність (2.8) на рівність. Теорему доведено у випадку, коли K — це політоп.

Нехай тепер $w\in\mathcal{W}_{p'}^*(0,h)$ і K — це довільна множина з $\mathbb{K}$. Для $\varepsilon>0$ виберемо політоп $K_\varepsilon\in\mathbb{K}$, $K\supset K_\varepsilon$ такий, що виконується нерівність (2.15). Для довільного $f\in W^{1,p}(hK\cap C)$

$$\left|\int_{hK\cap C} w(|y|_K)[f(y)-f(\theta)]dy\right| = \left|\int_{hK_\varepsilon\cap C} w(|y|_{K_\varepsilon})[f(y)-f(\theta)]dy\right.$$
$$+\int_{hK_\varepsilon\cap C}[w(|y|_K)-w(|y|_{K_\varepsilon})][f(y)-f(\theta)]dy$$

$$+\int_{h(K\setminus K_\varepsilon)\cap C} w(|y|_K)[f(y)-f(\theta)]dy\Bigg|. \quad (2.20)$$

Використовуючи нерівності (2.18) і (2.8), ми отримаємо при $\varepsilon \to 0$

$$\begin{aligned}\Bigg|\int_{hK_\varepsilon\cap C} & w(|y|_{K_\varepsilon})[f(y)-f(\theta)]dy\Bigg| \\ &\leq (d\cdot \mathrm{meas}(K_\varepsilon\cap C))^{\frac{1}{p'}}\,\|g_{w,h}\|_{\mathcal{L}_{p'}(0,h)}\,\||\nabla f|_{K_\varepsilon^\circ}\|_{L_p(hK_\varepsilon\cap C)} \\ &\leq (d\cdot \mathrm{meas}(K_\varepsilon\cap C))^{\frac{1}{p'}}\,\|g_{w,h}\|_{\mathcal{L}_{p'}(0,h)}\,\||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(hK_\varepsilon\cap C)} \\ &= (1+o(1))\,(d\cdot \mathrm{meas}(K\cap C))^{\frac{1}{p'}}\,\|g_{w,h}\|_{\mathcal{L}_{p'}(0,h)}\,\||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(hK\cap C)}. \quad (2.21)\end{aligned}$$

Враховуючи лему 2.4.7, отримаємо, що другий і третій доданки у правій частині (2.20) прямують до нуля при $\varepsilon \to 0$. Тому ми отримуємо, що нерівність (2.8) виконується для довільної функції $f \in W^{1,p}(hK\cap C)$. Для того, щоб довести точність нерівності (2.8), достатньо відмітити, що у (2.21) при $f = f_e$ ми отримуємо

$$\begin{aligned}\Bigg|\int_{hK_\varepsilon\cap C} & w(|y|_{K_\varepsilon})[f(y)-f(\theta)]dy\Bigg| \\ &= (1+o(1))\,(d\cdot \mathrm{meas}(K\cap C))^{\frac{1}{p'}}\,\|g_{w,h}\|_{\mathcal{L}_{p'}(0,h)}\,\||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(hK\cap C)},\end{aligned}$$

і тому константу у правій частині (2.8) не можна зробити меншою. □

2.5 Нерівності типу Ландау–Колмогорова

Головним результатом цього підрозділу є наступні дві теореми, що дають точні нерівності типу Ландау–Колмогорова у адитивній і мультиплікативній формі.

Теорема 2.5.1. *Нехай задано $p \in (d,\infty]$, $C \in \mathcal{C}$, політоп $K \in \mathbb{K}$, $h > 0$, $w \in \mathcal{W}_{p'}(0,h)\cap \mathcal{L}_1(h,\infty)$. Для кожної функції $f \in L^1_{\infty,p}(C)$ маємо*

$$\begin{aligned}\|D_{K,w}f\|_{L_\infty(C)} \leqslant (d\cdot \mathrm{meas}(K\cap C))^{\frac{1}{p'}}\,\|g_{w,h}\|_{\mathcal{L}_{p'}(0,h)}\cdot \||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(C)} \\ + 2d\cdot \mathrm{meas}(K\cap C)\left(\int_h^\infty w(\rho)\rho^{d-1}\,d\rho\right)\|f\|_{L_\infty(C)}. \quad (2.22)\end{aligned}$$

Нерівність є точною. Вона перетворюється на рівність для функцій $a\cdot\psi$, де $a \in \mathbb{R}$ і

$$\psi(t) = \psi_{K,w,h}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^h g_{w,h}^{p'-1}(u)du - \int_0^{|t|_K} g_{w,h}^{p'-1}(u)du, & |t|_K \leqslant h, \\ -\frac{1}{2}\int_0^h g_{w,h}^{p'-1}(u)du, & |t|_K > h. \end{cases} \tag{2.23}$$

Якщо додатково $w \in \mathcal{W}_{p'}^*(0,h)$, то нерівність (2.22) справедлива і точна для довільного $K \in \mathbb{K}$.

Якщо додатково вага w є степеневою функцією, то з теореми 2.5.1 отримаємо нерівність типу Ландау–Колмогорова у мультиплікативній формі.

Теорема 2.5.2. *Нехай $p \in (d,\infty]$, $C \in \mathcal{C}$, $K \in \mathbb{K}$, і*

$$w(t) = \frac{1}{t^{d+\gamma}}, t > 0, \text{ з } 0 < \gamma < 1 - \frac{d}{p}. \tag{2.24}$$

Тоді для кожної $f \in L^1_{\infty,p}(C)$ маємо

$$\|D_{K,w}f\|_{L_\infty(C)} \leqslant \frac{X^{p'} + YZ}{X^{(p'-1)\alpha} \cdot Z^{1-\alpha}} \cdot \|f\|_{L_\infty(C)}^{1-\alpha} \cdot \||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(C)}^{\alpha}, \tag{2.25}$$

де $\alpha = \frac{p\gamma}{p-d}$, $X = (d \cdot \mathrm{meas}(K \cap C))^{\frac{1}{p'}} \|g_{w,1}\|_{\mathcal{L}_{p'}(0,1)}$,

$$Y = 2d \cdot \mathrm{meas}(K \cap C) \int_1^\infty w(\rho)\rho^{d-1}d\rho = \frac{2d \cdot \mathrm{meas}(K \cap C)}{\gamma}$$

і $Z = \frac{1}{2}\int_0^1 g_{w,1}^{p'-1}(u)du$. Нерівність є точною. Якщо K — це політоп, то для кожного $h > 0$ вона перетворюється на рівність на функції $\psi_{K,w,h}$ означеній у (2.23).

Доведення цих результатів буде дано у наступних пунктах цього підрозділу.

2.5.1 Допоміжні результати

Лема 2.5.1. *Нехай задано $0 < h < H$, $w \in \mathcal{L}_1(h,H)$, множини $K_\varepsilon \in \mathbb{K}$, $\varepsilon \in [0,1]$ є такими, що $K_{\varepsilon_1} \subset K_{\varepsilon_2}$ при $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, і $A \subset \mathbb{R}^d$ — це вимірна множина така, що $|t|_{K_\varepsilon} \in [h,H]$ для всіх $t \in A$ і $\varepsilon \in [0,1]$. Тоді для*

кожного $\gamma > 0$ *існує* $\nu > 0$ *таке, що для всіх* $\varepsilon \in [0,1]$ *і* $B \subset A$ *з* $\operatorname{meas} B < \nu$ *маємо*

$$\int_B w(|t|_{K_\varepsilon})dt < \gamma.$$

Доведення. Оскільки $K_\varepsilon \in \mathbb{K}$ і $K_0 \subset K_\varepsilon \subset K_1$ для всіх $\varepsilon \in [0,1]$, то існують $0 < r < R$ такі, що $B_r \subset K_\varepsilon \subset B_R$, для всіх $\varepsilon \in [0,1]$, де B_r і B_R це кулі у $\mathbb{R}^d$ з центром в точці θ і радіусами r і R відповідно.

Доведемо спочатку, що усі функції $w(|\cdot|_{K_\varepsilon})$ є інтегровними на A, $\varepsilon \in [0,1]$.

Відмітимо, що для кожного $\varepsilon > 0$ функція $t \mapsto |t|_{K_\varepsilon} \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ є ліпшицевою. Дійсно, для кожних $t, s \in \mathbb{R}^d$, $|t|_{K_\varepsilon} = |t - s + s|_{K_\varepsilon} \le |t - s|_{K_\varepsilon} + |s|_{K_\varepsilon}$, і, використовуючи еквівалентність норм у скінченно-вимірних просторах,

$$|t|_{K_\varepsilon} - |s|_{K_\varepsilon} \le |t - s|_{K_\varepsilon} \le C|t - s|_2$$

з деякою константою $C > 0$. Міняючи місцями t і s, отримаємо необхідне. За теоремою Радемахера, градієнт $\nabla|\cdot|_{K_\varepsilon}$ існує майже всюди. Для кожного $\theta \neq x \in \mathbb{R}^d$ такого, що $\nabla|x|_{K_\varepsilon}$ існує, покладемо $v = \frac{x}{|x|_2}$. Тоді

$$|\nabla|x|_{K_\varepsilon}|_2 \ge (\nabla|x|_{K_\varepsilon}, v) = \lim_{s\to 0} \frac{|x + s\cdot v|_{K_\varepsilon} - |x|_{K_\varepsilon}}{s} \ge \frac{1}{R}. \tag{2.26}$$

Використовуючи формулу коплощі і (2.26), маємо

$$\begin{aligned}\int_A w(|t|_{K_\varepsilon})dt &\le R\int_A w(|t|_{K_\varepsilon})|\nabla|t|_{K_\varepsilon}|_2 dt \\ &\le R\int_h^H \int_{|s|_{K_\varepsilon}=\rho} w(|s|_{K_\varepsilon})ds d\rho = R\cdot \operatorname{meas}\partial K_\varepsilon \int_h^H w(\rho)\rho^{d-1}d\rho, \end{aligned} \tag{2.27}$$

звідки випливає інтегровність функції $w(|\cdot|_{K_\varepsilon})$. Використовуючи абсолютну неперервність інтеграла, для кожного $\gamma > 0$ існує $\nu_0(\gamma) > 0$ таке, що $\int_B w(|t|_{K_0})dt < \gamma$ як тільки $\operatorname{meas} B \le \nu_0(\gamma)$.

Оскільки $K_0 \subset K_\varepsilon$ для всіх $\varepsilon \in [0,1]$ і $K_\varepsilon \in \mathbb{K}$, то існує $\beta \in (0,1]$ таке, що $\beta|t|_{K_0} \le |t|_{K_\varepsilon} \le |t|_{K_0}$ для всіх $t \in \mathbb{R}^d$. Для кожного $\varepsilon \in [0,1]$ і ρ з одиничної сфери S^{d-1} простору $\mathbb{R}^d$, покладемо $\alpha(\rho,\varepsilon) = \frac{|\rho|_{K_\varepsilon}}{|\rho|_{K_0}}$. Тоді $1 \ge \alpha(\rho,\varepsilon) \ge \beta > 0$ для всіх $\rho \in S^{d-1}$ і $\varepsilon \in [0,1]$.

Нехай $B \subset A$ — це вимірна множина. Для $\rho \in S^{d-1}$ і $\varepsilon \in [0,1]$, позначимо через $l(B;\rho,\varepsilon)$ множину значень $|t|_{K_\varepsilon}$ для точок $t \in B$, що належать променю з початком у θ і напрямком ρ.

Нехай $\varepsilon \in [0,1]$. Разом з множиною B, розглянемо множину B_ε таку, що $l(B_\varepsilon;\rho,\varepsilon) = \alpha(\rho,\varepsilon) l(B;\rho,\varepsilon)$ для кожного $\rho \in S^{d-1}$. Тоді $\operatorname{meas} B_\varepsilon \le \operatorname{meas} B$ і

$$\begin{aligned}\int_B w(|t|_{K_\varepsilon})dt &= \int_{S^{d-1}} \int_{l(B;\rho,\varepsilon)} s^{d-1} w(s) ds d\rho \\ &= \int_{S^{d-1}} \int_{\alpha(\rho,\varepsilon) l(B;\rho,\varepsilon)} \frac{u^{d-1}}{\alpha^d(\rho,\varepsilon)} w\left(\frac{u}{\alpha(\rho,\varepsilon)}\right) du d\rho \\ &\le \frac{1}{\beta^d} \int_{S^{d-1}} \int_{l(B_\varepsilon;\rho,\varepsilon)} u^{d-1} w\left(\frac{u}{\alpha(\rho,\varepsilon)}\right) du d\rho = \frac{1}{\beta^d} \int_{B_\varepsilon} w(|t|_{K_0}) dt.\end{aligned}$$

Тому для кожного $\gamma > 0$ і $\varepsilon \in [0,1]$, маємо

$$\int_B w(|t|_{K_\varepsilon})dt \le \frac{1}{\beta^d} \int_{B_\varepsilon} w(|t|_{K_0}) \le \gamma,$$

як тільки $\operatorname{meas} B < \nu_0(\gamma \cdot \beta^d)$. □

Лема 2.5.2. *Нехай задано множину $K \in \mathbb{K}$. Для кожного $\varepsilon \in (0,1]$ виберемо політоп $K_\varepsilon \in \mathbb{K}$ так, що $K_\varepsilon \supset K$ і виконується нерівність* (2.15). *Якщо $K_{\varepsilon_1} \subset K_{\varepsilon_2}$ при $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, $h > 0$ і $w \in \mathcal{L}_1(h,+\infty)$, то*

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus hK_\varepsilon} |w(|t|_K) - w(|t|_{K_\varepsilon})| dt = o(1) \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Доведення. Для зручності покладемо $K_0 = K$. Оскільки $w \in \mathcal{L}_1(h,+\infty)$, то

$$\int_H^\infty w(r) r^{d-1} dr = o(1) \text{ при } H \to \infty. \tag{2.28}$$

Для всіх $H > h$,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d \setminus hK_\varepsilon} |w(|t|_K) - w(|t|_{K_\varepsilon})| dt \\ &= \int_{HK_\varepsilon \setminus hK_\varepsilon} |w(|t|_K) - w(|t|_{K_\varepsilon})| dt + \int_{\mathbb{R}^d \setminus HK_\varepsilon} |w(|t|_K) - w(|t|_{K_\varepsilon})| dt \\ &\le \int_{HK_\varepsilon \setminus hK_\varepsilon} |w(|t|_K) - w(|t|_{K_\varepsilon})| dt + \int_{\mathbb{R}^d \setminus HK} w(|t|_K) dt + \int_{\mathbb{R}^d \setminus HK_\varepsilon} w(|t|_{K_\varepsilon}) dt.\end{aligned}$$

Використовуючи (2.28) і аналогічні до доведення (2.27) аргументи, можна показати, що останні два доданки прямують до 0 при $H \to \infty$ рівномірно по ε. Тому для довільного $\gamma > 0$ можна обрати H так, щоб сума двох останніх доданків була менша за γ при $\varepsilon \in [0,1]$.

Зафіксуємо це число H і оцінимо зверху перший доданок. Використовуючи теорему Лузіна, знайдемо неперервну на $A := \left[h, \sup_{t \in HK_1 \setminus hK} |t|_K\right]$ функцію $\overline{w}$, яка відрізняється від w на такій множині $E \subset A$, що

$$\operatorname{meas} \partial K_1 \int_E s^{d-1} ds < \nu,$$

де, використовуючи лему 2.5.1, $\nu > 0$ обрано так, щоб $\int_B w(|t|_{K_\varepsilon}) dt < \gamma$ для всіх $\varepsilon \in [0,1]$ і всіх вимірних множинах $B \subset HK_1 \setminus hK$, для яких справедлива нерівність $\operatorname{meas} B < 2\nu$. Для $\varepsilon \in [0,1]$ покладемо $E_\varepsilon := \{t \in HK_1 \setminus hK \colon |t|_{K_\varepsilon} \in E\}$. Оскільки множини K_ε вкладені і опуклі, то $\operatorname{meas} \partial K_\varepsilon$ є неспадною функцією $\varepsilon \in [0,1]$, див. напр. [61, §7]. Тоді для всіх $\varepsilon \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} \operatorname{meas} E_\varepsilon = \int_E \operatorname{meas} \partial(sK_\varepsilon) ds = \int_E s^{d-1} \operatorname{meas} \partial K_\varepsilon ds \\ \leq \operatorname{meas} \partial K_1 \int_E s^{d-1} ds < \nu. \quad (2.29) \end{aligned}$$

Для кожного $\varepsilon \in (0,1]$, маємо

$$\begin{aligned} &\int_{HK_\varepsilon \setminus hK_\varepsilon} |w(|t|_K) - w(|t|_{K_\varepsilon})| dt \\ &\leq \int_{(HK_\varepsilon \setminus hK_\varepsilon) \setminus (E_0 \cup E_\varepsilon)} |w(|t|_K) - w(|t|_{K_\varepsilon})| dt + \int_{E_0 \cup E_\varepsilon} |w(|t|_K) - w(|t|_{K_\varepsilon})| dt \\ &\leq \int_{HK_1 \setminus hK} |\overline{w}(|t|_K) - \overline{w}(|t|_{K_\varepsilon})| dt + \int_{E_0 \cup E_\varepsilon} w(|t|_K) dt + \int_{E_0 \cup E_\varepsilon} w(|t|_{K_\varepsilon}) dt. \end{aligned}$$

Згідно з вибором ν і (2.29), маємо

$$\int_{E_0 \cup E_\varepsilon} w(|t|_K) dt + \int_{E_0 \cup E_\varepsilon} w(|t|_{K_\varepsilon}) dt \leq 2\gamma$$

для всіх $\varepsilon \in [0,1]$. Оскільки $\overline{w}$ є неперервною на компактній множині A, то вона рівномірно неперервна на ній. Тому існує $\delta > 0$ таке, що $|\overline{w}(t_1) - \overline{w}(t_2)| < \frac{\gamma}{\operatorname{meas} HK_1 \setminus hK}$, якщо $|t_1 - t_2|_2 < \delta$. Для всіх малих $\varepsilon > 0$ маємо

$||t|_K - |t|_{K_\varepsilon}| < \delta$ для кожного $t \in HK_1 \setminus hK$, тому для такого ε маємо

$$\int_{HK_\varepsilon \setminus hK_\varepsilon} |\overline{w}(|t|_K) - \overline{w}(|t|_{K_\varepsilon})| dt < \gamma.$$

З цього випливає необхідне. □

Лема 2.5.3. *Нехай $C \in \mathcal{C}$, $h > 0$, $K \in \mathbb{K}$ і $w \in \mathcal{L}_1(h, +\infty)$. Тоді оператор*

$$D_{K,w,h} \colon L_\infty(C) \to L_\infty(C)$$

визначений у (2.7) є обмеженим і

$$\|D_{K,w,h}\| = 2d \cdot \operatorname{meas}(K \cap C) \int_h^\infty \omega(\rho)\rho^{d-1}\, d\rho.$$

Якщо $f \in L_\infty(C)$ є такою, що $D_{K,w,h}f$ є неперервною у точці θ і така, що $f(\theta) = \|f\|_{L_\infty(C)}$ і $f(x) = -\|f\|_{L_\infty(C)}$ для всіх $x \in C \setminus hK$, то

$$\|D_{K,w,h}f\|_{L_\infty(C)} = D_{K,w,h}f(\theta). \tag{2.30}$$

Доведення. Спочатку доведемо, що лема справедлива для політопа K. Для $f \in L_\infty(C)$ і $x \in C$

$$|D_{K,w,h}f(x)| = \left| \int_{C \setminus hK} w(|t|_K)(f(x) - f(x+t))\, dt \right| \leqslant 2\|f\|_{L_\infty(C)} \int_{C \setminus hK} w(|t|_K)\, dt. \tag{2.31}$$

Розіб'ємо множину $hK \cap C$ на симплекси $h\Gamma_i$, $i = 1, \ldots, n$, і через C_i позначимо конус, що відповідає $h\Gamma_i$. Як і у доведенні леми 2.4.3 маємо

$$\int_{C \setminus hK} w(|t|_K)\, dt = \sum_{i=1}^n \int_{C_i \setminus h\Gamma_i} w(|t|_K)\, dt = \sum_{i=1}^n \delta_i \int_h^\infty \rho^{d-1} \int_{\gamma_i} w(|y\rho|_K)\, dy$$
$$= \sum_{i=1}^n \delta_i \cdot \operatorname{meas} \Gamma_i \int_h^\infty \rho^{d-1} w(\rho)\, d\rho = d \cdot \operatorname{meas}(K \cap C) \int_h^\infty \rho^{d-1} w(\rho)\, d\rho.$$

Використовуючи (2.31), отримаємо нерівність

$$\|D_{K,w,h}f\|_{L_\infty(C)} \leqslant 2\|f\|_{L_\infty(C)} d \cdot \operatorname{meas}(K \cap C) \int_h^\infty \rho^{d-1} w(\rho)\, d\rho. \tag{2.32}$$

Легко побудувати приклад функції f, для якої виконуються описані в умові леми властивості (функції визначені у (2.23) є такими при додатковому припущенні стосовно w, див. лему 2.5.4 нижче). Рівність (2.30) може бути отримана безпосередніми обчисленнями.

Нехай тепер K — це довільна множина з $\mathbb{K}$. Покладемо $K_0 = K$ і виберемо сім'ю $K_\varepsilon \in \mathbb{K}$ політопів, $\varepsilon \in (0, 1]$, які задовольняють умовам леми 2.5.2. Для всіх $f \in L_\infty(C)$ і $x \in C$,

$$\begin{aligned}
|D_{K,w,h}f(x)| &= \left| \int_{C\setminus hK} w(|t|_K)(f(x) - f(x+t))dt \right| \\
&= \left| \int_{C\setminus hK_\varepsilon} w(|t|_{K_\varepsilon})(f(x) - f(x+t))dt \right. \\
&\quad + \int_{h(K_\varepsilon\setminus K)\cap C} w(|t|_K)(f(x) - f(x+t))dt \\
&\quad \left. + \int_{C\setminus hK_\varepsilon} (w(|t|_K) - w(|t|_{K_\varepsilon}))(f(x) - f(x+t))dt \right| .
\end{aligned}$$

Далі ми оцінимо кожний з доданків у правій частині цієї рівності.

Використовуючи нерівність (2.32), маємо при $\varepsilon \to 0$

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{C\setminus hK_\varepsilon} w(|t|_{K_\varepsilon})(f(x) - f(x+t))\, dt \right| \\
&\leqslant 2\|f\|_{L_\infty(C)} d \cdot \mathrm{meas}(K_\varepsilon \cap C) \int_h^\infty \rho^{d-1} w(\rho)\, d\rho \\
&= (1 + o(1))2\|f\|_{L_\infty(C)} d \cdot \mathrm{meas}(K \cap C) \int_h^\infty \rho^{d-1} w(\rho)\, d\rho.
\end{aligned}$$

Крім того, нерівність в цій формулі стає рівністю, якщо $f = f_\varepsilon$ — це екстремальна для політопа K_ε функція. Використовуючи лему 2.5.1, отримаємо, що при $\varepsilon \to 0$

$$\left| \int\limits_{h(K_\varepsilon\setminus K)\cap C} w(|t|_K)(f(x) - f(x+t))dt \right| \leq 2\|f\|_{L_\infty(C)} \int\limits_{h(K_\varepsilon\setminus K)} w(|t|_K)dt = o(1).$$

Нарешті, використовуючи лему 2.5.2, маємо

$$\left| \int_{C\setminus hK_\varepsilon} (w(|t|_K) - w(|t|_{K_\varepsilon}))(f(x) - f(x+t))dt \right|$$

$$\leq 2\|f\|_{L_\infty(C)} \int_{\mathbb{R}^d \setminus hK_\varepsilon} |w(|t|_K) - w(|t|_{K_\varepsilon})| dt = o(1) \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

□

Зауваження 2.5.1. *У доведенні оцінки знизу у випадку довільного $K \in \mathbb{K}$, ми наближали K сім'єю політопів K_ε, які містили K. Якщо $w \in \mathcal{L}_1(h-\nu, \infty)$ для деякого $\nu > 0$, то аналогічні міркуванні можуть бути застосовані до сім'ї політопів $K_\epsilon \subset K$, які апроксимують K.*

Лема 2.5.4. *Нехай задано $C \in \mathcal{C}$, $p \in (d, \infty]$, політоп $K \in \mathbb{K}$, $h > 0$ і $w \in \mathcal{W}_{p'}(0,h) \cap \mathcal{L}_1(h, \infty)$. Тоді $D_{K,w}\psi$ і $D_{K,w,h}\psi$ неперервні в точці θ, де ψ означено у* (2.23).

Доведення. Функція ψ є неперервною на $\mathbb{R}^d$, і оскільки вона є константою ззовні компактної множини, то ψ є рівномірно неперервною на $\mathbb{R}^d$. Якщо $\varepsilon > 0$ і $\delta > 0$ обрано так, що $|\psi(x) - \psi(y)| < \varepsilon$ як тільки $|x-y|_2 < \delta$, то для всіх $|z|_2 < \delta$

$$\begin{aligned}
&|D_{K,w,h}\psi(\theta) - D_{K,w,h}\psi(z)| \\
&= \left| \int_{C \setminus hK} w(|t|_K)(\psi(\theta) - \psi(t) - \psi(z) + \psi(t+z)) dt \right| \\
&\leq \left| \int_{C \setminus hK} w(|t|_K)(\psi(\theta) - \psi(z)) dt \right| + \left| \int_{C \setminus hK} w(|t|_K)(\psi(t+z) - \psi(t)) dt \right| \\
&\leq 2\varepsilon \int_{C \setminus hK} w(|t|_K) dt,
\end{aligned}$$

звідки випливає неперервність $D_{K,w,h}\psi$ у точці θ.

Для того, щоб довести неперервність $D_{K,w}\psi$ в θ, достатньо довести неперервність $(D_{K,w} - D_{K,w,h})\psi$ в θ. Застосовуючи теорему 2.4.1 до функції $\psi(\cdot) - \psi(\cdot + z)$, $z \in hK \cap C$, отримаємо

$$\begin{aligned}
&|(D_{K,w} - D_{K,w,h})\psi(\theta) - (D_{K,w} - D_{K,w,h})\psi(z)| \\
&\leq \| \, |\nabla\psi(\cdot) - \nabla\psi(\cdot + z)|_{K^\circ} \, \|_{L_p(hK \cap C)} \, \|g_{w,h}(|\cdot|_K)\|_{L_{p'}(hK \cap C)} \to 0 \text{ при } z \to \theta.
\end{aligned}$$

□

2.5.2 Доведення теореми 2.5.1

Доведення. Для кожної функції $f \in L^1_{\infty,p}(C)$

$$\|D_{K,w}f\|_{L_\infty(C)} \leqslant \|D_{K,w}f - D_{K,w,h}f\|_{L_\infty(C)} + \|D_{K,w,h}f\|_{L_\infty(C)}.$$

Для всіх $y \in C$, використовуючи теорему 2.4.1, маємо

$$\begin{aligned}|D_{K,w}f(y) - D_{K,w,h}f(y)| &= \left|\int_{hK\cap C} w(|t|_K)(f(y) - f(y+t))dt\right| \\ &\leqslant (d\cdot \mathrm{meas}(K\cap C))^{\frac{1}{p'}} \|g_{w,h}\|_{\mathcal{L}_{p'}(0,h)} \||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(y+hK\cap C)} \\ &\leq (d\cdot \mathrm{meas}(K\cap C))^{\frac{1}{p'}} \|g_{w,h}\|_{\mathcal{L}_{p'}(0,h)} \||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(C)},\end{aligned}$$

і тому

$$\|D_{K,w}f - D_{K,w,h}f\|_{L_\infty(C)} \leq (d\cdot \mathrm{meas}(K\cap C))^{\frac{1}{p'}} \|g_{w,h}\|_{\mathcal{L}_{p'}(0,h)} \||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(C)}.$$

З цієї нерівності і леми 2.5.3, отримуємо нерівність (2.22).

Далі ми доводимо її точність. Спершу розглянемо випадок, коли $K \in \mathbb{K}$ є політопом. Розглянемо функцію визначену у (2.23). Відмітимо, що

$$\psi(\theta) = \frac{1}{2}\int_0^h g_{w,h}^{p'-1}(u)du = \|\psi\|_{L_\infty(C)} = \|\psi\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)},$$

і $\psi(t) = -\|\psi\|_{L_\infty(C)}$ для всіх $t \in C \setminus hK$. Тому згідно з лемами 2.5.3 і 2.5.4 маємо

$$\|D_{K,w,h}\psi\|_{L_\infty(C)} = D_{K,w,h}\psi(\theta).$$

Крім того, звуження ψ на $hK\cap C$ є екстремальною у теоремі 2.4.1 функцією, а тому

$$(D_{K,w} - D_{K,w,h})\psi(\theta) = (d\cdot \mathrm{meas}(K\cap C))^{\frac{1}{p'}} \|g_{w,h}\|_{\mathcal{L}_{p'}(0,h)} \||\nabla \psi|_{K^\circ}\|_{L_p(C)}.$$

Використовуючи лему 2.5.4, отримаємо необхідне.

Нехай тепер $K \in \mathbb{K}$ — це довільна множина. З умови теореми випливає, що $w \in \mathcal{L}_1(\nu,\infty)$ для всіх $\nu > 0$. Розглянемо монотонну за включенням сім'ю політопів $K_\varepsilon \subset K$, які скільки завгодно точно наближають K. З теореми 2.4.1, випливає, що сім'я функцій $\psi_{K_\varepsilon,w,h}$ визначених у (2.23) (більш

точно, сім'я їх звужень на $hK \cap C$) є екстремальною сім'єю для оператора $D_{K,w} - D_{K,w,h}$. Використовуючи зауваження 2.5.1, отримаємо, що та ж сама сім'я є екстремальною для оператора $D_{K,w,h}$. Звідси випливає точність нерівності (2.22). □

2.5.3 Доведення теореми 2.5.2

Нам потрібна така лема, яка, зокрема, показує, що теорему 2.5.1 можна застосовувати для ваги w, що визначена у (2.24).

Лема 2.5.5. *Нехай $p > d$, $h > 0$, і w є невід'ємною і такою, що $w(t) \cdot t^{d+\alpha}$ є обмеженою на $(0, h)$ для деякого $0 < \alpha < 1 - \frac{d}{p}$. Тоді $w \in \mathcal{W}_{p'}(0, h)$. Функція $w(t) = \frac{1}{t^{d+\alpha}}$ належить до класу $\mathcal{W}^*_{p'}(0, h)$.*

Доведення. Наступні нерівності справедливі для деяких чисел $C_1, C_2 > 0$

$$\int_0^h g_{w,h}^{p'}(u) u^{d-1} du = \int_0^h \left(\frac{1}{u^{d-1}} \int_u^h w(t) t^{d-1} dt \right)^{p'} u^{d-1} du$$

$$\leq C_1 \int_0^h \left(\frac{1}{u^{d-1}} \int_u^h \frac{1}{t^{1+\alpha}} dt \right)^{p'} u^{d-1} du = C_2 \int_0^h \left(\frac{u^{-\alpha} - h^{-\alpha}}{u^{d-1}} \right)^{p'} u^{d-1} du$$

$$= C_2 \int_0^h \left(u^{-\alpha} - h^{-\alpha} \right)^{p'} u^{(1-p')(d-1)} du < \infty,$$

оскільки

$$(1 - p')(d - 1) - \alpha p' > d - 1 - p'd + p' - p' + \frac{p'd}{p} = -1.$$

Для доведення останнього твердження леми, достатньо зауважити, що

$$\sup_{s \in [t\nu, t]} |w(t) - w(s)| = \frac{1}{t^{d+\alpha}} \cdot \left(1 - \frac{1}{\nu^{d+\alpha}} \right).$$

□

Нарешті, ми доводимо теорему 2.5.2.

Доведення. Ідея доведення теореми 2.5.2 полягає в наступному. Перш за все, лема 2.5.5 показує, що використовуючи однорідність функції w, нерівність з теореми 2.5.1 може бути переписаною так.

$$\|D_{K,w} f\|_{L_\infty(C)} \leqslant X \| |\nabla f|_{K^\circ} \|_{L_p(C)} h^{1+\beta+\frac{d}{p'}} + Y \|f\|_{L_\infty(C)} h^{d+\beta}, \tag{2.33}$$

де $\beta := -(d+\gamma)$. Обираючи

$$h = \left(\frac{\|f\|_{L_\infty(C)}}{\||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(C)}} \cdot \frac{X^{p'-1}}{Z} \right)^{\frac{p}{p-d}} \tag{2.34}$$

у нерівності (2.33), отримаємо необхідне. У випадку, коли K — це політоп, безпосередні обчислення показують, що нерівність перетворюється на рівність для функцій (2.23). У випадку довільної множини $K \in \mathbb{K}$, точність нерівності (2.25) може бути отримана апроксимацією множини K політопами.

Для функції w з (2.24) маємо $w(hs) = h^\beta w(s)$ для всіх $h, s > 0$. Тому для функції $g_{w,h}$ з (2.4), маємо

$$\begin{aligned} g_{w,h}(h \cdot u) &= \frac{1}{(hu)^{d-1}} \int_{hu}^{h} w(t) t^{d-1} dt = \frac{1}{(hu)^{d-1}} \int_u^1 w(hs)(hs)^{d-1} d(hs) \\ &= \frac{h^{1+\beta}}{u^{d-1}} \int_u^1 w(s) s^{d-1} ds = h^{1+\beta} g_{w,1}(u), u \in [0,1], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|g_{w,h}\|^{p'}_{\mathcal{L}_{p'}(0,h)} &= \int_0^h g^{p'}_{w,h}(u) u^{d-1} du = \int_0^1 g^{p'}_{w,h}(hv)(hv)^{d-1} d(hv) \\ &= h^{(1+\beta)p'+d} \int_0^1 g^{p'}_{w,1}(v) v^{d-1} dv = h^{(1+\beta)p'+d} \|g_{w,1}\|^{p'}_{\mathcal{L}_{p'}(0,1)}, \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\int_0^h g^{p'-1}_{w,h}(u) du = \int_0^1 g^{p'-1}_{w,h}(hv) d(hv) = h^{(1+\beta)(p'-1)+1} \int_0^1 g^{p'-1}_{w,1}(v) dv \tag{2.36}$$

і

$$\int_h^\infty w(\rho) \rho^{d-1} d\rho = h^{d+\beta} \int_1^\infty w(r) r^{d-1} dr = \frac{h^{d+\beta}}{\gamma}. \tag{2.37}$$

Тому нерівність з теореми 2.5.1 може бути переписаною у вигляді (2.33). Виберемо h згідно з (2.34) і використовуючи рівності

$$1 - \left(1 + \beta + \frac{d}{p'}\right) \cdot \frac{p}{p-d} = \frac{p - d - \left(p + p\beta + \frac{p}{p'} d\right)}{p-d} = -\frac{p\beta + pd}{p-d} = \alpha,$$

отримаємо

$$\|D_{K,w} f\|_{L_\infty(C)} \le X \||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(C)} \left(\frac{\|f\|_{L_\infty(C)}}{\||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(C)}} \cdot \frac{X^{p'-1}}{Z} \right)^{1-\alpha}$$

$$+Y\|f\|_{L_\infty(C)}\left(\frac{\|f\|_{L_\infty(C)}}{\||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(C)}}\cdot\frac{X^{p'-1}}{Z}\right)^{-\alpha}$$
$$=\frac{X^{p'}+YZ}{X^{(p'-1)\alpha}\cdot Z^{1-\alpha}}\|f\|^{1-\alpha}_{L_\infty(C)}\||\nabla f|_{K^\circ}\|^{\alpha}_{L_p(C)},$$

що доводить (2.25).

Нехай K — це політоп. Покажемо, що нерівність (2.25) стає рівністю для кожної функції $\psi_{K,w,h}$ з (2.23). Використовуючи (2.36), отримаємо

$$\|\psi_{K,w,h}\|_{L_\infty(C)}=\psi_{K,w,h}(\theta)=\frac{1}{2}\int_0^h g_{w,h}^{p'-1}(u)du=h^{(1+\beta)(p'-1)+1}Z. \tag{2.38}$$

З лем 2.4.3 і 2.4.5 і рівності (2.35) отримуємо

$$\||\nabla\psi_{K,w,h}|_{K^\circ}\|_{L_p(C)}=\left(\int_{hK\cap C}g_{w,h}^{(p'-1)p}(|y|_K)dy\right)^{1/p}$$
$$=\left(\int_{hK\cap C}g_{w,h}^{p'}(|y|_K)dy\right)^{1/p}=\left(d\cdot\mathrm{meas}(K\cap C)\|g_{w,h}\|^{p'}_{\mathcal{L}_{p'}(0,h)}\right)^{1/p}$$
$$=\left(d\cdot\mathrm{meas}(K\cap C)h^{(1+\beta)p'+d}\|g_{w,1}\|^{p'}_{\mathcal{L}_{p'}(0,1)}\right)^{1/p}$$
$$=X^{\frac{p'}{p}}h^{\frac{(1+\beta)p'+d}{p}}=X^{p'-1}h^{\frac{(1+\beta)p'+d}{p}}. \tag{2.39}$$

Оскільки функція $\psi_{K,w,h}$ є екстремальною у теоремі 2.5.1, то використовуючи (2.37) отримаємо

$$\|D_{K,w}\psi_{K,w,h}\|_{L_\infty(C)}=X\||\nabla\psi_{K,w,h}|_{K^\circ}\|_{L_p(C)}h^{1+\beta+\frac{d}{p'}}+Y\|\psi_{K,w,h}\|_{L_\infty(C)}h^{d+\beta}$$
$$=X^{p'}h^{1+\beta+\frac{d}{p'}+\frac{(1+\beta)p'+d}{p}}+YZh^{d+\beta+(1+\beta)(p'-1)+1}=(X^{p'}+YZ)h^{d+(1+\beta)p'}. \tag{2.40}$$

Використовуючи останні три рівності і безпосередні обчислення, отримаємо, що (2.25) перетворюється на рівність на кожній функції $\psi_{K,w,h}$.

□

2.6 Модуль неперервності оператора і відновлення оператора за неточними даними

Нагадаємо, що функція

$$\Omega(\delta) := \sup_{\substack{f\in W^K_{\infty,p}\\ \|f\|_{L_\infty(C)}\leqslant\delta}} \|D_{w,K}f\|_{L_\infty(C)},\ \delta\geqslant 0,$$

називається модулем неперервності оператора $D_{w,K}$ на множині $W^K_{\infty,p}$. Задача знаходження величини $\Omega(\delta)$ є абстрактною версією задачі про нерівності типу Ландау–Колмогорова. Іншою пов'язаною задачею є така. Нехай $\mathcal{O}$ — це множина усіх операторів $A\colon L_\infty(C)\to L_\infty(C)$ і $\mathcal{R}\subset\mathcal{O}$. Для $\delta\geqslant 0$ покладемо

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{R}) = \inf_{T\in\mathcal{R}} \sup_{\substack{f\in W^K_{\infty,p},\, g\in L_\infty(C)\\ \|f-g\|_{L_\infty(C)}\leqslant\delta}} \|D_{K,w}f - Tg\|_{L_\infty(C)}. \tag{2.41}$$

Задача оптимального відновлення оператора $D_{K,w}$ за допомогою методів з класу $\mathcal{R}$ на множині елементів $W^K_{\infty,p}$, які відомі з похибкою δ, полягає у знаходженні величини (2.41) і оптимального методу відновлення T, якщо він існує.

Позначимо через $\mathcal{L}$ множину усіх обмежених лінійних операторів

$$T\colon L_\infty(C)\to L_\infty(C).$$

Наступний результат показує зв'язок між цими екстремальними задачами.

Теорема 2.6.1. *Нехай задано $C\in\mathcal{C}$, $p\in(d,\infty]$, політоп $K\in\mathbb{K}$, $h>0$ і $w\in\mathcal{W}_{p'}(0,h)\cap\mathcal{L}_1(h,\infty)$. Тоді*

$$\mathcal{E}_{\delta_h}(\mathcal{O}) = \mathcal{E}_{\delta_h}(\mathcal{L}) = \Omega(\delta_h) = (d\cdot\mathrm{meas}(K\cap C))^{\frac{1}{p'}}\,\|g_{w,h}\|_{\mathcal{L}_{p'}(0,h)} + 2d\cdot\mathrm{meas}(K\cap C)\left(\int_h^\infty w(\rho)\rho^{d-1}\,d\rho\right)\delta_h, \tag{2.42}$$

де функція $g_{w,h}$ означена у (2.4) і

$$\delta_h = \frac{\frac{1}{2}\int_0^h g_{w,h}^{p'-1}(u)du}{\left(d\cdot\mathrm{meas}(K\cap C)\|g_{w,h}\|^{p'}_{\mathcal{L}_{p'}(0,h)}\right)^{1/p}}.$$

Якщо $w \in \mathcal{W}^*_{p'}(0,h)$, то рівність (2.42) виконується для всіх $K \in \mathbb{K}$. Якщо вага w означена у (2.24), то для всіх $\delta > 0$

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{O}) = \mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}) = \Omega(\delta) = \frac{X^{p'} + YZ}{X^{(p'-1)\alpha} \cdot Z^{1-\alpha}} \cdot \delta^{1-\alpha}, \tag{2.43}$$

де числа X, Y, Z і α означені у теоремі 2.5.2.

Ця теорема випливає з загальних результатів стосовно зв'язку між цими естремальними задачами, див. напр. [144, теорема 7.1.2]. Для повноти, ми даємо безпосереднє доведення цієї теореми.

Доведення. Припустимо, що K — це політоп. Спочатку ми доводимо твердження стосовно функції Ω. Той факт, що $\Omega(\delta_h)$ і $\Omega(\delta)$ у лівих частинах (2.42) і (2.43) менші або дорівнюють відповідних правих частин випливає з теорем 2.5.1 і 2.5.2 відповідно.

Для кожного $h > 0$, функція

$$\overline{\psi}_{K,w,h} = \frac{\psi_{K,w,h}}{\||\nabla \psi_{K,w,h}|_{K^\circ}\|_{L_p(hK \cap C)}}$$

є екстремальною у нерівності (2.22), де $\psi_{K,w,h}$ означена у (2.23). Крім того,

$$\||\nabla \overline{\psi}_{K,w,h}|_{K^\circ}\|_{L_p(C)} = \||\nabla \overline{\psi}_{K,w,h}|_{K^\circ}\|_{L_p(hK \cap C)} = 1,$$

і використовуючи перші три рівності у (2.39), маємо $\|\overline{\psi}_{K,w,h}\|_{L_\infty(C)} = \delta_h$, звідки випливає остання рівність у (2.42).

Нехай w — це функція (2.24) і $\beta = -(d+\gamma)$. Тоді показники справа (2.38) і (2.40) є різними, а тому для кожного $\delta > 0$ можна знайти $\nu, h > 0$ такі, що для функції $f = \nu \psi_{K,w,h}$ маємо $\|f\|_{L_\infty(C)} = \delta$ і $\||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(C)} = 1$. Оскільки кожна така функція f є екстремальною у (2.25), то це доводить останню рівність у (2.43).

Позначимо через $\mathfrak{o}$ функцію, що тотожно дорівнює нулю. Для кожного $\delta > 0$ і $T \in \mathcal{O}$,

$$\sup_{\substack{f \in W^K_{\infty,p},\, g \in L_\infty(C) \\ \|f-g\|_{L_\infty(C)} \leqslant \delta}} \|D_{K,w} f - Tg\|_{L_\infty(C)} \geq \sup_{f \in W^K_{\infty,p}, \|f\|_{L_\infty(C)} \leqslant \delta} \|D_{K,w} f - T\mathfrak{o}\|_{L_\infty(C)}$$

$$= \sup_{f\in W^K_{\infty,p}, \|f\|_{L_\infty(C)}\leqslant\delta} \max\left\{\|D_{K,w}f - T\mathfrak{o}\|_{L_\infty(C)}, \|D_{K,w}(-f) - T\mathfrak{o}\|_{L_\infty(C)}\right\}$$

$$\geq \frac{1}{2} \sup_{f\in W^K_{\infty,p}, \|f\|_{L_\infty(C)}\leqslant\delta} \left(\|D_{K,w}f - T\mathfrak{o}\|_{L_\infty(C)} + \|D_{K,w}f + T\mathfrak{o}\|_{L_\infty(C)}\right)$$

$$\geq \sup_{f\in W^K_{\infty,p}, \|f\|_{L_\infty(C)}\leqslant\delta} \|D_{K,w}f\|_{L_\infty(C)} = \Omega(\delta),$$

і тому

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{O}) \geq \Omega(\delta). \tag{2.44}$$

З іншого боку, для кожних $h, \delta > 0$,

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{O}) \leq \mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}) \leq \sup_{f\in W^K_{\infty,p}} \|D_{K,w}f - D_{K,w,h}f\|_{L_\infty(C)} + \|D_{K,w,h}\| \cdot \delta$$

$$= (d \cdot \mathrm{meas}(K\cap C))^{\frac{1}{p'}} \|g_{w,h}\|_{\mathcal{L}_{p'}(0,h)} + 2d\cdot\mathrm{meas}(K\cap C) \left(\int_h^\infty w(\rho)\rho^{d-1}\, d\rho\right)\delta, \tag{2.45}$$

що разом з (2.44) завершує доведення (2.42).

У випадку ваги w з (2.24), обираючи у (2.45)

$$h = \left(\delta \cdot \frac{X^{p'-1}}{Z}\right)^{\frac{p}{p-d}},$$

і застосовуючи аналогічні обчислення як і у доведенні теореми 2.5.2, отримаємо $\mathcal{E}_\delta(\mathcal{O}) \leq \Omega(\delta)$, що разом з (2.44) закінчує доведення (2.43).

Випадок довільної множини $K \in \mathbb{K}$ може бути доведеним наближенням множини K політопами. □

2.7 Оптимальне відновлення інтеграла з одиничною вагою

Результати пунктів 2.7.2 і 2.7.3 містяться у статті [20], а пункту 2.7.4 — у статті [108].

2.7.1 Позначення і необхідні допоміжні твердження

В цьому підрозділі ми розглядаємо задачу оптимізації квадратурних формул на класі $W_p^K(Q)$ (див. підрозділ 2.2) у випадку, коли $K = \square_1^d$, де для $h > 0$ позначено $\square_h^d := (-h, h)^d$. У цьому випадку $|x|_K = |x|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_d|\}$ і $|x|_{K^\circ} = |x|_1 = |x_1| + \ldots + |x_d|$. Клас $W_p^K(Q)$ перетворюється на клас $W_p^\infty(Q) := \{f \in W^{1,p}(Q) \colon \| \, |\nabla f|_1 \, \|_p \le 1\}$, $p \in (d, \infty]$.

Ми розглядаємо задачу оптимального відновлення оператора

$$\operatorname{Int} f = \int_Q f(x)dx, f \in W_p^\infty(Q),$$

де множина Q є допустимою у сенсі означення 2.2.1. Для фіксованого $n \in \mathbb{N}$ ми розглядаємо множину $\mathcal{I}_n$ інформаційних операторів

$$If = (f(x_1), \ldots, f(x_n)), x_1, \ldots, x_n \in Q. \tag{2.46}$$

Для деякого скорочення позначень у цьому підрозділі ми будемо писати $E_n(W_p^\infty(Q))$ замість $\mathcal{E}(\operatorname{Int}, W_p^\infty(Q), \mathcal{I}_n, \mathbb{R})$ (див. постановку задачі оптимального відновлення на ст. 34). Відмітимо, що у цьому випадку достатньо розглядати тільки лінійні методи відновлення інтеграла. Існування оптимальних лінійних методів відновлення відоме у багатьох ситуаціях, див. напр. [198] або [169, §1.3]. Застосовуючи теорему 2.4.1 до одиничної ваги w, ми отримаємо такий результат.

Теорема 2.7.1. *Нехай задано $p \in (d, \infty]$ і $f \in W^{1,p}(\square_h^d)$. Тоді*

$$\left| \int_{\square_h^d} f(y)dy - (2h)^d f(0) \right| \le c(d,p) \cdot h^{1+\frac{d}{p'}} \| \, |\nabla f|_1 \, \|_{L_p(\square_h^d)},$$

де

$$c(d,p) := \frac{1}{d} \left\| \frac{1}{|\cdot|_\infty^{d-1}} - |\cdot|_\infty \right\|_{L_{p'}(\square_1^d)}. \tag{2.47}$$

Нерівність є точною. Вона перетворюється на рівність для функції

$$f_{e,h}(y) = \int_0^{|y|_\infty} \left| \frac{h^{d-1}}{u^{d-1}} - \frac{u}{h} \right|^{p'-1} du. \tag{2.48}$$

Нехай задано $x_1, \ldots, x_n \in Q$ і $h > 0$. Функція $f_{e,h}$, яка означена у (2.48), визначена на межі $\partial\square_h^d$ і є константою там. Тому її можна неперервно продовжити на весь простір $\mathbb{R}^d$: вважаємо $f_{e,h}(y)$ рівною її значенню на межі $\square_h^d$ для всіх $y \notin \square_h^d$. Для кожного $y \in \mathbb{R}^d$, покладемо

$$f_h(x_1, \ldots, x_n; y) := \min_{k=1,\ldots,n} f_{e,h}(y - x_k). \tag{2.49}$$

Легко бачити, що $f_h(x_1, \ldots, x_n; y) \in W^{1,p}(Q)$ для всіх $p \in (d, \infty]$.

2.7.2 Випадок області складеної з кубів

Означення 2.7.1. *Ми будемо казати, що область $Q \subset \mathbb{R}^d$ складена з $n \in \mathbb{N}$ кубів, якщо існує $h > 0$ і точки $x_1, \ldots, x_n$ такі, що куби*

$$C_k := \{x \in \mathbb{R}^d \colon |x - x_k|_\infty < h\},$$

$k = 1, \ldots, n$, попарно не перетинаються і $\operatorname{meas}\left[Q \Delta \bigcup_{k=1}^n C_k\right] = 0$.

Головним результатом цього пункту є така теорема.

Теорема 2.7.2. *Нехай задано $d \in \mathbb{N}$, область $Q \subset \mathbb{R}^d$, що складена з n кубів з центрами $\bar{x}_k$, $k = 1, \ldots, n$, і $p \in (d; \infty]$. Тоді*

$$E_n\left(W_p^\infty(Q)\right) = \frac{c(d,p)}{n^{\frac{1}{d}}} \left[\frac{\operatorname{meas} Q}{2^d}\right]^{\frac{1}{d}+\frac{1}{p'}},$$

де константа $c(d,p)$ визначена у теоремі 2.7.1. Оптимальним набором інформаційних вузлів є множина $\{\bar{x}_k\}_{k=1}^n$, а оптимальним методом відновлення є

$$\tilde{\Phi}(f(x_1), \ldots, f(x_n)) = \frac{\operatorname{meas} Q}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k).$$

Її доведення буде дано у наступних підпунктах.

2.7.2.1 Допоміжні твердження

Лема 2.7.1. *Нехай задано область $R \subset \mathbb{R}^d$, що складена з n кубів $\square_{h,k}^d$, з довжиною ребер $h > 0$ і центрами $\bar{x}_k$, $k = 1, \ldots, n$. Нехай також $R \subset Q$*

і $x_1, \ldots, x_n \in Q$. *Тоді*

$$\int_Q f_h(x_1, \ldots, x_n; y)dy \geq \int_Q f_h(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n; y)dy \geq 0 \tag{2.50}$$

і для всіх $p \in (d, \infty]$

$$\| \, |\nabla f_h(x_1, \ldots, x_n)|_1 \, \|_{L_p(Q)} \leq \| \, |\nabla f_h(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)|_1 \, \|_{L_p(Q)}. \tag{2.51}$$

Доведення. Спочатку доведемо нерівність (2.50). Для кожного $\lambda \geq 0$ і довільних $x_1, \ldots, x_n \in Q$, розглянемо множину

$$S(x_1, \ldots, x_n; \lambda) := \{y \in Q \colon f_h(x_1, \ldots, x_n; y) \leq \lambda\}.$$

Згідно з означенням функції $f_h(x_1, \ldots, x_n; y)$, ми отримуємо, що множина $S(x_1, \ldots, x_n; \lambda)$ є перетином множини Q з об'єднанням n кубів з центрами в точках x_k, $k = 1, \ldots, n$, і рівними довжинами ребер (довжина ребер є зростаючою функцією λ). Крім того, якщо

$$\lambda_0 := \inf\{\lambda \geq 0 \colon \operatorname{meas} S(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n; \lambda) = \operatorname{meas} R\},$$

то куби з центрами у $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$, які визначають множину $S(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n; \lambda)$ попарно не перетинаються для всіх $\lambda < \lambda_0$ і $S(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n; \lambda) = Q$ для $\lambda \geq \lambda_0$. З цього випливає, що для всіх $\lambda \geq 0$

$$\operatorname{meas} S(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n; \lambda) \geq \operatorname{meas} S(x_1, \ldots, x_n; \lambda),$$

а тому

$$\begin{aligned} &\operatorname{meas}\{y \in Q \colon f_h(x_1, \ldots, x_n; y) > \lambda\} = \operatorname{meas} Q - \operatorname{meas} S(x_1, \ldots, x_n; \lambda) \\ &\geq \operatorname{meas} Q - \operatorname{meas} S(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n; \lambda) = \operatorname{meas}\{y \in Q \colon f_h(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n; y) > \lambda\}. \end{aligned}$$

З останньої нерівності випливає перша нерівність у (2.50) (див. напр. [134, §1.1]). Друга нерівність у (2.50) випливає з невід'ємності функцій f_h.

Далі доведемо нерівність (2.51). Для $k = 1, \ldots, n$, покладемо

$$A_k := \{x \in Q \colon |x - x_k|_\infty < |x - x_s|_\infty, \ \forall s \neq k\}.$$

З означення функції $f_h(x_1,\dots,x_n)$ випливає, що

$$f_h(x_1,\dots,x_n;x) = f_{e,h}(x-x_k)$$

на $B_k := \{x \in A_k \colon |x-x_k|_\infty < h\}$, $k=1,\dots,n$, і

$$|\nabla f_h(x_1,\dots,x_n;x)|_1 = 0 \tag{2.52}$$

майже всюди на $Q \setminus (\bigcup_{k=1}^n B_k)$. Для всіх $k=1,\dots,n$,

$$\| \, |\nabla f_h(x_1,\dots,x_n;\cdot)|_1 \, \|_{L_p(B_k)} = \| \, |\nabla f_{e,h}(\cdot - x_k)|_1 \, \|_{L_p(B_k)} \le \| \, |\nabla f_{e,h}(\cdot)|_1 \, \|_{L_p(\square_h^d)}$$

$$= \| \, |\nabla f_{e,h}(\cdot - \bar{x}_k)|_1 \, \|_{L_p\left(\square_{h,k}^d\right)} = \| \, |\nabla f_h(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n;\cdot)|_1 \, \|_{L_p\left(\square_{h,k}^d\right)}.$$

Останні співвідношення разом з (2.52) доводять нерівність (2.51). Лему доведено. $\square$

Лема 2.7.2. *Нехай задано $d \in \mathbb{N}$, область $Q \subset \mathbb{R}^d$, що складається з n кубів $\square_k$ з центрами $\bar{x}_k$, $k=1,\dots,n$, і $p \in (d;\infty]$. Тоді для всіх $f \in W^{1,p}(Q)$*

$$\left| \int_Q f(x)dx - \frac{\operatorname{meas} Q}{n} \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k) \right| \le \frac{c(d,p)}{n^{\frac{1}{d}}} \left[\frac{\operatorname{meas} Q}{2^d} \right]^{\frac{1}{d}+\frac{1}{p'}} \| \, |\nabla f|_1 \|_{L_p(Q)},$$

де константа $c(d,p)$ означена у теоремі 2.7.1. Нерівність є точною.Вона перетворюється на рівність для функцій $a \cdot f_h(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)$, де $a \in \mathbb{R}$, $h = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{meas} Q}{n}\right)^{\frac{1}{d}}$, а функція $f_h(\bar{x}_1,,\dots,,\bar{x}_n)$ означена у (2.49).

Доведення. Застосовуючи теорему 2.7.1 для кожного з кубів $\square_k$, маємо

$$\left| \int_Q f(x)dx - \frac{\operatorname{meas} Q}{n} \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k) \right|$$

$$\le c(d,p) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{meas} Q}{n} \right)^{\frac{1}{d}} \right]^{\frac{p'+d}{p'}} \sum_{k=1}^n \| \, |\nabla f|_1 \|_{L_p(\square_k)}$$

$$\le \frac{c(d,p)}{n^{\frac{1}{d}+\frac{1}{p'}}} \left[\frac{\operatorname{meas} Q}{2^d} \right]^{\frac{1}{d}+\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=1}^n \| \, |\nabla f|_1 \|_{L_p(\square_k)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot n^{\frac{1}{p'}}$$

$$= \frac{c(d,p)}{n^{\frac{1}{d}}} \left[\frac{\operatorname{meas} Q}{2^d} \right]^{\frac{1}{d}+\frac{1}{p'}} \| \, |\nabla f|_1 \|_{L_p(Q)}.$$

Нерівність доведено. Крім того, з означень функцій $f_h(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ і екстремальних функцій у теоремі 2.7.1, ми отримаємо, що ця нерівність перетворюється на рівність для функції $f_h(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$, а тому і для усіх функцій $a \cdot f_h(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$, $a \in \mathbb{R}$. □

2.7.2.2 Доведення теореми 2.7.2

Доведення. Використовуючи лему 2.7.2, маємо

$$\inf_{x_1,\ldots,x_n \in Q} \inf_{\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}} \sup_{f \in W_p^\infty(Q)} \left| \int_Q f(x)dx - \Phi(f(x_1), \ldots, f(x_n)) \right|$$
$$\leq \sup_{f \in W_p^\infty(Q)} \left| \int_Q f(x)dx - \frac{\operatorname{meas} Q}{n} \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k) \right|$$
$$\leq \sup_{f \in W_p^\infty(Q)} \frac{c(d,p)}{n^{\frac{1}{d}}} \left[\frac{\operatorname{meas} Q}{2^d} \right]^{\frac{1}{d}+\frac{1}{p'}} \| \, |\nabla f|_1 \|_{L_p(Q)} = \frac{c(d,p)}{n^{\frac{1}{d}}} \left[\frac{\operatorname{meas} Q}{2^d} \right]^{\frac{1}{d}+\frac{1}{p'}}.$$

З іншого боку, використовуючи лему 2.7.1 з $R = Q$ і $h = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{meas} Q}{n}\right)^{\frac{1}{d}}$, отримаємо для всіх $x_1, \ldots, x_n \in Q$ і всіх $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$

$$\sup_{f \in W_p^\infty(Q)} \left| \int_Q f(x)dx - \sum_{k=1}^n c_k f(x_k) \right| \geq \sup_{\substack{f \in W_p^\infty(Q), \\ f(x_k)=0,\, k=1,\ldots,n}} \left| \int_Q f(x)dx \right|$$
$$\geq \frac{1}{\| \, |\nabla f_h(x_1, \ldots, x_n)|_1 \, \|_{L_p(Q)}} \int_Q f_h(x_1, \ldots, x_n; x)dx$$
$$\geq \frac{1}{\| \, |\nabla f_h(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)|_1 \, \|_{L_p(Q)}} \int_Q f_h(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n; x)dx$$
$$(\text{лема } 2.7.2) = \frac{c(d,p)}{n^{\frac{1}{d}}} \left[\frac{\operatorname{meas} Q}{2^d} \right]^{\frac{1}{d}+\frac{1}{p'}}.$$

Нарешті, беручи до уваги існування оптимального лінійного методу відновлення і довільність точок $x_1, \ldots, x_n \in Q$ і коефіцієнтів $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, отримаємо оцінку для $E_n\left(W_p^\infty(Q)\right)$ знизу, що завершує доведення теореми. □

2.7.3 Випадок опуклої області

Далі ми розглядаємо випадок, коли область Q є обмеженою відкритою опуклою множиною. Кожна така множина є вимірною за Жорданом (див. напр. [84, Розділ 1, теорема 5]). Крім того, опуклі множини задовольняють умову конуса, а тому є допустимими в сенсі означення 2.2.1.

Ми будемо використовувати конструкцію інформаційних вузлів схожу на ту, яка використовувалась у [22, 23].

Для скінченної множини A, через $|A|$ будемо позначати кількість її елементів. Для $h > 0$, розглянемо решітку Λ у $\mathbb{R}^d$, що породжена векторами

$$(2h, 0, 0, \dots, 0), (0, 2h, 0, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 2h) \in \mathbb{R}^d.$$

Через $P_k(h)$ ми позначаємо куби $2hk + [0, 2h]^d$, $k \in \mathbb{Z}^d$; їх об'єм дорівнює $(2h)^d$. Через $A(h)$ $(B(h))$, позначимо множину усіх кубів $P_k(h)$ які містяться у Q (відповідно мають непорожню множину внутрішніх точок з Q). Нехай $a(h)$ $(b(h))$ — це множина центрів кубів з $A(h)$ (відп. $B(h)$). Оскільки Q є вимірною за Жорданом, то $\lim_{h\to 0} |A(h)| \cdot (2h)^d = \lim_{h\to 0} |B(h)| \cdot (2h)^d = \operatorname{meas} Q$ або, що еквівалентно,

$$|A(h)| = \frac{\operatorname{meas} Q}{(2h)^d} + o\left(\frac{1}{h^d}\right) \text{ і } |B(h)| = \frac{\operatorname{meas} Q}{(2h)^d} + o\left(\frac{1}{h^d}\right) \text{ при } h \to 0. \quad (2.53)$$

Зафіксуємо число $n \in \mathbb{N}$. Покладемо

$$h_n := \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{meas} Q}{n}\right)^{\frac{1}{d}}. \quad (2.54)$$

Згідно з (2.53)

$$|A(h_n)| = n + o(n) \text{ і } |B(h_n)| = n + o(n) \text{ при } n \to \infty. \quad (2.55)$$

Для кожного куба P з множини $B(3h_n)$, оберемо точку z відповідно до такого правила: z — це центр куба P, якщо цей центр належить до $a(h_n)$; у іншому випадку, z — це довільна точка множини $P \cap a(h_n)$, якщо цей перетин непорожній; в протилежному випадку, z — це довільна внутрішня точка перетину $Q \cap P$. Позначимо через $S_1(n)$ множину обраних

таким чином точок z. З (2.53) випливає, що для числа $|S_1(n)|$ виконується співвідношення

$$|S_1(n)| = \frac{n}{3^d} + o(n), \text{ при } n \to \infty. \tag{2.56}$$

Оскільки для всіх $n \in \mathbb{N}$, $a(3h_n) \subset a(h_n)$, ми отримуємо

$$|S_1(n) \setminus a(h_n)| \leq |B(3h_n)| - |A(3h_n)| = o(n), \text{ при } n \to \infty. \tag{2.57}$$

Позначимо через $S_2(n)$ довільну підмножину множини $a(h_n) \setminus S_1(n)$, що містить $n - |S_1(n)|$ точок (для достатньо великих n це число додатне; якщо $|a(h_n) \setminus S_1(n)| \leq n - |S_1(n)|$, то за означенням $S_2(n) := a(h_n) \setminus S_1(n)$). Позначимо $S(n) := S_1(n) \cup S_2(n)$.

Нехай $S(n) = \{x_1^*, \ldots, x_{|S(n)|}^*\}$. Для кожного $k = 1, \ldots, |S(n)|$, розглянемо множину

$$V_k = V_k(n) := \{x \in Q \cap P(3h_n; x_k^*) \colon |x - x_k^*|_\infty < |x - x_s^*|_\infty, \ s \neq k\},$$

де $P(3h_n; x_k^*)$ — це куб з $B(3h_n)$, що містить x_k^*. Тоді множини V_k попарно не перетинаються. Крім того, $\bigcup_{k=1}^{|S(n)|} V_k \subset Q$ і $\operatorname{meas}\left(Q \setminus \bigcup_{k=1}^{|S(n)|} V_k\right) = 0$.

Покладемо

$$c_k^* := \operatorname{meas} V_k, k = 1, \ldots, |S(n)|. \tag{2.58}$$

Наступне твердження містить деякі властивості множин $S(n)$ і V_k.

Лема 2.7.3. *Нехай задано вимірну за Жорданом множину $Q \subset \mathbb{R}^d$, достатньо велике $n \in \mathbb{N}$, і число h_n, що задовольняє рівності* (2.54). *Виконуються такі властивості:*

1. *$S(n) \subset Q$ і $|S(n)| \leq n$.*

2. *Якщо $x \in V_k$, то $|x - x_k^*|_\infty \leq 6h_n$.*

3. *Позначимо через R_n об'єднання кубів $P \in A(h_n)$ з центрами, що належать множині $S(n)$. Тоді $\operatorname{meas} R_n = \operatorname{meas} Q + o(1)$ при $n \to \infty$.*

4. *Для кожного куба $P \in B(h_n)$ маємо $|P \cap S(n)| \leq 1$.*

5. *Якщо* $x \in S(n) \cap V_k$ *є центром куба* $P \in A(h_n)$, *то* $P = V_k \cap R_n$.

6. *Покладемо* $U_k := V_k \setminus R_n$. *Тоді* $\operatorname{meas} \bigcup_{k=1}^{|S(n)|} U_k = o(1)$, $n \to \infty$.

Доведення. Нехай n обрано настільки великим, що $|S_1(n)| \le n$ (це можливо через (2.56)). Властивості 1 і 4 випливають з означення множини $S(n)$, Властивість 2 випливає з означення множини V_k, оскільки $V_k \subset P(3h_n; x_k^*)$.

Властивість 5 виконується, оскільки згідно з побудовою множини $S(n)$, для кожного куба P з $B(3h_n)$ або $P \cap S(n) \subset a(h_n)$ (і тоді $R_n \cap P$ складено з $|P \cap S(n)|$ кубів з центрами, що породжують власні множини V_k), або $|P \cap S(n)| = 1$, $P \cap a(h_n) = \emptyset$, і, отже, $P \cap R_n = \emptyset$.

З (2.55) і (2.57) випливає, що $|a(h_n) \cap S(n)| = n + o(n)$, $n \to \infty$. Тому $\operatorname{meas} R_n = n(1 + o(1))(2h_n)^d = \operatorname{meas} Q + o(1)$ при $n \to \infty$, і властивість 3 доведено. Властивість 6 випливає з властивості 3. Лему доведено. □

Головним результатом цього підрозділу є така теорема, що дає асимптотично оптимальний розв'язок задачі оптимального відновлення інтеграла.

Теорема 2.7.3. *Нехай задано* $d \in \mathbb{N}$, $p \in (d, \infty]$, *і обмежену відкриту опуклу множину* Q. *Тоді*

$$E_n\left(W_p^\infty(Q)\right) = c(d,p)\left(\frac{\operatorname{meas} Q}{2^d}\right)^{\frac{1}{d}+\frac{1}{p'}} \cdot \frac{1+o(1)}{n^{\frac{1}{d}}}, n \to \infty,$$

де константа $c(d,p)$ *означена у теоремі 2.7.1. Асимптотично оптимальною інформаційною множиною є множина* $S(n)$. *Асимптотично оптимальним методом відновлення є*

$$\tilde{\Phi}_n(f(x_1), \ldots, f(x_{|S(n)|})) = \sum_{k=1}^{|S(n)|} c_k^* f(x_k),$$

де вага c_k^* *означено у* (2.58).

Її доведення випливає з лем 2.7.4–2.7.6, які наведено нижче.

Зауваження 2.7.1. *Відмітимо, що у випадку* $p = \infty$ *це твердження міститься у [22, Теорема 3].*

2.7.3.1 Допоміжні результати

Оцінку знизу (для довільної допустимої жорданової множини Q) дає наступна лема.

Лема 2.7.4. *Нехай $d \in \mathbb{N}$, $p \in (d, \infty]$ і задано допустиму вимірну за Жорданом множину Q. Тоді*

$$E_n\left(W_p^\infty(Q)\right) \geq c(d,p)\left(\frac{\operatorname{meas} Q}{2^d}\right)^{\frac{1}{d}+\frac{1}{p'}} \cdot \frac{1+o(1)}{n^{\frac{1}{d}}}, n \to \infty.$$

Доведення. Множину R_n було визначено у властивості 3 леми 2.7.3. Використовуючи аргументи подібні до тих, що були використані у доведенні оцінки знизу у теоремі 2.7.2 (лема 2.7.1 має бути використаною для області $R = R_n$), отримаємо нерівність

$$E_n\left(W_p^\infty(Q)\right) \geq \frac{c(d,p)}{n^{\frac{1}{d}}}\left[\frac{\operatorname{meas} R_n}{2^d}\right]^{\frac{1}{d}+\frac{1}{p'}} = \frac{c(d,p)}{n^{\frac{1}{d}}}\left[\frac{\operatorname{meas} Q + o(1)}{2^d}\right]^{\frac{1}{d}+\frac{1}{p'}}$$
$$= c(d,p)\left(\frac{\operatorname{meas} Q}{2^d}\right)^{\frac{1}{d}+\frac{1}{p'}} \cdot \frac{1+o(1)}{n^{\frac{1}{d}}}, n \to \infty.$$

Лему доведено. □

Наступна лема дає оцінку зверху для довільної допустимої жорданової області Q.

Лема 2.7.5. *Нехай $d \in \mathbb{N}$, $p \in (d, \infty]$, і задано допустиму вимірну за Жорданом множину Q. Тоді*

$$E_n\left(W_p^\infty(Q)\right) \leq \sup_{f \in W_p^\infty(Q)} \left| \sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_{U_k} [f(x) - f(x_k^*)]dx \right|$$
$$+ c(d,p)\left(\frac{\operatorname{meas} Q}{2^d}\right)^{\frac{1}{d}+\frac{1}{p'}} \cdot \frac{1+o(1)}{n^{\frac{1}{d}}},\ n \to \infty,$$

де множини U_k визначені у властивості 6 леми 2.7.3.

Доведення. Дійсно,

$$E_n\left(W_p^\infty(Q)\right) = \inf_{x_1,\ldots,x_n \in Q} \inf_{\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}} \sup_{f \in W_p^\infty(Q)} \left| \int_Q f(x)dx - \Phi(f(x_1),\ldots,f(x_n)) \right|$$

$$\leq \sup_{f\in W_p^\infty(Q)} \left| \int_Q f(x)dx - \sum_{k=1}^{|S(n)|} c_k^* f(x_k^*) \right| = \sup_{f\in W_p^\infty(Q)} \left| \sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_{V_k} [f(x) - f(x_k^*)]dx \right|$$

$$\leq \sup_{f\in W_p^\infty(Q)} \left| \sum_{k=1}^{|S(n)|} \int\limits_{V_k\cap R_n} [f(x) - f(x_k^*)]dx \right| + \sup_{f\in W_p^\infty(Q)} \left| \sum_{k=1}^{|S(n)|} \int\limits_{U_k} [f(x) - f(x_k^*)]dx \right|.$$

З леми 2.7.2, властивості 5 леми 2.7.3, і (2.57) випливає, що

$$\sup_{f\in W_p^\infty(Q)} \left| \sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_{V_k\cap R_n} [f(x) - f(x_k^*)]dx \right| \leq \frac{c(d,p)}{n^{\frac{1}{d}} \cdot (1+o(1))} \left[\frac{\operatorname{meas} R_n}{2^d} \right]^{\frac{1}{d}+\frac{1}{p'}}$$

$$= c(d,p) \left(\frac{\operatorname{meas} Q}{2^d} \right)^{\frac{1}{d}+\frac{1}{p'}} \cdot \frac{1+o(1)}{n^{\frac{1}{d}}},\ n\to\infty.$$

Лему доведено. □

Лема 2.7.6. *Нехай $d \in \mathbb{N}$, $p \in (d, \infty]$, і задано обмежену відкриту опуклу область Q. Тоді*

$$\sup_{f\in W_p^\infty(Q)} \left| \sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_{U_k} (f(x) - f(x_k^*))dx \right| = o\left(n^{-\frac{1}{d}}\right), n\to\infty. \tag{2.59}$$

Доведення. Використовуючи лему 2.4.1 і той факт, що Q є опуклою областю, отримаємо такі оцінки для довільної функції $f \in W_p^\infty(Q)$:

$$\left| \sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_{U_k} [f(x) - f(x_k^*)]dx \right| = \left| \sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_{U_k} \int_0^1 (x - x_k^*, \nabla f(x_k^* + t(x - x_k^*))) \right| dtdx$$

$$\leq \sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_0^1 \int_{U_k} |x - x_k^*|_\infty \cdot |\nabla f(x_k^* + t(x - x_k^*))|_1 dxdt$$

$$\leq \sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_0^1 \left(\int_{U_k} |x - x_k^*|_\infty^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \cdot \left(\int_{U_k} |\nabla f(x_k^* + t(x - x_k^*))|_1^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dt$$

$$\leq 6h_n \sum_{k=1}^{|S(n)|} (\operatorname{meas} U_k)^{\frac{1}{p'}} \cdot \int_0^1 \left(\int_{U_k} |\nabla f(x_k^* + t(x - x_k^*))|_1^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dt. \tag{2.60}$$

Для кожного $k = 1, \ldots, |S(n)|$, покладемо $\psi_{k,t}(x) := tx + (1-t)x_k^*$. Роблячи заміну $y = \psi_{k,t}(x)$, отримаємо

$$\int_0^1 \left(\int_{U_k} |\nabla f(x_k^* + t(x - x_k^*))|_1^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dt = \int_0^1 \left(\int_{\psi_{k,t}(U_k)} |\nabla f(y)|_1^p t^{-d} dy \right)^{\frac{1}{p}} dt$$

$$= \int_0^1 t^{-\frac{d}{p}} \left(\int_{\psi_{k,t}(U_k)} |\nabla f(y)|_1^p dy \right)^{\frac{1}{p}} dt.$$

Кожна з множин V_k є опуклою, оскільки за означенням для кожного $k = 1, \ldots, |S(n)|$, V_k є перетином опуклої множини Q і декількох пів просторів. Тому для кожного $t \in [0,1]$ і $k = 1, \ldots, |S(n)|$, $\psi_{k,t}(U_k) \subset V_k$. Оскільки $p > d$, то

$$\int_0^1 t^{-\frac{d}{p}} \left(\int_{\psi_{k,t}(U_k)} |\nabla f(y)|_1^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dt \leq \int_0^1 t^{-\frac{d}{p}} dt \left(\int_{V_k} |\nabla f(y)|_1^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \frac{p}{p-d} \left(\int_{V_k} |\nabla f(y)|_1^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Використовуючи цю нерівність і (2.60), отримаємо

$$\left| \sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_{U_k} [f(x) - f(x_k^*)] dx \right| \leq \frac{6ph_n}{p-d} \sum_{k=1}^{|S(n)|} (\operatorname{meas} U_k)^{\frac{1}{p'}} \cdot \left(\int_{V_k} |\nabla f(y)|_1^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \frac{6ph_n}{p-d} \left(\sum_{k=1}^{|S(n)|} \operatorname{meas} U_k \right)^{\frac{1}{p'}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_{V_k} |\nabla f(y)|_1^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \frac{6ph_n}{p-d} (\operatorname{meas} Q \setminus R_n)^{\frac{1}{p'}} \cdot \left(\int_Q |\nabla f(y)|_1^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{6ph_n}{p-d} (\operatorname{meas} Q \setminus R_n)^{\frac{1}{p'}}.$$

Рівність (2.54) і властивість 3 у лемі 2.7.3 дають

$$\frac{6ph_n}{p-d} (\operatorname{meas} Q \setminus R_n)^{\frac{1}{p'}} = o\left(n^{-\frac{1}{d}}\right), n \to \infty.$$

Лему доведено. □

2.7.4 Випадок зірчатої області

Обмежену відкриту множину $Q \subset \mathbb{R}^d$ будемо називати зірчатою відносно кулі B (або просто зірчатою), якщо для всіх $x \in Q$ і $y \in B$ відрізок xy належить Q. Неважко перевірити, що внутрішність замикання зірчатої множини Q співпадає з Q. З цього випливає, що замикання Q є несиметричним зірчатим тілом відповідно до [84, Означення I.2.2], тому функція

відстані множини Q є неперервною (див. [84, Теорема I.2.2]), а отже Q є вимірною за Жорданом (див. доведення [84, Теорема I.1.5]). Крім того, легко бачити, що зірчата множина задовольняє умову конуса, а тому кожна функція f з $W_p^\infty(Q)$ має неперервне представлення.

Метою даного пункту є доведення того факту, що теорема 2.7.3 виконується і у випадку зірчатої множини Q. Беручи до уваги леми 2.7.4 і 2.7.5, для цього достатньо довести, що лема 2.7.6 є справедливою для зірчатих множин Q.

Відмітимо, що оскільки множини V_k, $k = 1, \ldots, |S(n)|$, взагалі кажучи, не є опуклими, ми не можемо безпосередньо застосувати лему 2.4.1 до різниць $f(x) - f(x_k^*)$ під інтегралами у (2.59). Ми визначимо функції $p_k \colon U_k \to Q$, $k = 1, \ldots, |S(n)|$ такі, що обидва відрізки $xp_k(x)$ і $p_k(x)x_k^*$ будуть належати множині Q і при цьому вони будуть "не набагато довші" за відрізок xx_k^*. Як тільки така побудова зроблена, то ми зможемо записати нерівність

$$|f(x) - f(x_k^*)| \leq |f(x) - f(p_k(x))| + |f(p_k(x)) - f(x_k^*)|,$$

і застосувати лему 2.4.1 для того, щоб від значень функції f перейти до значень її градієнта. Це дозволить отримати оцінку для величини (2.59) у термінах $\| \, |\nabla f|_1 \, \|_{L_p(Q)}$ і сумарної міри множин U_k, що, у свою чергу, буде використано при доведенні узагальнення леми 2.7.6 на випадок зірчатої множини Q.

2.7.4.1 Допоміжні результати

Нам будуть потрібні такі леми.

Лема 2.7.7. *Нехай задано множини $T_k \subset U_k$ і функції $\phi_k \colon T_k \to Q$ такі, що множини $\phi_k(T_k)$ є вимірними, $k = 1, \ldots, |S(n)|$. Припустимо, що існує число $c > 0$ таке, що $|\phi_k(x) - x_k^*|_\infty \leq c|x - x_k^*|_\infty$ для всіх $x \in T_k$, $k = 1, \ldots |S(n)|$. Тоді існує число $C > 0$, що не залежить від n і таке, що для*

всіх інтегровних на Q функцій g

$$\sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_{\phi_k(T_k)} |g(x)|dx \le C \int_Q |g(x)|dx.$$

Доведення. Якщо числа $1 \le k_1 < k_2 \le |S(n)|$ і точки $x \in T_{k_1}$ і $y \in T_{k_2}$ є такими, що $z = \phi_{k_1}(x) = \phi_{k_2}(y)$, то, використовуючи властивість 2 леми 2.7.3, отримаємо

$$\begin{aligned} |x^*_{k_1} - x^*_{k_2}|_\infty \le |x^*_{k_1} - z|_\infty + |z - x^*_{k_2}|_\infty = |x^*_{k_1} - \phi_{k_1}(x)|_\infty + |\phi_{k_2}(y) - x^*_{k_2}|_\infty \\ \le c|x^*_{k_1} - x|_\infty + c|y - x^*_{k_2}|_\infty \le 12h_n \cdot c. \quad (2.61) \end{aligned}$$

Тепер достатньо довести, що існує число $N \in \mathbb{N}$, яке не залежить від n, і розбиття множини $\{T_1, \dots, T_{|S(n)|}\}$ на N груп $\{T_{k_1^i}, \dots, T_{k_{m_i}^i}\}$, $i = 1, \dots, N$, таке, що для всіх $i = 1, \dots, N$ і різних $j, s \in \{k_1^i, \dots, k_{m_i}^i\}$, $|x^*_j - x^*_s|_\infty > 12h_n \cdot c$. Дійсно, якщо таке розбиття знайдено, то, використовуючи (2.61), отримаємо, що множини $\{\phi_{k_1^i}(T_{k_1^i}), \dots, \phi_{k_{m_i}^i}(T_{k_{m_i}^i})\}$ попарно не перетинаються для кожного $i = 1 \dots, N$. Тому

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_{\phi_k(T_k)} |g(x)|dx &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=1}^{m_i} \int_{\phi_{k_s^i}(T_{k_s^i})} |g(x)|dx \\ &= \sum_{i=1}^{N} \int_{\bigcup_{s=1}^{m_i} \phi_{k_s^i}(T_{k_s^i})} |g(x)|dx \le \sum_{i=1}^{N} \int_Q |g(x)|dx = N \int_Q |g(x)|dx. \end{aligned}$$

Для того, щоб побудувати таке розбиття, кожному кубу $P \in B(h_n)$ поставимо у відповідність індекс $I_P \in \mathbb{Z}^d$, який дорівнює координаті "лівої нижньої вершини" куба P (тобто точки куба P з найменшими координатами) у базисі решітки. Нехай M — це деяке ціле число, що більше за $6c + 1$. Розіб'ємо куби з $B(h_n)$ на $N = M^d$ груп у такий спосіб, що два куба $P_1, P_2 \in B(h_n)$ належать до однієї групи тоді і тільки тоді, коли всі координати різниці $I_{P_1} - I_{P_2}$ діляться на M.

Нехай задано два різних куба P_1, P_2, що належать до однієї групи і $x \in P_1$, $y \in P_2$. Тоді з означення групи отримаємо $|x - y|_\infty \ge (M - 1) \cdot 2h_n > 12ch_n$.

Тепер побудуємо розбиття множин T_k, $k = 1, \ldots, |S(n)|$. Дві множини T_k і T_j будемо відносити до однієї групи тоді і тільки тоді, коли x_k^* і x_j^* належать до кубів з однієї групи. Таке розбиття буде шуканим в силу властивості 4 леми 2.7.3. Лему доведено. $\square$

Наступна лема випливає з [73, Лема 1.1] або може бути доведеною індукцією по d. Ми опускаємо технічні деталі.

Лема 2.7.8. *Нехай задано два вектори $u = (u^1, \ldots, u^d)$, $v = (v^1, \ldots, v^d)$ і числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тоді*

$$\det\left(\alpha \cdot I + \beta \cdot \left\|u^i v^j\right\|_{i,j=1}^d\right) = \alpha^{d-1}(\alpha + \beta(u, v)),$$

де I позначає одиничну матрицю.

2.7.4.2 Допоміжна побудова

Нехай задано зірчату відносно кулі $S_R^d(o)$ з радіусом більшим за $R > 0$ і центром $o \in Q$ множина Q. Для всіх $k = 1, \ldots, |S(n)|$ і $0 < r \leq R$ визначимо функцію $p_k(\cdot; r)\colon U_k \to \mathbb{R}^d$ рівністю

$$p_k(x; r) := \frac{r \cdot (x + x_k^*) + |x - x_k^*|_2 \cdot o}{|x - x_k^*|_2 + 2r}. \tag{2.62}$$

Далі будемо вважати, що відстань від o до межі ∂Q множини Q більша за R (у протилежному випадку ми зменшимо R). Ми також будемо розглядати настільки великі значення $n \in \mathbb{N}$, що усі точки x_k^* (з множин V_k для яких множина U_k є непорожньою) і множини U_k знаходяться поза кулею $S_R^d(o)$. У якості значення r будемо використовувати або $r = R$, або $r = \frac{R}{8}$ так, що r буде відділене від нуля і незалежне від n.

Формула (2.62) має такий геометричний сенс.

Лема 2.7.9. *Припустимо, що точка $x \in U_k$ є такою, що вектори $\overline{ox}$ і $\overline{ox_k^*}$ не є колінеарними. Розглянемо 2-вимірний простір E^2 породжений цими двома векторами. Нехай $S_r^2(o)$ — це межове коло круга $E^2 \cap S_r^d(o)$, а $o_1 o_2$ — це діаметр кола $S_r^2(o)$, який є паралельним відрізку xx_k^*. Тоді $p_k(x; r)$ — це точка перетину діагоналей опуклої оболонки точок o_1, o_2, x і x_k^*.*

Цю лему буде доведено разом з таким твердженням.

Лема 2.7.10. *Відрізки $xp_k(x)$ і $p_k(x)x_k^*$ містяться у множині Q і існує число C, що не залежить від n таке, що*

$$\max\{|x - p_k(x;r)|_\infty, |x_k^* - p_k(x;r)|_\infty\} \le C|x - x_k^*|_\infty.$$

Доведення. Нехай p — це точка перетину діагоналей xo_1 і $x_k^*o_2$. Тоді трикутники xpx_k^* і o_1po_2 подібні. Це, зокрема, означає, що точки o, p і середина m відрізка xx_k^* лежать на одній прямій, і $\frac{|m-p|_2}{|o-p|_2} = \frac{|x-x_k^*|_2}{2r}$. Тому

$$p = \frac{1}{2r + |x - x_k^*|_2}(|x - x_k^*|_2 \cdot o + 2r \cdot m) = \frac{r \cdot (x + x_k^*) + |x - x_k^*|_2 \cdot o}{|x - x_k^*|_2 + 2r}.$$

Це означає, що $p = p_k(x;r)$ і лему 2.7.9 доведено.

З подібності трикутників xpx_k^* і o_1po_2 також випливає, що $\frac{|x-p|_2}{|o_1-p|_2} = \frac{|x-x_k^*|_2}{2r}$. Тому

$$|x - p|_\infty \le |x - p|_2 = \frac{|o_1 - p|_2 \cdot |x - x_k^*|_2}{2r} \le \frac{\operatorname{diam} Q \cdot \sqrt{d} \cdot |x - x_k^*|_\infty}{2r}.$$

Отже, нерівність з формулювання леми виконується для $C := \frac{\operatorname{diam} Q\sqrt{d}}{2r}$. Оцінка для величини $|x_k^* - p_k(x,r)|_\infty$ може бути отриманою аналогічно.

Відрізки $xp_k(x)$ і $p_k(x)x_k^*$ містяться у множині Q, оскільки Q є зірчатою множиною, а ці відрізки є частинами відрізків xo_1 і $x_k^*o_2$. Лему 2.7.10 доведено. □

2.7.4.3 Деякі властивості функцій $p_k(\cdot;r)$

Далі ми сформулюємо і доведемо декілька властивостей функцій $p_k(\cdot;r)$ з попереднього підпункту. Всюди у цьому підпункті ми вважаємо, що числа $k \in \{1, \dots, |S(n)|\}$ і $0 < r \le R$ є фіксованими, а n є настільки великим, що множини U_k розташовані ззовні кулі $S_R^d(o)$.

Лема 2.7.11. *Для кожного $t \in [0,1]$ існує таке розбиття $U_k = \bigcup_{i=1}^4 U_k^i(t)$ на вимірні множини $U_k^i(t)$, $i = 1, \dots, 4$, що функції*

$$\psi_k(x;r,t) := t \cdot x + (1-t) \cdot p_k(x;r) \tag{2.63}$$

є ін'єктивними на кожній з множин $U_k^1(t), \ldots, U_k^4(t)$. *Для кожного* $t \in (0,1]$ *функції*

$$\varphi_k(x; r, t) := (1-t) \cdot x_k^* + t \cdot p_k(x; r), \tag{2.64}$$

є ін'єктивними на кожній з множин $U_k^1(0), \ldots, U_k^4(0)$.

Доведення. Перш за все відмітимо, що для $x, y \in Q$ і $t \in (0,1]$,

$$\varphi_k(x; r, t) = \varphi_k(y; r, t) \iff p_k(x; r) = p_k(y; r) \iff \psi_k(x; r, 0) = \psi_k(y; r, 0).$$

Тому твердження щодо функції (2.64) випливає з твердження щодо функції (2.63).

Нехай задано $t \in [0,1]$ і $q \in \psi_k(U_k; r, t)$. Далі ми доведемо, що прообраз $\psi_k^{-1}(q; r, t)$ містить не більше ніж 4 точки.

Якщо точки q, o і x_k^* лежать на одній прямій, то усі точки множини $\psi_k^{-1}(q; r, t)$ також лежать на цій прямій і лему можна довести використовуючи аналогічні міркування до тих, які будуть застосовані далі для випадку, коли точки q, o і x_k^* не лежать на одній прямій.

Отже, припустимо, що точки q, o і x_k^* не лежать на одній прямій. Тоді вони породжують двовимірний простір. З геометричного сенсу функції $p_k(\cdot; r)$ випливає, що всі точки з множини $\psi_k^{-1}(q; r, t)$ також лежать у цьому двовимірному просторі. Нехай

$$x \in \psi_k^{-1}(q; r, t). \tag{2.65}$$

Розглянемо двовимірну декартову систему координат, у якій точка o належить вісі ординат, а точки x і точка, що симетрична до точки x_k^* відносно точки o лежать на осі абсцис (для того, щоб визначити координатну систему однозначно, можна додатково вимагати, щоб точка x_k^* лежала у верхній координатній пів площині). Нехай $x_k^* = (x_*, 2y_*)$, $q = (x_q, y_q)$, і $x = (x_1, 0)$ у цій координатній системі. Тоді $o = (0, y_*)$. З (2.62) і означення функції ψ_k маємо, що для довільної точки $z = (x_z, y_z)$

$$\psi_k(z; r, t) = (1-t)\frac{r(x_z + x_*, y_z + 2y_*) + (0, y_*|x_k^* - z|_2)}{2r + |x_k^* - z|_2} + t(x_z, y_z)$$

$$= \left((1-t)\frac{r(x_z + x_*)}{2r + |x_k^* - z|_2} + tx_z, (1-t)y_* + (1-t)\frac{ry_z}{2r + |x_k^* - z|_2} + ty_z \right).$$

З (2.65) ми отримаємо, що $y_q = (1-t)y_*$; тому $\psi_k^{-1}(q; r, t)$ є підмножиною осі абсцис, і для всіх $z = (x_z, 0) \in \psi_k^{-1}(q; r, t)$ маємо

$$(1-t)\frac{r(x_z + x_*)}{2r + \sqrt{(x_* - x_z)^2 + 4y_*^2}} + tx_z = x_q.$$

Усі розв'язки цього рівняння є також розв'язками рівняння

$$[(1-t)r(x_z + x_*) - 2r(x_q - tx_z)]^2 = (x_q - tx_z)^2((x_* - x_z)^2 + 4y_*^2),$$

яке є рівнянням не більше ніж четвертого степеня по відношенню до невідомої координати x_z; тому множина $\psi_k^{-1}(q; r, t)$ складається з не більше ніж 4 точок.

Нарешті, побудуємо шукане розбиття множини U_k. Будемо дивитись на $\psi_k(\cdot; r, t)$, як функцію визначену на замиканні $\overline{U_k}$ множини U_k. Легко бачити, що функція ψ_k є неперервною і тому, з [60, Теорема 6.9.7] отримаємо існування борелівської множини $B \subset \overline{U_k}$ такої, що $\psi_k(B; r, t) = \psi_k(\overline{U_k}; r, t)$ і $\psi_k(\cdot; r, t)$ є ін'єктивною на B. Покладемо $U_k^1 = B \cap U_k$. Множина $\psi_k^{-1}(q; r, t) \setminus U_k^1$ складається з не більше ніж 3 точок для кожного $q \in \psi_k(U_k; r, t)$. Повторюючи аналогічні міркування, знайдемо вимірні множини $U_k^2 \subset U_k \setminus U_k^1$ і $U_k^3 \subset U_k \setminus (U_k^1 \cup U_k^2)$ такі, що ψ_k є ін'єктивною на кожній з них, і, крім того, є ін'єктивною на вимірній множині $U_k^4 := U_k \setminus (U_k^1 \cup U_k^2 \cup U_k^3)$. Лему доведено. □

Для функції $\phi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ через $\frac{D\phi}{Dx}$ будемо позначати матрицю Якобі, $J_\phi(x) := \det \frac{D\phi}{Dx}(x)$ і I — це одинична матриця. Для $y \in \mathbb{R}^d$ і $s \in \{1, \ldots, d\}$ через y^s ми позначаємо s-ту координату y.

Лема 2.7.12. *Для заданої точки $x \in U_k$ позначимо через m середину відрізка xx_k^*, $\overline{\Delta x} = \frac{\overline{x_k^* x}}{|x - x_k^*|_2}$. Тоді*

$$\frac{Dp_k(\cdot; r)}{Dx}(x) = \frac{r}{2r + |x - x_k^*|_2} I + \frac{2r}{(2r + |x - x_k^*|_2)^2} \cdot \left\| \overline{mo}^i \cdot \overline{\triangle x}^j \right\|_{i,j=1}^d.$$

Доведення. Нехай $x = (x^1, \dots, x^d)$, $x_k^* = (x_k^1, \dots, x_k^d)$, $o = (o^1, \dots, o^d)$, $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, і $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Рівність (2.62) може бути записаною у координатах

$$p_k(x;r) := \frac{r \cdot (x^1 + x_k^1, \dots, x^d + x_k^d) + \sqrt{\sum_{s=1}^d (x^s - x_k^s)^2} \cdot (o^1, \dots, o^d)}{\sqrt{\sum_{s=1}^d (x^s - x_k^s)^2} + 2r}.$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial p_k(x;r)^i}{\partial x^j} \\
&= \frac{(r\delta_{ij} + \frac{x^j - x_k^j}{|x - x_k^*|_2} o^i) \cdot (2r + |x - x_k^*|_2) - (r(x^i + x_k^i) + |x - x_k^*|_2 o^i) \frac{x^j - x_k^j}{|x - x_k^*|_2}}{(2r + |x - x_k^*|_2)^2} \\
&= \frac{r(2r + |x - x_k^*|_2)\delta_{ij} + 2r \frac{x^j - x_k^j}{|x - x_k^*|_2} o^i - r \frac{x^j - x_k^j}{|x - x_k^*|_2}(x^i + x_k^i)}{(2r + |x - x_k^*|_2)^2} \\
&= \frac{r}{2r + |x - x_k^*|_2} \delta_{ij} + \frac{2r}{(2r + |x - x_k^*|_2)^2} \cdot \frac{x^j - x_k^j}{|x - x_k^*|_2} \cdot \left(o^i - \frac{x^i + x_k^i}{2} \right).
\end{aligned}$$

Лему доведено. □

З лем 2.7.12 і 2.7.8 одразу отримаємо такий результат.

Лема 2.7.13. *Для функції $\varphi_k(x;r,t)$, визначеної у (2.63) і всіх $t \in [0,1]$ маємо*

$$J_{\varphi_k(\cdot;r,t)}(x) = t^d \frac{r^d}{(2r + |x - x_k^*|_2)^{d+1}} \left(2r + |x - x_k^*|_2 + 2\left(\overline{mo}, \overline{\triangle x}\right)\right).$$

Лема 2.7.14. *Для функції $\psi_k(x;r,t)$ визначеної у (2.63) і всіх $t \in [0,1]$ маємо*

$$\begin{aligned}
J_{\psi_k(\cdot;r,t)}(x) = &\left(\frac{r(1-t)}{2r + |x - x_k^*|_2} + t \right)^{d-1} \cdot \\
&\cdot \left(\frac{2r^2 + 3r|x - x_k^*|_2 + |x - x_k^*|_2^2 - 2r\left(\overline{mo}, \overline{\triangle x}\right)}{(2r + |x - x_k^*|_2)^2} (t-1) + 1 \right).
\end{aligned}$$

Доведення. Достатньо застосувати леми 2.7.12 і 2.7.8, і помітити, що

$$\frac{r(1-t)}{2r + |x - x_k^*|_2} + t + \frac{2r(1-t)}{(2r + |x - x_k^*|_2)^2} \left(\overline{mo}, \overline{\triangle x}\right)$$

$$= \frac{2r^2 + 3r|x - x_k^*|_2 + |x - x_k^*|_2^2 - 2r\left(\overline{mo}, \overline{\triangle x}\right)}{(2r + |x - x_k^*|_2)^2}(t-1) + 1.$$

□

З наступної леми випливає можливість робити заміну $y = \psi_k(x; r, t)$ у інтегралах.

Лема 2.7.15. *Для кожного фіксованого $0 < r < R$ функція $\psi_k(x; r, t)$ є неперервною на $U_k \times [0, 1]$. Множина*

$$\Theta := \{(x, t) \in U_k \times [0, 1] \colon J_{\psi_k(\cdot; r, t)}(x) = 0\}$$

має нульову міру у $\mathbb{R}^{d+1}$.

Доведення. Неперервність функції ψ_k випливає з означення. Множина Θ є частиною графіка функції

$$t(x) = 1 - \frac{(2r + |x - x_k^*|_2)^2}{2r^2 + 3r|x - x_k^*|_2 + |x - x_k^*|_2^2 - 2r\left(\overline{mo}, \overline{\triangle x}\right)}, x \in U_k,$$

на якій $t(x) \in [0, 1]$. Існує $\varepsilon > 0$ таке, що множина

$$\Theta \cap \left\{(x, t) \in U_k \times [0, 1] \colon \left|2r^2 + 3r|x - x_k^*|_2 + |x - x_k^*|_2^2 - 2r\left(\overline{mo}, \overline{\triangle x}\right)\right| < \varepsilon\right\}$$

є порожньою. Тому на множині $\{x \in U_k \colon t(x) \in [0, 1]\}$ функція t є рівномірно неперервною, а отже її графік має нульову міру. □

У наступних двох підпунктах ми будемо використовувати таке позначення. Символ C буде позначати додатне число, яке не залежить від n. При цьому це число може бути різним у лівій і правій частинах рівності або нерівності.

2.7.4.4 Оцінка для $\sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_{T_k} |f(x) - f(p_k(x; r))| dx$

Лема 2.7.16. *Нехай задано вимірні множини $T_k \subset U_k$, $k = 1, \ldots, |S(n)|$, і*

$$\max_{k=1,\ldots,|S(n)|} \operatorname{diam} U_k \le r \le R. \tag{2.66}$$

Тоді існує число C, яке не залежить від n і таке, що для всіх $f \in W^{1,p}(Q)$

$$\sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_{T_k} |f(x) - f(p_k(x;r))| dx \le C h_n \left(\operatorname{meas} \bigcup_{k=1}^{|S(n)|} T_k \right)^{\frac{1}{p'}} \| \, |\nabla f|_1 \, \|_{L_p(Q)}.$$

Доведення. Використовуючи леми 2.4.1 і 2.7.10 отримаємо

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_{T_k} |f(x) - f(p_k(x;r))| dx \\
&\qquad \le \sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_0^1 \int_{T_k} |p_k(x;r) - x|_\infty |\nabla f((1-t)p_k(x;r) + tx)|_1 dx dt \\
&\qquad\qquad \le C h_n \sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_0^1 \int_{T_k} |\nabla f(\psi_k(x;r,t))|_1 dx dt, \quad (2.67)
\end{aligned}$$

де функції $\psi_k(\cdot;r,t)$ визначені у (2.63). З леми 2.7.11 отримаємо, що для всіх $t \in [0,1]$ і $k = 1, \dots, |S(n)|$ існує таке розбиття $T_k = \bigcup_{i=1}^4 T_k^i(t)$, що функція $\psi_k(\cdot;r,t)$ є ін'єктивною на кожному з $T_k^i(t)$, $i = 1, \dots, 4$. Тому для всіх $k = 1, \dots, |S(n)|$

$$\int_0^1 \int_{T_k} |\nabla f(\psi_k(x;r,t))|_1 dx dt = \sum_{i=1}^4 \int_0^1 \int_{T_k^i(t)} |\nabla f(\psi_k(x;r,t))|_1 dx dt. \quad (2.68)$$

Для кожного $i = 1, \dots, 4$, зробимо заміну $y = \psi_k(x;r,t)$ у внутрішньому інтегралі і застосуємо нерівність Гельдера. Отримаємо

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_{T_k^i(t)} |\nabla f(\psi_k(x;r,t))|_1 dx dt = \int_0^1 \int_{\psi_k(T_k^i(t);r,t)} |\nabla f(y)|_1 |J_{\psi_k^{-1}(\cdot;r,t)}(y)| dy dt \\
&\le \left(\int_0^1 \int_{\psi_k(T_k^i(t);r,t)} |\nabla f(y)|_1^p dy dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \int_{\psi_k(T_k^i(t);r,t)} |J_{\psi_k^{-1}(\cdot;r,t)}(y)|^{p'} dy dt \right)^{\frac{1}{p'}}. \quad (2.69)
\end{aligned}$$

Застосовуючи теорему про обернену функцію після заміни $x = \psi_k^{-1}(y;r,t)$ отримаємо

$$\int_0^1 \int_{\psi_k(T_k^i(t);r,t)} |J_{\psi_k^{-1}(\cdot;r,t)}(y)|^{p'} dy dt$$

$$= \int_0^1 \int_{\psi_k(T_k^i(t);r,t)} |J_{\psi_k(\cdot;r,t)}(\psi_k^{-1}(y;r,t))|^{-p'} dydt$$

$$= \int_0^1 \int_{T_k^i(t)} |J_{\psi_k(\cdot;r,t)}(x)|^{1-p'} dxdt \le \int_{T_k} \int_0^1 |J_{\psi_k(\cdot;r,t)}(x)|^{1-p'} dtdx. \quad (2.70)$$

Оскільки $p > d \ge 2$, маємо $\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p} > \frac{1}{2}$ і тому

$$0 \ge 1 - p' > -1. \quad (2.71)$$

Відмітимо, що для всіх $t \in [0,1]$

$$\frac{r(1-t)}{2r + |x - x_k^*|_2} + t = \frac{r(1+t) + t|x - x_k^*|_2}{2r + |x - x_k^*|_2} > \frac{r}{2r + r} = \frac{1}{3},$$

$$-\frac{\operatorname{diam} Q}{2r} \le \frac{2r^2 + 3r|x - x_k^*|_2 + |x - x_k^*|_2^2 - 2r\left(\overline{mo}, \overline{\triangle x}\right)}{(2r + |x - x_k^*|_2)^2}$$
$$\le \frac{2r^2 + 3r^2 + r^2 + 2r \cdot \operatorname{diam} Q}{4r^2} = \frac{3}{2} + \frac{\operatorname{diam} Q}{2r}.$$

Використовуючи лему 2.7.14, останні нерівності і (2.71), отримаємо

$$\int_0^1 |J_{\psi_k(\cdot;r,t)}(x)|^{1-p'} dt \le 3^{(d-1)(p'-1)} \sup_A \int_0^1 (A(t-1)+1)^{1-p'} dt \le C, \quad (2.72)$$

де супремум береться по відрізку $A \in \left[-\frac{\operatorname{diam} Q}{2r}, \frac{3}{2} + \frac{\operatorname{diam} Q}{2r}\right]$, а число C є скінченним, залежить від $\operatorname{diam} Q$ і r і не залежить від h_n. Використовуючи (2.72), (2.70), (2.69), (2.68) і (2.67), отримаємо

$$\sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_{T_k} |f(x) - f(p_k(x;r))| dx$$
$$\le C h_n \sum_{i=1}^{4} \sum_{k=1}^{|S(n)|} \left(\int_0^1 \int_{\psi_k(T_k^i(t);r,t)} |\nabla f(y)|_1^p dydt \right)^{\frac{1}{p}} (\operatorname{meas} T_k)^{\frac{1}{p'}}$$
$$\le C h_n \sum_{i=1}^{4} \left(\int_0^1 \sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_{\psi_k(T_k^i(t);r,t)} |\nabla f(y)|_1^p dydt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{|S(n)|} \operatorname{meas} T_k \right)^{\frac{1}{p'}}. \quad (2.73)$$

Відмітимо, що для кожного $t \in [0,1]$ і всіх $i = 1, \ldots, 4$ множини $T_k^i(t)$ і функції $\psi_k(\cdot; r, t)$ задовольняють умовам леми 2.7.7, оскільки для всіх $x \in T_k^i(t)$ з леми 2.7.10 отримаємо

$$|x_k^* - \psi_k(x;r,t)|_\infty = |x_k^* - (1-t)p_k(x;r) - tx|_\infty \le t|x_k^* - x|_\infty$$
$$+ (1-t)|x_k^* - p_k(x;r)|_\infty \le |x_k^* - x|_\infty + |x_k^* - p_k(x;r)|_\infty \le C|x_k^* - x|_\infty$$

з деяким числом C, що не залежить від n (і t). Для завершення доведення леми достатньо застосувати лему 2.7.7 до (2.73). Лему доведено. □

2.7.4.5 Оцінка для $\sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_{T_k} |f(x_k^*) - f(p_k(x;r))|dx$

Лема 2.7.17. *Нехай виконується умова* (2.66)*, і задано вимірні множини* $T_k \subset U_k$*,* $k = 1, \dots, |S(n)|$*, такі, що існує число* $c > 0$*, що не залежить від* n *і для якого* $|J_{\varphi_k(\cdot;r,1)}(x)| > c$ *для всіх* $x \in T_k$*. Тоді існує число* C*, яке не залежить від* n*, і таке, що для всіх* $f \in W^{1,p}(Q)$

$$\sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_{T_k} |f(x_k^*) - f(p_k(x;r))|dx \le Ch_n \left(\operatorname{meas} \bigcup_{k=1}^{|S(n)|} T_k \right)^{\frac{1}{p'}} \| \, |\nabla f|_1 \, \|_{L_p(Q)}.$$

Доведення. Можемо вважати, що функція $\varphi_k(\cdot;r,t)$ є ін'єктивною на множині T_k, $k = 1, \dots, |S(n)|$. Інакше, застосовуючи лему 2.7.11, ми можемо розбити кожну з множин T_k на чотири підмножини, на кожній з яких функції $\varphi_k(\cdot;r,t)$ будуть ін'єктивними і застосувати подальші міркування для кожної підмножини. Використовуючи лему 2.4.1 отримаємо

$$\sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_{T_k} |f(p_k(x;r)) - f(x_k^*)|dx$$
$$\le \sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_0^1 \int_{T_k} |p_k(x;r) - x_k^*|_\infty |\nabla f(\varphi_k(x;r,t))|_1 dxdt$$
$$\le \sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_0^1 \left(\int_{T_k} |p_k(x;r) - x_k^*|_\infty^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{T_k} |\nabla f(\varphi_k(x;r,t))|_1^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dt$$
$$\le Ch_n \int_0^1 \sum_{k=1}^{|S(n)|} (\operatorname{meas} T_k)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{T_k} |\nabla f(\varphi_k(x;r,t))|_1^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dt$$
$$\le Ch_n \left(\sum_{k=1}^{|S(n)|} \operatorname{meas} T_k \right)^{\frac{1}{p'}} \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_{T_k} |\nabla f(\varphi_k(x;r,t))|_1^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dt$$

$$= Ch_n \left(\sum_{k=1}^{|S(n)|} \operatorname{meas} T_k \right)^{\frac{1}{p'}} \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_{\varphi_k(T_k;r,t)} |\nabla f(y)|_1^p |J_{\varphi_k^{-1}(\cdot;r,t)}(y)| dy \right)^{\frac{1}{p}} dt$$

$$= Ch_n \left(\sum_{k=1}^{|S(n)|} \operatorname{meas} T_k \right)^{\frac{1}{p'}} \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_{\varphi_k(T_k;r,t)} \frac{|\nabla f(y)|_1^p dy}{|J_{\varphi_k(\cdot;r,t)}(\varphi_k^{-1}(y;r,t))|} \right)^{\frac{1}{p}} dt.$$

З леми 2.7.13 випливає, що для $k = 1, \ldots, |S(n)|$, $t \in [0,1]$ і $x \in T_k$ маємо $J_{\varphi_k(\cdot;r,t)}(x) = t^d J_{\varphi_k(\cdot;r,1)}(x)$. Тому, використовуючи умови леми, отримаємо

$$\sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_{T_k} |f(p_k(x;r)) - f(x_k^*)| dx$$

$$\leq Ch_n \left(\sum_{k=1}^{|S(n)|} \operatorname{meas} T_k \right)^{\frac{1}{p'}} \int_0^1 t^{-\frac{d}{p}} \left(\sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_{\varphi_k(T_k;r,t)} \frac{|\nabla f(y)|_1^p dy}{|J_{\varphi_k(\cdot;r,1)}(\varphi_k^{-1}(y;r,t))|} \right)^{\frac{1}{p}} dt$$

$$\leq Ch_n \left(\sum_{k=1}^{|S(n)|} \operatorname{meas} T_k \right)^{\frac{1}{p'}} \int_0^1 t^{-\frac{d}{p}} \left(\sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_{\varphi_k(T_k;r,t)} \frac{|\nabla f(y)|_1^p dy}{c} \right)^{\frac{1}{p}} dt.$$

Відмітимо, що множини T_k і функції $\varphi_k(\cdot;r,t)$ задовольняють умовам леми 2.7.7, оскільки згідно з лемою 2.7.10 для всіх $k = 1, \ldots, |S(n)|$, $t \in [0,1]$, і $x \in T_k$

$$|x_k^* - \varphi_k(x;r,t)|_\infty = t|p_k(x;r) - x_k^*|_\infty \leq |p_k(x;r) - x_k^*|_\infty \leq C|x - x_k^*|_\infty.$$

Для завершення доведення, достатньо застосувати лему 2.7.7 і відмітити, що $p > d$, а тому інтеграл $\int_0^1 t^{-\frac{d}{p}} dt$ є збіжним. Лему доведено.

□

2.7.4.6 Доведення леми 2.7.6 для зірчатих множин

Доведення. Для кожного $k = 1, \ldots, |S(n)|$, ми розділимо множину U_k на три частини $W_k^1 = \{x \in U_k \colon \left(\overline{mo}, \overline{\triangle x}\right) < -2R\}$, $W_k^2 = \{x \in U_k \colon -2R \leq \left(\overline{mo}, \overline{\triangle x}\right) \leq -\frac{R}{2}\}$ і $W_k^3 = \{x \in U_k \colon \left(\overline{mo}, \overline{\triangle x}\right) > -\frac{R}{2}\}$.

Нехай n є настільки великим, що для всіх $k = 1, \ldots, |S(n)|$ і $x \in U_k$, $|x - x_k^*|_2 < \frac{R}{8}$. Для всіх $x \in W_k^1$ маємо $2R + |x - x_k^*|_2 + 2\left(\overline{mo}, \overline{\triangle x}\right) < 2R + \frac{R}{8} -$

$4R < -R$, для всіх $x \in W_k^3$ маємо $2R + |x - x_k^*|_2 + 2\left(\overline{mo}, \overline{\triangle x}\right) > 2R - R = R$, і тому згідно з лемою 2.7.13 для всіх $x \in W_k^1 \cup W_k^3$ отримаємо

$$\left|J_{\varphi_k(\cdot;R,1)}(x)\right| = \frac{R^d}{(2R + |x - x_k^*|_2)^{d+1}} \left|2R + |x - x_k^*|_2 + 2\left(\overline{mo}, \overline{\triangle x}\right)\right| > \frac{R^d}{(3R)^{d+1}} R = \frac{1}{3^{d+1}}.$$

Для всіх $x \in W_k^2$ маємо

$$2 \cdot \frac{R}{8} + |x - x_k^*|_2 + 2\left(\overline{mo}, \overline{\triangle x}\right) < \frac{2R}{8} + \frac{R}{8} - R < -\frac{R}{2},$$

і тому за лемою 2.7.13 для всіх $x \in W_k^2$ отримаємо

$$\left|J_{\varphi_k\left(\cdot;\frac{R}{8},1\right)}(x)\right| = \frac{\left(\frac{R}{8}\right)^d}{\left(\frac{2R}{8} + |x - x_k^*|_2\right)^{d+1}} \left|\frac{2R}{8} + |x - x_k^*|_2 + 2\left(\overline{mo}, \overline{\triangle x}\right)\right| > \frac{8R^d}{(2R + R)^{d+1}} \cdot \frac{R}{2} = \frac{4}{3^{d+1}}.$$

Нарешті, повернемось до доведення (2.59).

$$\sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_{U_k} |f(x) - f(x_k^*)|\, dx = \sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_{W_k^1 \cup W_k^3} |f(x) - f(x_k^*)|\, dx$$
$$+ \sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_{W_k^2} |f(x) - f(x_k^*)|\, dx \le \sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_{W_k^1 \cup W_k^3} |f(x) - f(p_k(x;R))|\, dx$$
$$+ \sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_{W_k^1 \cup W_k^3} |f(p_k(x;R)) - f(x_k^*)|\, dx$$
$$+ \sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_{W_k^2} \left|f(x) - f\left(p_k\left(x; \frac{R}{8}\right)\right)\right| dx$$
$$+ \sum_{k=1}^{|S(n)|} \int_{W_k^2} \left|f\left(p_k\left(x; \frac{R}{8}\right)\right) - f(x_k^*)\right| dx.$$

Для доведення (2.59) потрібно застосувати леми 2.7.16, 2.7.17 і зауважити, що

$$\operatorname{meas} \bigcup_{k=1}^{|S(n)|} U_k = o(1) \text{ при } n \to \infty$$

згідно з властивістю 6 леми 2.7.3. Лему доведено. □

2.8 Оптимальне відновлення інтеграла з неодиничною вагою

Результати цього підрозділу містяться у статті [35]. Нехай задано вимірну обмежену відкриту множину $Q \subset \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, і невід'ємну інтегровну на Q вагову функцію w. Ми розглядаємо задачу оптимального відновлення інтеграла

$$\mathrm{Int}_w f = \int_Q w(x) f(x) dx$$

на класі $f \in W_p^\infty(Q)$, використовуючи інформаційні оператори (2.46). Для деякого скорочення позначень ми будемо замість $\mathcal{E}(\mathrm{Int}_w, W_p^\infty(Q), \mathcal{I}_n, \mathbb{R})$ писати $E_n(W_p^\infty(Q), w)$, та замість $E_n(W_p^\infty(Q), w)$ у випадку $w \equiv 1$ писати $E_n(W_p^\infty(Q))$. Як відомо, і у цьому випадку достатньо розглядати тільки лінійні методи відновлення.

2.8.1 Випадок простої вагової функції

Ми кажемо, що вагова функція w є простою, якщо існує число $m \in \mathbb{N}$ і множини $Q_1, \ldots, Q_m$, що попарно не перетинаються, і такі, що $Q = \bigcup\limits_{k=1}^{m} Q_k$ і $w(x) = w_k > 0$, для $x \in Q_k$, $k = 1, \ldots, m$.

Для кожного $j = 1, \ldots, m$ і додатного цілого n_j визначимо множини інформаційних вузлів $S_j(n_j) = \{x_k^j\}_{k=1}^{|S_j(n_j)|}$ і ваги c_k^j, $k = 1, \ldots, |S_j(n_j)|$, так само, як це було зроблено у пункті 2.7.3, замінюючи області Q на Q_j а число n на n_j.

Головним результатом цього пункту є така теорема.

Теорема 2.8.1. *Нехай задано $p > d$, додатну просту на множині $Q \subset \mathbb{R}^d$ функцію w, тобто $w(x) = w_k > 0$, $x \in Q_k$, $k = 1, \ldots, m$, де $Q = \bigcup\limits_{k=1}^{m} Q_k$. Припустимо, що кожна з множин Q_k є опуклою. Тоді*

$$E_n\left(W_p^\infty(Q), w\right) = \frac{c(d,p)(1+o(1))}{2^{1+\frac{d}{p'}} n^{\frac{1}{d}}} \|w\|_{L_q(Q)},\ n \to \infty,$$

де $q = \frac{p'd}{p'+d}$ і $c(d,p)$ означено у (2.47).

Асимптотично оптимальним набором інформаційних вузлів є множина $S(n) = \bigcup\limits_{j=1}^{m} S_j(n_j)$, *а асимптотично оптимальним методом відновлення є*

$$\tilde{\Phi}_n(f(x_1), \ldots, f(x_{|S(n)|})) = \sum_{j=1}^{m} w_j \sum_{k=1}^{|S_j(n_j)|} c_k^j f(x_k^j),$$

де множини $S_j(n_j)$ *і числа* c_k^j *описані вище, а*

$$n_j = \left[|S(n)| \frac{w_j^q \operatorname{meas} Q_j}{\sum\limits_{k=1}^{m} w_k^q \operatorname{meas} Q_k} \right], \; j = 1, \ldots, m,$$

і $[x]$ *позначає найбільше ціле число, що не перевищує дійсне число* x.

Легко бачити, що для асимптотично оптимальної інформаційної множини маємо $n_k \to \infty$ при $n \to \infty$, $k = 1, \ldots, m$.

Ми доведемо цю теорему у наступних кількох підпунктах.

2.8.1.1 Допоміжні результати

Нам потрібна лема, яка вже використовувалась в декількох роботах, див. напр. [22]. Для повноти ми наводимо її коротке доведення.

Лема 2.8.1. *Нехай задано* $m \in \mathbb{N}$, *додатні числа* $a_1, \ldots, a_m$, $n_1, \ldots, n_m$, α *і* n *такі, що* $\sum\limits_{k=1}^{m} n_k = n$. *Тоді*

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{n_k^\alpha} \geq \frac{1}{n^\alpha} \left(\sum_{k=1}^{m} a_k^{\frac{1}{\alpha+1}} \right)^{\alpha+1}.$$

Нерівність перетворюється на рівність, якщо для $k = 1, \ldots, m$

$$n_k = n \frac{a_k^{\frac{1}{\alpha+1}}}{\sum\limits_{k=1}^{m} a_k^{\frac{1}{\alpha+1}}}.$$

Доведення. Застосовуючи нерівність Гельдера з показниками $\alpha + 1$ і $\frac{\alpha+1}{\alpha}$, отримаємо

$$\sum_{k=1}^{m} a_k^{\frac{1}{\alpha+1}} = \sum_{k=1}^{m} \left(a_k^{\frac{1}{\alpha+1}} \frac{1}{n_k^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}} \right) n_k^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \leq \left(\sum_{k=1}^{m} a_k \frac{1}{n_k^\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \left(\sum_{k=1}^{m} n_k \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}},$$

звідки випливає необхідне. $\square$

Лема 2.8.2. *Для заданої вимірної за Жорданом множини* $Q \subset \mathbb{R}^d$ *і* $h > 0$ *розглянемо множину* $Q^h := \{x \in Q : \inf\limits_{y \in \partial Q} |x - y|_\infty \geq h\}$. *Тоді* $\operatorname{meas} Q^h = \operatorname{meas} Q + o(1)$, $h \to 0$.

Доведення. Використовуючи позначення з пункту 2.7.3 і рівності (2.53), отримаємо $|B(h) \backslash A(h)| = o(h^{-d})$, $h \to 0$. Для кожного куба $P \in B(h) \backslash A(h)$ (з довжиною ребра $2h$) розглянемо куб $\tilde{P}$ з тим самим центром і довжиною ребра $4h$. Покладемо $\tilde{Q} := Q \setminus \bigcup\limits_{P \in B(h) \backslash A(h)} \tilde{P}$. Тоді $Q^h \supset \tilde{Q}$ і $\operatorname{meas} \tilde{Q} \geq \operatorname{meas} Q - o(h^{-d}) \cdot (4h)^d = \operatorname{meas} Q + o(1)$, $h \to 0$. Лему доведено. $\square$

2.8.1.2 Оцінка зверху

Для кожного набору чисел n_k (які відповідають кількості інформаційних вузлів у множині Q_k, $k = 1, \ldots, m$), виберемо інформаційні вузли x_k^i і коефіцієнти c_k^i, $i = 1, \ldots, n_k$, так, щоб вони були оптимальні для Q_k. Використовуючи теорему 2.7.3, нерівність Гельдера і лему 2.8.1, отримаємо при $n \to \infty$

$$E_n\left(W_p^\infty(Q), w\right) \leq \inf_{n_i} \sup_{f \in W_p^\infty(Q)} \sum_{i=1}^m w_i \left| \int\limits_{Q_i} f(x)dx - \sum_{k=1}^{n_i} c_k^i f(x_k^i) \right|$$

$$\leq \inf_{n_i} \sup_{f \in W_p^\infty(Q)} \sum_{i=1}^m w_i \| \, |\nabla f|_1 \, \|_{L_p(Q_i)} \sup_{g \in W_p^\infty(Q_i)} \left| \int\limits_{Q_i} g(x)dx - \sum_{k=1}^{n_i} c_k^i g(x_k^i) \right|$$

$$= \inf_{n_i} \sup_{f \in W_p^\infty(Q)} \sum_{i=1}^m w_i \| \, |\nabla f|_1 \, \|_{L_p(Q_i)} E_{n_i}(W_p^\infty(Q_i))$$

(теорема 2.7.3)

$$= \inf_{n_i} \sup_{f \in W_p^\infty(Q)} \sum_{i=1}^m w_i c(d,p) \left(\frac{\operatorname{meas} Q_i}{2^d} \right)^{\frac{1}{d} + \frac{1}{p'}} \frac{1 + o(1)}{n_i^{\frac{1}{d}}} \| \, |\nabla f|_1 \, \|_{L_p(Q_i)}$$

$$\leq c(d,p)(1+o(1)) \inf_{n_i} \sup_{f\in W_p^\infty(Q)} \left(\sum_{i=1}^m \frac{w_i^{p'}}{n_i^{\frac{p'}{d}}} \left(\frac{\operatorname{meas} Q_i}{2^d} \right)^{\frac{p'}{d}+1} \right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\cdot \left(\sum_{i=1}^m \| \, |\nabla f|_1 \, \|_{L_p(Q_i)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

(лема 2.8.1)

$$= \frac{c(d,p)(1+o(1))}{n^{\frac{1}{d}}} \left(\sum_{i=1}^m w_i^{\frac{p'}{1+\frac{p'}{d}}} \frac{\operatorname{meas} Q_i}{2^d} \right)^{\frac{1+\frac{p'}{d}}{p'}} = \frac{c(d,p)(1+o(1))}{2^{1+\frac{d}{p'}} n^{\frac{1}{d}}} \|w\|_{L_q(Q)}.$$

2.8.1.3 "Склеєні" екстремальні функції

Для будь-якої конфігурації інформаційних вузлів $x_1, \ldots, x_n$, і набору чисел $w_1, \ldots, w_n$, ми розглядаємо функцію $f\colon Q \to \mathbb{R}$, яка означена за допомогою такою конструкції. Для кожного $i = 1, \ldots, m$, визначимо функцію $f_i(x)\colon Q_i \to \mathbb{R}$ формулою

$$f_i(x) := f_{h_i}(x_1^i, \ldots, x_{n_i}^i; x),$$

де, $x_1^i, \ldots, x_{n_i}^i$ — інформаційні вузли, що містяться у Q_i, $h_i := \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{meas} Q_i}{n_i}\right)^{\frac{1}{d}}$, а функція f_h означена (2.49). Покладемо $g(x) := \min\limits_{y\in \bigcup\limits_{k=1}^m \partial Q_k} |x-y|$ і

$$f(x) = w_i^{\frac{d}{pd+p-d}} \min\{g(x), f_i(x)\},\ x \in Q_i,\ i = 1, \ldots, m.$$

З нерівності трикутника випливає, що

$$|g(x) - g(y)| \leq |x-y| \tag{2.74}$$

для всіх $x, y \in Q$, а тому функція g є ліпшицевою. Тому за теоремою Радемахера існує градієнт функції g майже всюди. Тому з (2.74) випливає, що $g \in W^{1,\infty}(Q)$, див. напр. [89, Розділи 3,4]. Тому $f \in W^{1,p}(Q)$ і $\frac{f}{\| \, |\nabla f|_1 \, \|_{L_p(Q)}} \in W_p^\infty(Q)$.

Відмітимо, що $f \equiv w_i^{\frac{d}{pd+p-d}} f_{h_i}(x_1^i, \ldots, x_{n_i}^i)$ на $Q_i^{H_i}$, де $H_i \to 0$ при $h_i \to 0$, а позначення Q^h введено у лемі 2.8.2.

Позначимо через $\tilde{f}$ функцію f з $x_1, \ldots, x_n$ вибраними у такий спосіб, що для кожного $i = 1, \ldots, m$, підмножини $x_1^i, \ldots, x_{n_i}^i$ є оптимальними інформаційними наборами у теоремі 2.7.3 (з Q зміненій на Q_i і n на n_i). Покладемо

$$\tilde{Q} = \tilde{Q}(h_1, \ldots, h_m) := \bigcup_{i=1}^{m} Q_i^{H_i}.$$

Згідно з лемою 2.8.2, $\operatorname{meas} \tilde{Q} = \operatorname{meas} Q + o(1)$, $n \to \infty$.

Нам потрібне таке твердження.

Лема 2.8.3. *Для кожного $i = 1, \ldots, m$ при $n \to \infty$*

$$\| \, |\nabla \tilde{f}|_1 \, \|_{L_p(Q_i^{H_i})}^p = (1 + o(1)) w_i^{\frac{dp}{dp+p-d}} \frac{\operatorname{meas} Q_i^{H_i}}{2^d} \int\limits_{\square_1^d} \left(\frac{1}{|x|_\infty^{d-1}} - |x|_\infty \right)^{p'} dx.$$

Доведення. З означення функції $\tilde{f}$ і леми 2.8.2 маємо

$$\| \, |\nabla \tilde{f}|_1 \, \|_{L_p(Q_i^{H_i})}^p = (1 + o(1)) n_i w_i^{\frac{dp}{dp+p-d}} \| \, |\nabla f_{e,h_i}|_1 \, \|_{L_p(\square_{h_i}^d)}^p.$$

З леми 2.4.5 ми отримуємо

$$|\nabla f_{e,h}(y)|_1 = \left(\frac{h^{d-1}}{|y|_\infty^{d-1}} - \frac{|y|_\infty}{h} \right)^{p'-1} \quad \text{майже всюди на } \square_h^d.$$

Оскільки $(p' - 1)p = p'$, то

$$\| \, |\nabla f_{e,h_i}|_1 \, \|_{L_p(\square_{h_i}^d)}^p = \int\limits_{\square_{h_i}^d} \left(\frac{h_i^{d-1}}{|x|_\infty^{d-1}} - \frac{|x|_\infty}{h_i} \right)^{p'} dx = h_i^d \int\limits_{\square_1^d} \left(\frac{1}{|y|_\infty^{d-1}} - |y|_\infty \right)^{p'} dy.$$

Для завершення доведення леми достатньо помітити, що $n_i h_i^d = \frac{\operatorname{meas} Q_i}{2^d}$. $\square$

2.8.1.4 Оцінка знизу

Для кожного інформаційного набору $x_1, \ldots, x_n$ і коефіцієнтів $c_1, \ldots, c_n$,

$$\sup_{g \in W_p^\infty(Q)} \left| \int\limits_Q w(x) g(x) dx - \sum_{k=1}^{n} c_k g(x_k) \right| \geq \frac{1}{\| \, |\nabla f|_1 \, \|_{L_p(Q)}} \int\limits_Q w(x) f(x) dx$$

$$(\text{лема } 2.7.1) \geq \frac{1}{\| \, |\nabla \tilde{f}|_1 \, \|_{L_p(Q)}} \sum_{i=1}^{m} w_i \int\limits_{Q_i} \tilde{f}_i(x)dx$$

$$(\text{лема } 2.8.2) = \frac{1+o(1)}{\| \, |\nabla \tilde{f}|_1 \, \|_{L_p(\tilde{Q})}} \sum_{i=1}^{m} w_i \int\limits_{Q_i^{H_i}} \tilde{f}_i(x)dx$$

(екстремальність функції $\tilde{f}$ у теоремі 2.7.3)

$$= \frac{1+o(1)}{\| \, |\nabla \tilde{f}|_1 \, \|_{L_p(\tilde{Q})}} \sum_{i=1}^{m} w_i c(d,p) \left(\frac{\operatorname{meas} Q_i^{H_i}}{2^d} \right)^{\frac{1}{d}+\frac{1}{p'}} \| \, |\nabla \tilde{f}|_1 \, \|_{L_p(Q_i^{H_i})} n_i^{-\frac{1}{d}}$$

(лема 2.8.3)

$$= \frac{c(d,p)(1+o(1))}{\left(\sum\limits_{i=1}^{m} w_i^{\frac{pd}{pd+p-d}} \frac{\operatorname{meas} Q_i^{H_i}}{2^d} \right)^{\frac{1}{p}}} \sum_{i=1}^{m} w_i^{\frac{pd+p}{pd+p-d}} \left(\frac{\operatorname{meas} Q_i^{H_i}}{2^d} \right)^{\frac{1}{d}+\frac{1}{p'}} \left(\frac{\operatorname{meas} Q_i^{H_i}}{2^d} \right)^{\frac{1}{p}} n_i^{-\frac{1}{d}}$$

$$= \frac{c(d,p)(1+o(1))}{\left(\sum\limits_{i=1}^{m} w_i^{\frac{pd}{pd+p-d}} \frac{\operatorname{meas} Q_i^{H_i}}{2^d} \right)^{\frac{1}{p}}} \sum_{i=1}^{m} w_i^{\frac{pd+p}{pd+p-d}} \left(\frac{\operatorname{meas} Q_i^{H_i}}{2^d} \right)^{\frac{1}{d}+1} n_i^{-\frac{1}{d}}$$

$$(\text{лема } 2.8.1) \geq \frac{c(d,p)(1+o(1))}{n^{\frac{1}{d}} \left(\sum\limits_{i=1}^{m} w_i^{\frac{pd}{pd+p-d}} \frac{\operatorname{meas} Q_i^{H_i}}{2^d} \right)^{\frac{1}{p}}} \left(\sum_{i=1}^{m} w_i^{\frac{pd}{pd+p-d}} \frac{\operatorname{meas} Q_i^{H_i}}{2^d} \right)^{\frac{d+1}{d}}$$

$$= \frac{c(d,p)(1+o(1))}{n^{\frac{1}{d}}} \left(\sum_{i=1}^{m} w_i^{\frac{pd}{pd+p-d}} \frac{\operatorname{meas} Q_i^{H_i}}{2^d} \right)^{\frac{pd+p-d}{pd}}$$

$$= \frac{c(d,p)(1+o(1))}{2^{1+\frac{d}{p'}} n^{\frac{1}{d}}} \|w\|_{L_q(Q)}.$$

2.8.2 Випадок допустимої вагової функції

Ми будемо казати, що множина $Q \subset \mathbb{R}^d$ складена з $m \in \mathbb{N}$ опуклих областей, якщо існує опуклі області $Q_1, \ldots, Q_m$, які попарно не перетинаються і $Q = \bigcup\limits_{k=1}^{m} Q_k$.

Нехай задано обмежену множину $Q \subset \mathbb{R}^d$. Ми називаємо функцію $w\colon Q \to \mathbb{R}$ допустимою, якщо вона додатна майже всюди, обмежена, і існує $M \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх $C_1 < C_2$ множина $\{x \in Q\colon w(x) \in [C_1, C_2]\}$

складена з $m \le M$ опуклих множин.

Перш за все відмітимо, що проста функція є допустимою, якщо множини Q_k складені з опуклих областей. Інші приклади допустимих функцій можна побудувати так.

Нехай $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ — це монотонна функція. Розглянемо функцію $w = w(\varphi)\colon \square_1^d \to \mathbb{R}$, що означена формулою $w(x) = \varphi(|x|_\infty)$. Для довільних $C_1 < C_2$, множина $\varphi^{-1}[C_1, C_2]$ дорівнює $[\alpha, \beta] \setminus X$, де $0 \le \alpha \le \beta \le 1$ і $X \subset \{\alpha, \beta\}$. Тому множина $w^{-1}[C_1, C_2]$ дорівнює $\square_\beta^d \setminus \square_\alpha^d$ (з відповідним чином включеними межами). Ця множина є об'єднанням $2d$ опуклих підмножин, що попарно не перетинаються. Дійсно, нехай для простоти $X = \emptyset$. Тоді ці опуклі підмножини можуть бути вибрані так.

$$T_1^{\pm} = \square_\beta^d \cap \{\pm x_1 \in [\alpha, \beta]\},$$

і для $k = 2, \dots, d$

$$T_k^{\pm} = \square_\beta^d \cap \{\pm x_k \in [\alpha, \beta], |x_1|, \dots, |x_{k-1}| < \alpha\}.$$

Тому вага w є допустимою (число M може бути обраним рівним $2d$).

Використовуючи аналогічні міркування, можна довести, що функція $w(\varphi)$ залишається допустимою, якщо одне або декілька припущень змінено:

1. Вимагати, щоб функція φ була кусково-монотонною, тобто щоб існувало розбиття $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$, так, що φ є монотонною на кожному з інтервалів (t_{i-1}, t_i), $i = 1, \dots, n$.

2. Замінити множину $\square_1^d$ на довільну опуклу множину Q.

3. Замінити норму $|\cdot|_\infty$ на норму $|\cdot|_1$.

Теорема 2.8.2. *Нехай задано $p > d$ і допустиму функцію w на множині $Q \subset \mathbb{R}^d$. Тоді*

$$E_n\left(W_p^\infty(Q), w\right) = \frac{c(d,p)(1+o(1))}{2^{1+\frac{d}{p'}} n^{\frac{1}{d}}} \|w\|_{L_q(Q)},\ n \to \infty,$$

де $q = \frac{p'd}{p'+d}$ і $c(d,p)$ означено у (2.47).

Доведення. Відмітимо, що якщо для всіх $x \in Q$ маємо $w(x) \le v(x)$, то

$$E_n\left(W_p^\infty(Q), w\right) \le E_n\left(W_p^\infty(Q), v\right).$$

Цю нерівність можна отримати з існування оптимального лінійного метода відновлення і рівності

$$\inf_{\substack{c_k\in\mathbb{R},\\ k=1,\dots,n}} \sup_{f\in W_p^\infty(Q)} \left| \int\limits_Q w(x)f(x)dx - \sum_{k=1}^n c_k f(x_k) \right| = \sup_{\substack{f\in W_p^\infty(Q),\\ f(x_k)=0,\, k=1,\dots,n}} \int\limits_Q w(x)f(x)dx,$$

яка, в свою чергу, може бути доведеною стандартними міркуваннями, які включають у себе застосування теореми Хана–Банаха, при доведенні теорем двоїстості, див. напр. [104, теорема 1.3.4].

Нехай $c \le w(x) \le C$ для всіх $x \in Q$. Зафіксуємо $m \in \mathbb{N}$, і для $k = 1, \dots, m$ покладемо

$$Q_{k,m} := \left\{ x \in Q \colon w(x) \in \left[c + (k-1)\frac{C-c}{m}, c + k\frac{C-c}{m} \right] \right\}.$$

Розглянемо функцію $\overline{w}_m(x) = c + k\frac{C-c}{m}$ для $x \in Q_{k,m}$, $k = 1, \dots, m$. Тоді $w(x) \le \overline{w}_m(x)$ для всіх $x \in Q$, і використовуючи теорему 2.8.1, отримаємо

$$\lim_{n\to\infty} E_n\left(W_p^\infty(Q), w\right) \cdot \left(\frac{c(d,p)}{2^{1+\frac{d}{p'}} n^{\frac{1}{d}}} \|w\|_{L_q(Q)} \right)^{-1}$$
$$\le \lim_{n\to\infty} E_n\left(W_p^\infty(Q), \overline{w}_m\right) \cdot \left(\frac{c(d,p)}{2^{1+\frac{d}{p'}} n^{\frac{1}{d}}} \|\overline{w}_m\|_{L_q(Q)} \right)^{-1} \frac{\|\overline{w}_m\|_{L_q(Q)}}{\|w\|_{L_q(Q)}} = \frac{\|\overline{w}_m\|_{L_q(Q)}}{\|w\|_{L_q(Q)}}.$$

Оскільки $\|\overline{w}_m\|_{L_q(Q)} \to \|w\|_{L_q(Q)}$ при $m \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} E_n\left(W_p^\infty(Q), w\right) \cdot \left(\frac{c(d,p)}{2^{1+\frac{d}{p'}} n^{\frac{1}{d}}} \|w\|_{L_q(Q)} \right)^{-1} \le 1.$$

Застосовуючи аналогічні міркування для функції $\underline{w}_m(x) = c + (k-1)\frac{C-c}{m}$ для $x \in Q_{k,m}$, $k = 1, \dots, m$, отримаємо нерівність

$$\lim_{n\to\infty} E_n\left(W_p^\infty(Q), w\right) \cdot \left(\frac{c(d,p)}{2^{1+\frac{d}{p'}} n^{\frac{1}{d}}} \|w\|_{L_q(Q)} \right)^{-1} \ge 1.$$

Теорему доведено. □

Висновки до розділу 2

У даному розділі вивчаються екстремальні задачі теорії наближень на класах Соболєва функцій багатьох змінних. Головними результатами цього розділу є:

1. Розв'язано задачу Стєчкіна про наближення взагалі кажучи необмеженого гіперсингулярного інтегрального оператора за допомогою обмежених.

2. Отримано точні нерівності типу Ландау–Колмогорова для гіперсингулярного інтегрального оператора, а також розв'язано деякі пов'язані екстремальні задачі для цього оператора.

3. Розв'язано задачі оптимізації квадратурних формул для інтегралів з одиничною і неодиничною ваговими функціями.

Розділ 3

Нерівності типу Островського і деякі їх застосування

3.1 Про загальний підхід до деяких задач апроксимації операторів

Головні результати цього підрозділу містяться у статті [107].

3.1.1 Вступ

Нехай задано два оператори Λ і I, які визначені на множині $\mathcal{A}$ функцій f, і h вимірює відстань у множині значень операторів Λ і I. Величина

$$\sup_{f\in\mathcal{A}} h(\Lambda f, If) \tag{3.1}$$

дає відхилення між операторами Λ і I на множині $\mathcal{A}$. Як вже зазначалось у Вступі, задача знаходження такого відхилення є важливою для багатьох питань теорії наближень та чисельного аналізу.

Виявляється, що у багатьох відомих ситуаціях розв'язання задачі знаходження величини (3.1) використовує такий підхід. Припустимо, що інфор-

мація про клас $\mathcal{A}$ задана у термінах значень λf, $f \in \mathcal{A}$ деякого оператора λ. Наприклад, класи Соболєва $W_q^r(a,b)$, $r \in \mathbb{N}$, $q \in [1,\infty]$, $(a,b) \subset \mathbb{R}$, визначаються умовою $\|f^{(r)}\|_{L_q(a,b)} \leq 1$ на функцію $\lambda f = f^{(r)}$. Нехай також для кожної $f \in \mathcal{A}$ відхилення $h(\Lambda f, If)$ може бути оціненим

$$h(\Lambda f, If) \leq \varphi(\lambda f) \tag{3.2}$$

у термінах деякого функціонала φ, що діє на множині $\lambda(\mathcal{A})$, ми вміємо розв'язувати екстремальну задачу

$$\varphi(g) \to \sup \text{ по } g \in \lambda(\mathcal{A}), \tag{3.3}$$

і нерівність (3.2) перетворюється на рівність на множині функцій $f \in \mathcal{A}$, для яких функції λf є екстремальними у задачі (3.3) (множина екстремальних функцій може складатись з однієї функції, наприклад, якщо супремум у (3.3) досягається; поняття екстремальної послідовності елементів буде дано у означенні 3.1.2). Тоді справедлива точна нерівність

$$h(\Lambda f, If) \leq \sup_{g \in \lambda(\mathcal{A})} \varphi(g).$$

Далі ми формулюємо загальну версію описаного підходу у лемі 3.1.1. Ми також наводимо серію прикладів, що показують застосування описаного підходу. У цьому підході є два ключові кроки: перший крок полягає у доведенні нерівності (3.2), яка має перетворюватись на рівність для достатньо широкої множини функцій; другим кроком є розв'язання екстремальної задачі (3.3). Кожен з цих кроків може бути нетривіальним, але у деяких відомих у літературі результатах, обидва кроки є або простими, або відомими. Зокрема, ми показуємо, що багато результатів стосовно нерівностей типу Островського можуть бути отримані за допомогою використання леми 3.1.1 і стандартних аргументів. Наприклад, більшість результатів з огляду [74] по суті випливають з теореми 3.1.3 з $n = 1$ і $n = 2$.

3.1.2 Головне спостереження

3.1.2.1 Необхідні означення

Множину M з рефлексивним антисиметричним і транзитивним відношенням $\leq$ називають частково впорядкованою. Ми також іноді пишемо $\alpha \geq \beta$ замість $\beta \leq \alpha$.

Означення 3.1.1. *Нехай задано частково впорядковану множину M. Елемент $s \in M$ називається супремумом множини $N \subset M$, якщо виконуються такі дві умови:*

1. *$s \geq x$ для всіх $x \in N$;*
2. *Якщо $u \geq x$ для всіх $x \in N$, то $u \geq s$.*

Якщо існує супремум множини N, то він є єдиним, і позначається через $\sup N$.

Означення 3.1.2. *Послідовність $\{x_n\} \subset N$ будемо називати екстремальною для множини $N \subset M$, якщо з того факту, що $y \in M$ і $y \geq x_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ випливає, що $y \geq x$ для всіх $x \in N$.*

Відмітимо, що якщо $\sup N$ існує і належить до N, то константна послідовність $\{\sup N\}$ є екстремальною для множини N.

Означення 3.1.3. *Множина M з введеною у ній асоціативною бінарною операцією $+$ називається моноїдом, якщо існує $\theta_M \in M$ такий, що для всіх $\alpha \in M$*

$$\theta_M + \alpha = \alpha = \alpha + \theta_M.$$

Означення 3.1.4. *Моноїд M називається частково впорядкованим, якщо M є частково впорядкованою множиною,*

$$M_+ := \{\alpha \in M \colon \theta_M \leqslant \alpha\} \neq \{\theta_M\},$$

і виконується така умова:

$$\text{якщо } \alpha \leq \beta, \text{ то } \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma \text{ для всіх } \gamma \in M.$$

Означення 3.1.5. *Функція $h_X(\cdot,\cdot)\colon X \times X \to M_+$ називається M-значною метрикою, якщо виконуються такі умови:*

1. *Для всіх $x, y \in X$, $x = y$ тоді і тільки тоді, коли $h_X(x, y) = \theta_M$;*
2. *Для всіх $x, y \in X$, $h_X(x, y) = h_X(y, x)$;*
3. *Для всіх $x, y, z \in X$, $h_X(x, y) \leqslant h_X(x, z) + h_X(z, y)$.*

Пару (X, h_X) будемо називати M-метричним простором.

M-метричні простори розглядались, зокрема, у [17]. У подальшому, для двох множин A і B, через B^A будемо позначати множину усіх функцій $f\colon A \to B$.

3.1.2.2 Головна лема

Наступне твердження описує схему, яка часто використовується для розв'язання різних екстремальних задач.

Лема 3.1.1. *Нехай задано частково впорядкований моноїд M, M-метричний простір (Y, h_Y) і деякі множини S, T, X, Z. Припустимо, що для $\mathcal{A} \subset X^T$, $\Lambda, I\colon \mathcal{A} \to Y$, $\lambda\colon \mathcal{A} \to Z^S$, і $\varphi\colon \lambda(\mathcal{A}) \to M$ виконуються такі властивості.*

(а) Для всіх $f \in \mathcal{A}$
$$h_Y(\Lambda f, If) \leq \varphi(\lambda f). \tag{3.4}$$

(б) Існує така підмножина $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, що нерівність (3.4) перетворюється на рівність для всіх $f \in \mathcal{B}$.

(в) Для деякої послідовності $\{f_n\} \subset \mathcal{B}$ послідовність $\{\varphi(\lambda f_n)\}$ є екстремальною для множини $\varphi(\lambda(\mathcal{A})) := \{\varphi(\lambda f)\colon f \in \mathcal{A}\}$.

Тоді послідовність $\{h_Y(\Lambda f_n, If_n)\}$ є екстремальною для множини
$$\{h_Y(\Lambda f, If)\colon f \in \mathcal{A}\}.$$

Доведення. Нехай $\{f_n\} \subset \mathcal{B}$ буде послідовністю з властивості (в). Припустимо, що $m \in M$ є такою, що $m \geq h_Y(\Lambda f_n, If_n)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $\{f_n\} \subset \mathcal{B}$, то згідно з властивістю (б), $m \geq \varphi(\lambda f_n)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тому, використовуючи властивості (в) і (а), отримаємо $m \geq \varphi(\lambda f) \geq h_Y(\Lambda f, If)$ для всіх $f \in \mathcal{A}$, звідки отримуємо необхідне. □

Зауваження 3.1.1. *Твердження леми 3.1.1 можна сформулювати у такому вигляді. При виконанні умов леми 3.1.1 нерівність*

$$h_Y(\Lambda f, If) \leq \sup \varphi(\lambda(\mathcal{A})) \tag{3.5}$$

виконується для всіх $f \in \mathcal{A}$, якщо існує супремум у правій частини рівності. Нерівності (3.4) *і* (3.5) *є точними.*

3.1.3 Деякі застосування

3.1.3.1 Допоміжні результати

Використовуючи леми, наведені нижче, ми проілюструємо декілька застосувань леми 3.1.1.

Лема 3.1.2. *Нехай задано дві абсолютно неперервні функції $f, w\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, w є додатною на $[a,b]$ і $p\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ — це інтегровна на $[a,b]$ функція. Тоді для всіх $x \in [a,b]$*

$$\int_a^b p(t)f(t)dt - \left(\int_a^b p(t)w(t)dt\right)\frac{f(x)}{w(x)} = \int_a^b r_x(s)Df(s)ds,$$

де

$$r_x(s) = r_x(pw; s) = \begin{cases} -\int_a^s p(t)w(t)dt, & s \leq x, \\ \int_s^b p(t)w(t)dt, & s \geq x; \end{cases} \tag{3.6}$$

і $Df = \left(\frac{1}{w}f\right)'$.

Доведення.

$$\int_a^b p(t)f(t)dt - \left(\int_a^b p(t)w(t)dt\right)\frac{f(x)}{w(x)} = \int_a^b p(t)w(t)\left(\frac{f(t)}{w(t)} - \frac{f(x)}{w(x)}\right)dt$$

$$= \int_a^x p(t)w(t)\left(\frac{f(t)}{w(t)} - \frac{f(x)}{w(x)}\right)dt + \int_x^b p(t)w(t)\left(\frac{f(t)}{w(t)} - \frac{f(x)}{w(x)}\right)dt$$

$$= -\int_a^x p(t)w(t)\int_t^x Df(s)dsdt + \int_x^b p(t)w(t)\int_x^t Df(s)dsdt$$

$$= \int_a^x Df(s)\left(-\int_a^s p(t)w(t)dt\right)ds + \int_x^b Df(s)\left(\int_s^b p(t)w(t)dt\right)ds$$

$$= \int_a^b r_x(s)Df(s)ds,$$

що і треба було довести. □

Припустимо, що задано $n \in \mathbb{N}$ додатних на $[a,b]$ функцій $w_1, \ldots, w_n$ таких, що функція $w_k^{(n-k)}$ є абсолютно неперервною, $k = 1, \ldots, n$. Розглянемо диференціальні оператори

$$D_0 f = f,\ D_k f = \left(\frac{1}{w_k} D_{k-1} f\right)',\ k = 1, \ldots, n. \tag{3.7}$$

Оператори такого типу досліджувались у [95, Розділ 6]. Починаючи з інтегровної функції $p\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ і точки $x \in [a,b]$, ми визначимо послідовність функцій $r_x^k\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ формулою

$$r_x^0 = p,\ \text{і}\ r_x^k = r_x(w_k r_x^{k-1}),\ k = 1, \ldots, n, \tag{3.8}$$

де функція r_x задається формулою (3.6). Справедливе таке представлення.

Лема 3.1.3.

$$\int_a^b p(t)f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_a^b r_x^k(t)w_{k+1}(t)dt\right)\frac{D_k f(x)}{w_{k+1}(x)} = \int_a^b r_x^n(t)D_n f(t)dt.$$

Доведення. Доведемо твердження індукцією по n. Випадок $n = 1$ випливає з леми 3.1.2. Припустимо, що лема справедлива для $n = s$. Тоді

$$\int_a^b p(t)f(t)dt - \sum_{k=0}^{s}\left(\int_a^b r_x^k(t)w_{k+1}(t)dt\right)\frac{D_k f(x)}{w_{k+1}(x)}$$
$$= \int_a^b r_x^s(t)D_s f(t)dt - \left(\int_a^b r_x^s(t)w_{s+1}(t)dt\right)\frac{D_s f(x)}{w_{s+1}(x)}.$$

Застосовуючи лему 3.1.2 з $p = r_x^s$ і $w = w_{s+1}$, отримаємо необхідне. □

У випадку, коли $w_k \equiv 1$ для всіх $k = 1, \ldots, n$, попередню лему можна записати у більш явному вигляді.

Лема 3.1.4. *Якщо $n \in \mathbb{N}$, f має $n-1$ похідних на $[a, b]$ і $f^{(n-1)}$ є абсолютно неперервною на відрізку $[a, b]$, то*

$$\int_a^b p(t)f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\int_a^b p(t)(t-x)^k dt \right) f^{(k)}(x) = \int_a^b r_x^n(t) f^{(n)}(t)dt. \tag{3.9}$$

Крім того, для всіх $k = 1, \ldots, n$,

$$\int_a^b r_x^k(t)dt = \frac{1}{k!} \int_a^b p(t)(t-x)^k dt. \tag{3.10}$$

Доведення. Перш за все відмітимо, що ліва частина у (3.9) стає нулем, якщо f є поліномом степеня менше n; це легко випливає з представлення $f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(t-x)^k$ для таких поліномів.

Далі ми індукцією по n будемо одночасно доводити рівності (3.9) і (3.10). Для $n = 1$ рівність (3.9) випливає з леми 3.1.2. Оскільки ліва частина (3.9) з $n = 2$ є нулем для $f(t) = t$, використовуючи (3.9) для $n = 1$, отримаємо

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b p(t)tdt - \left(\int_a^b p(t)dt \right) x - \int_a^b p(t)(t-x)dt \\ &= \int_a^b r_x^1(t)dt - \int_a^b p(t)(t-x)dt \end{aligned}$$

і рівність (3.10) для $k = 1$ доведено.

Припустимо, що рівності (3.9) і (3.10) виконуються для деякого $n = s \in \mathbb{N}$. Оскільки ліва частина (3.9) з $n = s+2$ є нулем для функції $f(t) = \frac{t^{s+1}}{(s+1)!}$, то використовуючи індуктивне припущення для $n = s$,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b p(t) \frac{t^{s+1}}{(s+1)!} dt - \sum_{k=0}^{s+1} \frac{1}{k!} \left(\int_a^b p(t)(t-x)^k dt \right) \frac{x^{s-k+1}}{(s-k+1)!} \\ &= \int_a^b p(t) \frac{t^{s+1}}{(s+1)!} dt - \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{k!} \left(\int_a^b p(t)(t-x)^k dt \right) \frac{x^{s-k+1}}{(s-k+1)!} \\ &\quad - \frac{1}{s!} \left(\int_a^b p(t)(t-x)^s dt \right) x - \frac{1}{(s+1)!} \int_a^b p(t)(t-x)^{s+1} dt \end{aligned}$$

$$= \int_a^b r_x^s(t) \cdot t dt - \left(\int_a^b r_x^s(t) dt \right) x - \frac{1}{(s+1)!} \int_a^b p(t)(t-x)^{s+1} dt$$
$$= \int_a^b r_x^{s+1}(t) dt - \frac{1}{(s+1)!} \int_a^b p(t)(t-x)^{s+1} dt,$$

що доводить (3.10) для $k = s+1$. Нарешті,

$$\int_a^b p(t)f(t)dt - \sum_{k=0}^{s} \frac{1}{k!} \left(\int_a^b p(t)(t-x)^k dt \right) f^{(k)}(x)$$
$$= \int_a^b p(t)f(t)dt - \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{k!} \left(\int_a^b p(t)(t-x)^k dt \right) f^{(k)}(x)$$
$$- \frac{1}{s!} \left(\int_a^b p(t)(t-x)^s dt \right) f^{(s)}(x)$$
$$= \int_a^b r_x^s(t) f^{(s)}(t) dt - \left(\int_a^b r_x^s(t) dt \right) f^{(s)}(x) = \int_a^b r_x^{s+1}(t) f^{(s+1)}(t) dt.$$

□

3.1.3.2 Нерівності типу Островського для класів $W_q^n[a,b]$

Для $n \in \mathbb{N}$ і $1 \le q \le \infty$ позначимо через $W_q^n[a,b]$ клас неперервних функцій $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ для яких функція $f^{(n-1)}$ є абсолютно неперервною на $[a,b]$, і $\|f^{(n)}\|_{L_q[a,b]} \le 1$.

Відмітимо, що клас $W_q^n[a,b]$, зокрема, містить усі многочлени степені не вище $n-1$. Тому якщо $x \in [a,b]$ фіксовано, p — це інтегровна на $[a,b]$ функція і

$$\sup_{f \in W_q^n[a,b]} \left| \int_a^b p(t)f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} c_k f^{(k)}(x) \right| < \infty$$

для деяких чисел $c_0, \ldots, c_{n-1}$, то вираз під модулем має бути нульовим для будь-якого многочлена степені не вище $n-1$. Підставляючи у якості f функції $t \mapsto 1, t \mapsto t-x, \ldots, t \mapsto (t-x)^{n-1}$, отримаємо, що

$$c_k = \frac{1}{k!} \int_a^b p(t)(t-x)^k dt, k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Теорема 3.1.1. *Нехай задано $n \in \mathbb{N}$, $1 \le q \le \infty$, $x \in [a,b]$ і інтегровну на $[a,b]$ функцію p. Тоді*

$$\sup_{f\in W_q^n[a,b]}\left|\int_a^b p(t)f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\left(\int_a^b p(t)(t-x)^k dt\right)f^{(k)}(x)\right|$$
$$=\sup_{\|g\|_{L_q[a,b]}\le 1}\left|\int_a^b r_x^n(t)g(t)dt\right|=\|r_x^n\|_{L_{q'}[a,b]},\quad (3.11)$$

де $1/q+1/q'=1$ *і функція* r_x^n *визначена у* (3.8) *з* $w_k\equiv 1$, $k=1,\dots,n$.

Доведення. Права рівність у (3.11) випливає з нерівності Гельдера. Для того, щоб отримати ліву нерівність, достатньо застосувати лему 3.1.1 з $S=T=[a,b]$, $X=Y=Z=M=\mathbb{R}$, $\mathcal{A}=\mathcal{B}=W_q^n[a,b]$, $\Lambda f=\int_a^b p(t)f(t)dt$,

$$If=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\left(\int_a^b p(t)(t-x)^k dt\right)f^{(k)}(x),$$

$\lambda f=f^{(n)}$ і $\varphi g=\left|\int_a^b r_x^n(t)g(t)dt\right|$. Нерівність (3.4) стає рівністю завдяки лемі 3.1.4. □

Пов'язані результати для $p(t)\equiv 1$ містяться у [3, 80].

Відмітимо, що нерівності (3.11) можуть бути сформульовані для всіх $x\in[a,b]$ одночасно. Припустимо, що $S=T=[a,b]$, $X=Z=\mathbb{R}$, $\mathcal{A}=\mathcal{B}=W_q^n[a,b]$, $\lambda f=f^{(n)}$. Нехай $Y=M$ — це множина вимірних суттєво обмежених на $[a,b]$ функцій з поточковими додаванням і частковим порядком;

$$h_Y(f,g)=s\mapsto|f(s)-g(s)|, s\in[a,b],$$

$\Lambda f=x\mapsto\int_a^b p(t)f(t)dt$ — це константна функція,

$$If=x\mapsto\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\left(\int_a^b p(t)(t-x)^k dt\right)f^{(k)}(x),\ x\in[a,b],$$

і $\varphi g=x\mapsto\left|\int_a^b r_x^n(t)g(t)dt\right|$. Використовуючи лему 3.1.1, ми отримаємо точну нерівність (3.11); той факт, що $\sup\varphi(\lambda(\mathcal{A}))$ існує, випливає з результатів [140, Розділ IV.1].

3.1.3.3 Нерівності типу Островського для класів $W^nH^\omega[a,b]$

Для $n \in \mathbb{N}$ позначимо через $W^nH^\omega[a,b]$ клас неперервних на $[a,b]$ функцій f для яких $f^{(n)} \in H^\omega[a,b]$, тобто для всіх $h > 0$,

$$|f^{(n)}(x) - f^{(n)}(y)| \le \omega(h), \text{ якщо } |x-y| \le h,$$

де ω — це заданий модуль неперервності.

Використовуючи аналогічні до доведення теореми 3.1.1 аргументи, можна отримати рівність

$$\sup_{f \in W^nH^\omega[a,b]} \left| \int_a^b p(t)f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\int_a^b p(t)(t-x)^k dt \right) f^{(k)}(x) \right| = \sup_{g \in H^\omega[a,b]} \left| \int_a^b r_x^n(t)g(t)dt \right|.$$

Оскільки клас $H^\omega[a,b]$ містить усі константні функції, права частина цієї рівності може бути скінченною тільки у випадку, коли

$$\int_a^b r_x^n(t)dt = 0. \tag{3.12}$$

Припустимо, що функція p є невід'ємною на $[a,b]$ і $\int_a^b p(t)dt > 0$. З (3.10) випливає, що умова (3.12) не виконується для всіх парних n. У той же час, для всіх непарних n існує $x \in [a,b]$ таке, що умова (3.12) виконується (і така точка x є єдиною, якщо функція p є додатною майже всюди).

Теорема 3.1.2. *Нехай задано непарне $n \in \mathbb{N}$, модуль неперервності ω, інтегровну додатну майже всюди на $[a,b]$ функцію p і точку $x \in [a,b]$ таку, що виконується умова* (3.12). *Тоді*

$$\sup_{f \in W^nH^\omega[a,b]} \left| \int_a^b p(t)f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\int_a^b p(t)(t-x)^k dt \right) f^{(k)}(x) \right| = \sup_{g \in H^\omega[a,b]} \left| \int_a^b r_x^n(t)g(t)dt \right| \le \int_a^x |r_x^n(t)|\omega(\rho(t)-t)dt, \tag{3.13}$$

де $\rho\colon [a,x] \to [x,b]$ однозначно визначається умовою

$$\int_a^t r_x^n(s)ds = \int_a^{\rho(t)} r_x^n(s)ds \text{ для всіх } t \in [a,x].$$

Якщо модуль неперервності ω є опуклим, то нерівність у (3.13) *стає рівністю.*

Доведення. Рівність у (3.13) може бути доведеною аналогічно до доведення теореми 3.1.1. Оскільки n є непарним, то з означення функції r_x^n отримуємо, що r_x^n є недодатною на $[a, x]$ і невід'ємною на $[x, b]$. Беручи до уваги рівність (3.12), ми можемо застосувати лему Корнєйчука–Стєчкіна (див. напр. [104, § 7.1]), з якої випливає нерівність у (3.13). Крім того, ця нерівність стає рівністю у випадку, коли модуль неперервності ω є опуклим. $\square$

3.1.3.4 Нерівності типу Островського для класів, що задаються загальним диференціальним оператором

Нехай оператори D_k, $k = 1, \ldots, n$ визначаються формулами (3.7). Позначимо через $\mathcal{D}_q^n$, $q \in [1, \infty]$, простір неперервних функцій $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ таких, що $\|D_n f\|_{L_q[a,b]} \leq 1$. Використовуючи леми 3.1.1 і 3.1.3, отримаємо такий результат.

Теорема 3.1.3. *Нехай задано $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq \infty$, $x \in [a, b]$ і інтегровну на $[a, b]$ функцію p. Тоді*

$$\sup_{f \in \mathcal{D}_q^n[a,b]} \left| \int_a^b p(t) f(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_a^b r_x^k(t) w_{k+1}(t) dt \right) \frac{D_k f(x)}{w_{k+1}(x)} \right| = \sup_{\|g\|_{L_q[a,b]} \leq 1} \left| \int_a^b r_x^n(t) g(t) dt \right| = \|r_x^n\|_{L_{q'}[a,b]},$$

де $1/q + 1/q' = 1$, r_x^n визначена у (3.8)*, а оператори D_k, $k = 1, \ldots, n$, визначені у* (3.7)*.*

3.1.3.5 Нерівності типу Островського для класів Соболєва

Схема доведення теореми 2.4.1 також по суті використовує лему 3.1.1. Ми проілюструємо це на прикладі теореми 2.7.1, що є частковим випадком теореми 2.4.1. Для простоти будемо вважати, що $h = 1$ і писати $\square$ замість

$\square_h^d$. Нехай $S = T = \square$, $M = X = Y = Z = \mathbb{R}$,

$$\mathcal{A} = W_q^\infty(\square) = \left\{ f \in W^{1,q} \colon \| \, |\nabla f|_1 \|_{L_q(\square)} \le 1 \right\},$$

де, як і раніше для $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $|x|_1 = |x_1| + \ldots + |x_d|$.

Було доведено, що для всіх $f \in W_q^\infty(\square)$ маємо

$$\left| \int_\square f(y)dy - 2^d f(\theta) \right| \le \frac{1}{d} \int_\square |\nabla f(y)|_1 \left(\frac{1}{|y|_\infty^{d-1}} - |y|_\infty \right) dy,$$

нерівність перетворюється на рівність для функцій з множини

$$\mathcal{B} = \left\{ f \in \mathcal{A} \colon f(y) = \int_0^{|y|_\infty} h(u)du, h(u) \ge 0 \forall u, h \in L_{q'-1}[0,1], \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1 \right\},$$

і якщо $\lambda f := |\nabla f|_1$ для $f \in \mathcal{A}$, то для кожної $f \in \mathcal{B}$ і майже всіх $y \in \square$ маємо $\lambda f(y) = h(|y|_\infty)$. Крім того, супремум

$$\sup_{\|g\|_{L_q(\square)} \le 1} \int_\square g(y) \left(\frac{1}{|y|_\infty^{d-1}} - |y|_\infty \right) dy$$

досягається на функції з множини $\lambda\mathcal{B}$. Тому, застосовуючи лему 3.1.1 до $\Lambda f = \int_\square f(y)dy$, $If = 2^d f(\theta)$, і $\varphi g = \int_\square g(y) \left(\frac{1}{|y|_\infty^{d-1}} - |y|_\infty \right) dy$, отримаємо справедливість теореми 2.7.1. Схожа техніка була застосована у [45, 49].

3.1.3.6 Нерівності типу Островського для функцій обмеженої варіації

У підрозділі 3.2 також будуть використовуватись міркування, пов'язані з лемою 3.1.1. Ми проілюструємо це частковим випадком теореми 3.2.2, необхідні означення і її доведення буде дано у наступному підрозділі.

Нехай T — це одинична куля B^d, $d \ge 2$, простору $\mathbb{R}^d$ з центром у початку координат θ, $X = Y = M = \mathbb{R}$, $S = [0, \infty)$, $\mathcal{A}$ — це простір неперервних функцій $f \colon B^d \to \mathbb{R}$ з обмеженою варіацією $v_q(f) \le 1$, $q \in [1, \infty]$, Z — це сім'я усіх замкнених підмножин B^d. Для кожного $s \in S$ покладемо

$$\lambda f(s) = \{x \in B^d \colon s \le |f(x) - f(\theta)|\} \in Z.$$

Для операторів $\Lambda f = \int_{B^d} f(x)dx$, $If = \mu B^d \cdot f(\theta)$ (де μ — це міра Лебега у $\mathbb{R}^d$) і $\varphi(\lambda f) = \int_0^\infty \mu\left(\lambda f(s)\right) ds$, маємо

$$\left| \int_{B^d} f(x)dx - \mu B^d f(\theta) \right| \leq \int_{B^d} |f(x) - f(\theta)| dx = \varphi(\lambda f),$$

так що нерівність (3.4) виконується для всіх $f \in \mathcal{A}$. Вона перетворюється на рівність для всіх функцій

$$f \in \mathcal{B} := \left\{ f \in \mathcal{A} \colon f(x) \geq f(\theta) \text{ для всіх } x \in B^d \right\}.$$

Можна довести, що $\sup_{f \in \mathcal{A}} \varphi(\lambda f) = \frac{\mu B^d}{2}$ і існує екстремальна послідовність функцій з множини $\mathcal{B}$. З леми 3.1.1 тепер випливає (використовуючи однорідність інтеграла і варіації) нерівність

$$\left| \frac{1}{\mu B^d} \int_{B^d} f(x)dx - f(\theta) \right| \leq \frac{v_q(f)}{2},$$

яка справедлива для всіх неперервних функцій $f \colon B^d \to \mathbb{R}$ і є точною.

3.2 Множини і функції обмеженої варіації

Головні результати цього підрозділу було отримано у [109, 110].

3.2.1 Позначення

Для множини $F \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, через ∂F, $\mathrm{int} F$ і $\overline{F}$ позначаємо її межу, внутрішність і замикання відповідно. Для довільного $t \in \mathbb{R}$ покладемо $\mathbb{R}^d_t := \{(x,t) \in \mathbb{R}^d \colon x \in \mathbb{R}^{d-1}\}$. Для $x, y \in \mathbb{R}^d$ через xy ми будемо позначати відрізок з кінцями в точках x і y, тобто $xy = \{(1-t)x + ty \colon t \in [0,1]\}$. Для $c \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^d$ і $F \subset \mathbb{R}^d$ покладемо $cF := \{cx \colon x \in F\}$ і $x + F := \{x + y \colon y \in F\}$.

Для двох множин $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^d$ покладемо $\rho(F_1, F_2) := \inf\limits_{x \in F_1, y \in F_2} |x - y|$, де $|w|$ позначає евклідову відстань від точки $w \in \mathbb{R}^d$ до початку координат θ у $\mathbb{R}^d$.

Для $\varepsilon \geq 0$ дві множини $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^d$ називаються ε-неперетинними, якщо $\rho(F_1, F_2) > \varepsilon$. Легко бачити, що дві компактні множини $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^d$ є 0-неперетинними тоді і тільки тоді, коли вони мають порожній перетин. Для $\varepsilon > 0$ множина F називається ε-зв'язною, якщо не існує розбиття $F = F_1 \cup F_2$ на ε-неперетинні множини F_1, F_2. Деякі властивості ε-компонент містяться у [170, Додаток I].

Для довільної функції $f\colon E \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ і $c \in \mathbb{R}$ позначимо через $\{f \geq c\}$ множину $\{x \in E\colon f(x) \geq c\}$. Аналогічно визначаються множини $\{f \leq c\}$ і $\{f = c\}$.

Для $\varepsilon > 0$ і $x \in \mathbb{R}^d$, $B^d(x, \varepsilon) := \{y \in \mathbb{R}^d\colon |x - y| \leq \varepsilon\}$; $B^d(\varepsilon) := B^d(\theta, \varepsilon)$ і $B^d := B^d(1)$. Через $S^{d-1}(x, \varepsilon)$, $S^{d-1}(\varepsilon)$ і S^{d-1} позначимо межові сфери $B^d(x, \varepsilon)$, $B^d(\varepsilon)$ і B^d відповідно.

Для довільної точки $x \in S^{d-1}$, позначимо через $\Pi(x)$ гіперплощину, яка ортогональна $\overline{\theta x}$ і містить θ. Через $\Pi_+(x)$ ($\Pi_-(x)$) позначимо замкнений пів простір породжений гіперплощиною $\Pi(x)$, що містить (відповідно не містить) x. Покладемо $S^{d-1}_{\pm}(x) := S^{d-1} \cap \Pi_{\pm}(x)$.

Для точок $x, y \in \mathbb{R}^d$, $x \neq y$, позначимо через $h(x, y)$ промінь з початком у точці x, що містить y. Для множини $X \subset \mathbb{R}^d$ покладемо

$$\mathcal{C}(X) := \bigcup_{x \in X} h(\theta, x).$$

Для опуклої компактної множини $A \subset \mathbb{R}^d$ такої, що $\theta \in \operatorname{int} A$ і довільного $x \in S^{d-1}$, покладемо

$$\rho_A(x) := \sup_{y \in A \cap h(\theta, x)} |y|. \tag{3.14}$$

Тоді функція ρ_A є неперервною.

Через $\mathbb{P}^{d-1}$ ми будемо позначати $d-1$-вимірний дійсний проєктивний простір, тобто множину усіх прямих в $\mathbb{R}^d$, які містять θ. Відстань між двома прямими $r_1, r_2 \in \mathbb{P}^{d-1}$ за означенням дорівнює куту між r_1 і r_2. Мірою вимірної множини $A \subset \mathbb{P}^{d-1}$ є за означенням сферична міра множини $\bigcup\limits_{l \in A} l \cap S^{d-1}$; за цим означенням, міри множин $\mathbb{P}^{d-1}$ і S^{d-1} є рівними.

Для кожного $r \in \mathbb{P}^{d-1}$ через $\Pi^{d-1}(r)$ ми позначаємо гіперплощину, що містить θ і є ортогональною до прямої r; $\Pi^{d-1}(r)$ розглядається як $d-1$-вимірний простір з $d-1$-вимірною мірою Лебега і евклідовою метрикою. Для кожного $\beta \in \Pi^{d-1}(r)$ через $l(r,\beta)$ ми будемо позначати пряму, що містить β і є паралельною до r.

Ми розглядаємо декартові добутки декількох просторів. Ми використовуємо топологію добутку у добутках скінченної кількості топологічних просторів, і добуток мір на добутках вимірних просторів. Через μ^k, $k \in \mathbb{N}$, ми будемо позначати k-вимірну міру Лебега в $\mathbb{R}^k$, а через μ — сферичну міру на одиничній сфері S^{d-1} та міру у проєктивному просторі $\mathbb{P}^{d-1}$.

3.2.2 Варіація множини

3.2.2.1 Означення

Означення 3.2.1. *Через $N(F)$ будемо позначати число компонент зв'язності множини $F \subset \mathbb{R}^d$; 0 для порожньої множини, і $+\infty$, якщо число компонент зв'язності є нескінченним.*

Варіацію множини F у напрямку $r \in \mathbb{P}^{d-1}$ визначимо так.

Означення 3.2.2. *Для компактної множини $F \subset \mathbb{R}^d$ і прямої $r \in \mathbb{P}^{d-1}$ покладемо*

$$v(F,r) := \operatorname*{ess\,sup}_{\beta \in \Pi^{d-1}(r)} N\left(F \cap l(r,\beta)\right).$$

Означення 3.2.3. *Для компактної множини $F \subset \mathbb{R}^d$ і числа $p \in [1,\infty]$ покладемо*

$$v_p(F) := \begin{cases} \left(\frac{1}{\mu^{\mathbb{P}^{d-1}}} \int\limits_{\mathbb{P}^{d-1}} v^p(F,r)dr \right)^{\frac{1}{p}}, & p \in [1,\infty), \\ \operatorname*{ess\,sup}_{r \in \mathbb{P}^{d-1}} v(F,r), & p = \infty. \end{cases}$$

Зауваження 3.2.1. *У випадку $d = 1$ для всіх $p \in [1,\infty]$ вважаємо, що $v_p(F) = N(F)$.*

Означення 3.2.4. *Для компактної множини $F \subset \mathbb{R}^d$, $\varepsilon \geq 0$ і $p \in [1, \infty]$ покладемо*

$$V_p^\varepsilon(F) := \sup \sum_{k=1}^{n} v_p(F_k),$$

де супремум береться по всіх розбиттях $F = \bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$ множини F на скінченну кількість компактних попарно ε-неперетинних підмножин F_k.

Зауваження 3.2.2. *Ми пишемо $V_p(F)$ замість $V_p^0(F)$. У цьому випадку супремум у означенні береться по всіх розбиттях $F = \bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$ множини F на скінченну кількість підмножин F_k, що попарно не перетинаються.*

3.2.2.2 Коректність означень

Доведення вимірності функцій, що стоять під знаками інтегралів (що випливає з лем 3.2.1—3.2.5) використовують ідеї з [157, Розділи 2–5] і [170, Розділ 2].

У цьому підрозділі, ми ототожнюємо кожну точку (r, x) з простору $\mathbb{P}^{d-1} \times \mathbb{R}^{d-1}$ ($r \in \mathbb{P}^{d-1}$, $x \in \mathbb{R}^{d-1}$) з прямою $l(r, \beta)$, де $\beta \in \Pi^{d-1}(r)$ — це точка з координатами x у деякому ортонормальному базисі простору $\Pi^{d-1}(r)$ (вважаємо, що базис у просторі $\Pi^{d-1}(r)$ неперервно змінюється при зміні $r \in \mathbb{P}^{d-1}$).

Лема 3.2.1. *Для кожної борелівської множини $B \subset \mathbb{R}^d$ множина $\psi(B)$ усіх $(r, x) \in \mathbb{P}^{d-1} \times \mathbb{R}^{d-1}$ таких, що $B \cap l(r, \beta) \neq \emptyset$ є вимірною ($\mathbb{P}^{d-1} \times \mathbb{R}^{d-1}$). Множина $\varphi(B) := \{t \in \mathbb{R} \colon B \cap \mathbb{R}^d_t \neq \emptyset\}$ є вимірною.*

Доведення. Позначимо через ψ_1 деяку неперервну функцію з $[0, 1]$ на S^{d-1}; існування такої функції випливає з теореми Хана–Мазуркевича, див. напр. [128, Теорема 6.8]. Визначимо функцію $\psi_2 \colon [0, 1] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{P}^{d-1} \times \mathbb{R}^{d-1}$ за таким правилом. Для кожного $(t, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^d$ нехай $\psi_2(t, y)$ — це пряма $l(r, \beta)$, де $r \in \mathbb{P}^{d-1}$ — це пряма, що містить $\psi_1(t)$, а β — є такою, що пряма $l(r, \beta)$ містить точку y. Легко бачити, що функція ψ_2 є неперервною. Тоді $\psi(B) = \psi_2(\tilde{B})$, де $\tilde{B} := [0, 1] \times B$. Це означає, що $\psi(B)$ є неперервним

образом борелівської множини $\tilde{B} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ а тому є вимірною (див. напр. [92, Теорема 94]).

Множина $\varphi(B)$ є проєкцією борелівської множини B на вісь t простору $\mathbb{R}^d$, тому є вимірною. $\square$

Означення 3.2.5. *Для компактної множини $F \subset \mathbb{R}^d$ і $\varepsilon > 0$ позначимо через $N_\varepsilon(F)$ число її ε-компонент; 0 для порожньої множини.*

Лема 3.2.2. *Для кожної компактної множини $F \subset \mathbb{R}^d$ і кожного $\varepsilon > 0$ величина $N_\varepsilon(F)$ є скінченною і $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} N_\varepsilon(F) = N(F)$.*

Доведення. Кожній ε-компоненті W множини F поставимо у відповідність кулю з центром у довільній точці $w \in W$ і радіусом $\frac{\varepsilon}{2}$. Кулі, що відповідають різним ε-компонентам множини F попарно не перетинаються; тому може бути лише скінченна кількість таких куль, оскільки множина F є обмеженою.

Якщо F має скінченну кількість компонент зв'язності $F_1, \ldots, F_n$, то з компактності компонент випливає, що $\varepsilon_0 := \min\limits_{i \neq j} \rho(F_i, F_j) > 0$. Тоді $N_\varepsilon(F) = n = N(F)$ для всіх $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Якщо $N(F) = \infty$, то для кожного $n \in \mathbb{N}$ ми можемо вибрати компактні множини $F_1, \ldots, F_n$ які попарно не перетинаються і такі, що $F = \bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$. Тоді $N_\varepsilon(F) \geq n$ для всіх $\varepsilon < \min\limits_{i \neq j} \rho(F_i, F_j)$. $\square$

Для компактної множини $F \subset \mathbb{R}^d$ і $\varepsilon > 0$ визначимо функції

$$v_F \colon \mathbb{P}^{d-1} \times \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R},\ v_F(r, x) = N\left(F \cap l(r, \beta)\right), \tag{3.15}$$

і

$$v_F^\varepsilon \colon \mathbb{P}^{d-1} \times \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R},\ v_F^\varepsilon(r, x) = N_\varepsilon\left(F \cap l(r, \beta)\right),$$
$$N_F^\varepsilon \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ N_F^\varepsilon(t) = N_\varepsilon\left(F \cap \mathbb{R}_t^d\right),$$

Лема 3.2.3. *Нехай задано компактну множину $F \subset \mathbb{R}^d$ і $\varepsilon > 0$. Функція v_F^ε є вимірною $(\mathbb{P}^{d-1} \times \mathbb{R}^{d-1})$. Функція N_F^ε є вимірною.*

Доведення. Розглянемо (зліченну) множину Ω усіх замкнених куль у $\mathbb{R}^d$ з раціональними центрами і радіусами. Нехай $\tilde{\Omega}$ — це множина усіх скінченних об'єднань куль з Ω. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо через Ω_n сім'ю усіх множин вигляду $\bigcup\limits_{s=1}^{m} B_{i_s}$, де $m \geq n$, і $\{B_{i_s}\}_{s=1}^{m}$ є набором попарно ε-неперетинних множин з $\tilde{\Omega}$. Тоді сім'я Ω_n є зліченною для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Відмітимо, що функції v_F^ε і N_F^ε приймають тільки невід'ємних цілих значень. Множини $\{v_F^\varepsilon \geq 0\} = \mathbb{P}^{d-1} \times \mathbb{R}^{d-1}$ і $\{N_F^\varepsilon \geq 0\} = \mathbb{R}$ є вимірними. Зафіксуємо деяке натуральне число n. Доведемо, що

$$\{v_F^\varepsilon \geq n\} = \bigcup_{\mathcal{B}=\bigcup\limits_{s=1}^{m} B_{i_s} \in \Omega_n} \left(\bigcap_{s=1}^{m} \psi(B_{i_s} \cap F) \setminus \bigcup_{s=1}^{m} \psi(\partial B_{i_s} \cap F) \right) \tag{3.16}$$

і

$$\{N_F^\varepsilon \geq n\} = \bigcup_{\mathcal{B}=\bigcup\limits_{s=1}^{m} B_{i_s} \in \Omega_n} \left(\bigcap_{s=1}^{m} \varphi(B_{i_s} \cap F) \setminus \bigcup_{s=1}^{m} \varphi(\partial B_{i_s} \cap F) \right)$$

де функції ψ і φ означені у лемі 3.2.1. Ми доводимо рівність (3.16); іншу рівність можна довести аналогічно.

Якщо (r, x) входить до множини у правій частині (3.16), то існує множина $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{s=1}^{m} B_{i_s} \in \Omega_n$ така, що $l(r, \beta) \cap B_{i_s} \cap F$ є непорожньою множиною строго всередині B_{i_s}, $s = 1, \ldots, m$. Оскільки множини, з яких складається $\mathcal{B}$, є ε-неперетинними згідно з означенням Ω_n, то ми отримуємо, що $v_F^\varepsilon(r, x) \geq m \geq n$ і тому $(r, x) \in \{v_F^\varepsilon \geq n\}$.

Нехай $(r, x) \in \{v_F^\varepsilon \geq n\}$ і $F_1, \ldots, F_m$, $m \geq n$, — це всі ε-компоненти множини $l(r, \beta) \cap F$. Оскільки $\min\limits_{i \neq j} \rho(F_i, F_j) > \varepsilon$, то існує $\delta > 0$ таке, що $\min\limits_{i \neq j} \rho(F_i, F_j) > \varepsilon + 3\delta$. Розглянемо скінченне покриття C компактної множини $l(r, \beta) \cap F$ відкритими кулями з раціональними центрами і радіусами, у якому кожна куля має діаметр менше за δ і містить деяку точку з $l(r, \beta) \cap F$. Позначимо через B_k об'єднання замикань усіх куль з покриття C, що перетинають F_k, $k = 1, \ldots, m$. Тоді $\bigcup\limits_{k=1}^{m} B_k$ належить до Ω_n згідно із побудовою, а отже (r, x) належить до множини у правій частині (3.16).

Оскільки F є замкненою множиною, а Ω_n є зліченною множиною, то

з леми 3.2.1 випливає, що множини $\{v_F^\varepsilon \geq n\}$ і $\{N_F^\varepsilon \geq n\}$ є вимірними, а тому функції v_F^ε і N_F^ε є вимірними. □

Лема 3.2.4. *Функція v_F, що означена у* (3.15) *є вимірною* $(\mathbb{P}^{d-1} \times \mathbb{R}^{d-1})$ *для кожної компактної множини $F \subset \mathbb{R}^d$.*

Доведення. Для кожного фіксованого $(r, x) \in \mathbb{P}^{d-1} \times \mathbb{R}^{d-1}$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} v_F^\varepsilon(r, x) = v_F(r, x)$ згідно з лемою 3.2.2. Тому вимірність функції v_F є наслідком вимірності v_F^ε, $\varepsilon > 0$, яка стверджується у лемі 3.2.3. □

З теореми Тонеллі і леми 3.2.4 тепер випливає коректність означення $v_p(F)$ для кожного $1 \leq p \leq \infty$ і кожної компактної множини $F \subset \mathbb{R}^d$; тому функції $V_p^\varepsilon(F)$ також означені коректно для кожного $\varepsilon \geq 0$.

3.2.2.3 Деякі властивості варіації множин

Наступна властивість є безпосереднім наслідком з означення.

Властивість 3.2.1. *Нехай задано $p \in [1, \infty]$, $\varepsilon \geq 0$ і компактну множину $F \subset \mathbb{R}^d$. Тоді $v_p(F) \leq V_p^\varepsilon(F)$. Якщо F є ε-зв'язною, то $v_p(F) = V_p^\varepsilon(F)$.*

Властивість 3.2.2. *Нехай $p \in [1, \infty]$ і задано компактну множину $F \subset \mathbb{R}^d$. Тоді*

$$V_p(F) = \lim_{\varepsilon \to 0} V_p^\varepsilon(F). \tag{3.17}$$

Доведення. З означення випливає, що $V_p^{\varepsilon_1}(F) \leq V_p^{\varepsilon_2}(F)$ при $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. Тому границя $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} V_p^\varepsilon(F)$ існує і не перевищує $V_p(F)$.

Припустимо, що $V_p(F) < \infty$. Тоді для кожного $\delta > 0$ існує розбиття $F = \bigcup\limits_{k=1}^{n(\delta)} F_k$ множини F на попарно неперетинні компактні множини F_k такі, що $V_p(F) \leq \sum\limits_{k=1}^{n(\delta)} v_p(F_k) + \delta$. Покладемо $\varepsilon_0 := \min\limits_{i \neq j} \rho(F_i, F_j)$. Тоді $\varepsilon_0 > 0$ і для кожного $\varepsilon < \varepsilon_0$, $V_p^\varepsilon(F) \geq V_p(F) - \delta$. Тому виконується рівність (3.17).

Випадок $V_p^\varepsilon(F) = \infty$ можна розглянути аналогічно. □

Властивість 3.2.3. *Нехай задано компактні множини $F_1, \dots, F_n \subset \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, що попарно не перетинаються. Тоді для всіх $p \in [1, \infty]$*

$$v_p\left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} v_p(F_k).$$

Доведення. Достатньо довести властивість у випадку, коли $n = 2$. Покладемо $F := F_1 \cup F_2$. Оскільки F_1 і F_2 є компактними множинами, що не перетинаються, то $\rho(F_1, F_2) > 0$, і тому для будь-якого $r \in \mathbb{P}^{d-1}$ і $\beta \in \Pi^{d-1}(r)$, $N(F \cap l(r, \beta)) = N(F_1 \cap l(r, \beta)) + N(F_2 \cap l(r, \beta))$. Звідси випливає, що $v(F, r) \le v(F_1, r) + v(F_2, r)$ для всіх $r \in \mathbb{P}^{d-1}$, і тому $v_p(F) \le v_p(F_1) + v_p(F_2)$ для всіх $p \in [1, \infty]$. □

Властивість 3.2.4. *Нехай задано $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \ge 0$ і попарно ε-неперетинні компактні множини $F_1, \dots, F_n \subset \mathbb{R}^d$. Тоді для всіх $p \in [1, \infty]$*

$$V_p^{\varepsilon}\left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V_p^{\varepsilon}(F_k).$$

Доведення. Достатньо довести властивість у випадку $n = 2$. Покладемо $F := F_1 \cup F_2$. Нехай $\{T_k\}_{k=1}^{m}$, $m \in \mathbb{N}$, — це розбиття множини F на компактні попарно ε-неперетинні підмножини. Тоді згідно з властивістю 3.2.3

$$\sum_{k=1}^{m} v_p(T_k) = \sum_{k=1}^{m} v_p((T_k \cap F_1) \cup (T_k \cap F_2))$$
$$\le \sum_{k=1}^{m} v_p(T_k \cap F_1) + \sum_{k=1}^{m} v_p(T_k \cap F_2) \le V_p^{\varepsilon}(F_1) + V_p^{\varepsilon}(F_2),$$

оскільки $\{T_k \cap F_1\}_{k=1}^{m}$ і $\{T_k \cap F_2\}_{k=1}^{m}$ є розбиттями множин F_1 і F_2 на попарно ε-неперетинні компактні підмножини. Тому

$$V_p^{\varepsilon}(F) \le V_p^{\varepsilon}(F_1) + V_p^{\varepsilon}(F_2).$$

З іншого боку, для довільних розбиттів множин F_1 і F_2 на компактні ε-неперетинні множини $\{T_k^1\}_{k=1}^{s}$ і $\{T_k^2\}_{k=1}^{m}$ відповідно, $s, m \in \mathbb{N}$, $\{T_k^1\}_{k=1}^{s} \cup \{T_k^2\}_{k=1}^{m}$ є розбиттям множини F на компактні ε-неперетинні множини, і тому

$$V_p^{\varepsilon}(F) \ge V_p^{\varepsilon}(F_1) + V_p^{\varepsilon}(F_2).$$

□

Властивість 3.2.5. *Якщо $\varepsilon \geq 0$ і $F \subset \mathbb{R}^d$ є компактною множиною, що має рівно $n \in \mathbb{N}$ ε-зв'язних компонент $F_1, \ldots, F_n$, то для всіх $p \in [1, \infty]$, $V_p^\varepsilon(F) = \sum\limits_{k=1}^{n} v_p(F_k)$.*

Доведення. Кожна ε-зв'язна компонента компактної множини є компактною множиною. Тому згідно з властивостями 3.2.4 і 3.2.1,

$$V_p^\varepsilon(F) = \sum_{k=1}^{n} V_p^\varepsilon(F_k) = \sum_{k=1}^{n} v_p(F_k).$$

□

Властивість 3.2.6. *Якщо $F \subset \mathbb{R}^d$ є компактною множиною, $\alpha \neq 0$ і $\alpha F := \{\alpha x \colon x \in F\}$, то для всіх $p \in [1, \infty]$ маємо $v_p(F) = v_p(\alpha F)$ і $V_p(F) = V_p(\alpha F)$.*

Доведення. Властивість випливає з того, що для кожних $r \in \mathbb{P}^{d-1}$ і $\beta \in \Pi^{d-1}(r)$, $N(F \cap l(r, \beta)) = N(\alpha F \cap l(r, \alpha\beta))$, а тому $v(\alpha F, r) = v(F, r)$. □

3.2.3 Варіація функції

3.2.3.1 Означення

Означення 3.2.6. *Нехай задано множину $E \subset \mathbb{R}^d$ і функцію $f \colon E \to \mathbb{R}$. Для $t \in \mathbb{R}$ множина*

$$L(f; t) := \{x \in E \colon f(x) = t\}$$

називається множиною рівня функції f.

Означення 3.2.7. *Нехай задано множину $E \subset \mathbb{R}^d$, неперервну на компактній множині $F \subset E$ функцію $f \colon E \to \mathbb{R}$, і $p \in [1, \infty]$. Покладемо*

$$v_p(f; F) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} v_p(F \cap L(f; t))dt.$$

Якщо F є локально зв'язною, то покладемо

$$V_p(f;F) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} V_p(F \cap L(f;t))dt.$$

У випадку $F = E$ будемо писати $v_p(f)$ і $V_p(f)$ замість $v_p(f;E)$ і $V_p(f;E)$ відповідно.

3.2.3.2 Коректність означень

Доведемо, що функції, що стоять під знаком інтегралів є вимірними.

Лема 3.2.5. *Нехай задано множину $E \subset \mathbb{R}^d$, неперервну на компактній множині $F \subset E$ функцію $f\colon E \to \mathbb{R}$, і $p \in [1,\infty]$. Тоді функція $v_p(F \cap L(f;\cdot))$ є вимірною.*

Доведення. Для простоти позначень будемо вважати, що $\mathbb{R}^d \supset F = E$ і будемо доводити вимірність функції $v_p(L(f;\cdot))$. Розглянемо графік

$$\Gamma(f) := \{(x,t) \in \mathbb{R}^{d+1}\colon x \in E, f(x) = t\} \tag{3.18}$$

функції f і дві функції $v_{\Gamma(f)}\colon \mathbb{P}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ і $v_f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{P}^{d-1} \times \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$, які визначено за формулами $v_f(t,r,x) = v_{L(f;t)}(r,x)$ (функція v_F означена у (3.15)).

Оскільки множина E є компактною, а функція f є неперервною на E, то множина $\Gamma(f) \subset \mathbb{R}^{d+1}$ є компактною. З леми 3.2.4 випливає, що функція $v_{\Gamma(f)}$ є вимірною ($\mathbb{P}^d \times \mathbb{R}^d$).

Нагадаємо, що $\mathbb{R}^{d+1}_0 = \left\{(x,0) \in \mathbb{R}^{d+1}\colon x \in \mathbb{R}^d\right\}$. Функція

$$\phi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{P}^{d-1} \times \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{P}^d \times \mathbb{R}^d \cap \left\{(R,y) \in \mathbb{P}^d \times \mathbb{R}^d\colon R \subset \mathbb{R}^{d+1}_0\right\},$$

яка відображає точку (t,r,x) у точку (R,y) з $R = \{(z,0), z \in r\}$ і $y = (x,t)$, є неперервною і має неперервну обернену. Крім того, для кожного $(t,r,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{P}^{d-1} \times \mathbb{R}^{d-1}$ маємо $v_f(t,r,x) = v_{\Gamma(f)}(\phi(t,r,x))$. Тому для кожного $c \in \mathbb{R}$ функція ϕ відображає множину

$$\left\{(t,r,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{P}^{d-1} \times \mathbb{R}^{d-1}\colon v_f(t,r,x) \geq c\right\}$$

у множину

$$\left\{(R,y)\in\mathbb{P}^d\times\mathbb{R}^d\colon v_{\Gamma(f)}(R,y)\geq c\right\}\cap\left\{(R,y)\in S^d\times\mathbb{R}^d\colon R\subset\mathbb{R}_0^{d+1}\right\}.$$

Остання множина є перетином вимірної (через вимірність функції $v_{\Gamma(f)}$) множини і замкненої множини; тому і перша з множин є вимірною. Тому функція v_f є вимірною ($\mathbb{R}\times\mathbb{P}^{d-1}\times\mathbb{R}^{d-1}$), а отже твердження леми випливає з теореми Тонеллі. □

Наступна лема є добре відомою (див. напр. [180, лема 4] або [170, лема 3 у Розділі 5]).

Лема 3.2.6. *Для довільної функції $f\colon E\to\mathbb{R}$ позначимо через T_{extr} множину чисел $t\in\mathbb{R}$ таких, що множина $L(f;t)$ містить точку локального екстремуму. Тоді множина T_{extr} є не більш ніж зліченною.*

Лема 3.2.7. *Нехай задано множину $E\subset\mathbb{R}^d$, неперервну на компактній локально зв'язній множині $F\subset E$ функцію $f\colon E\to\mathbb{R}$, і $p\in[1,\infty]$. Тоді функція $V_p(F\cap L(f;\cdot))$ є вимірною.*

Доведення. Без зменшення загальності будемо вважати, що $F=E$. Використовуючи властивість 3.2.2, достатньо довести, що функція $V_p^\nu(L(f;\cdot))$ є вимірною для кожного $\nu>0$.

Зафіксуємо деяке $\nu>0$. З леми 3.2.3 випливає, що функція $N_f(t):=N_\nu(L(f;t))=N^\nu_{\Gamma(f)}(t)$ є вимірною (множина $\Gamma(f)$ означена у (3.18)). З леми 3.2.6 випливає, що для кожного $k=0,1,\ldots$ множина $T_k:=N_f^{-1}(k)\backslash T_{extr}$ є вимірною; крім того, очевидно що ці множини попарно не перетинаються.

Для кожного $c\in\mathbb{R}$

$$\{V_p^\nu(L(f;\cdot))\leq c\}\setminus T_{extr}=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{t\in T_k\colon V_p^\nu(L(f;t))\leq c\}$$

і тому достатньо довести, що для кожного $k\in\mathbb{N}$ множина

$$\{t\in T_k\colon V_p^\nu(L(f;t))\leq c\}$$

є вимірною.

Зафіксуємо $k \in \mathbb{N}$ і $t^* \in T_k$. Множина $L(f;t^*)$ містить рівно k ν-зв'язних компонент $F_1, \ldots, F_k$. Кожна з цих компонент є компактною множиною, а тому існує $\varepsilon > 0$ таке, що множини $U_s(\varepsilon) = \{x\colon \rho(x, F_s) < \varepsilon\}$, $s = 1, \ldots, k$, є попарно ν-неперетинними. Покладемо $U(\varepsilon) := \bigcup\limits_{s=1}^{k} U_s(\varepsilon)$.

Існує $\delta > 0$ таке, що $L(f;t) \subset U(\varepsilon)$ для кожного $t \in (t^*-\delta, t^*+\delta)$. Дійсно, припустимо протилежне, нехай існує послідовність a_n, $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ така, що кожна з множин рівня $L(f;t^* + a_n)$ містить точку $x_n \notin U(\varepsilon)$. Переходячи до підпослідовності, якщо треба, ми можемо припустити, що послідовність x_n збігається до деякого $x \in \mathbb{R}^d$. Оскільки $U(\varepsilon)$ є відкритою множиною, $x \notin U(\varepsilon)$. Але це неможливо, оскільки f є неперервною функцією, а тому $f(x) = t^*$.

Для кожного $s = 1, \ldots, k$, розглянемо довільну точку $x_s \in F_s$. Оскільки множина $L(f, t^*)$ не містить екстремумів, множина F є локально зв'язною і функція f є неперервною, то для достатньо малих $\varepsilon_s > 0$ множина $f\left(B^d(x_s, \varepsilon_s)\right)$ містить окіл $(t^* - \delta_s, t^* + \delta_s)$ точки t^* $(\delta_s > 0)$. Тому для довільного $t \in (t^* - \delta_s, t^* + \delta_s)$ множина рівня $L(f;t)$ містить хоча б одну ν-компоненту всередині $U_s(\varepsilon)$. Тому існує $\delta = \delta(t^*) > 0$ таке, що кожна множина рівня $L(f,t)$, $t \in (t^*-\delta, t^*+\delta)$ містить принаймні одну ν-компоненту всередині $U_s(\varepsilon)$, $s = 1, \ldots, k$. Отже для всіх $t \in T_k \cap (t^*-\delta, t^*+\delta)$ множина рівня $L(f;t)$ містить рівно одну ν-компоненту всередині $U_s(\varepsilon)$, $s = 1, \ldots, k$. З цього і властивості 3.2.5 випливає, що

$$V_p^{\nu}(L(f;t)) = \sum_{s=1}^{k} v_p\left(L(f;t) \cap \overline{U_s(\varepsilon)}\right). \tag{3.19}$$

Для кожного $t^* \in T_k$ покладемо $W(t^*) := (t^* - \delta(t^*), t^* + \delta(t^*))$; множини $W(t^*)$, $t^* \in T_k$, утворюють відкрите покриття множини T_k. Тому ми можемо обрати зліченне підпокриття $W_1, W_2, \ldots$ множини T_k. Покладемо $\tilde{W}_1 := W_1 \cap T_k$, $\tilde{W}_m := \left(W_m \setminus \bigcup\limits_{s=1}^{m-1} W_s\right) \cap T_k$, $m = 2, 3, \ldots$. Ми отримали зліченне розбиття множини T_k на попарно неперетинні вимірні підмножини $\tilde{W}_m$, $m \in \mathbb{N}$, так, що на кожній з множин $\tilde{W}_m$ маємо представлення (3.19) функції $V_p^{\nu}(L(f;\cdot))$ (множини $\overline{U_s(\varepsilon)}$, $s = 1, \ldots, k$, можуть бути різними для

різних $m \in \mathbb{N}$). З леми 3.2.5 випливає вимірність множини

$$\{t \in T_k \colon V_p^\nu(L(f;t)) \le c\} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \left(\tilde{W}_m \cap \left\{ \sum_{s=1}^{k} v_p \left(L(f;t) \cap \overline{U_s(\varepsilon)} \right) \le c \right\} \right),$$

що завершує доведення леми. □

3.2.3.3 Деякі властивості варіації функцій

Ми наводимо деякі властивості варіації функцій. Зафіксуємо деяке $p \in [1,\infty]$ і компактну множину $F \subset \mathbb{R}^d$. Функція f вважається неперервною на F. Для властивостей величини $V_p(f)$ від множини F додатково вимагаємо локальну зв'язність.

Властивість 3.2.7. *Функції $v_p(f)$ і $V_p(f)$ є невід'ємними. Якщо f є константою, то $v_p(f) = V_p(f) = 0$.*

Доведення. Невід'ємність функцій випливає з означення. Якщо f є константою, то вона має рівно одну непорожню множину рівня. □

Властивість 3.2.8. *Якщо $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $v_p(\alpha \cdot f + \beta) = |\alpha| v_p(f)$ і $V_p(\alpha \cdot f + \beta) = |\alpha| V_p(f)$.*

Доведення. Відмітимо, що $L(\alpha \cdot f + \beta; t) = L(f; \alpha^{-1} \cdot (t - \beta))$ для всіх $\alpha \ne 0$ і $\beta, t \in \mathbb{R}$. Роблячи заміну $s = \alpha^{-1} \cdot (t - \beta)$ у інтегралі з означення 3.2.7, отримаємо потрібні рівності. У випадку $\alpha = 0$ властивість випливає з властивості 3.2.7. □

Властивість 3.2.9. *Для кожного $\alpha \ne 0$, $v_p(f;F) = v_p\left(f(\alpha\,\cdot); \alpha^{-1}F\right)$ і*

$$V_p(f;F) = V_p(f(\alpha\,\cdot); \alpha^{-1}F).$$

Доведення. Ця властивість є наслідком властивості 3.2.6. □

Властивість 3.2.10. *Нехай задано $t \in \mathbb{R}$ таке, що $F \setminus L(f;t)$ має рівно $n \ge 2$ компонент зв'язності $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Припустимо, що для кожного $k = 1, \ldots, n$, $\overline{F_k} \setminus F_k \subset L(f;t)$. Тоді $v_p(f;F) \le \sum\limits_{k=1}^{n} v_p(f;\overline{F_k})$ і $V_p(f;F) = \sum\limits_{k=1}^{n} V_p(f;\overline{F_k})$.*

Доведення. Розглянемо довільне $s \in \mathbb{R}$, $s \neq t$. Для $k = 1, \dots, n$ покладемо $W_k := \overline{F_k} \cap L(f; s)$. Тоді множина W_k є замкненою, $k = 1, \dots, n$, і $W_k \subset F_k$, що випливає з умови властивості і того факту, що різні множини рівня довільної функції не перетинаються. Тоді множини W_k є компактними і попарно не перетинаються. З властивостей 3.2.3 і 3.2.4 випливає, що $V_p(L(f; s)) = \sum\limits_{k=1}^{n} V_p(\overline{F_k} \cap L(f; s))$ і $v_p(L(f; s)) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} v_p(\overline{F_k} \cap L(f; s))$. Твердження тепер випливає з означення 3.2.7. □

Властивість 3.2.11. *Якщо $d = 1$ і $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ є неперервною функцією, то для всіх $p \in [1, \infty]$*

$$v_p(f; [0, 1]) = V_p(f; [0, 1]) = \bigvee_0^1 f,$$

Зауваження 3.2.3. *$\bigvee_0^1 f$ — це класична варіація функції f однієї змінної на $[0, 1]$. Ми включаємо випадок, коли $\bigvee_0^1 f = +\infty$, тобто f не є функцією обмеженої варіації.*

Доведення. Теорема Банах про індикатрису [57] стверджує, що $\bigvee_0^1 f$ дорівнює інтегралу по $t \in \mathbb{R}$ кількість точок у $L(f; t)$. У означенні $v_p(f; [0, 1])$, кількість компонент зв'язності множини $L(f; t)$ інтегрується по $t \in \mathbb{R}$. Кожна компонента зв'язності компактної множини на прямій $\mathbb{R}$ є або точкою, або відрізком. Сім'я множин рівня $L(f; t)$, які містять відрізок як компоненту зв'язності, є не більш ніж зліченною, бо кожна така множина рівня містить точку екстремуму, див. лему 3.2.6. Тому $v_p(f; [0, 1]) = \bigvee_0^1 f$. Легко бачити, що $v_p(f; [0, 1]) = V_p(f; [0, 1])$. □

Властивість 3.2.12. *Нехай задано неперервну функцію $\varphi\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ і $d \in \mathbb{N}$. Нехай $f_\varphi\colon B^d \to \mathbb{R}$, $f_\varphi(x) = \varphi(|x|)$. Тоді для всіх $p \in [1, \infty]$*

$$v_p(f_\varphi; B^d) = V_p(f_\varphi; B^d) = 2 \cdot \bigvee_0^1 \varphi.$$

Доведення. У випадку $d = 1$ властивість випливає з властивості 3.2.11, тому далі вважаємо, що $d \geq 2$. Зафіксуємо довільне $t \neq \varphi(0)$. Для довільного

$r \in \mathbb{P}^{d-1}$ і $\beta \in \Pi^{d-1}(r)$ число $N(L(f_\varphi; t) \cap l(r, \beta))$ може бути отриманим за допомогою такої процедури: розглянемо пряму $r = l(r, \theta)$ і відмітимо на ній точки множини $L(f_\varphi; t) \cap l(r, \theta)$; виріжемо з прямої відрізок $(-|\beta|, |\beta|)$ і склеїмо точки $-|\beta|$ і $|\beta|$; кількість компонент зв'язності відмічених точок на отриманій прямій дорівнює $N(L(f_\varphi; t) \cap l(r, \beta))$. Це показує, що для довільного β

$$N(L(f_\varphi; t) \cap l(r, \beta)) \leq N(L(f_\varphi; t) \cap l(r, \theta)). \tag{3.20}$$

З вибору точки t випливає, що

$$\theta \notin L(f_\varphi; t) \tag{3.21}$$

і тому існує $\varepsilon > 0$ таке, що $B(\varepsilon) \cap L(f_\varphi; t) = \emptyset$. Звідси випливає, що множина $L(f_\varphi; t) \cap l(r, \theta)$ не містить точок x з $|x| < \varepsilon$ і тому для всіх β таких, що $|\beta| < \varepsilon$, нерівність (3.20) перетворюється на рівність. Тому $v(L(f_\varphi; t), r) = N(L(f_\varphi; t) \cap l(r, \theta))$. З (3.21) випливає, що $N(L(f_\varphi; t) \cap l(r, \theta)) = 2 \cdot N(L(\varphi; t))$. Для того, щоб довести рівність $v_p(f_\varphi; B) = 2 \cdot \bigvee_0^1 \varphi$ тепер достатньо скористатись властивістю 3.2.11. Рівність $v_p(f_\varphi; B) = V_p(f_\varphi; B)$ випливає з геометрії множин рівня функції f_φ. □

3.2.4 Варіація деяких множин і функцій

У цьому пункті ми обчислимо варіації спеціальних множин і функцій, які будуть екстремальними у відповідних нерівностях типу Островського.

3.2.4.1 Варіація деяких множин

Лема 3.2.8. *Нехай задано множину $X \subset S^{d-1}$ таку, що*

$$\mu X < \mu S^{d-1} \tag{3.22}$$

і множина $\mathcal{C}(X)$ є опуклою. Тоді існує точка $x \in S^{d-1}$ така, що $X \subset S_+^{d-1}(x)$.

Доведення. З нерівності (3.22) випливає, що $\mathcal{C}(X) \neq \mathbb{R}^d$. Тому $\theta \notin \operatorname{int}\mathcal{C}(X)$ і отже $\theta \in \partial\mathcal{C}(X)$. Таким чином з опуклості множини $\mathcal{C}(X)$ випливає існування опорної для $\mathcal{C}(X)$ гіперплощини, що містить θ. Ця гіперплощина породжує шукану пів сферу. $\square$

Лема 3.2.9. *Нехай задано опуклу компактну множину $A \subset \mathbb{R}^d$ таку, що $\theta \in \operatorname{int} A$. Нехай також $X \subset S^{d-1}$ з $\mu S^{d-1} > \mu X > 0$ є такою, що множина $\mathcal{C}(X)$ є опуклою. Тоді для всіх $p \in [1, \infty)$*

$$v_p(A \setminus \operatorname{int}\mathcal{C}(X)) = v_p(A \cap \partial\mathcal{C}(X)) = \left(\frac{(1-2^p)\mu X}{\mu S^{d-1}} + 2^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доведення. Достатньо довести, що

$$v(A \setminus \operatorname{int}\mathcal{C}(X), r) = v(A \cap \partial\mathcal{C}(X), r) = \begin{cases} 1, & r \cap \operatorname{int}\mathcal{C}(X) \neq \emptyset, \\ 2, & r \cap \overline{X} = \emptyset. \end{cases}$$

Дійсно, оскільки множина прямих $r \in \mathbb{P}^{d-1}$, які містять межові точки X, має нульову міру через опуклість $\mathcal{C}(X)$, то

$$v_p(A \setminus \operatorname{int}\mathcal{C}(X)) = v_p(A \cap \partial\mathcal{C}(X))$$
$$= \left(\frac{1}{\mu S^{d-1}}\left(1 \cdot \mu X + 2^p \cdot (\mu S^{d-1} - \mu X)\right)\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{(1-2^p)\mu X}{\mu S^{d-1}} + 2^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Покладемо $Y := A \setminus \operatorname{int}\mathcal{C}(X)$. Спочатку доведемо твердження для варіації множини Y. Оскільки Y є різницею двох опуклих множин, то $N(Y \cap l(r, \beta)) \leq 2$ для всіх $r \in \mathbb{P}^{d-1}$ і $\beta \in \Pi^{d-1}(r)$. Оскільки $\mu^d Y > 0$, то $v(Y, r) \geq 1$ для всіх $r \in \mathbb{P}^{d-1}$.

З леми 3.2.8 випливає існування $x \in S^{d-1}$ такої, що $X \subset S_+^{d-1}(x)$.

Нехай $r \in \mathbb{P}^{d-1}$ є такою, що $r \cap \overline{X} = \emptyset$ і нехай $r \cap S^{d-1} = \{y_1, y_2\}$. Тоді $y_1, y_2 \notin \overline{X}$, а отже існує $\varepsilon > 0$ таке, що $X \cap B(y_i, \varepsilon) = \emptyset$, $i = 1, 2$. Оскільки $\mathcal{C}(X)$ є опуклою множиною з ненульовою мірою, то $\mathcal{C}(X) \cap B(\varepsilon)$ містить внутрішні точки множини $\mathcal{C}(X)$. Тому існує множина з додатною мірою точок $\beta \in \mathbb{P}^{d-1}(r)$ така, що $l(r, \beta) \cap \operatorname{int}\mathcal{C}(X) \neq \emptyset$ і $l(r, \beta) \cap B(y_i, \varepsilon) \neq \emptyset$, $i = 1, 2$. Тому $v(Y, r) \geq 2$, і отже $v(Y, r) = 2$.

Нехай $r \in \mathbb{P}^{d-1}$ є такою, що $r \cap \operatorname{int} \mathcal{C}(X) \neq \emptyset$ і $y = r \cap X$. Припустимо, що існує $\beta \in \mathbb{P}^{d-1}(r)$ така, що $N(Y \cap l(r, \beta)) \geq 2$. Нехай $l(r, \beta) \cap \partial A = \{y_1, y_2\}$. Тоді $y_1, y_2 \in Y$. Виберемо деяку точку $z \in l(r, \beta) \cap \operatorname{int} \mathcal{C}(X)$ і розглянемо двовимірну площину Π^2, яка містить θ, y і z. Тоді $y_1, y_2 \in \Pi^2$. Крім того, промені $h(\theta, y)$ і $h(\theta, z)$ містяться у множині $\mathcal{C}(X)$ через її опуклість. Отже, весь кут породжений променями $h(\theta, y)$ і $h(\theta, z)$ міститься у $\mathcal{C}(X)$. Але звідси випливає, що одна з точок y_1 або y_2 належить $\operatorname{int} \mathcal{C}(X)$. Отримали протиріччя, а отже $N(Y \cap l(r, \beta)) = 1$ для всіх $\beta \in \mathbb{P}^{d-1}(r)$. Тому $v(Y, r) = 1$.

Відмітимо, що $N(A \cap \partial \mathcal{C}(X) \cap l(r, \beta)) \leq 2$ для всіх $r \in \mathbb{P}^{d-1}$ і $\beta \in \Pi(r)$ через опуклість $\mathcal{C}(X)$. Крім того, $N(A \cap \partial \mathcal{C}(X) \cap l(r, \beta)) = 2$ тоді і тільки тоді, коли $N(Y \cap l(r, \beta)) = 2$. Звідси випливає справедливість твердження стосовно множини $A \cap \partial \mathcal{C}(X)$.

□

3.2.4.2 Варіація деяких функцій

Лема 3.2.10. *Нехай задано множину $X \subset S^{d-1}$ з $\mu S^{d-1} > \mu X > 0$ і таку, що $\mathcal{C}(X)$ є опуклою множиною. Припустимо $x \in \operatorname{int} \mathcal{C}(X)$. Тоді для всіх $y \in \mathcal{C}(X)$ пряма $l(y) := \{y + sx \colon s \in \mathbb{R}\}$ перетинає $\partial \mathcal{C}(X)$ рівно в одній точці.*

Доведення. З леми 3.2.8 випливає, що множина $\mathcal{C}(X)$ міститься в деякому пів просторі. Більше того, оскільки $x \in \operatorname{int} \mathcal{C}(X)$, то довільна пряма паралельна вектору $\overline{\theta x}$ перетинає гіперплощину, що породжує цей пів простір. З цього випливає, що довільна пряма $l(y)$ перетинає $\partial \mathcal{C}(X)$ хоча б в одній точці.

Для завершення доведення леми достатньо показати, що довільна пряма $l(y)$, $y \in \mathcal{C}(X)$, містить промінь, який міститься в $\mathcal{C}(X)$.

Якщо $y \in h(\theta, x)$, то $l(y) \supset h(\theta, x)$ і $h(\theta, x) \subset \mathcal{C}(X)$.

З леми 3.2.8 випливає, що $y \notin -h(\theta, x)$. Розглянемо двовимірну площину Π^2, яка містить x, y і θ. Опукла множина $\mathcal{C}(X) \cap \Pi^2$ містить обидва промені $h(\theta, x)$ і $h(\theta, y)$, а тому містить весь кут, який породжується цими

променями. Тому $\mathcal{C}(X) \supset h(y, y+x)$.

$\square$

Лема 3.2.11. *Нехай множина $X \subset S^{d-1}$ з $\mu S^{d-1} > \mu X > 0$ є такою, що $\mathcal{C}(X)$ є опуклою. Припустимо, що $x \in \operatorname{int}\mathcal{C}(X)$. Тоді існує константа $C > 0$ така, що для всіх $s > 0$ і $y \in -sx + \partial\mathcal{C}(X)$*

$$C \cdot s \leq \inf_{z \in \partial\mathcal{C}(X)} |y - z|. \tag{3.23}$$

Доведення. Нехай $y \in -sx + \partial\mathcal{C}(X)$. Тоді $z = y + sx \in \partial\mathcal{C}(X)$. Існує опорна для $\mathcal{C}(X)$ гіперплощина $\Pi = \Pi(z)$, що містить z. Більше того, $\theta \in \Pi$, оскільки усі точки променя $h(\theta, z)$ знаходяться з одного боку від Π. Нехай $\varepsilon > 0$ є таким, що $B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{C}(X)$. Тоді для кута $\alpha(z)$ між гіперплощиною Π і променем $h(\theta, x)$ маємо $\alpha(z) \geq \alpha$, де $\alpha = \alpha(\varepsilon) > 0$ залежить від ε і не залежить від z. Тоді

$$\inf_{w \in \partial\mathcal{C}(X)} |y - w| \geq \inf_{w \in \Pi(z)} |y - w| = s|x| \sin\alpha(z) \geq s|x| \sin\alpha$$

і нерівність (3.23) виконується з $C = |x| \sin\alpha > 0$.

$\square$

Лема 3.2.12. *Нехай виконуються умови леми 3.2.9 і точка $x \in A \cap \operatorname{int}\mathcal{C}(X)$ є такою, що $-x \in \operatorname{int} A$. Визначимо функцію $f\colon A \to \mathbb{R}$ за такою формулою:*

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \in \overline{\mathcal{C}(X)} \cap A, \\ s, & t \in [-sx + \partial\mathcal{C}(X)] \cap A, s \in (0,1), \\ 1, & t \in A \setminus [-x + \operatorname{int}\mathcal{C}(X)]. \end{cases}$$

Тоді f є неперервною і для всіх $p \in [1, \infty)$

$$v_p(f) = \left(\frac{(1 - 2^p)\mu X}{\mu S^{d-1}} + 2^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.24}$$

Доведення. Відмітимо, що з леми 3.2.11 випливає, що $[-s_1 x + \partial\mathcal{C}(X)] \cap [-s_2 x + \partial\mathcal{C}(X)] = \emptyset$ для $s_1 \neq s_2$. Крім того, з леми 3.2.10 випливає, що

$-x + \operatorname{int}\mathcal{C}(X) \supset \overline{\mathcal{C}(X)}$ і для всіх $y \in [-x + \operatorname{int}\mathcal{C}(X)] \setminus \overline{\mathcal{C}(X)}$ існує число $s \in (0,1)$ таке, що $y \in -sx + \partial\mathcal{C}(X)$. Тому функція f коректно визначена. Якщо $y_1 \in -s_1x + \partial\mathcal{C}(X)$ і $y_2 \in -s_2x + \partial\mathcal{C}(X)$, $0 \le s_1 < s_2 \le 1$, то згідно з лемою 3.2.11,

$$|f(y_1) - f(y_2)| = |s_1 - s_2| \le \frac{1}{C} \inf_{y \in -s_1x + \partial\mathcal{C}(X)} |y_2 - y| \le \frac{1}{C}|y_2 - y_1|.$$

Тому функція f є неперервною.

З означення функції f випливає, що $0 \le f(y) \le 1$ для всіх $y \in A$. Для всіх $s \in (0,1)$ маємо $L(f,s) = [-sx + \partial\mathcal{C}(X)] \cap A$. З леми 3.2.9 випливає, що

$$v_p(L(f,s)) = \left(\frac{(1-2^p)\mu X}{\mu S^{d-1}} + 2^p\right)^{\frac{1}{p}},\ s \in (0,1).$$

Дійсно, достатньо застосувати лему 3.2.9 до множин $sx + A$ і $\partial\mathcal{C}(X)$, а потім помітити, що для довільної компактної множини F і $y \in \mathbb{R}^d$, $v_p(F) = v_p(y + F)$. Звідси випливає (3.24).

□

3.2.5 Сім'я множин $\mathfrak{A}$

В цьому пункті ми дамо два еквівалентні означення сім'ї множин, які будуть виступати областями визначення в нерівностях типу Островського.

3.2.5.1 Означення

Означення 3.2.8. *Позначимо через $\mathfrak{A}$ сім'ю всіх компактних опуклих множин $A \subset \mathbb{R}^d$ таких, що $\theta \in \operatorname{int} A$ і для всіх $\lambda \in \left(0, \frac{\mu S^{d-1}}{2}\right]$ точна нижня грань*

$$C(A,\lambda) := \inf_{\substack{\Lambda \subset S^{d-1},\, \mu\Lambda = \lambda,\\ \Lambda \cap (-\Lambda) = \emptyset}} \mu^d\left[\mathcal{C}(\Lambda) \cap A\right] \tag{3.25}$$

досягається на деякій множині $\Lambda(\lambda)$ для якої множина $\mathcal{C}(\Lambda(\lambda))$ є опуклою.

Наступна теорема дає еквівалентне означення сім'ї $\mathfrak{A}$. Її буде доведено в підпункті 3.2.5.4.

Теорема 3.2.1. *Компактна опукла множина $A \subset \mathbb{R}^d$ з $\theta \in \operatorname{int} A$ належить до сім'ї $\mathfrak{A}$ тоді і тільки тоді, коли виконуються такі дві умови.*

1. *Існує $x \in S^{d-1}$ така, що (функція ρ_A означена у (3.14))*

$$\rho_A(y) \le \rho_A(-y) \text{ для всіх } y \in S_+^{d-1}(x). \tag{3.26}$$

2. *Для всіх $r > 0$ множина $\mathcal{C}\left(\{y \in S_+^{d-1}(x) \colon \rho_A(y) \le r\}\right)$ є опуклою.*

3.2.5.2 Допоміжні результати

Лема 3.2.13. *Нехай $x \in S^{d-1}$ і $X \subset S_+^{d-1}(x)$ є такими, що множина $\mathcal{C}(X)$ є опуклою. Припустимо, що $y \in \Pi(x) \cap S^{d-1}$ і $\varepsilon > 0$ такі, що*

$$\mu\left(X \cap B^d(y,\varepsilon)\right) = \mu\left(X \cap B^d(-y,\varepsilon)\right) = \mu\left(S_+^{d-1}(x) \cap B^d(y,\varepsilon)\right). \tag{3.27}$$

Тоді $\mu X = \frac{\mu S^{d-1}}{2}$.

Доведення. З (3.27) випливає, що $\mu^d(\mathcal{C}(X)) \neq 0$. Тому з опуклості $\mathcal{C}(X)$ випливає

$$\mu^d\left[\operatorname{int}\mathcal{C}(X) \cap B^d\right] = \mu^d\left[\mathcal{C}(X) \cap B^d\right] = \mu^d\left[\overline{\mathcal{C}(X)} \cap B^d\right].$$

Отже, достатньо довести, що $\overline{\mathcal{C}(X)} \cap S^{d-1} = S_+^{d-1}(x)$, оскільки для довільної вимірної множини $S \subset S^{d-1}$ маємо $\mu S = \frac{\mu S^{d-1}}{\mu^d B^d}\mu^d\left[\mathcal{C}(S) \cap B^d\right]$.

Для довільної точки $z \in \mathbb{R}^d$ позначимо через $l(z)$ пряму, що містить точку z і паралельну прямій, що проходить через точки y і $-y$. Тоді для кожної $z \in B^d(\varepsilon) \cap \Pi_+(x)$ пряма $l(z)$ перетинає обидві множини $S_+^{d-1}(x) \cap B^d(y,\varepsilon)$ і $S_+^{d-1}(x) \cap B^d(-y,\varepsilon)$.

Тому, згідно з (3.27), пряма $l(z)$ перетинає обидві множини $\overline{X} \cap B^d(y,\varepsilon)$ і $\overline{X} \cap B^d(-y,\varepsilon)$. З цього випливає, що $z \in \operatorname{conv}\overline{X}$, а отже $z \in \operatorname{conv}\mathcal{C}(\overline{X}) = \overline{\mathcal{C}(X)}$. З довільності точки z, ми отримуємо $B^d(\varepsilon) \cap \Pi_+(x) \subset \overline{\mathcal{C}(X)}$ і отже $\overline{\mathcal{C}(X)} \cap B^d \supset S_+^{d-1}(x)$. З цього випливає, що $\overline{\mathcal{C}(X)} \cap S^{d-1} = S_+^{d-1}(x)$. $\square$

3.2.5.3 Деякі властивості множин сім'ї $\mathfrak{A}$

Лема 3.2.14. *Нехай $A \in \mathfrak{A}$ і $x \in S^{d-1}$ є такими, що виконується умова* (3.26). *Тоді $\rho_A(y) = \rho_A(-y)$ для всіх $y \in \Pi(x) \cap S^{d-1}$.*

Доведення. Припустимо протилежне, нехай $\rho_A(y) > \rho_A(-y)$ для деякої $y \in \Pi(x) \cap S^{d-1}$. Тоді з неперервності функції ρ_A випливає існування $\delta > 0$ такого, що $\rho_A(z) > \rho_A(-z)$ для всіх $z \in S^{d-1} \cap B^d(y, \delta)$. Але це суперечить (3.26). □

Лема 3.2.15. *Нехай $A \in \mathfrak{A}$. Тоді існує точка $x \in S^{d-1}$ така, що виконується умова* (3.26), *і для всіх $y \in S_+^{d-1}(x) \setminus \Pi(x)$ і $z \in \Pi(x) \cap S_+^{d-1}(x)$ маємо $\rho_A(y) \leq \rho_A(z)$.*

Доведення. Для кожного $\frac{\mu S^{d-1}}{2} > \varepsilon > 0$ покладемо $\lambda_\varepsilon = \frac{\mu S^{d-1}}{2} - \varepsilon$ і розглянемо множину $\Lambda_\varepsilon = \Lambda(\lambda_\varepsilon)$ з означення сім'ї $\mathfrak{A}$. З леми 3.2.8 випливає, що для кожного такого ε існує $x_\varepsilon \in S^{d-1}$ така, що $\Lambda_\varepsilon \subset S_+^{d-1}(x_\varepsilon)$. Переходячи до підпослідовності, якщо треба, ми можемо припустити, що $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} x_\varepsilon = x \in S^{d-1}$. Далі ми доведемо, що точка x задовольняє умовам леми.

Спочатку доведемо, що виконується умова (3.26). Припустимо протилежне, нехай $y \in S_+^{d-1}(x)$ є такою, що $\rho_A(y) > \rho_A(-y)$. Через неперервність ρ_A ми можемо вибрати $\delta > 0$ таке, що $\rho_A(z) > \rho_A(-z)$ для всіх $z \in S_+^{d-1}(x) \cap B^d(y, \delta)$. Число $\varepsilon > 0$ може бути вибраним настільки малим, що $\mu\left(\Lambda_\varepsilon \cap S_+^{d-1}(x) \cap B^d(y, \delta)\right) > 0$. Але тоді міра μ^d множини $\mathcal{C}(\Lambda_\varepsilon) \cap A$ може бути зроблена менше після заміни усіх точок $z \in \Lambda_\varepsilon \cap S_+^{d-1}(x) \cap B^d(y, \delta)$ точками $-z$. Прийшли до суперечності, отже умова (3.26) виконується.

Тепер припустимо, що $y \in S_+^{d-1}(x) \setminus \Pi(x)$ і $z \in \Pi(x) \cap S_+^{d-1}(x)$ є такими, що $\rho_A(y) > \rho_A(z)$. Тоді, згідно з лемою 3.2.14, $\rho_A(y) > \rho_A(-z)$. Існує $\delta > 0$ таке, що для всіх $w \in S^{d-1} \cap B^d(y, \delta)$ і всіх $t \in S^{d-1} \cap \left(B^d(z, \delta) \cup B^d(-z, \delta)\right)$ маємо $\rho_A(w) > \rho_A(t)$; крім того, δ може бути вибрано настільки малим, що $S_+^{d-1}(x) \setminus \Pi(x) \supset S^{d-1} \cap B^d(y, \delta)$.

Ми можемо вибрати $\varepsilon > 0$ настільки малим, що виконуються такі умови.

1. $S_+^{d-1}(x_\varepsilon) \supset S^{d-1} \cap B^d(y,\delta)$.

2. $\mu\left(\Lambda_\varepsilon \cap B^d(y,\delta)\right) > 0$.

3. Множина $\Pi(x_\varepsilon) \cap S^{d-1}$ містить внутрішні точки $B^d(z,\delta)$.

З умови 2 випливає, що

$$\mu\left(\Lambda_\varepsilon \cap B^d(z,\delta)\right) = \mu\left(S_+^{d-1}(x_\varepsilon) \cap B^d(z,\delta)\right) \tag{3.28}$$

і

$$\mu\left(\Lambda_\varepsilon \cap B^d(-z,\delta)\right) = \mu\left(S_+^{d-1}(x_\varepsilon) \cap B^d(-z,\delta)\right). \tag{3.29}$$

Дійсно, у протилежному випадку міру μ^d множини $\mathcal{C}(\Lambda_\varepsilon) \cap A$ можна зробити меншою, замінивши точки з $\Lambda_\varepsilon \cap B^d(y,\delta)$ на точки з $S_+^{d-1}(x_\varepsilon) \cap B^d(z,\delta)$ і $S_+^{d-1}(x_\varepsilon) \cap B^d(-z,\delta)$.

Нехай $z_\varepsilon \in \Pi(x_\varepsilon) \cap S^{d-1}$ є внутрішньою точкою множини $B^d(z,\delta)$. Тоді $-z_\varepsilon \in \Pi(x_\varepsilon) \cap S^{d-1}$ є внутрішньою точкою $B^d(-z,\delta)$. Застосування леми 3.2.13 з $X = \Lambda_\varepsilon$, $y = z_\varepsilon$, призводить до суперечності; рівності (3.28) і (3.29) гарантують, що умови (3.27) можна задовольнити за рахунок вибору радіусу кулі.

□

3.2.5.4 Доведення теореми 3.2.1

Лема 3.2.16. *Умови теореми 3.2.1 є необхідними.*

Доведення. Позначимо через x точку, існування якої стверджується в лемі 3.2.15. Доведемо, що ця точка є шуканою. Відмітимо, що з неперервності функції ρ_A та леми 3.2.15 випливає, що $\rho_A(z_1) = \rho_A(z_2)$ для всіх $z_1, z_2 \in \Pi(x) \cap S^{d-1}$. Покладемо $R := \rho_A(z)$, де z — це довільна точка з $\Pi(x) \cap S^{d-1}$.

Для всіх $r > 0$ покладемо $X(r) := \{y \in S_+^{d-1}(x) \colon \rho_A(y) \le r\}$. Тоді для всіх $r \ge R$ маємо $X(r) = S_+^{d-1}(x)$ і множина $\mathcal{C}(X(r))$ є опуклою.

Нехай

$$0 < r < R. \tag{3.30}$$

Доведемо, що множина $\Lambda(\mu X(r))$ з означення 3.2.8 з $\lambda = \mu X(r)$ може бути вибраною як підмножина $S_+^{d-1}(x)$. Дійсно, припустимо протилежне. Виберемо множину Λ, що задовольняє означенню 3.2.8 з $\lambda = \mu X(r)$. Тоді $\Lambda \cap \Pi(x) \neq \emptyset$, оскільки Λ є опуклою множиною і з $\Lambda \subset S_-^{d-1}(x) \setminus \Pi(x)$ буде випливати, що множина $-\Lambda \subset S_+^{d-1}(x)$ також задовольняє означенню 3.2.8 через умову (3.26). З неперервності функції ρ_A випливає, що множина $\{y \in \Lambda \colon \rho_A(y) > r\}$ має додатну міру, а отже $\mu^d\left(\mathcal{C}(\Lambda) \cap A\right) > \mu^d\left(\mathcal{C}(X(r)) \cap A\right)$, що суперечить вибору множини Λ.

Припустимо, що виконується умова (3.30). Далі ми доводимо, що множина $\mathcal{C}(X(r))$ є опуклою. Припустимо протилежне. Тоді існують

$$z \in S_+^{d-1}(x) \setminus X(r), \tag{3.31}$$

$m \in \mathbb{N}$, $y_1, \ldots, y_m \in X(r)$ і додатні числа $\eta_1, \ldots, \eta_m$ такі, що $z = \sum\limits_{k=1}^{m} \eta_k y_k$. З (3.31) випливає, що $\rho_A(z) > r$. Тоді існує $\delta > 0$ таке, що $X(r) \cap B(z, 2\delta) = \emptyset$. Виберемо $\varepsilon > 0$ таке, що $X(r+\varepsilon) \cap B(z, \delta) = \emptyset$. З неперервності функції ρ_A, випливає існування $\epsilon > 0$ такого, що $X(r+\varepsilon) \supset B(y_k, \epsilon) \cap S^{d-1}$, $k = 1, \ldots, m$. Крім того, ϵ можна обрати настільки малим, що

$$\sum_{k=1}^{m} \eta_k z_k \in B(z, \delta) \tag{3.32}$$

для всіх $z_k \in B(y_k, \epsilon) \cap S^{d-1}$, $k = 1, \ldots, m$. Тому множина $\mathcal{C}(X(r+\varepsilon))$ не є опуклою. Крім того, якщо $\Lambda \subset S^{d-1}$ є такою, що

$$\mu\left(X(r+\varepsilon) \triangle \Lambda\right) = 0, \tag{3.33}$$

то $\mathcal{C}(\Lambda)$ не є опуклою. Дійсно, з рівності (3.33) випливає, що

$$\mu\left(\Lambda \cap B(y_k, \epsilon)\right) > 0, k = 1, \ldots, m, \text{ і } \mu\left(\Lambda \cap B(z, \delta)\right) = 0.$$

Але з (3.32) випливає, що

$$\mu^d\left(\operatorname{conv} \mathcal{C}(\Lambda) \cap B(z, \delta)\right) > 0.$$

Відмітимо, що рівність (3.33) виконується для кожної множини $\Lambda \subset S_+^{d-1}$, що задовольняє означенню 3.2.8 з $\lambda = \mu X(r+\varepsilon)$; тому $A \notin \mathfrak{A}$. Прийшли до суперечності. $\square$

Лема 3.2.17. *Умови теореми 3.2.1 є достатніми.*

Доведення. Для $r > 0$ покладемо $X(r) := \{y \in S_+^{d-1}(x)\colon \rho_A(y) \le r\}$ і $\lambda(r) := \mu X(r)$. Тоді для всіх $r > 0$ множина $\Lambda(\lambda(r)) = X(r)$ задовольняє умовам означення 3.2.8 з $\lambda = \lambda(r)$. Якщо $\mu\left\{y \in S_+^{d-1}\colon \rho_A(y) = r\right\} = 0$ для всіх $r > 0$, то $\lambda(r)$ є неперервною функцією змінної r, і отже приймає усі значення від 0 до $\frac{\mu S^{d-1}}{2}$. Тому A задовольняє означенню 3.2.8 для всіх $\lambda \in \left(0, \frac{\mu S^{d-1}}{2}\right]$, а отже $A \in \mathfrak{A}$.

Тепер припустимо, що $\mu\left\{y \in S_+^{d-1}(x)\colon \rho_A(y) = r\right\} > 0$ для деякого $r > 0$. Для того, щоб завершити доведення леми, достатньо побудувати множину $\Lambda(l)$, яка задовольняє умовам означення 3.2.8 з $\lambda = l$ для кожного $l \in \left[\lim\limits_{\varrho\to r-0} \lambda(\varrho), \lambda(r)\right)$.

Покладемо $Y(r) = \bigcup\limits_{0<\varrho<r} X(\varrho)$. Тоді $\mu(Y(r)) = \lim\limits_{\varrho\to r-0} \lambda(\varrho)$ і

$$\mathcal{C}(Y(r)) = \mathcal{C}\left(\bigcup_{0<\varrho<r} X(\varrho)\right) = \bigcup_{0<\varrho<r} \mathcal{C}\left(X(\varrho)\right).$$

З умови леми випливає, що всі множини $\mathcal{C}(X(\varrho))$, $\varrho > 0$, є опуклими. Крім того, $X(r_1) \subset X(r_2)$ (а отже $\mathcal{C}(X(r_1)) \subset \mathcal{C}(X(r_2))$) для всіх $r_1 < r_2$. З цього випливає, що множина $\mathcal{C}(Y(r))$ є також опуклою. З побудови множини $Y(r)$ випливає, що множина $\Lambda(\lim\limits_{\varrho\to r-0} \lambda(\varrho)) := Y(r)$ задовольняє умовам означення 3.2.8 з $\lambda = \lim\limits_{\varrho\to r-0} \lambda(\varrho)$. Крім того, ми можемо припустити, що $Y(r) \cap \Pi(x) = \emptyset$, оскільки віднімання множини $S^{d-1} \cap \Pi(x)$ (або її підмножини) з $Y(r)$ не змінює міри $Y(r)$ і $\mathcal{C}(Y(r))$ і не впливає на опуклість $\mathcal{C}(Y(r))$.

Розглянемо деяку гіперплощину $\Pi \subset \Pi_+(x)$ паралельну до гіперплощини $\Pi(x)$. Покладемо $Z := \mathcal{C}(Y(r)) \cap \Pi$. Тоді Z є опуклою множиною і $\mu^{d-1} Z \ne 0$. Виберемо деяку внутрішню (відносно $d-1$-вимірної топології Π) точку $z \in Z$. Для кожного $\eta \ge 0$ розглянемо множину Z_η, яка отримується з Z шляхом розтягування відносно точки z у $1+\eta$ разів. Тоді множини Z_η є опуклою. Покладемо $Y_\eta := X(r) \cap \mathcal{C}(Z_\eta)$. Тоді μY_η є неперервною функцією змінної $\eta \ge 0$, $\mu Y_0 = \mu Y(r)$ і $\lim\limits_{\eta\to\infty} \mu Y_\eta = \mu X(r)$. Крім того, для кожного

$\eta \geq 0$, множина $\mathcal{C}(Y_\eta)$ є опуклою а множина $\Lambda(\mu Y_\eta) := Y_\eta$ задовольняє умовам означення 3.2.8 з $\lambda = \mu Y_\eta$.

Отже для всіх $l \in \left[\lim\limits_{\varrho \to r-0} \lambda(\varrho), \lambda(r)\right)$ ми побудували множину $\Lambda(l)$, що задовольняє умовам означення 3.2.8 з $\lambda = l$. □

3.2.6 Нерівності типу Островського

В цьому пункті ми сформулюємо і доведемо головні результати цього підрозділу — теореми 3.2.2 і 3.2.3. Лема 3.2.21 є головним інструментом при доведенні цих теорем.

3.2.6.1 Допоміжний результат

Лема 3.2.18. *Нехай $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $r \in \mathbb{P}^{d-1}$ і задано вимірну множину $F \subset B^d(x, \varepsilon)$. Для кожного $A \in (0,1)$ існує $\alpha = \alpha(A) \in (0,1)$, яке не залежить від ε, x і r таке, що*

$$\mu^{d-1}\{\beta \in \Pi^{d-1}(r) \colon F \cap l(r,\beta) \neq \emptyset\} > A \cdot \mu^{d-1} B^{d-1}(\varepsilon)$$

як тільки $\mu^d F > \alpha \cdot \mu^d B^d(\varepsilon)$.

Доведення. Той факт, що α не залежить від ε випливає з того, що

$$\frac{\mu^d F}{\mu^d B^d(\varepsilon)} = \frac{\mu^d\left(\frac{1}{\varepsilon}F\right)}{\mu^d B^d}$$

і

$$\frac{\mu^{d-1}\{\beta \in \Pi^{d-1}(r) \colon F \cap l(r,\beta) \neq \emptyset\}}{\mu^{d-1} B^{d-1}(\varepsilon)} = \frac{\mu^{d-1}\{\beta \in \Pi^{d-1}(r) \colon \frac{1}{\varepsilon}F \cap l(r,\beta) \neq \emptyset\}}{\mu^{d-1} B^{d-1}}.$$

Те, що α не залежить від x і r, є очевидним. Існування числа α випливає з рівності

$$\mu^d F = \int\limits_{\Pi^{d-1}(r) \cap B^d(y,\varepsilon)} \mu^1(l(r,\beta) \cap F) \mu^{d-1}(d\beta), \tag{3.34}$$

де $y \in \Pi^{d-1}(r)$ вибрано так, що пряма $l(r,y)$ містить x, а також рівності

$$\mu^{d-1}(\Pi^{d-1}(r) \cap B^d(y,\varepsilon)) = \mu^{d-1} B^{d-1}.$$

□

3.2.6.2 Узгоджені множини і деякі їх властивості

Означення 3.2.9. *Нехай задано опуклу компактну множину A з $\theta \in \mathrm{int}A$. Будемо називати множини $F, W \subset A$ узгодженими, якщо виконуються такі умови.*

1. *F є вимірною і $\theta \notin \overline{F}$,*
2. *W є замкненою і $\theta \notin W$,*
3. *Якщо $x \in F$ і $y \in A \setminus F$, то $xy \cap W \neq \emptyset$.*

Означення 3.2.10. *Для вимірної множини $F \subset \mathbb{R}^d$ позначимо через $\tilde{F}$ множину усіх точок $x \in F$ таких, що $\lim\limits_{\delta \to +0} \frac{\mu^d(F \cap B^d(x,\delta))}{\mu^d B^d(\delta)} = 1$.*

За теоремою Лебега,

$$\mu^d \tilde{F} = \mu^d F. \tag{3.35}$$

Лема 3.2.19. *Нехай задано опуклу компактну множину A з $\theta \in \mathrm{int}A$ і узгоджені множини $F, W \subset A$. Якщо пряма $r \in \mathbb{P}^{d-1}$ є такою, що $v(W, r) = 0$, то для довільного $\beta \in \Pi^{d-1}(r)$, $\tilde{F} \supset \mathrm{int}A \cap l(r, \beta)$ або $\tilde{F} \cap l(r, \beta) = \emptyset$.*

Доведення. Припустимо, що для деякого $\beta \in \Pi^{d-1}(r)$ існують $x \in \tilde{F} \cap l(r, \beta)$ і $y \in (\mathrm{int}A \cap l(r, \beta)) \setminus \tilde{F}$. З означення $\tilde{F}$ випливає, що існує $c > 0$ і послідовність чисел $\rho_n \to 0$ при $n \to \infty$ така, що $\mu^d(B^d(y, \rho_n) \setminus F) \geq c \cdot \mu^d B^d(\rho_n)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. З (3.34) (з F заміненою на $B^d(y, \rho_n) \setminus F$) випливає, що існує $C > 0$ таке, що

$$\mu^{d-1}\Omega_1(\rho_n) > C \cdot \mu^{d-1} B^{d-1}(\rho_n) \tag{3.36}$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$, де

$$\Omega_1(\rho_n) = \{\beta \in \Pi^{d-1}(r) \colon (B^d(y, \rho_n) \setminus F) \cap l(r, \beta) \neq \emptyset\}.$$

Оскільки $x \in \tilde{F}$ то, існує $\delta > 0$ таке, що для всіх $\rho < \delta$ маємо $\mu^d(B^d(x, \rho) \cap F) \geq \alpha(1 - C) \cdot \mu^d B^d(\rho)$, де число $\alpha(1 - C)$ визначено в лемі 3.2.18. З

леми 3.2.18 випливає, що

$$\mu^{d-1}\Omega_2(\rho) > (1-C)\cdot\mu^{d-1}B^{d-1}(\rho) \tag{3.37}$$

для всіх $\rho \le \delta$, де

$$\Omega_2(\rho) = \{\beta \in \Pi^{d-1}(r)\colon B^d(x,\rho)\cap F\cap l(r,\beta)\neq\emptyset\}.$$

Виберемо n настільки великим, що $\rho_n < \delta$. Тоді

$$\mu^{d-1}\Omega_1(\rho_n) + \mu^{d-1}\Omega_2(\rho_n) > \mu^{d-1}B^{d-1}(\rho_n), \tag{3.38}$$

згідно з (3.36) і (3.37). Крім того, оскільки $x, y \in l(r,\beta)$, то ми отримуємо, що

$$\Omega_1(\rho_n), \Omega_2(\rho_n) \subset \Pi^{d-1}(r)\cap B^d(\beta,\rho_n) \tag{3.39}$$

і

$$\mu^{d-1}(\Pi^{d-1}(r)\cap B^d(\beta,\rho_n)) = \mu^{d-1}(B^{d-1}(\rho_n)). \tag{3.40}$$

Покладемо $\Omega = \Omega_1(\rho_n)\cap\Omega_2(\rho_n)$. Тоді з (3.38), (3.39) і (3.40) випливає, що $\mu^{d-1}\Omega > 0$. Але кожна пряма $l(r,\beta)$, $\beta\in\Omega$, містить точку з W, згідно з умовою 3 означення 3.2.9 і означення множин $\Omega_1(\rho_n)$ і $\Omega_2(\rho_n)$. Це суперечить умові $v(W,r)=0$ леми. □

Лема 3.2.20. *Нехай задано опуклу компактну множину A з $\theta\in\mathrm{int}A$ і узгоджені множини $F, W\subset A$. Нехай $R\subset\mathbb{P}^{d-1}$ є такою, що $v(W,r)=0$ для всіх $r\in R$. Якщо R містить d прямих, що не містяться в жодній $d-1$-вимірній гіперплощині, то $\mu^d(F)=0$.*

Доведення. З (3.35) випливає, що достатньо довести рівність $\tilde{F}=\emptyset$. Нехай $r_1,\dots,r_d$ — це прямі з умови леми, а $\rho_1,\dots,\rho_d$ — це одиничні направляючі вектори цих прямих. Покладемо $P := \left\{\sum\limits_{k=1}^{d} t_k\rho_k\colon t_k\in(-1,1), k=1,\dots,d\right\}$, тоді P є відкритою у $\mathbb{R}^d$ множиною.

Розглянемо довільну точку $x\in\mathrm{int}A$. Виберемо $\varepsilon>0$ так, щоб $tx+\varepsilon P\subset A$ для всіх $t\in[0,1]$. Таке $\varepsilon>0$ існує, оскільки, відстань до межі A є неперервною функцією точки з відрізку θx і відрізок θx є компактною

множиною. Тоді для всіх точок y з відрізку θx, $P_y := y + \varepsilon P \subset A$. $\bigcup\limits_{y\in\theta x} P_y$ є відкритим покриттям компактної множини θx, а отже існує її скінченне підпокриття $P_1, P_2, \ldots, P_m$, $m \in \mathbb{N}$. З леми 3.2.19 випливає, що для кожного $s = 1, \ldots, m$, або $P_s \subset \tilde{F}$, або

$$P_s \cap \tilde{F} = \emptyset. \tag{3.41}$$

Оскільки $\theta \notin \tilde{F}$, ми отримуємо, що (3.41) виконується для кожного $s = 1, \ldots, m$, а отже $x \notin \tilde{F}$. □

3.2.6.3 Основна лема

Лема 3.2.21. *Нехай $A \in \mathfrak{A}$ і задано узгоджені множини $F, W \subset A$. Тоді для всіх $p \in [1, \infty]$*

$$\mu^d F \le C_p(A) v_p(W), \tag{3.42}$$

де

$$C_p(A) = \begin{cases} \sup\limits_{\lambda\in[0,\mu S^{d-1}]} \dfrac{\mu^d A - C\left(A, \frac{\lambda}{2}\right)}{\left(\frac{(1-2^p)\lambda}{\mu S^{d-1}} + 2^p\right)^{\frac{1}{p}}}, & p < \infty \\ \dfrac{\mu^d A}{2}, & p = \infty, \end{cases} \tag{3.43}$$

а $C(A, \lambda)$ означено в (3.25).

Нерівність точна в тому сенсі, що для кожного $\varepsilon > 0$ існують узгоджені множини F і W, для яких

$$\mu^d F > (C_p(A) - \varepsilon)\, v_p(W).$$

Якщо нерівність (3.42) *перетворюється на рівність, то $\mu^d F = 0$.*

Доведення. Якщо існує множина $R \subset \mathbb{P}^{d-1}$ з додатною мірою, для якої $v(W, r) = 0$ для всіх $r \in R$, то з леми 3.2.20 випливає, що $\mu^d F = 0$, а отже виконується нерівність (3.42).

Доведемо нерівність (3.42) у випадку $p < \infty$.

Якщо $v(W, r) \ge 2$ для майже всіх $r \in \mathbb{P}^{d-1}$, то $v_p(W) \ge 2$ і нерівність (3.42) виконується, оскільки для $p < \infty$

$$C_p(A) \ge \frac{\mu^d A - C(A, 0)}{2} = \frac{\mu^d A}{2}.$$

Нерівність строга, оскільки виконується умова 1 з означення 3.2.9.

Припустимо, що існує $R \subset \mathbb{P}^{d-1}$, $\mu R > 0$ така, що $v(W, r) = 1$ для всіх $r \in R$ і $v(W, r) \geq 2$ для майже всіх $r \in \mathbb{P}^{d-1} \setminus R$. Тоді

$$v_p(W) \geq \left(\frac{1}{\mu S^{d-1}} \left(1 \cdot \mu R + 2^p \cdot (\mu S^{d-1} - \mu R) \right) \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{(1 - 2^p)\mu R}{\mu S^{d-1}} + 2^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.44}$$

З умов 1 і 2 означення 3.2.9 випливає, що існує $\varepsilon > 0$ таке, що $B^d(\varepsilon) \cap W = \emptyset$ і $B^d(\varepsilon) \cap F = \emptyset$. Покладемо $\Lambda := \bigcup\limits_{r \in R} (r \cap A)$. Далі ми доводимо, що

$$\mu^d(\Lambda \cap F) < \frac{\mu^d \Lambda}{2}. \tag{3.45}$$

Для того, щоб довести (3.45), враховуючи (3.35), достатньо довести

$$\mu^d(\Lambda \cap \tilde{F}) < \frac{\mu^d \Lambda}{2}, \tag{3.46}$$

Розглянемо довільну пряму $r \in R$. Тоді усі точки перетину $r \cap \tilde{F}$ знаходяться по один бік від $r \cap B^d(\varepsilon)$. Цей факт можна довести використовуючи аргументи з доведення леми 3.2.19. Позначимо через χ характеристичну функцію множини $\Lambda \cap \tilde{F}$. Тоді $\chi(x) = 0$ для всіх $|x| < \varepsilon$ і $\chi(x) + \chi(-x) \leq 1$ для всіх $x \in \Lambda$. З цього випливає (3.46).

Нарешті, маючи (3.45), ми можемо записати

$$\mu^d F \leq \mu^d(F \cap \Lambda) + \mu^d(A \setminus \Lambda) < \mu^d A - \frac{1}{2}\mu^d \Lambda \leq \mu^d A - C\left(A, \frac{\mu R}{2}\right).$$

Остання нерівність разом з (3.44) доводять (3.42).

Доведемо тепер нерівність (3.42) у випадку $p = \infty$.

Якщо $v(W, r) = 1$ для майже всіх $r \in \mathbb{P}^{d-1}$, то аналогічно випадку $p < \infty$, можна показати, що $\mu^d F < \frac{\mu^d A}{2}$, а отже нерівність (3.42) виконується і є строгою.

Якщо $v(W, r) \geq 2$ на множині $r \in \mathbb{P}^{d-1}$ з додатною мірою, то $v_\infty(W) \geq 2$ і отже нерівність (3.42) виконується. Вона є строгою, оскільки виконується умова 1 означення 3.2.9.

Доведемо точність нерівності (3.42) у випадку $p = \infty$.

Для довільного $\varepsilon > 0$ розглянемо множини $W_\varepsilon = F_\varepsilon := \{x \in A\colon |x| \geq \varepsilon\}$. Для всіх $p \in [1, \infty]$, $v_p(W_\varepsilon) = 2$; $\mu^d F_\varepsilon \to \mu^d A$ коли $\varepsilon \to 0$. Тому нерівність (3.42) у цьому випадку є точною.

Нарешті, доведемо точність нерівності (3.42) у випадку $p < \infty$.

Позначимо через λ число, на якому досягається точна верхня грань в (3.43). Якщо $\lambda = 0$, то приклад з випадку $p = \infty$ доводить точність нерівності.

Нехай тепер $\lambda > 0$ і $\Lambda = \Lambda\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ є множиною, що реалізує точну нижню грань у (3.25), причому множина $\mathcal{C}(\Lambda)$ є опуклою. Нехай $x \in \operatorname{int}\mathcal{C}(\Lambda) \cap A$ є такою, що $-x \in A$. Покладемо $\Lambda_x := -x + \operatorname{int}\mathcal{C}(\Lambda)$ і $W_x = F_x := A \setminus \Lambda_x$. Тоді множини W_x і F_x є узгодженими, і, згідно з лемою 3.2.9, маємо $v_p(W_x) = \left(\frac{(1-2^p)\lambda}{\mu S^{d-1}} + 2^p\right)^{\frac{1}{p}}$, і $\mu^d(F_x) = \mu A - \mu\Lambda_x = \mu A - \mu\Lambda + o(1)$, $|x| \to 0$. З цього випливає точність нерівності (3.42).

□

3.2.6.4 Головні результати

Теорема 3.2.2. *Нехай $A \in \mathfrak{A}$ і задано неперервну функцію $f\colon A \to \mathbb{R}$. Тоді для всіх $p \in [1, \infty]$*

$$\left| \int\limits_A f(x)dx - \mu^d A \cdot f(\theta) \right| \leq C_p(A) v_p(f), \tag{3.47}$$

де $C_p(A)$ означено в (3.43). Нерівність є точною. Вона перетворюється на рівність тільки у випадку сталої f.

Доведення. З означення 3.2.7 випливає, що $v_p(f) = v_p(f + c)$ для всіх $c \in \mathbb{R}$. Тому ми можемо припустити, що $f(\theta) = 0$ і достатньо довести, що

$$\int\limits_A f(x)dx \leq C_p(A) v_p(f). \tag{3.48}$$

Покладемо $\Gamma := \{(x, t) \in A \times [0, \infty)\colon f(x) \geq t\}$ і для кожного фіксованого $t \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{R}^{d+1}_t := \{(x_1, \ldots, x_d, t) \in \mathbb{R}^{d+1}\colon x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{R}\}.$$

Тоді

$$\int\limits_A f(x)dx \le \mu^{d+1}\Gamma = \int\limits_{t\ge 0} \mu^d\left(\Gamma\cap\mathbb{R}^{d+1}_t\right)dt. \tag{3.49}$$

Для всіх $t>0$, розглянемо множини $F:=\Gamma\cap\mathbb{R}^{d+1}_t$ і

$$W:=\{(x,s)\in A\times[0,\infty)\colon f(x)=s\}\cap\mathbb{R}^{d+1}_t.$$

Обидві множини F і W є замкненими множинами, що не містять θ, оскільки $f(\theta)=0$. Якщо $x\in F$ і $y\in A\setminus F$, то $f(x)\ge t$ і $f(y)<t$, а отже відрізок xy містить точку z з $f(z)=t$, тобто $xy\cap W\ne\emptyset$. Тому виконуються усі умови леми 3.2.21, а отже

$$\mu^d(\Gamma\cap\mathbb{R}^{d+1}_t)=\mu^d(F)\le C_p(A)v_p(W)=C_p(A)v_p(L(f;t)),$$

причому рівність можлива лише у випадку, коли $\mu^d F=0$. Враховуючи (3.49), ми отримуємо

$$\mu^{d+1}\Gamma\le C_p(A)\int\limits_{t\ge 0} v_p(L(f;t))dt\le C_p(A)\int\limits_{t\in\mathbb{R}} v_p(L(f;t))dt=C_p(A)v_p(f)$$

і нерівність (3.48) доведено. Крім того, з неперервності f випливає, що рівність в (3.48) може бути тільки у випадку, коли $f\equiv 0$. Отже нерівність (3.47) доведено.

Далі ми доводимо, що нерівність (3.47) є точною.

Якщо $p=\infty$ або точна верхня грань в (3.43) досягається при $\lambda=0$, то розглянемо таку конструкцію екстремальних функцій.

Для кожного $\varepsilon>0$ розглянемо неперервну функцію $\varphi_\varepsilon\colon[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $\varphi_\varepsilon(t)=1$ для $t\ge\varepsilon$, $\varphi_\varepsilon(0)=0$ і φ_ε є лінійною на $[0,\varepsilon]$. Покладемо $f_\varepsilon(x)=\varphi_\varepsilon(|x|)$, $x\in A$. Легко бачити, що $v_p(L(f_\varepsilon;t))=2$ для всіх $t\in(0,1]$ і $v_p(L(f_\varepsilon;t))=0$ для всіх $t\notin(0,1]$. Тому $v_p(f_\varepsilon)=2$. Отже

$$\frac{\int\limits_A f_\varepsilon(x)dx}{v_p(f_\varepsilon)}\to\frac{\mu^d A}{2}=C_p(A),\ \varepsilon\to 0,$$

і точність нерівності (3.47) у цьому випадку доведено.

Нехай тепер $p < \infty$ і точна верхня грань в (3.43) досягається при $\lambda > 0$. Нехай $\Lambda = \Lambda\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ — це множина, на якій досягається точна нижня грань в (3.25) і така, що множина $\mathcal{C}(\Lambda)$ є опуклою. Для доведення точності нерівності (3.47), достатньо розглянути функції з леми 3.2.12 з $X = \Lambda$ і $x \to \theta$. □

Наслідок 3.2.1. *Нехай $d \in \mathbb{N}$ і задано неперервну функцію $f\colon B^d \to \mathbb{R}$. Тоді для всіх $p \in [1, \infty]$*

$$\left| \frac{1}{\mu^d B^d} \int\limits_{B^d} f(x)dx - f(\theta) \right| \leq \frac{v_p(f)}{2}.$$

Нерівність є точною. Вона перетворюється на рівність тільки у випадку, коли f є константою.

Теорема 3.2.3. *Нехай $A \in \mathfrak{A}$ і задано замкнену множину $F \subset A$. Якщо $\theta \notin F$, то для всіх $p \in [1, \infty]$*

$$\mu^d F \leq C_p(A) v_p(F).$$

Нерівність точна. Якщо вона перетворюється на рівність, то $\mu^d F = 0$.

Доведення. Достатньо застосувати лему 3.2.21 з $W = F$. □

Наслідок 3.2.2. *Нехай $d \in \mathbb{N}$ і задано замкнену множину $F \subset B^d$. Якщо $\theta \notin F$, то для всіх $p \in [1, \infty]$*

$$\mu^d F \leq \frac{\mu^d B^d}{2} v_p(F).$$

Нерівність є точною. Якщо вона перетворюється на рівність, то $\mu^d F = 0$.

3.3 Оптимальне відновлення інтеграла від випадкових процесів

Головні результати цього підрозділу містяться у статті [106].

3.3.1 Позначення

Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ — це ймовірнісний простір. Для випадкової величини η, означеної на просторі $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$, покладемо $\|\eta\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{w\in\Omega} |\eta(w)|$.

Для $a > 0$ через $\mathcal{R}(a)$ будемо позначати простір усіх випадкових величин η заданих на просторі $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ таких, що $\eta(w) \in [0, a]$ для всіх $w \in \Omega$.

У цьому підрозділі через ω позначаємо опуклий модуль неперервності. Для $a > 0$ через $H^\omega(a)$ будемо позначати простір функцій $x\colon [0, a] \to \mathbb{R}$ таких, що $|x(s) - x(t)| \le \omega(|t - s|)$ для всіх $t, s \in [0, a]$.

Для фіксованої випадкової величини $\tau \in \mathcal{R}(a)$ позначимо через $\mathcal{H}^\omega_\tau(a)$ множину усіх вимірних випадкових процесів ξ_t, $t \in [0, a]$, визначених на просторі $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$, і таких, що для всіх $\theta \in \mathcal{R}(a)$

$$\mathbf{E}|\xi_\tau - \xi_\theta| \le \omega(\|\tau - \theta\|_\infty). \tag{3.50}$$

Покладемо $\mathcal{H}^\omega(a) := \bigcap_{\tau\in\mathcal{R}(a)} \mathcal{H}^\omega_\tau(a)$ так, що $\mathcal{H}^\omega(a)$ є класом процесів для яких нерівність (3.50) виконується для всіх $\tau, \theta \in \mathcal{R}(a)$.

У випадку, коли $a = 1$, ми пишемо H^ω, $\mathcal{H}^\omega$, $\mathcal{H}^\omega_\tau$ і $\mathcal{R}$ замість $H^\omega(1)$, $\mathcal{H}^\omega(1)$, $\mathcal{H}^\omega_\tau(1)$ і $\mathcal{R}(1)$ відповідно.

3.3.2 Нерівність типу Островського

Наступна теорема дає нерівність типу Островського для випадкових процесів з класу $\mathcal{H}^\omega(a)$.

Теорема 3.3.1. *Для заданих числа $a > 0$ і випадкової величини $\tau \in \mathcal{R}(a)$ покладемо $t^* := \left\|\tau(\cdot) - \frac{a}{2}\right\|_\infty$. Тоді*

$$\sup_{\xi\in\mathcal{H}^\omega(a)} \mathbf{E}\left|\int_0^a \xi_t dt - a\cdot\xi_\tau\right| = \int_0^{\frac{a}{2}-t^*} \omega(s)ds + \int_0^{\frac{a}{2}+t^*} \omega(s)ds. \tag{3.51}$$

Ми доводимо теорему у випадку $a = 1$, загальна ситуація розглядається аналогічно. Доведення буде дано у наступних підпунктах.

3.3.2.1 Деякі зауваження щодо доведення теореми 3.3.1

Достатньо довести (3.51) у випадку простої випадкової величини τ. Загальний випадок можна отримати апроксимуючи величину τ простими.

Нехай множини $\Omega_1, \ldots, \Omega_n \in \mathcal{F}$ мають додатні міри, попарно не перетинаються, $P\left(\bigcup_{k=1}^n \Omega_k\right) = 1$, і $\tau(w) = \tau_k$ для $w \in \Omega_k$, $k = 1, \ldots, n$.

Для заданого $k \in \{1, \ldots, n\}$ покладемо

$$\tau^*(w) := \begin{cases} \tau(w), & w \in \Omega \setminus \Omega_k, \\ 1 - \tau(w), & w \in \Omega_k. \end{cases}$$

Оскільки разом з довільним процесом $\xi \in \mathcal{H}_\tau^\omega$ (або $\xi \in \mathcal{H}^\omega$), процес ξ_t^*, $t \in [0, 1]$,

$$\xi_t^*(w) := \begin{cases} \xi_t(w), & w \in \Omega \setminus \Omega_k, \\ \xi_{1-t}(w), & w \in \Omega_k \end{cases}$$

також належить $\mathcal{H}_{\tau^*}^\omega$ (відповідно $\mathcal{H}^\omega$), і для майже всіх $w \in \Omega$

$$\left| \int_0^1 \xi_t dt - \xi_\tau \right| = \left| \int_0^1 \xi_t^* dt - \xi_{\tau^*}^* \right|,$$

маємо

$$\sup_{\xi \in \mathcal{H}_\tau^\omega} \mathbf{E} \left| \int_0^1 \xi_t dt - \xi_\tau \right| = \sup_{\xi \in \mathcal{H}_{\tau^*}^\omega} \mathbf{E} \left| \int_0^1 \xi_t dt - \xi_{\tau^*} \right|$$

і

$$\sup_{\xi \in \mathcal{H}^\omega} \mathbf{E} \left| \int_0^1 \xi_t dt - \xi_\tau \right| = \sup_{\xi \in \mathcal{H}^\omega} \mathbf{E} \left| \int_0^1 \xi_t dt - \xi_{\tau^*} \right|.$$

Тому без зменшення загальності можемо припустити, що $0 \le \tau_k \le \frac{1}{2}$, $k = 1, \ldots, n$. Крім того, ми також можемо вважати, що $\tau_1 \le \ldots \le \tau_n$. При цих припущеннях маємо $t^* = \frac{1}{2} - \tau_1$ і права частина (3.51) стає

$$\int_0^{\tau_1} \omega(s) ds + \int_0^{1-\tau_1} \omega(s) ds. \tag{3.52}$$

3.3.2.2 Оцінка зверху

Лема 3.3.1. *Нехай виконуються припущення теореми 3.3.1 і підпункту 3.3.2.1. Нерівність*

$$\mathbf{E}\left|\int_0^1 \xi_t dt - \xi_\tau\right| \le \int_0^{\frac{1}{2}-t^*} \omega(s)ds + \int_0^{\frac{1}{2}+t^*} \omega(s)ds \tag{3.53}$$

виконується для всіх $\xi \in \mathcal{H}_\tau^\omega$, а отже і для всіх $\xi \in \mathcal{H}^\omega$.

Доведення. Для всіх $\xi \in \mathcal{H}_\tau^\omega$ маємо

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left|\int_0^1 \xi_t dt - \xi_\tau\right| &= \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_k} \left|\int_0^1 (\xi_t - \xi_{\tau_k})dt\right| P(dw) \\
&\le \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_k}\int_0^1 |\xi_t - \xi_{\tau_k}|\, dt P(dw) = \sum_{k=1}^n \int_0^1 \int_{\Omega_k} |\xi_t - \xi_{\tau_k}|\, P(dw)dt \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\int_0^{\tau_k-\tau_1}\int_{\Omega_k} |\xi_t - \xi_{\tau_k}|\, P(dw)dt + \int_{\tau_k-\tau_1}^{\tau_k}\int_{\Omega_k} |\xi_t - \xi_{\tau_k}|\, P(dw)dt\right. \\
&\quad \left. + \int_{\tau_k}^{\tau_k+1-\tau_n}\int_{\Omega_k} |\xi_t - \xi_{\tau_k}|\, P(dw)dt + \int_{\tau_k+1-\tau_n}^{1}\int_{\Omega_k} |\xi_t - \xi_{\tau_k}|\, P(dw)dt\right) \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\int_0^{\tau_k-\tau_1}\int_{\Omega_k} |\xi_t - \xi_{\tau_k}|\, P(dw)dt + \int_{\tau_k+1-\tau_n}^{1}\int_{\Omega_k} |\xi_t - \xi_{\tau_k}|\, P(dw)dt\right) \\
&\quad + \int_0^{\tau_1} \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_k} |\xi_{\tau_k-s} - \xi_{\tau_k}|\, P(dw)ds + \int_0^{1-\tau_n} \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_k} |\xi_{\tau_k+s} - \xi_{\tau_k}|\, P(dw)dt
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Для випадкової величини $\theta_s(w) := \tau(w) - s$ маємо $\|\theta_s - \tau\|_\infty = s$, $s \in [0, \tau_1]$, і тому

$$\int_0^{\tau_1} \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_k} |\xi_{\tau_k-s} - \xi_{\tau_k}|\, P(dw)ds = \int_0^{\tau_1} \mathbf{E}|\xi_{\theta_s} - \xi_\tau| ds \le \int_0^{\tau_1} \omega(s)ds.$$

Аналогічно

$$\int_0^{1-\tau_n} \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_k} |\xi_{\tau_k+s} - \xi_{\tau_k}|\, P(dw)dt \le \int_0^{1-\tau_n} \omega(s)ds.$$

Покладемо тепер

$$\theta_s(w) := \begin{cases} \tau_k + s, & s \in [1-\tau_n, 1-\tau_k], \\ \tau_k + (1 - \tau_1 - \tau_k - s), & s \in (1-\tau_k, 1-\tau_1], \end{cases}$$

$w \in \Omega_k$, $k = 1, \ldots, n$. Оскільки $\tau_1 + \tau_k \le 1$, $k = 1, \ldots, n$, то $|\theta_s - \tau| \le s$ для майже всіх $w \in \Omega$ і $s \in [1 - \tau_n, 1 - \tau_1]$. Тому

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\int_0^{\tau_k - \tau_1} \int_{\Omega_k} |\xi_t - \xi_{\tau_k}| \, P(dw) dt + \int_{\tau_k + 1 - \tau_n}^{1} \int_{\Omega_k} |\xi_t - \xi_{\tau_k}| \, P(dw) dt \right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\int\limits_{1-\tau_k}^{1-\tau_1} \int\limits_{\Omega_k} |\xi_{1-\tau_1-s} - \xi_{\tau_k}| \, P(dw) ds + \int\limits_{1-\tau_n}^{1-\tau_k} \int\limits_{\Omega_k} |\xi_{\tau_k+s} - \xi_{\tau_k}| \, P(dw) ds \right)$$
$$= \int\limits_{1-\tau_n}^{1-\tau_1} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Omega_k} |\xi_{\theta_s} - \xi_{\tau_k}| P(dw) ds = \int\limits_{1-\tau_n}^{1-\tau_1} \mathbf{E} |\xi_{\theta_s} - \xi_\tau| ds \le \int\limits_{1-\tau_n}^{1-\tau_1} \omega(s) ds. \quad (3.55)$$

Нарешті, нерівності (3.54)–(3.55) разом з (3.52) дають нерівність (3.53). Лему доведено. □

3.3.2.3 Випадковий процес, породжений функцією

Наступна лема показує спосіб побудувати випадковий процес з класу $\mathcal{H}^\omega$, маючи функцію $x \in H^\omega$.

Лема 3.3.2. *Нехай задано $x \in H^\omega$ і $F \in \mathcal{F}$ з $P(F) > 0$. Випадковий процес $\xi_t = \xi_t(x, F)$, $t \in [0, 1]$,*

$$\xi_t(w) := \begin{cases} \frac{1}{P(F)} x(t), & w \in F, \\ 0, & w \in \Omega \setminus F \end{cases}$$

належить до $\mathcal{H}^\omega$ і

$$\mathbf{E} \xi_t = x(t). \quad (3.56)$$

Доведення. Для того, щоб довести приналежність $\xi_t \in \mathcal{H}^\omega$, достатньо показати, що нерівність

$$\mathbf{E} \, |\xi_{\theta_1} - \xi_{\theta_2}| \le \omega \left(\|\theta_1 - \theta_2\|_\infty \right)$$

виконується для довільних двох простих випадкових величин θ_1 і θ_2.

Припустимо, що $F_i \subset F$ — це множини з додатними мірами, що попарно не перетинаються, $\theta_k(w) = \theta_i^k \in [0, 1]$, $w \in F_i$, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, 2$, і

$P\left(\bigcup_{i=1}^n F_i\right) = P(F)$. Беручи до уваги те, що ω є неспадною опуклою догори функцією, маємо

$$\mathbf{E}\left|\xi_{\theta_1} - \xi_{\theta_2}\right| = \sum_{i=1}^n \frac{P(F_i)}{P(F)}\left|x(\theta_i^1) - x(\theta_i^2)\right| \le \sum_{i=1}^n \frac{P(F_i)}{P(F)}\omega\left(\left|\theta_i^1 - \theta_i^2\right|\right)$$
$$\le \omega\left(\sum_{i=1}^n \frac{P(F_i)}{P(F)}\left|\theta_i^1 - \theta_i^2\right|\right) \le \omega\left(\max_{i=1,\dots,n}\left|\theta_i^1 - \theta_i^2\right|\right) \le \omega\left(\|\theta_1 - \theta_2\|_\infty\right).$$

Рівність (3.56) безпосередньо випливає з означення випадкового процесу. □

3.3.2.4 Оцінка знизу

Нехай виконуються припущення з підпункту 3.3.2.1. Розглянемо процес $\xi_t^* \in \mathcal{H}^\omega$, побудований згідно з лемою 3.3.2 з $F = \Omega_1$ і $x(\cdot) := \omega(|\cdot - \tau_1|) \in H^\omega$. Тоді

$$\mathbf{E}\left|\int_0^1 \xi_t^* dt - \xi_\tau^*\right| = \mathbf{E}\int_0^1 \xi_t^* dt = \int_0^1 \mathbf{E}\xi_t^* dt = \int_0^1 \omega(|t - \tau_1|)dt$$
$$= \int_0^{\tau_1} \omega(t)dt + \int_0^{1-\tau_1} \omega(t)dt,$$

що разом з (3.52) дає оцінку

$$\sup_{\xi \in \mathcal{H}^\omega} \mathbf{E}\left|\int_0^1 \xi_t dt - \xi_\tau\right| \ge \int_0^{\frac{1}{2}-t^*} \omega(s)ds + \int_0^{\frac{1}{2}+t^*} \omega(s)ds.$$

3.3.3 Оптимальне відновлення інтеграла

Ми розглядаємо задачу оптимального відновлення інтеграла

$$\operatorname{Int}\xi_t := \int_0^1 \xi_t dt$$

на класі випадкових процесів $\mathcal{H}^\omega$, на основі інформаційного оператора

$$J(\xi_t) = (\xi_{\tau_1}, \dots, \xi_{\tau_n}),$$

де $n \in \mathbb{N}$, $\tau_k = \tau + t_k$, $\tau \in \mathcal{R}$, і $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$, а числа $0 = t_1 < \dots < t_n$ є такими, що $\tau + t_n \le 1$ майже напевно. Похибка відхилення вимірюється

у просторі $\mathcal{R}$ з метрикою $(\zeta,\eta)\mapsto \mathbf{E}|\zeta-\eta|$. У цьому підрозділі ми пишемо $E(\tau,\mathbf{t})$ замість $\mathcal{E}(\mathrm{Int},\mathcal{H}^\omega,J,\mathcal{R})$ (див. (2) у Вступі). Для $t\geq 0$ покладемо

$$I(t):=\int_0^t \omega(s)ds.$$

Теорема 3.3.2. *Нехай задано $n\in\mathbb{N}$, $\tau\in\mathcal{R}$ і числа $0=t_1<\ldots<t_n$ такі, що $\tau+t_n\leq 1$ майже напевно. Покладемо $\tau_k:=\tau+t_k$, $k=1,\ldots,n$, і $t^*:=\left\|\tau-\frac{1-t_n}{2}\right\|_\infty$. Тоді*

$$E(\tau,\mathbf{t})=2\sum_{k=1}^{n-1} I\left(\frac{t_{k+1}-t_k}{2}\right)+I\left(\frac{1-t_n}{2}-t^*\right)+I\left(\frac{1-t_n}{2}+t^*\right). \quad (3.57)$$

Найкращим методом відновлення є метод $U=\sum_{k=1}^n c_k^*\xi_{\tau_k}$, де $c_1^*=\tau+\frac{t_2-t_1}{2}$, $c_k^*=\frac{t_{k+1}-t_{k-1}}{2}$, $k=2,\ldots,n-1$ і $c_n^*=1-\tau-\frac{t_n+t_{n-1}}{2}$.

У [168] розглядалась задача оптимального відновлення інтеграла у випадку, коли τ є константою на деякому аналогу класу $\mathcal{H}^\omega$. Доведення цієї теореми буде дано у декількох наступних підпунктах.

3.3.3.1 Допоміжні результати

Лема 3.3.3. *Нехай задано $a>0$, $\tau\in\mathcal{R}(a)$ і $b>0$ такі, що $\tau+b\leq a$ майже напевно. Для процесу $\xi\in\mathcal{H}^\omega(a)$ покладемо*

$$\zeta_t(w):=\begin{cases}\xi_t(w)-\xi_\tau(w), & 0\leq t\leq\tau(w),\\ \xi_{t+b}(w)-\xi_{\tau+b}(w), & \tau(w)<t\leq a-b.\end{cases}$$

Тоді $\zeta\in\mathcal{H}_\tau^\omega(a-b)$ і $\zeta_\tau\equiv 0$.

Доведення. Рівність $\zeta_\tau\equiv 0$ випливає з означення процесу ζ. Для випадкової величини $\theta\in\mathcal{R}(a-b)$ покладемо

$$\tilde\theta(w)=\begin{cases}\theta(w), & \theta(w)\leq\tau(w)\\ \theta(w)+b, & \theta(w)>\tau(w).\end{cases}$$

і

$$\tilde{\tau}(w) = \begin{cases} \tau(w), & \theta(w) \le \tau(w) \\ \tau(w) + b, & \theta(w) > \tau(w). \end{cases}$$

Тоді

$$\mathbf{E}|\zeta_\theta - \zeta_\tau| = \mathbf{E}|\zeta_\theta| = \mathbf{E}|\xi_{\tilde{\theta}} - \xi_{\tilde{\tau}}| \le \omega(\|\tilde{\theta} - \tilde{\tau}\|_\infty) = \omega(\|\theta - \tau\|_\infty).$$

Тому $\zeta \in \mathcal{H}^\omega_\tau(a-b)$ і лему доведено. □

3.3.3.2 Оцінка зверху

У цьому підпункті ми доведемо, що

$$E(\tau, \mathbf{t}) \le 2\sum_{k=1}^{n-1} I\left(\frac{t_{k+1} - t_k}{2}\right) + I\left(\frac{1 - t_n}{2} - t^*\right) + I\left(\frac{1 - t_n}{2} + t^*\right). \quad (3.58)$$

Покладемо $\alpha_0 := 0$, $\alpha_k := \tau + \frac{t_k + t_{k+1}}{2}$, $k = 1, \ldots, n-1$, і $\alpha_n = 1$. Тоді $c_k^* = \alpha_k - \alpha_{k-1}$, $k = 1, \ldots, n$, і

$$\begin{aligned} E(\tau, \mathbf{t}) &\le \sup_{\xi \in \mathcal{H}^\omega} \mathbf{E}\left|\int_0^1 \xi_t dt - \sum_{k=1}^n c_k^* \xi_{\tau_k}\right| = \sup_{\xi \in \mathcal{H}^\omega} \mathbf{E}\left|\sum_{k=1}^n \int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} (\xi_t - \xi_{\tau_k})\, dt\right| \\ &\le \sup_{\xi \in \mathcal{H}^\omega} \mathbf{E}\left|\int_0^{\alpha_1} (\xi_t - \xi_{\tau_1})\, dt + \int_{\alpha_{n-1}}^1 (\xi_t - \xi_{\tau_n})\, dt\right| \\ &\quad + \sup_{\xi \in \mathcal{H}^\omega} \sum_{k=2}^{n-1} \mathbf{E} \int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} |\xi_t - \xi_{\tau_k}|\, dt. \quad (3.59) \end{aligned}$$

Нехай $\xi \in \mathcal{H}^\omega$ і $k \in \{2, \ldots, n-1\}$. Тоді

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} |\xi_t - \xi_{\tau_k}|\, dt = \mathbf{E}\int_{\tau + \frac{t_{k-1} + t_k}{2}}^{\tau + \frac{t_k + t_{k+1}}{2}} |\xi_t - \xi_{\tau_k}|\, dt = \mathbf{E}\int_{\tau_k + \frac{t_{k-1} - t_k}{2}}^{\tau_k + \frac{t_{k+1} - t_k}{2}} |\xi_t - \xi_{\tau_k}|\, dt \\ &= \mathbf{E}\int_{\frac{t_{k-1} - t_k}{2}}^{\frac{t_{k+1} - t_k}{2}} |\xi_{\tau_k + t} - \xi_{\tau_k}|\, dt = \int_{\frac{t_{k-1} - t_k}{2}}^{\frac{t_{k+1} - t_k}{2}} \mathbf{E}\,|\xi_{\tau_k + t} - \xi_{\tau_k}|\, dt \le \int_{\frac{t_{k-1} - t_k}{2}}^{\frac{t_{k+1} - t_k}{2}} \omega(|t|) dt \\ &\qquad = \int_0^{\frac{t_k - t_{k-1}}{2}} \omega(t) dt + \int_0^{\frac{t_{k+1} - t_k}{2}} \omega(t) dt. \quad (3.60) \end{aligned}$$

Для довільного $\xi \in \mathcal{H}^\omega$,

$$\mathbf{E}\left|\int_0^{\alpha_1}(\xi_t-\xi_{\tau_1})\,dt+\int_{\alpha_{n-1}}^1(\xi_t-\xi_{\tau_n})\,dt\right|\le\mathbf{E}\left|\int_\tau^{\tau+\frac{t_2}{2}}(\xi_t-\xi_{\tau_1})\,dt\right|$$
$$+\mathbf{E}\left|\int_0^{\tau}(\xi_t-\xi_{\tau_1})\,dt+\int_{\tau+t_n}^1(\xi_t-\xi_{\tau_n})\,dt\right|+\mathbf{E}\left|\int_{\tau+\frac{t_n+t_{n-1}}{2}}^{\tau+t_n}(\xi_t-\xi_{\tau_n})\,dt\right|$$
$$\le\mathbf{E}\left|\int_0^{\tau}(\xi_t-\xi_{\tau_1})\,dt+\int_{\tau+t_n}^1(\xi_t-\xi_{\tau_n})\,dt\right|+\int_0^{\frac{t_2-t_1}{2}}\mathbf{E}\left|\xi_{\tau_1+t}-\xi_{\tau_1}\right|dt$$
$$+\int_0^{\frac{t_n-t_{n-1}}{2}}\mathbf{E}\left|\xi_{\tau_n-t}-\xi_{\tau_n}\right|dt\le\mathbf{E}\left|\int_0^{\tau}(\xi_t-\xi_{\tau_1})\,dt+\int_{\tau+t_n}^1(\xi_t-\xi_{\tau_n})\,dt\right|$$
$$+\int_0^{\frac{t_2-t_1}{2}}\omega(t)dt+\int_0^{\frac{t_n-t_{n-1}}{2}}\omega(t)dt.\quad(3.61)$$

З лем 3.3.3 і 3.3.1, отримаємо

$$\mathbf{E}\left|\int_0^{\tau}(\xi_t-\xi_{\tau_1})\,dt+\int_{\tau+t_n}^1(\xi_t-\xi_{\tau_n})\,dt\right|\le\sup_{\substack{\zeta\in\mathcal{H}^\omega_\tau(1-t_n),\\ \zeta_\tau\equiv0}}\mathbf{E}\left|\int_0^{1-t_n}\zeta_t dt\right|$$
$$\le\int_0^{\frac{1-t_n}{2}-t^*}\omega(s)ds+\int_0^{\frac{1-t_n}{2}+t^*}\omega(s)ds$$

Остання нерівність разом з нерівностями (3.59), (3.60) і (3.61) дають оцінку зверху (3.58).

3.3.3.3 Оцінка знизу

Ми доводимо, що

$$E(\tau,\mathbf{t})\ge2\sum_{k=1}^{n-1}I\left(\frac{t_{k+1}-t_k}{2}\right)+I\left(\frac{1-t_n}{2}-t^*\right)+I\left(\frac{1-t_n}{2}+t^*\right).\quad(3.62)$$

Достатньо довести цю нерівність у випадку простої випадкової величини τ, для якої виконуються припущення з підпункту 3.3.2.1.

Для кожного $\varphi\colon\mathcal{R}^n\to\mathcal{R}$, беручи до уваги те, що клас $\mathcal{H}^\omega$ є центрально симетричним, маємо

$$\sup_{\xi\in\mathcal{H}^\omega}\mathbf{E}\left|\int_0^1\xi_t dt-\varphi(\xi_{\tau_1},\dots,\xi_{\tau_n})\right|\ge\sup_{\substack{\xi\in\mathcal{H}^\omega,\,\xi_{\tau_k}\equiv0,\\ k=1,\dots,n}}\mathbf{E}\left|\int_0^1\xi_t dt-\varphi(0)\right|$$
$$=\sup_{\substack{\xi\in\mathcal{H}^\omega,\,\xi_{\tau_k}\equiv0,\\ k=1,\dots,n}}\max\left(\mathbf{E}\left|\int_0^1\xi_t dt-\varphi(0)\right|,\mathbf{E}\left|\int_0^1(-\xi_t)dt-\varphi(0)\right|\right)$$

$$\geq \frac{1}{2} \sup_{\substack{\xi \in \mathcal{H}^\omega,\, \xi_{\tau_k} \equiv 0, \\ k=1,\dots,n}} \left(\mathbf{E} \left| \int_0^1 \xi_t dt - \varphi(0) \right| + \mathbf{E} \left| \int_0^1 \xi_t dt + \varphi(0) \right| \right)$$

$$\geq \sup_{\substack{\xi \in \mathcal{H}^\omega,\, \xi_{\tau_k} \equiv 0, \\ k=1,\dots,n}} \mathbf{E} \left| \int_0^1 \xi_t dt \right| = \sup_{\substack{\xi \in \mathcal{H}^\omega,\, \xi_{\tau_k} \equiv 0, \\ k=1,\dots,n}} \mathbf{E} \int_0^1 \xi_t dt,$$

тому

$$E(\tau, \mathbf{t}) \geq \sup_{\substack{\xi \in \mathcal{H}^\omega,\, \xi_{\tau_k} \equiv 0, \\ k=1,\dots,n}} \int_0^1 \mathbf{E}\xi_t dt. \tag{3.63}$$

Покладемо $s_0 := 0$, $s_k := \tau_1 + \frac{t_k + t_{k+1}}{2}$, $k = 1, \dots, n-1$ і $s_n := 1$. Використовуючи лему 3.3.2, визначимо процес $\xi_t^* := \xi_t(\Omega_1, x)$, де

$$x(t) := \omega(|t - (\tau_1 + t_k)|), t \in [s_{k-1}, s_k), k = 1, \dots, n. \tag{3.64}$$

З еквівалентного означення функції x

$$x(t) = \min_{k=1,\dots,n} \omega(|t - (\tau_1 + t_k)|), t \in [0, 1]$$

випливає, що $x(t) \in H^\omega$, а тому $\xi_t^* \in \mathcal{H}^\omega$. Крім того, оскільки $x(\tau_1 + t_k) = 0$, $k = 1, \dots, n$ то $\xi_{\tau_k}^* \equiv 0$, $k = 1, \dots, n$, і тому з (3.63), отримаємо

$$E(\tau, \mathbf{t}) \geq \int_0^1 \mathbf{E}\xi_t^* dt = \int_0^1 x(t) dt.$$

Обчислюючи праву частину цієї рівності, використовуючи представлення (3.64) і той факт, що $t^* = \frac{1 - t_n}{2} - \tau_1$, отримаємо вираз з правої частин (3.62).

3.3.4 Оптимізація інформаційних вузлів

У цьому пункті ми розглядаємо задачу оптимізації вибору інформаційної множини $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$, з метою зменшення оптимальної похибки відновлення інтеграла. Будемо дивитись на випадковий процес ξ_t, як на деяку фізичну величину, а на випадкові величини ξ_{τ_k} — як на результат вимірювання цієї величини у (можливо випадкові) моменти часу τ_k, $k = 1, \dots, n$.

3.3.4.1 Оптимізація моментів вимірювання

Відповідно до нашого означення, похибка відновлення визначається похибкою на "найгіршому" випадковому процесі. Виявляється, що у такій постановці, можливість вибирати час вимірювань випадково не дає переваг у порівнянні з ситуацією, коли вимірювання величини робиться у фіксовані невипадкові моменти часу. Більш точно, справедливе таке твердження.

Наслідок 3.3.1. *В умовах теореми 3.3.2,*

$$\inf_{\tau_1,\ldots,\tau_n} E(\tau, \mathbf{t}) = 2nI\left(\frac{1}{2n}\right).$$

Оптимальними моментами часу вимірювань є $\tau_k = \frac{2k-1}{2n}$, $k = 1, \ldots, n$.

Доведення. Оскільки ω є неспадною, то функція $I(\cdot)$ є опуклою вниз. Тоді для довільних $\alpha_1, \ldots \alpha_{2n} > 0$ маємо

$$\sum_{s=1}^{2n} I(\alpha_s) \geq 2nI\left(\frac{1}{2n}\sum_{s=1}^{2n}\alpha_s\right)$$

і твердження наслідку випливає з (3.57). □

Нехай тепер вимірювання роблять пристроєм, який вмикається і робить перше вимірювання внаслідок появи деякої випадкової події (яка відбувається у момент часу $\tau_1 = \tau$), а наступні $n-1$ вимірювань робляться у моменти $\tau_k = \tau_1 + t_k$, тобто через t_k одиниць часу після першого вимірювання, $k = 2, \ldots, n$. Наступне твердження оптимізує вибір проміжків $t_2, \ldots, t_n$, маючи деяку інформацію про τ_1.

Теорема 3.3.3. *Нехай виконуються умови теореми 3.3.2 і*

$$m := \operatorname*{ess\,inf}_{w\in\Omega} \tau(w), M := \operatorname*{ess\,sup}_{w\in\Omega} \tau(w).$$

Якщо

$$(2n-1)m + M \geq 1, \tag{3.65}$$

то

$$\inf_{t_2,\ldots,t_n} E(\tau, \mathbf{t}) = (2n-1)I\left(\frac{1-M}{2n-1}\right) + I(M)$$

і інфімум досягається для $t_k = \frac{2(k-1)(1-M)}{2n-1}$, $k = 2, \ldots, n$.

Якщо

$$(2n-1)M + m \leq 1, \tag{3.66}$$

то

$$\inf_{t_2,\ldots,t_n} E(\tau, \mathbf{t}) = (2n-1)I\left(\frac{1-m}{2n-1}\right) + I(m)$$

і інфімум досягається для $t_k = \frac{2(k-1)(1-m)}{2n-1}$, $k = 2, \ldots, n$.

В іншому випадку,

$$\inf_{t_2,\ldots,t_n} E(\tau, \mathbf{t}) = (2n-2)I\left(\frac{1-m-M}{2n-2}\right) + I(m) + I(M)$$

і інфімум досягається для $t_k = \frac{(k-1)(1-m-M)}{n-1}$, $k = 2, \ldots, n$.

Доведення цієї теореми буде дано у декількох наступних підпунктах.

3.3.4.2 Допоміжні результати

Нагадаємо, що вектор $a \in \mathbb{R}^d$ мажорує вектор $b \in \mathbb{R}^d$ (пишемо $a \succ b$), якщо $\sum_{i=1}^k a_{[i]} \geq \sum_{i=1}^k b_{[i]}$, $k = 1, \ldots, d-1$, і $\sum_{i=1}^d a_i = \sum_{i=1}^d b_i$, де $a_{[i]}$ і $b_{[i]}$ позначають i-у найбільшу координату векторів a і b відповідно.

Нерівність Карамати [94] стверджує, що для кожної опуклої функції f і векторів $x, y \in \mathbb{R}^d$ таких, що $x \succ y$, маємо

$$\sum_{k=1}^d f(x_k) \geq \sum_{k=1}^d f(y_k).$$

Нам потрібна така лема.

Лема 3.3.4. *Нехай задано вектори* $x, y \in \mathbb{R}^d$ *такі, що* $x \succ y$ *і число* $a \in \mathbb{R}$. *Тоді*

$$(x_1, \ldots, x_d, a) \succ (y_1, \ldots, y_d, a). \tag{3.67}$$

Доведення. Добре відомо (див. напр. [11, Theorem 2.1]), що $x \succ y$ тоді і тільки тоді, коли існує двічі стохастична матриця A (тобто квадратна матриця з невід'ємними елементами, сума елементів кожного рядка і кожного

стовпця якої дорівнює 1), для якої $y = Ax$. Тоді матриця $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ є також двічі стохастичною $\begin{pmatrix} y \\ a \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix}$, а отже виконується (3.67). Лему доведено. $\square$

Вектор $s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ з $s_k \geq 0$, $k = 1, \ldots, n-1$, $s_n \geq M$, $\sum_{k=1}^n s_k = 1$ будемо називати допустимим.

Для допустимого вектора $s = (s_1, \ldots, s_n)$, покладемо

$$s^M := \left(\frac{s_1}{2}, \frac{s_1}{2}, \frac{s_2}{2}, \frac{s_2}{2}, \ldots, \frac{s_{n-1}}{2}, \frac{s_{n-1}}{2}, s_n - M, M\right)$$

і

$$s^m := \left(\frac{s_1}{2}, \frac{s_1}{2}, \frac{s_2}{2}, \frac{s_2}{2}, \ldots, \frac{s_{n-1}}{2}, \frac{s_{n-1}}{2}, s_n - m, m\right).$$

Наступні леми будемо використовувати при доведенні теореми 3.3.3.

Лема 3.3.5. *Нехай виконується нерівність* (3.65) *і задано допустимий вектор* $s \in \mathbb{R}^n$. *Покладемо*

$$L := \left(\underbrace{\frac{1-M}{2n-1}, \ldots, \frac{1-M}{2n-1}}_{2n-1}, M\right).$$

Тоді $s^M \succ L$. *Крім того, якщо*

$$s_n \geq M + m, \tag{3.68}$$

то $s^m \succ L$.

Доведення. Відмітимо, що для довільного вектора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$, $\alpha := \frac{1}{d}\sum_{k=1}^d \alpha_k$, маємо $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \succ (\alpha, \alpha, \ldots, \alpha) \in \mathbb{R}^d$. Тому з леми 3.3.4 отримаємо, що для довільного допустимого вектора s, $s^M \succ L$.

Якщо виконується нерівність (3.68), то $(s_n - m, m) \succ (s_n - M, M)$, і тому, враховуючи лему 3.3.4, отримаємо $s^m \succ s^M \succ L$. Лему доведено. $\square$

Лема 3.3.6. *Нехай виконується нерівність* (3.66) *і задано допустимий вектор* $s \in \mathbb{R}^n$. *Покладемо*

$$L := \left(\underbrace{\frac{1-m}{2n-1}, \ldots, \frac{1-m}{2n-1}}_{2n-1}, m \right).$$

Тоді $s^m \succ L$. *Якщо*

$$s_n \leq M + m, \tag{3.69}$$

то $s^M \succ L$.

Доведення цієї леми цілком аналогічне до доведення леми 3.3.5.

Лема 3.3.7. *Нехай не виконується жодна з нерівностей* (3.65) *і* (3.66), *і задано допустимий вектор* $s \in \mathbb{R}^n$. *Покладемо*

$$L := \left(\underbrace{\frac{1-m-M}{2n-2}, \ldots, \frac{1-m-M}{2n-2}}_{2n-2}, m, M \right).$$

Якщо виконується нерівність (3.68), *то* $s^m \succ L$. *Якщо виконується нерівність* (3.69), *то* $s^M \succ L$.

Доведення. З умов леми випливає, що $m < \frac{1-M-m}{2n-2} < M$. Нехай виконується нерівність (3.68). Тоді

$$\left(\frac{s_1}{2}, \frac{s_1}{2}, \frac{s_2}{2}, \frac{s_2}{2}, \ldots, \frac{s_{n-1}}{2}, \frac{s_{n-1}}{2}, s_n - m\right) \succ \left(\underbrace{\frac{1-s_n}{2n-2}, \ldots, \frac{1-s_n}{2n-2}}_{2n-1}, s_n - m \right)$$
$$\succ \left(\underbrace{\frac{1-m-M}{2n-2}, \ldots, \frac{1-m-M}{2n-2}}_{2n-2}, M \right),$$

де перше мажорування випливає з леми 3.3.4, а друге — з нерівностей $s_n - m \geq M > \frac{1-M-m}{2n-2}$. Твердження $s^m \succ L$ тепер випливає з леми 3.3.4.

Друге твердження леми можна довести аналогічно, використовуючи нерівності $s_n - M \leq m < \frac{1-M-m}{2n-2}$. Лему доведено. □

3.3.4.3 Доведення теореми 3.3.3

Доведення. Вектор з координатами $s_k := t_{k+1} - t_k$, $k = 1, \ldots, n-1$, $s_n := 1 - t_n$ є допустимим. Очевидно, що числа t_k, $k = 1, \ldots, n$, однозначно визначаються допустимим вектором $s \in \mathbb{R}^n$.

Якщо виконується нерівність (3.68), то $\left\|\tau - \frac{s_n}{2}\right\|_\infty = \frac{s_n}{2} - m$ і тому, згідно з теоремою 3.3.2,

$$E(\tau, \mathbf{t}) = 2\sum_{k=1}^{n-1} I\left(\frac{s_k}{2}\right) + I\left(m\right) + I\left(s_n - m\right).$$

У випадку виконання (3.69), $\left\|\tau - \frac{s_n}{2}\right\|_\infty = M - \frac{s_n}{2}$ і використовуючи теорему 3.3.2, отримаємо

$$E(\tau, \mathbf{t}) = 2\sum_{k=1}^{n-1} I\left(\frac{s_k}{2}\right) + I\left(M\right) + I\left(s_n - M\right).$$

Оцінки знизу для величини $E(\tau, \mathbf{t})$ випливають з лем 3.3.5, 3.3.6 і 3.3.7 і нерівності Карамати. Тому достатньо довести, що ці оцінки знизу досягаються.

Нехай виконується нерівність (3.65). Тоді $\frac{1-M}{2n-1} \leq m$ і отже для множини $s_k^* = \frac{2(1-M)}{2n-1}$, $k = 1, \ldots, n-1$ і $s_n^* = M + \frac{1-M}{2n-1}$, виконується нерівність (3.69). Тому

$$E(\tau, \mathbf{t}^*) = (2n-1)I\left(\frac{1-M}{2n-1}\right) + I(M),$$

де вектор $\mathbf{t}^*$ визначається числами s_k^*, $k = 1, \ldots, n$.

Якщо виконується нерівність (3.66), то $\frac{1-m}{2n-1} \geq M$ і тому для набору $s_k^* = \frac{2(1-m)}{2n-1}$, $k = 1, \ldots, n-1$ і $s_n^* = m + \frac{1-m}{2n-1}$, виконується нерівність (3.68). Звідси

$$E(\tau, \mathbf{t}^*) = (2n-1)I\left(\frac{1-m}{2n-1}\right) + I(m).$$

Нарешті, якщо жодна з нерівностей (3.65) і (3.66) не виконується, то для набору $s_k^* = \frac{(1-m-M)}{n-1}$, $k = 1, \ldots, n-1$ і $s_n^* = m + M$

$$E(\tau, \mathbf{t}^*) = (2n-2)I\left(\frac{1-m-M}{2(n-1)}\right) + I(m) + I(M).$$

Теорему доведено. □

Висновки до розділу 3

Даний розділ присвячено нерівностям типу Островського, тобто нерівностям, що оцінюють відхилення середнього значення функції від значення функції у деякій точці, та деяких застосуваннях цих нерівностей. Основними результатами цього розділу є:

1. Запропоновано загальний підхід до розв'язання деяких екстремальних задач теорії наближень, а також продемонстровані деякі застосування цього підходу до доведення нерівностей типу Островського.

2. Запропоноване нове означення поняття обмеженої варіації для багатовимірних множин і функцій багатьох змінних, досліджено деякі їх властивості, а також доведено точні нерівності типу Островського для таких функцій.

3. Доведено точні нерівності типу Островського для випадкових процесів певного класу. Отримана нерівність використовується для розв'язання задачі оптимального відновлення інтеграла, маючи інформацію про випадковий процес у випадкові моменти часу. Також досліджується задача оптимізації вибору інформаційного оператора.

Розділ 4

Нерівності типу Ландау–Колмогорова–Надя і пов'язані задачі

4.1 Нерівності типу Надя

Нерівності виду (1.85), що оцінюють норму проміжної похідної функції через норму самої функції і норму її старшої похідної, зазвичай називають нерівностями типу Колмогорова. У 1941 році Б. С. Надь [135] при всіх допустимих значеннях параметрів p, q, s довів точні нерівності виду

$$\|x\|_{L_q(\mathbb{R})} \leq K \cdot \|x\|^{\alpha}_{L_p(\mathbb{R})} \cdot \|x'\|^{1-\alpha}_{L_s(\mathbb{R})},$$

які оцінюють одну норму функції через деяку іншу норму функції і деяку норму похідної функції. У періодичному випадку нерівності типу Надя містяться у [41, 42, 98].

Результати декількох наступних підрозділів стосовно нерівностей у метричних просторах з мірою містяться у [30], стосовно просторів L_p — у [31] при $p = \infty$ і [32] при $p \in [1, \infty)$.

4.1.1 Означення і позначення

Трійку (X, ρ, μ), де (X, ρ) — це метричний простір з борелівською мірою μ ми будемо називати метричним простором з мірою. Ми будемо вважати, що X — це комутативний моноїд (тобто у множині X задано асоціативну комутативну бінарну операцію $+$, і існує елемент $\theta \in X$ такий, що $x + \theta = \theta + x = x$ для всіх $x \in X$) такий, що для кожної вимірної множини $Q \subset X$ і кожного $x \in X$ маємо

$$\mu(x + Q) = \mu(Q).$$

Будемо також вважати, що для всіх $x, y \in X$,

$$\rho(x + y, x) \leqslant \rho(y, \theta).$$

Через $B_h = B_h(\theta)$ будемо позначати відкриту кулю радіуса $h > 0$ з центром θ; ми припускаємо, що $0 < \mu(B_h) < \infty$ і $B_h \neq \{\theta\}$ для всіх $h > 0$.

Для $p \in [1, \infty)$ через $L_p(X)$ ми позначаємо простір вимірних функцій $f \colon Q \to \mathbb{R}$ таких, що функція $|f|^p$ є інтегровною на X з відповідною нормою; $L_\infty(X)$ позначає простір вимірних суттєво обмежених на X функцій. Через $L_{\mathrm{loc}}(X)$ ми позначаємо простір усіх функцій $f \colon X \to \mathbb{R}$, які є інтегровними на кожній відкритій кулі у X. У просторі $L_{\mathrm{loc}}(X)$ введемо сім'ю напівнорм

$$\rfloor f \lceil_h = \sup_{x \in X} \left| \int_{x + B_h} f(u) d\mu(u) \right|, \; h > 0,$$

і напівнорму

$$\rfloor f \lceil = \sup_{h > 0} \rfloor f \lceil_h.$$

Через $L_{\rfloor \cdot \lceil_h}(X)$ $(L_{\rfloor \cdot \lceil}(X))$ ми позначаємо сім'ю функцій $f \in L_{\mathrm{loc}}(X)$ зі скінченною напівнормою $\rfloor \cdot \lceil_h$ (відп. $\rfloor \cdot \lceil$). Легко бачити, що простір $L_1(X)$ міститься у кожній з цих сімей.

Для вимірної множини Q, $0 < \mu(Q) < \infty$, і інтегровної на Q функції f позначимо

$$\fint_Q f(y) d\mu(y) = \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f(y) d\mu(y).$$

Через $C_b(X)$ ми позначаємо простір неперервних функцій $f\colon X \to \mathbb{R}$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_{C_b(X)} = \sup_{x\in X} |f(x)|;$$

через $\mathcal{B}(X)$ ми будемо позначати простір обмежених функцій $f\colon X \to \mathbb{R}$ з нормою

$$\|f\|_{\mathcal{B}(X)} = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Всюди у цьому підрозділі ми припускаємо, що міра μ є такою, що кожна неперервна функція належить простору $L_{\mathrm{loc}}(X)$.

Для модуля неперервності ω через $H^\omega(X)$ ми позначаємо простір функцій $f\colon X \to \mathbb{R}$ для яких

$$\|f\|_{H^\omega(X)} := \sup_{x,y\in X, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{\omega(\rho(x,y))} < \infty.$$

Ми будемо розглядати випадок, коли X — це деякий відкритий опуклий конус C у просторі $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, метрика ρ визначається множиною K, тобто $\rho(x,y) = |x-y|_K$, а $\mu = \mathrm{meas}$ — це міра Лебега у просторі $\mathbb{R}^d$ (норми $|\cdot|_K$ і $|\cdot|_{K^\circ}$ введені у розділі 2, див. ст. 135). В цьому випадку ми будемо писати (C, K, meas) замість (X, ρ, μ), $B_h = hK \cap C$, і введені вище напівнорми $\rfloor \cdot \lceil_h$ і $\rfloor \cdot \lceil$ набувають такого виду:

$$\rfloor f \lceil_h = \sup_{x\in C} \left| \int\limits_{hK\cap C} f(x+u)du \right|, h > 0, \text{ і } \rfloor f \lceil = \sup_{h>0} \rfloor f \lceil_h.$$

Для локально інтегровної функції f через ∇f ми позначаємо градієнт функції f; часткові похідні розуміються в узагальненому сенсі.

4.1.2 Оператор усереднення

Для кожного $h > 0$ означимо оператор $S_h\colon L_{\rfloor\cdot\lceil_h}(X) \to \mathcal{B}(X)$ за формулою

$$S_h f(x) = \fint_{B_h} f(x+u)d\mu(u). \tag{4.1}$$

Легко бачити, що цей оператор є обмеженим і

$$\|S_h\|_{L_{\rfloor\cdot\lceil_h}(X)\to\mathcal{B}(X)} = \frac{1}{\mu(B_h)}. \tag{4.2}$$

У випадку, коли $(X, \rho, \mu) = (C, K, \mathrm{meas})$, в силу абсолютної неперервності інтеграла Лебега, образ $S_h f$ кожної локально інтегровної функції f, буде неперервною (а отже вимірною) обмеженою функцією. Тому в цьому випадку можна вважати, що оператор S_h діє у множину $L_\infty(C)$.

4.1.2.1 Оцінка відхилення у просторі H^ω

Нам знадобиться такий результат.

Лема 4.1.1. *Якщо $f \in H^\omega(X)$, то для всіх $h > 0$ маємо*

$$\|f(\cdot) - S_h f(\cdot)\|_{\mathcal{B}(X)} \leqslant \frac{\|f\|_{H^\omega(X)}}{\mu(B_h)} \int_{B_h} \omega(\rho(u, \theta)) d\mu(u). \tag{4.3}$$

Нерівність (4.3) *є точною і перетворюється на рівність для кожної функції*

$$f_\omega(x) = c \pm \omega(\rho(u, \theta)), c \in \mathbb{R}.$$

Доведення. Для кожного $x \in X$ маємо

$$\begin{aligned} |f(x) - S_h f(x)| &= \left| f(x) - \frac{1}{\mu(B_h)} \int_{B_h} f(x+u) d\mu(u) \right| \\ \leqslant \frac{1}{\mu(B_h)} \int_{B_h} |f(x) - f(x+u)| d\mu(u) &\leqslant \frac{\|f\|_{H^\omega(X)}}{\mu(B_h)} \int_{B_h} \omega(\rho(x+u, x)) d\mu(u) \\ &\leqslant \frac{\|f\|_{H^\omega(X)}}{\mu(B_h)} \int_{B_h} \omega(\rho(u, \theta)) d\mu(u) \end{aligned}$$

і нерівність (4.3) доведено. Для функції f_ω маємо

$$\|f_\omega\|_{H^\omega(X)} = 1. \tag{4.4}$$

Дійсно, для всіх $x, y \in X$,

$$\begin{aligned} |f_\omega(x) - f_\omega(y)| &= |\omega(\rho(x, \theta)) - \omega(\rho(y, \theta))| \\ &\leq \omega(|\rho(x, \theta) - \rho(y, \theta)|) \leq \omega(\rho(x, y)), \end{aligned}$$

тому $\|f_\omega\|_{H^\omega(X)} \leq 1$; оскільки існує $y \in B_h \setminus \{\theta\}$, то

$$\sup_{x \in X, x \neq \theta} |f_\omega(x) - f_\omega(\theta)| \geq |f_\omega(y) - f_\omega(\theta)| = \omega(\rho(y, \theta)),$$

звідки випливає $\|f_\omega\|_{H^\omega(X)} \geq 1$, і отже (4.4). Крім того,

$$\|f(\cdot) - S_h f(\cdot)\|_{\mathcal{B}(X)} \geqslant |f(\theta) - S_h f(\theta)| = \frac{1}{\mu(B_h)} \int_{B_h} \omega(\rho(u,\theta)) d\mu(u),$$

що разом з (4.4) показує, що нерівність (4.3) є точною. □

4.1.2.2 Оцінка відхилення у просторах $W^{1,p}(C)$

Для $h > 0$ означимо функцію $g_h \colon (0,h) \to \mathbb{R}$,

$$g_h(u) = \frac{1}{d \cdot \mu(K \cap C)} \left(\frac{1}{u^{d-1}} - \frac{u}{h^d} \right).$$

За допомогою леми 2.4.3 встановлюємо, що для всіх $p \in (d, \infty]$

$$\|g_h(|\cdot|_K)\|_{L_{p'}(hK \cap C)} = (d \cdot \mu(K \cap C))^{\frac{1}{p'}} \|g_h\|_{\mathcal{L}_{p'}(0,h)},$$

де

$$\|w\|_{\mathcal{L}_p(0,h)} = \left(\int_0^h t^{d-1} w^p(t) dt \right)^{1/p}.$$

Тому наступна лема є окремим випадком теореми 2.4.1.

Лема 4.1.2. *Нехай $p \in (d, \infty]$, $h > 0$ і $f \in W^{1,p}(hK \cap C)$. Тоді*

$$|f(\theta) - S_h f(\theta)| \leq \|g_h(|\cdot|_K)\|_{L_{p'}(hK \cap C)} \||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(hK \cap C)}.$$

Нерівність є точною. Вона перетворюється на рівність для функцій $\alpha \cdot f + \beta$, де $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ і

$$f(y) = \int_0^{|y|_K} g_h^{p'-1}(u) du, \; y \in hK \cap C.$$

Зауважимо, що величину $\|g_h(|\cdot|_K)\|_{L_{p'}(hK \cap C)}$ можна виписати у термінах B функції Ейлера.

Лема 4.1.3. *При $p \in (d, \infty]$ справедливі рівності*

$$\|g_h(|\cdot|_K)\|_{L_{p'}(hK \cap C)} = (d \cdot \mu(K \cap C))^{1/p'} \|g_h\|_{\mathcal{L}_{p'}(0,h)} = A \mu^{-\frac{1}{p}}(K \cap C) h^{1-\frac{d}{p}},$$

де

$$A = A(d,p) = d^{-1} B^{\frac{1}{p'}} \left(1 - \frac{(d-1)p'}{d}, p' + 1 \right). \tag{4.5}$$

Зокрема, при $p = \infty$,

$$\|g_h(|\cdot|_K)\|_{L_1(hK\cap C)} = \frac{d\cdot h}{d+1}.$$

Доведення. Перша рівність випливає з леми 2.4.3. Другу рівність можна отримати безпосередніми перетвореннями. Остання рівність випливає з формули (4.5) і властивостей B функції. □

4.1.3 Нерівності типу Надя у просторах $H^\omega(X)$

Нагадаємо, що для дійсного числа $\alpha \in \mathbb{R}$ ми використовуємо позначення $\alpha_+ := \max\{\alpha, 0\}$.

Теорема 4.1.1. *Якщо $h > 0$ і $f \in H^\omega(X) \cap L_{\rfloor\cdot\lceil_h}(X)$, то*

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathcal{B}(X)} &\leqslant \|f - S_h f\|_{\mathcal{B}(X)} + \|S_h\|_{L_{\rfloor\cdot\lceil_h}(X)\to\mathcal{B}(X)}\|f\|_{L_{\rfloor\cdot\lceil_h}(X)} \\ &\leqslant \frac{\|f\|_{H^\omega(X)}}{\mu(B_h)}\int_{B_h}\omega(\rho(u,\theta))d\mu(u) + \frac{\rfloor f\lceil_h}{\mu(B_h)}. \quad (4.6)\end{aligned}$$

Нерівність є точною і перетворюється на рівність для функції

$$f_{e,h}(x) = (\omega(h) - \omega(\rho(x,\theta)))_+. \quad (4.7)$$

Крім того, $f_{e,h} \in H^\omega(X) \cap L_{\rfloor\cdot\lceil}(X)$, $\rfloor f_{e,h}\lceil = \rfloor f_{e,h}\lceil_h$, і тому для кожного $h > 0$ нерівність

$$\|f\|_{\mathcal{B}(X)} \leqslant \frac{\|f\|_{H^\omega(X)}}{\mu(B_h)}\int_{B_h}\omega(\rho(u,\theta))d\mu(u) + \frac{\rfloor f\lceil}{\mu(B_h)} \quad (4.8)$$

виконується і є точною на класі $H^\omega(X) \cap L_{\rfloor\cdot\lceil}(X)$.

Зауваження 4.1.1. *У випадку, коли $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$, і простір (X, ρ, μ) задовольняє такій умові типу s-регулярності:*

$$\exists b > 0, \exists s > 0\colon \forall h > 0, \mu(B_h) \geqslant bh^s,$$

нерівність (4.8) може бути записаною у мультиплікативній формі. Ми не зупиняємося на деталях.

Доведення. Для кожного $x \in X$, використовуючи лему 4.1.1, означення оператора S_h, і рівність (4.2), отримаємо

$$\begin{aligned}|f(x)| &\leqslant |f(x) - S_h f(x)| + |S_h f(x)| \\ &\leqslant \|f(x) - S_h f(x)\|_{B(X)} + \|S_h\|_{L_{\rfloor\cdot\lceil_h}(X)\to B(X)} \rfloor f \lceil_h \\ &\leqslant \frac{\|f\|_{H^\omega(X)}}{\mu(B_h)} \int_{B_h} \omega(\rho(u,\theta)) d\mu(u) + \frac{\rfloor f \lceil_h}{\mu(B_h)},\end{aligned}$$

звідки випливає нерівність (4.6). Нерівність (4.8) є наслідком (4.6).

Для функції $f_{e,h}$ маємо $\|f_{e,h}\|_{\mathcal{B}(X)} = f_{e,h}(\theta) = \omega(h)$, $\|f_{e,h}\|_{H^\omega(X)} = 1$, і

$$\rfloor f_{e,h} \lceil_h = \omega(h)\mu(B_h) - \int_{B_h} \omega(\rho(u,\theta)) d\mu(u).$$

Дійсно, з одного боку

$$\rfloor f_{e,h} \lceil_h \geq \int_{\theta + B_h} f_{e,h}(u) d\mu(u) = \omega(h)\mu(B_h) - \int_{B_h} \omega(\rho(u,\theta)) d\mu(u),$$

а з іншого, для кожного $x \in X$, з монотонності функції ω, маємо

$$\begin{aligned}\int_{x+B_h} f_{e,h}(u) d\mu(u) &= \int_{(x+B_h)\cap B_h} f_{e,h}(u) d\mu(u) \\ &\leq \int_{B_h} f_{e,h}(u) d\mu(u) = \omega(h)\mu(B_h) - \int_{B_h} \omega(\rho(u,\theta)) d\mu(u).\end{aligned}$$

Безпосередні обчислення показують, що нерівність (4.6) перетворюється на рівність на функції $f_{e,h}$.

Нарешті, міркування, як і у обчисленні величини $\rfloor f_{e,h} \lceil_h$, показують, що $\rfloor f_{e,h} \lceil = \rfloor f_{e,h} \lceil_h$, і отже нерівність (4.8) є точною. □

Наслідок 4.1.1. *Якщо $h > 0$ і $f \in H^\omega(X) \cap L_1(X)$, то*

$$\|f(x)\|_{\mathcal{B}(X)} \leqslant \frac{\|f\|_{H^\omega(X)}}{\mu(B_h)} \int_{B_h} \omega(\rho(u,\theta)) d\mu(u) + \frac{1}{\mu(B_h)} \|f\|_{L_1(X)}.$$

Нерівність є точною. Вона перетворюється на рівність на функції $f_{e,h}$ означеній у (4.7).

Доведення. Оскільки $L_1(X) \subset L_{\rfloor\cdot\lceil_h}(X)$ і $\|f_{e,h}\|_{L_1(X)} = \rfloor f_{e,h} \lceil_h$, то твердження наслідку випливає з теореми 4.1.1. □

4.1.4 Нерівності типу Надя у просторах $W^{1,p}(C)$

Теорема 4.1.2. *Якщо $h > 0$, $p \in (d, \infty]$ і $f \in W^{1,p}(C) \cap L_{\rfloor\cdot\lceil_h}(C)$, то $f \in L_\infty(C)$ і справедлива така нерівність:*

$$\|f\|_{L_\infty(C)} \le \|f - S_h f\|_{L_\infty(C)} + \|S_h\|_{L_{\rfloor\cdot\lceil_h}(C)\to L_\infty(C)} \cdot \rfloor f \lceil_h$$
$$\leqslant \|g_h(|\cdot|_K)\|_{L_{p'}(hK\cap C)} \||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(C)} + \mu^{-1}(K\cap C)h^{-d} \rfloor f \lceil_h. \quad (4.9)$$

Нерівність (4.9) *точна. Вона перетворюється на рівність для функцій*

$$\alpha \cdot (f_{e,h} + \beta), \text{ де } \alpha > 0, \beta \ge -\frac{1}{2} f_{e,h}(0), \quad (4.10)$$

$$f_{e,h}(y) = \begin{cases} \int_{|y|_K}^h g_h^{p'-1}(u)du, & y \in hK \cap C, \\ 0, & y \in C \setminus hK. \end{cases} \quad (4.11)$$

Для кожної $f \in W^{1,p}(C) \cap L_{\rfloor\cdot\lceil}(C)$ справедлива мультиплікативна нерівність

$$\|f\|_{L_\infty(C)} \le a(d,p)\mu^{-\frac{\alpha}{d}}(K\cap C) \rfloor f \lceil^{1-\alpha} \||\nabla f|_{K^\circ}\|^\alpha_{L_p(C)}, \quad (4.12)$$

де

$$\alpha = \frac{pd}{p + (p-1)d}, a(d,p) = \left(\frac{(p-d)A(d,p)}{pd}\right)^\alpha \left(\frac{pd}{p-d} + 1\right), \quad (4.13)$$

і $A(d,p)$ означено у (4.5)*. Нерівність* (4.12) *є точною. Вона перетворюється на рівність для кожної функції $f_{e,h}$, $h > 0$.*

Зауваження 4.1.2. *Враховуючи лему 4.1.3, нерівність* (4.9) *можна подати у вигляді*

$$\|f\|_{L_\infty(C)} \leqslant A(d,p)\mu^{-\frac{1}{p}}(K\cap C)h^{1-\frac{d}{p}} \||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(C)} + \mu^{-1}(K\cap C)h^{-d} \rfloor f \lceil_h,$$

де $A(d,p)$ означено у (4.5)*. З твердження про точність нерівності* (4.12) *буде випливати, що її можна переписати у такому вигляді:*

$$\|f\|_{L_\infty(C)} \le \frac{\|f_{e,1}\|_{L_\infty(C)}}{\rfloor f_{e,1} \lceil^{1-\alpha} \||\nabla f_{e,1}|_{K^\circ}\|^\alpha_{L_p(C)}} \rfloor f \lceil^{1-\alpha} \||\nabla f|_{K^\circ}\|^\alpha_{L_p(C)}.$$

Доведення. Для кожного $x \in C$ маємо

$$|f(x)| \leq \left| f(x) - \fint_{hK\cap C} f(x+y)dy \right| + \left| \fint_{hK\cap C} f(x+y)dy \right|. \tag{4.14}$$

Використовуючи лему 4.1.2 для функції $F(y) = f(x+y)$, $y \in hK \cap C, x \in C$, і лему 4.1.3, отримаємо нерівність

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \fint_{hK\cap C} f(x+y)dy \right| &= \left| \fint_{hK\cap C} (F(\theta) - F(y))dy \right| \\ &\leq (d \cdot \mu(K\cap C))^{\frac{1}{p'}} \, \|g_h\|_{\mathcal{L}_{p'}(0,h)} \, \||\nabla F|_{K^\circ}\|_{L_p(hK\cap C)} \\ &= A\mu^{-\frac{1}{p}}(K\cap C)h^{1-\frac{d}{p}} \||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(x+hK\cap C)} \\ &\leqslant A\mu^{-\frac{1}{p}}(K\cap C)h^{1-\frac{d}{p}} \||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(C)}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Отже

$$\|f - S_h f\|_{L_\infty(C)} \leqslant A\mu^{-\frac{1}{p}}(K\cap C)h^{1-\frac{d}{p}} \||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(C)}. \tag{4.16}$$

Очевидно також, що

$$\|S_h\|_{L_{\rfloor\cdot\lceil_h}(C)\to L_\infty(C)} \leqslant \mu^{-1}(K\cap C)h^{-d}. \tag{4.17}$$

З нерівностей (4.16) та (4.17) та леми 4.1.3 випливає нерівність (4.9). Доведемо її точність. Оскільки функція g_h є невід'ємною, то

$$|x|_K \leq |y|_K \implies f_{e,h}(x) \geq f_{e,h}(y). \tag{4.18}$$

Крім того, функція $f_{e,h}$ є неперервною. Тому $\|f_{e,h}\|_{L_\infty(C)} = f(\theta)$ і, крім того, нерівність (4.14) перетворюється на рівність для $x = \theta$ і функції $f_{e,h}$. Крім того, згідно з лемою 4.1.2, перша з нерівностей у (4.15) при $x = \theta$ перетворюється на рівність для функції $f_{e,h}$. Відмітимо, що $f_{e,h}$ є нулем поза множиною $hK \cap C$, а тому

$$\||\nabla f_{e,h}|_{K^\circ}\|_{L_p(hK\cap C)} = \||\nabla f_{e,h}|_{K^\circ}\|_{L_p(C)},$$

тому і друга нерівність у (4.15) також перетворюється на рівність. Нарешті, враховуючи (4.18), маємо $\rfloor f_{e,h}\lceil_h = \int_{hK\cap C} f_{e,h}(y)dy$, що закінчує доведення точності нерівності (4.9).

З нерівності (4.9) випливає, що для всіх $f \in W^{1,p}(C) \cap L_{\rfloor\cdot\lceil}(C)$ і $h > 0$ справедлива нерівність

$$\|f\|_{L_\infty(C)} \leqslant A(d,p)\mu^{-\frac{1}{p}}(K \cap C)h^{1-\frac{d}{p}}\||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(C)} + \mu^{-1}(K \cap C)h^{-d}\rfloor f\lceil. \tag{4.19}$$

Крім того, при кожному $h > 0$, $\rfloor f_{e,h}\lceil_h = \rfloor f_{e,h}\lceil$, а тому нерівність (4.19) є точною і перетворюється на рівність для функції $f_{e,h}$. Якщо β задовольняє нерівності з (4.10), то при переході від функції $f_{e,h}$ до функції $f_{e,h} + \beta$ обидві частини нерівності (4.19) змінюються на β, а отже залишаються рівними. Нарешті, рівність зберігається при множенні екстремальної функції на додатну константу. Тому нерівність (4.19) перетворюється на рівність для кожної функції (4.10).

Мінімізуючи праву частину (4.19) по h, тобто підставляючи значення

$$h = \left(\frac{pd\mu^{-\frac{1}{p'}}(K \cap C)\rfloor f\lceil}{(p-d)A(d,p)\||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(C)}}\right)^{\frac{p'}{p'+d}},$$

отримаємо нерівність (4.12).

Доведемо тепер твердження про точність нерівності (4.12). Позначимо $q = \frac{1}{\alpha}$ і $q' = \frac{1}{1-\alpha}$. Для кожного $h > 0$ розглянемо числа

$$u = \left(qA(d,p)\mu^{-\frac{1}{p}}(K \cap C)h^{1-\frac{d}{p}}\||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(C)}\right)^{\frac{1}{q}}$$

і

$$v = \left(q'\mu^{-1}(K \cap C)h^{-d}\rfloor f\lceil\right)^{\frac{1}{q'}}.$$

Використовуючи нерівність (4.12), нерівність Юнга і безпосередні обчислення, отримаємо

$$\begin{aligned}\|f\|_{L_\infty(C)} &\leq a(d,p)\mu^{-\frac{\alpha}{d}}(K \cap C)\rfloor f\lceil^{1-\alpha}\||\nabla f|_{K^\circ}\|^{\alpha}_{L_p(C)} = uv \leq \frac{u^q}{q} + \frac{v^{q'}}{q'} \\ &= A(d,p)\mu^{-\frac{1}{p}}(K \cap C)h^{1-\frac{d}{p}}\||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(C)} + \mu^{-1}(K \cap C)h^{-d}\rfloor f\lceil.\end{aligned}$$

Оскільки нерівність (4.19) перетворюється на рівність для функції $f_{e,h}$, то і нерівність (4.12) також перетворюється на рівність для $f_{e,h}$, а отже є точною. □

Наслідок 4.1.2. *Якщо $h > 0$, $p > d$ і $f \in W^{1,p}(C) \cap L_1(C)$, то $f \in L_\infty(C)$ і справедливі такі нерівності:*

$$\|f\|_{L_\infty(C)} \leq \|g_h(|\cdot|_K)\|_{L_{p'}(hK\cap C)} \||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(C)} + \mu^{-1}(K\cap C)h^{-d}\|f\|_{L_1(C)},$$

$$\|f\|_{L_\infty(C)} \leq a(d,p)\mu^{-\frac{\alpha}{d}}(K\cap C)\|f\|^{1-\alpha}_{L_1(C)}\||\nabla f|_{K^\circ}\|^{\alpha}_{L_p(C)},$$

де α і $a(d,p)$ означені в (4.13). Обидві нерівності точні. Адитивна нерівність перетворюється на рівність для функції $f_{e,h}$, а мультиплікативна для кожної з функції $f_{e,h}$, $h > 0$.

Доведення. Оскільки $L_1(C) \subset L_{\rfloor\cdot\lceil}(C) \subset L_{\rfloor\cdot\lceil_h}(C)$, $\rfloor f\lceil_h \leq \rfloor f\lceil \leq \|f\|_{L_1(C)}$ для кожної функції $f \in L_1(C)$, і $\|f_{e,h}\|_{L_1(C)} = \rfloor f_{e,h}\lceil_h = \rfloor f_{e,h}\lceil$ для кожного $h > 0$, то твердження наслідку випливає з теореми 4.1.2. □

4.1.5 Нерівності типу Надя у метричних просторах

У цьому пункті ми розглядаємо метричні простори Соболєва з верхніми градієнтами, які означаються так. Нехай (X, ρ_X) і (Y, ρ_Y) — це метричні простори, як і у попередніх пунктах. Для модуля неперервності ω розглянемо простір $W^{1,\omega}(X,Y)$ усіх функцій $f\colon X \to Y$ з такою властивістю (пор. [2, Розділ 5] і [90, Розділ 10.2]). Існує невід'ємна функція $G = G_f \in L_\infty(X)$ і множина $N = N_f \subset X$ такі, що $\mu(N) = 0$ і

$$\rho_Y(f(x), f(y)) \leqslant (G(x) + G(y)) \cdot \omega(\rho_X(x,y)) \text{ для всіх } x, y \in X \setminus N. \quad (4.20)$$

Функцію G будемо називати верхнім градієнтом функції f.

Нехай (Y, ρ_Y) — це множина дійсних чисел зі звичайною метрикою. Техніка, що розроблена у попередніх пунктах, дозволяє отримати наступний результат; тому на нього можна в деякому сенсі дивитись як на наслідок теореми 4.1.1.

Теорема 4.1.3. *Нехай задано функцію $f \in W^{1,\omega}(X,\mathbb{R}) \cap L_{\rfloor\cdot\lceil_h}(X)$ і її верхній градієнт G_f. Для кожного $h > 0$ виконується така нерівність*

$$\|f\|_{L_\infty(X)} \leqslant \frac{2\|G_f\|_{L_\infty(X)}}{\mu(B_h)} \int_{B_h} \omega(\rho_X(\theta, u))d\mu(u) + \frac{\rfloor f\lceil_h}{\mu(B_h)}. \quad (4.21)$$

Нерівність (4.21) *є точною у тому сенсі, що існує функція* f *і її верхній градієнт* G_f*, для яких нерівність перетворюється на рівність.*

Доведення. Для майже всіх $x \in X$,

$$\begin{aligned}
|f(x)| &\le \left| f(x) - \frac{1}{\mu(B_h)} \int_{x+B_h} f(y) d\mu(y) \right| + \frac{1}{\mu(B_h)} \left| \int_{x+B_h} f(y) d\mu(y) \right| \\
&\le \frac{1}{\mu(B_h)} \int_{x+B_h} |f(x) - f(y)| \, d\mu(y) + \frac{\rfloor f \lceil_h}{\mu(B_h)} \\
&\le \frac{1}{\mu(B_h)} \int_{x+B_h} |G_f(x) + G_f(y)| \, \omega(\rho_X(x,y)) d\mu(y) + \frac{\rfloor f \lceil_h}{\mu(B_h)} \\
&\le \frac{2\|G_f\|_{L_\infty(X)}}{\mu(B_h)} \int_{B_h} \omega(\rho_X(\theta, u)) d\mu(u) + \frac{\rfloor f \lceil_h}{\mu(B_h)},
\end{aligned}$$

і нерівність (4.21) доведено. Нерівність перетворюється на рівність для функції $f = f_{e,h}$ з (4.7) і її верхнього градієнта $G \equiv \frac{1}{2}$. Дійсно, той факт, що нерівність (4.21) перетворюється на рівність для таких f і G може бути перевірено безпосередньо; той факт, що G є верхнім градієнтом для f (з $N = \emptyset$) можна довести так. Нехай $x, y \in X$, $u = \rho_X(x, \theta)$ і $v = \rho_X(y, \theta)$. Можемо вважати, що $u \le v$. Якщо $h \le u \le v$, то $f(x) = f(y) = 0$ і виконується нерівність (4.20). Якщо $0 \le u < h \le v$, то

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| = \omega(h) - \omega(u) \le \omega(h-u) \le \omega(v-u) \\
= \omega(\rho_X(y,\theta) - \rho_X(x,\theta)) \le \omega(\rho_X(x,y)).
\end{aligned}$$

Випадок $0 \le u \le v \le h$ можна розглянути аналогічно. □

Аналогічно до наслідку 4.1.1 можна довести такий результат.

Наслідок 4.1.3. *Нехай задано функцію* $f \in W^{1,\omega}(X, \mathbb{R}) \cap L_1(X)$ *і її верхній градієнт* G_f*. Для кожного* $h > 0$ *виконується нерівність*

$$\|f\|_{L_\infty(X)} \leqslant \frac{2\|G_f\|_{L_\infty(X)}}{\mu(B_h)} \int_{B_h} \omega(\rho_X(\theta, u)) d\mu(u) + \frac{\|f\|_{L_1(X)}}{\mu(B_h)}.$$

Нерівність є точною у тому сенсі, що існує функція f *і її верхній градієнт* G_f*, для яких нерівність перетворюється на рівність.*

4.2 Нерівності для узагальнених гіперсингулярних інтегральних операторів

Нехай знову (X, ρ, μ) є метричним простором з мірою для якого виконуються припущення з пункту 4.1.1, $P\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — це локально інтегровна функція така, що для деякого $h > 0$

$$\int_{X\setminus B_h} P(\rho(u,\theta))d\mu(u) < \infty.$$

Розглянемо оператор, який може розглядатись як гіперсингулярний інтегральний оператор:

$$\mathfrak{D}_P f(x) = \int_X (f(x) - f(x+u))P(\rho(u,\theta))d\mu(u).$$

Ми також розглядаємо усічений гіперсингулярний інтегральний оператор

$$\overline{\mathfrak{D}}_{P,h} f(x) = \int_{X\setminus B_h} (f(x) - f(x+u))P(\rho(u,\theta))d\mu(u).$$

Легко бачити, що

$$\|\overline{\mathfrak{D}}_{P,h}\|_{C_b(X)\to C_b(X)} = 2\int_{X\setminus B_h} P(\rho(u,\theta))d\mu(u).$$

Теорема 4.2.1. *Нехай задано функцію $f \in H^\omega(X) \cap C_b(X)$. Якщо для деякого $h > 0$*

$$\int_{B_h} \omega(\rho(u,\theta))P(\rho(u,\theta))d\mu(u) < \infty \ \text{ і } \int_{X\setminus B_h} P(\rho(u,\theta))d\mu(u) < \infty,$$

то

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{D}_P f\|_{\mathcal{B}(X)} &\leqslant \|\mathfrak{D}_P f - \overline{\mathfrak{D}}_{P,h} f\|_{\mathcal{B}(X)} + \|\overline{\mathfrak{D}}_{P,h}\|_{C_b(X)\to C_b(X)}\|f\|_{C_b(X)} \\ &\leqslant \|f\|_{H^\omega(X)} \int_{B_h} \omega(\rho(u,\theta))P(\rho(u,\theta))d\mu(u) \\ &\qquad + 2\|f\|_{C_b(X)} \int_{X\setminus B_h} P(\rho(u,\theta))d\mu(u). \quad (4.22)\end{aligned}$$

Нерівність є точною і перетворюється на рівність для функції

$$f_{e,\omega}(u) = \begin{cases} \omega(\rho(u,\theta)) - \frac{1}{2}\omega(h), & \rho(u,\theta) \leqslant h, \\ \frac{1}{2}\omega(h), & \rho(u,\theta) \geqslant h. \end{cases}$$

Доведення. Маємо

$$\|\mathfrak{D}_P f - \overline{\mathfrak{D}}_{P,h} f\|_{\mathcal{B}(X)} = \sup_{x\in X}\left|\int_{B_h}(f(x)-f(x+u))P(\rho(u,\theta))d\mu(u)\right|$$
$$\leq \sup_{x\in X}\|f\|_{H^\omega(X)}\int_{B_h}\omega(\rho(x,x+u))P(\rho(u,\theta))d\mu(u)$$
$$\leq \|f\|_{H^\omega(X)}\int_{B_h}\omega(\rho(u,\theta))P(\rho(u,\theta))d\mu(u).$$

Тоді

$$\|\mathfrak{D}_P f(x)\|_{\mathcal{B}(X)} \leqslant \|\mathfrak{D}_P f - \overline{\mathfrak{D}}_{P,h} f\|_{\mathcal{B}(X)} + \|\overline{\mathfrak{D}}_{P,h}\|_{C_b(X)\to C_b(X)}\|f\|_{C_b(X)}$$
$$\leqslant \|f\|_{H^\omega(X)}\int_{B_h}\omega(\rho(u,\theta))P(\rho(u,\theta))d\mu(u)$$
$$+ 2\|f\|_{C_b(X)}\int_{X\setminus B_h}P(\rho(u,\theta))d\mu(u),$$

і нерівність (4.22) доведено. Для функції $f_{e,\omega}$ маємо $\|f_{e,\omega}\|_{C_b(X)} = \frac{1}{2}\omega(h)$, $\|f_{e,\omega}\|_{H^\omega(X)} = 1$, і

$$\|\mathfrak{D}_P f_{e,\omega}\|_{\mathfrak{B}(X)} = -\mathfrak{D}_P f_{e,\omega}(\theta)$$
$$= \int_{B_h}\omega(\rho(u,\theta))P(\rho(u,\theta))d\mu(u) + \omega(h)\int_{X\setminus B_h}P(\rho(u,\theta))d\mu(u),$$

тому нерівність перетворюється на рівність для функції $f_{e,\omega}$. □

4.3 Нерівності типу Ландау–Колмогорова на класах зарядів

Позначимо через $\mathfrak{N}(X)$ множину зарядів ν, що визначені на сім'ї усіх μ–вимірних підмножин X, і які є абсолютно неперервними відносно міри μ, див. напр. [59, Розділ 5]. Згідно з теоремою Радона–Нікодима, для заряду $\nu \in \mathfrak{N}(X)$ існує інтегровна функція $f\colon X \to \mathbb{R}$ така, що для кожної вимірної множини $Q \subset X$

$$\nu(Q) = \int_Q f(x)d\mu(x). \tag{4.23}$$

Ця функція f називається похідною Радона–Нікодима заряду ν відносно міри μ і буде позначатись через $D_\mu\nu$. Множина $\mathfrak{N}(X)$ є лінійним простором відносно стандартного додавання і множення на дійсне число. Визначимо сім'ю напівнорм $\{\rceil\cdot\lfloor_h,\ h>0\}$ так:

$$\rceil\nu\lfloor_h = \|\nu(\cdot + B_h)\|_{B(X)},$$

і нехай $\rceil\nu\lfloor := \sup_{h>0}\rceil\nu\lfloor_h$. Зрозуміло, що якщо заряд ν і функція f пов'язані співвідношенням (4.23), то

$$\rceil\nu\lfloor_h = \rfloor f\lceil_h, h>0, \text{ і } \rceil\nu\lfloor = \rfloor f\lceil.$$

Для $h>0$ через $\mathfrak{N}_{\rceil\cdot\lfloor_h}(X)$ ($\mathfrak{N}_{\rceil\cdot\lfloor}(X)$) ми позначаємо множину зарядів $\nu\in\mathfrak{N}(X)$ зі скінченною напівнормою $\rceil\cdot\lfloor_h$ (відповідно $\rceil\cdot\lfloor$).

Теорема 4.3.1. *Якщо $h>0$ і заряд $\nu\in\mathfrak{N}_{\rceil\cdot\lfloor_h}(X)$ є таким, що $D_\mu\nu\in H^\omega(X)$, то*

$$\begin{aligned}\|D_\mu\nu\|_{\mathcal{B}(X)} &\leqslant \left\|D_\mu\nu - \overline{S}_h\nu\right\|_{\mathcal{B}(X)} + \|\overline{S}_h\|_{\mathfrak{N}_{\rceil\cdot\lfloor_h}(X)\to\mathcal{B}(X)}\rceil\nu\lfloor_h \\ &\leqslant \frac{\|D_\mu\nu\|_{H^\omega(X)}}{\mu(B_h)}\int_{B_h}\omega(\rho(u,\theta))d\mu(u) + \frac{\rceil\nu\lfloor_h}{\mu(B_h)},\end{aligned}$$

де оператор $\overline{S}_h\colon\mathfrak{N}_{\rceil\cdot\lfloor_h}(X)\to\mathcal{B}(X)$ визначається формулою

$$\overline{S}_h\nu(x) = \frac{\nu(x+B_h)}{\mu(B_h)}.$$

Нерівність є точною, і перетворюється на рівність для заряду $\nu_{e,h}$ для якого $D_\mu\nu_{e,h} = f_{e,h}$, де функція $f_{e,h}$ визначена у (4.7).

Доведення. Достатньо застосувати теорему 4.1.1 до функції $f = D_\mu\nu$ і помітити, що $\overline{S}_h\nu = S_h f$. □

Теорема 4.3.2. *Якщо $h>0$, заряд $\nu\in\mathfrak{N}_{\rceil\cdot\lfloor_h}(X)$ є таким, що $D_\mu\nu\in W^{1,\omega}(X,\mathbb{R})$, і G_ν є верхнім градієнтом функції $D_\mu\nu$, то*

$$\|D_\mu\nu\|_{L_\infty(X)} \leqslant \frac{2\|G_\nu\|_{L_\infty(X)}}{\mu(B_h)}\int_{B_h}\omega(\rho(\theta,u))d\mu(u) + \frac{\rfloor\nu\lceil_h}{\mu(B_h)}.$$

Нерівність є точною у тому сенсі, що існує заряд ν і верхній градієнт G_ν функції $D_\mu\nu$, для яких нерівність перетворюється на рівність.

Доведення. Твердження теореми випливає з теореми 4.1.3. □

У випадку, коли $(X, \rho, \mu) = (C, K, \mathrm{meas})$, ми отримуємо

$$\rceil \nu \lfloor_h = \sup_{x \in C} |\nu(x + hK)|,$$

і, крім того, функція $x \mapsto \nu(x + hK)$ є неперервною.

Теорема 4.3.3. *Якщо $h > 0$ і заряд $\nu \in \mathfrak{N}_{\rceil \cdot \lfloor_h}(C)$ є таким, що $D_\mu \nu \in W^{1,p}(C)$, то*

$$\begin{aligned} \|D_\mu \nu\|_{L_\infty(C)} &\leqslant \left\|D_\mu \nu - \overline{S}_h \nu\right\|_{L_\infty(C)} + \|\overline{S}_h\|_{\mathfrak{N}_{\rceil \cdot \lfloor_h}(C) \to L_\infty(C)} \rceil \nu \lfloor_h \\ &\leq A \mu^{-\frac{1}{p}}(K \cap C) h^{1-\frac{d}{p}} \| |\nabla D_\mu \nu|_{K^\circ} \|_{L_p(C)} + \mu^{-1}(K \cap C) h^{-d} \rceil \nu \lfloor_h, \quad (4.24) \end{aligned}$$

де величина $A(d, p)$ означена у (4.5), *і*

$$\overline{S}_h \nu(x) = \frac{\nu(x + hK \cap C)}{h^d \mu(K \cap C)}.$$

Нерівність (4.24) *є точною. Вона перетворюється на рівність для заряду $\nu_{e,h}$, що визначається рівністю $D_\mu \nu_{e,h} = f_{e,h}$, де функція $f_{e,h}$ означена у* (4.11). *Якщо заряд $\nu \in \mathfrak{N}_{\rceil \cdot \lfloor}(C)$ є таким, що $D_\mu \nu \in W^{1,p}(C)$, то справедлива мультиплікативна нерівність*

$$\|D_\mu \nu\|_{L_\infty(C)} \leq a(d, p) \mu^{-\frac{\alpha}{d}}(K \cap C) \rfloor \nu \lceil^{1-\alpha} \| |\nabla D_\mu \nu|_{K^\circ} \|^\alpha_{L_p(C)}, \quad (4.25)$$

де α і $a(d, p)$ означені у (4.13). *Нерівність* (4.25) *є точною. Вона перетворюється на рівність для кожного заряду ν такого, що $D_\mu \nu = f_{e,h}$, $h > 0$.*

Доведення. Достатньо застосувати теорему 4.1.2 до функції $f = D_\mu \nu$ і врахувати, що $\overline{S}_h \nu = S_h f$. □

4.4 Нерівності для мішаної похідної функції

4.4.1 Припущення і позначення

У цьому підрозділі $(X, \rho, \mu) = (C, K, \mathrm{meas})$, причому $C = \mathbb{R}^d_{m,+} := \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^{d-m}, 0 \leqslant m \leqslant d$, $K = (-1, 1)^d$ так, що $|x|_K = |x|_\infty = \max_{i=1,\dots,d} |x_i|$. Тоді

$B_h = hK \cap C = (0,h)^m \times (-h,h)^{d-m}$ і $\mu(hK \cap C) = 2^{d-m}h^d$.

Нехай $\mathbf{I} = (1,\dots,1) \in \mathbb{R}^d$. Для локально інтегровної функції $f\colon X \to \mathbb{R}$ покладемо

$$\partial_{\mathbf{I}} f = \frac{\partial^d f}{\partial x_1 \dots \partial x_d},$$

де похідні розуміються в узагальненому сенсі.

Нехай $\{e_i\}_{i=1}^d$ — стандартний базис у $\mathbb{R}^d$ і для $h > 0$

$$\Delta_{i,h}^+ f(x) := f(x + he_i) - f(x), \text{ і } \Delta_{i,h} f(x) := f(x + he_i) - f(x - he_i).$$

Відповідно до теореми Фубіні, для майже всіх $x \in \mathbb{R}^d_{m,+}$ маємо

$$\int_{x+hK\cap C} \partial_{\mathbf{I}} f(u)du = (\Delta_{1,h}^+ \circ \dots \circ \Delta_{m,h}^+ \circ \Delta_{m+1,h} \circ \dots \circ \Delta_{d,h}) f(x). \tag{4.26}$$

Означимо оператор $\mathfrak{S}_{h,m}\colon L_\infty(C) \to L_\infty(C)$, покладаючи

$$\mathfrak{S}_{h,m} f(x) = \frac{1}{2^{d-m}h^d}\left(\Delta_{1,h}^+ \circ \dots \circ \Delta_{m,h}^+ \circ \Delta_{m+1,h} \circ \dots \circ \Delta_{d,h}\right) f(x).$$

Легко бачити, що

$$\|\mathfrak{S}_{h,m}\|_{L_\infty(C)\to L_\infty(C)} = 2^m h^{-d}, \tag{4.27}$$

і для будь-якої функції $f \in L_\infty(\mathbb{R}^d_{m,+})$ такої, що $\partial_{\mathbf{I}} f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d_{m,+})$, матимемо

$$\mathfrak{S}_{h,m} f(x) = \fint_{x+hK\cap C} \partial_{\mathbf{I}} f(u)du = \fint_{hK\cap C} \partial_{\mathbf{I}} f(x+u)du = S_h \partial_{\mathbf{I}} f(x), \tag{4.28}$$

де оператор S_h визначено співвідношенням (4.1).

4.4.2 Випадок класу $H^\omega(\mathbb{R}^d_{m,+})$

Теорема 4.4.1. *Якщо $h > 0$ і функція $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d_{m,+})$ є такою, що $\partial_{\mathbf{I}} f \in H^\omega(\mathbb{R}^d_{m,+})$, то*

$$\begin{aligned}\|\partial_{\mathbf{I}} f\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d_{m,+})} &\leqslant \|\partial_{\mathbf{I}} f - \mathfrak{S}_h f\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d_{m,+})} + \|\mathfrak{S}_h\|\|f\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d_{m,+})} \\ &\leqslant \frac{\|\partial_{\mathbf{I}} f\|_{H^\omega(\mathbb{R}^d_{m,+})}}{2^{d-m}h^d}\int_{B_h} \omega(|u|_\infty)du + \frac{2^m}{h^d}\|f\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d_{m,+})}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

У випадку, коли $\omega(t) = t^\alpha$, $\alpha \in (0,1]$, справедлива така мультиплікативна нерівність:

$$\|\partial_{\mathbf{I}} f\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d_{m,+})} \le 2^{\frac{m\alpha}{d+\alpha}} \left(\frac{d+\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{d+\alpha}} \cdot \|f\|^{\frac{\alpha}{d+\alpha}}_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d_{m,+})} \cdot \|\partial_{\mathbf{I}} f\|^{\frac{d}{d+\alpha}}_{H^\omega(\mathbb{R}^d_{m,+})}. \tag{4.30}$$

Для $m = 0$ і $m = 1$ ці нерівності є точними.

Доведення. Застосовуючи нерівність (4.6) до $\partial_{\mathbf{I}} f$, і беручи до уваги той факт, що $\mu(B_h) = 2^{d-m} h^d$, отримаємо

$$\begin{aligned}\|\partial_{\mathbf{I}} f\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d_{m,+})} &\leqslant \|\partial_{\mathbf{I}} f - \mathfrak{S}_h f\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d_{m,+})} + \|\mathfrak{S}_h\| \|f\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d_{m,+})} \\ &\leqslant \frac{\|\partial_{\mathbf{I}} f\|_{H^\omega(\mathbb{R}^d_{m,+})}}{2^{d-m} h^d} \int_{B_h} \omega(|u|_\infty) du + \frac{1}{2^{d-m} h^d} \sup_{x \in \mathbb{R}^d_{m,+}} \left| \int_{x+B_h} \partial_{\mathbf{I}} f(u) du \right|.\end{aligned}$$

З представлення (4.26) отримуємо

$$\frac{1}{2^{d-m} h^d} \sup_{x \in \mathbb{R}^d_{m,+}} \left| \int_{x+B_h} \partial_{\mathbf{I}} f(u) du \right| \leqslant \frac{2^d}{2^{d-m} h^d} \|f\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d_{m,+})} = \frac{2^m}{h^d} \|f\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d_{m,+})},$$

звідки випливає нерівність (4.29).

У випадку $\omega(t) = t^\alpha$, використовуючи теорему про пошарове представлення, див. напр. [114, Теорема 1.13], і міркування симетрії, отримаємо

$$\begin{aligned}\int_{B_h} \omega(|u|_\infty) du &= 2^{d-m} \int_{(0,h)^d} |u|^\alpha_\infty du \\ &= 2^{d-m} \int_0^\infty \mu\left\{u \in (0,h)^d \colon |u|^\alpha_\infty > t\right\} dt = 2^{d-m} \int_0^{h^\alpha} \left(h^d - t^{\frac{d}{\alpha}}\right) dt \\ &= 2^{d-m} h^{d+\alpha} \left(1 - \frac{\alpha}{d+\alpha}\right) = \frac{d \cdot 2^{d-m}}{d+\alpha} h^{d+\alpha}.\end{aligned}$$

Таким чином, права частина (4.29) стає

$$\frac{d}{d+\alpha} \|\partial_{\mathbf{I}} f\|_{H^\omega(\mathbb{R}^d_{m,+})} h^\alpha + \frac{2^m}{h^d} \|f\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d_{m,+})}.$$

Мінімізуючи цей вираз по h, тобто обираючи

$$h = 2^{\frac{m}{d+\alpha}} \left(\frac{d+\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\|f\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d_{m,+})}}{\|\partial_{\mathbf{I}} f\|_{H^\omega(\mathbb{R}^d_{m,+})}}\right)^{\frac{1}{d+\alpha}},$$

прийдемо до правої частини у (4.30).

Далі ми доводимо точність нерівності (4.29) у випадку $m = 0$. Розглянемо функцію

$$F_{e,h}(x) = \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_d} f_{e,h}(u)du,$$

де $f_{e,h}$ означена у (4.7). Тоді $\partial_{\mathbf{I}} F_{e,h} = f_{e,h}$, і тому

$$\|\partial_{\mathbf{I}} F_{e,h}\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)} = \omega(h) \text{ і } \|\partial_{\mathbf{I}} F_{e,h}\|_{H^\omega(\mathbb{R}^d)} = 1.$$

Крім того,

$$\|F_{e,h}\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)} = \int_0^h \dots \int_0^h (\omega(h) - \omega(|u|_\infty))du = h^d\omega(h) - \int_0^h \dots \int_0^h \omega(|u|_\infty)du$$

і в силу міркувань симетрії,

$$\int_{B_h} \omega(|u|_\infty)du = 2^d \int_0^h \dots \int_0^h \omega\left(|u|_\infty\right) du.$$

Безпосередні обчислення тепер показують, що нерівності (4.29) і (4.30) стають рівностями для функцій $F_{e,h}$.

Нарешті, ми покажемо точність нерівності (4.29) у випадку $m = 1$. У цьому випадку $B_h = (0, h) \times (-h, h)^{d-1}$. Існує $0 < a < h$ таке, що

$$\int_{\{x \in B_h \colon x_1 < a\}} (\omega(h) - \omega(|x|_\infty))dx = \int_{\{x \in B_h \colon x_1 > a\}} (\omega(h) - \omega(|x|_\infty))dx$$
$$= \frac{1}{2} \int_{B_h} (\omega(h) - \omega(|x|_\infty))dx.$$

Множина B_h складається з 2^{d-1} рівних кубів зі стороною h; $\theta = \theta_d$ є однією з вершин кожного з цих кубів. Гіперплощина $x_1 = a$ розбиває ці куби на дві частини: $c_1^-, \dots, c_{2^{d-1}}^-$, які містять θ серед своїх вершин, і $c_1^+, \dots, c_{2^{d-1}}^+$, що містять (a, θ_{d-1}) серед своїх вершин.

Легко бачити, що

$$\int_{\{x \in B_h \colon x_1 < a\}} (\omega(h) - \omega(|x|_\infty))dx = \sum_{i=1}^{2^{d-1}} \int_{c_i^-} (\omega(h) - \omega(|x|_\infty))dx$$

і

$$\int_{\{x \in B_h \colon x_1 > a\}} (\omega(h) - \omega(|x|_\infty))dx = \sum_{i=1}^{2^{d-1}} \int_{c_i^+} (\omega(h) - \omega(|x|_\infty))dx.$$

З міркувань симетрії випливає, що кожен з 2^{d-1} доданків у правих частинах цих рівностей є рівними. Тому для всіх $i, j = 1, \dots, 2^{d-1}$

$$\int\limits_{c_i^-} (\omega(h) - \omega(|x|_\infty))dx = \int\limits_{c_j^+} (\omega(h) - \omega(|x|_\infty))dx = \frac{1}{2^d} \int\limits_{B_h} (\omega(h) - \omega(|x|_\infty))dx.$$

Екстремальну функцію у цьому випадку визначимо так.

$$G_{e,h}(x) = \int_a^{x_1} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_d} \partial_{\mathbf{I}} f_{e,h}(u) du_d \dots du_1,$$

де $f_{e,h}$ визначена у (4.7). Для цієї функції

$$\|G_{e,h}\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d_{1,+})} = \frac{1}{2^d} \int_{B_h} (\omega(h) - \omega(|x|_\infty))dx = \frac{h^d}{2}\omega(h) - \frac{1}{2^d} \int_{B_h} \omega(|x|_\infty)dx,$$

$$\|\partial_{\mathbf{I}} G_{e,h}\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d_{1,+})} = \omega(h), \text{ і } \|\partial_{\mathbf{I}} G_{e,h}\|_{H^\omega(\mathbb{R}^d_{1,+})} = 1.$$

Безпосередні обчислення тепер показують, що нерівності (4.29) і (4.30) з $m = 1$ перетворюються на рівності для функції $G_{e,h}$. □

Зауваження 4.4.1. *Не зрозуміло, чи буде нерівність* (4.29) *точною для* $m = 2, \dots, d$, *навіть у випадку* $d = 2$ *і* $\omega(t) = t$.

4.4.3 Випадок класу $W^{1,p}(\mathbb{R}^d_{m,+})$

Теорема 4.4.2. *Для* $h > 0$ *і функції* $f \in L_\infty(\mathbb{R}^d_{m,+})$ *такої, що* $\partial_{\mathbf{I}} f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d_{m,+})$, *справедлива нерівність*

$$\begin{aligned} \|\partial_{\mathbf{I}} f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d_{m,+})} &\leqslant \|\partial_{\mathbf{I}} f - \mathfrak{S}_{h,m} f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d_{m,+})} + \|\mathfrak{S}_{h,m}\| \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d_{m,+})} \\ &\leq A(d,p) h^{1-\frac{d}{p}} 2^{\frac{m-d}{p}} \||\nabla \partial_{\mathbf{I}} f|_{K^\circ}\|_{L_p(\mathbb{R}^d_{m,+})} + 2^m h^{-d} \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d_{m,+})}, \end{aligned} \tag{4.31}$$

де $A(d,p)$ *означено у* (4.5). *Нерівність* (4.31) *можна переписати у мультиплікативній формі:*

$$\|\partial_{\mathbf{I}} f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d_{m,+})} \leq a(d,p) 2^{\alpha\left(\frac{m}{d} - \frac{d}{p}\right)} \|f\|^{1-\alpha}_{L_\infty(\mathbb{R}^d_{m,+})} \||\nabla \partial_{\mathbf{I}} f|_{K^\circ}\|^{\alpha}_{L_p(\mathbb{R}^d_{m,+})}, \tag{4.32}$$

де α *і* $a(d,p)$ *означені в* (4.13). *Для* $m = 0$ *і* $m = 1$ *нерівності* (4.31) *та* (4.32) *точні.*

Доведення. Враховуючи, що $\mu(K \cap C) = 2^{d-m}$, і співвідношення (4.16), (4.27) та (4.28), отримаємо

$$\begin{aligned}
\|\partial_{\mathbf{I}} f\|_{L_\infty(C)} &\le \|\partial_{\mathbf{I}} f - \mathfrak{S}_{h,m} f\|_{L_\infty(C)} + \|\mathfrak{S}_{h,m}\|_{L_\infty(C)\to L_\infty(C)} \|f\|_{L_\infty(C)} \\
&= \|\partial_{\mathbf{I}} f - S_h \partial_{\mathbf{I}} f\|_{L_\infty(C)} + 2^m h^{-d} \|f\|_{L_\infty(C)} \\
&\le A(d,p) \cdot \mu^{-\frac{1}{p}}(K \cap C) h^{1-\frac{d}{p}} \||\nabla \partial_{\mathbf{I}} f|_{K^\circ}\|_{L_p(C)} + 2^m h^{-d} \|f\|_{L_\infty(C)} \\
&= A(d,p) \cdot 2^{\frac{m-d}{p}} h^{1-\frac{d}{p}} \||\nabla \partial_{\mathbf{I}} f|_{K^\circ}\|_{L_p(C)} + 2^m h^{-d} \|f\|_{L_\infty(C)}
\end{aligned}$$

і нерівність (4.31) доведено. Використовуючи нерівність (4.12) для функції $\partial_{\mathbf{I}} f$ а також рівність (4.26), отримаємо

$$\begin{aligned}
\|\partial_{\mathbf{I}} f\|_{L_\infty(C)} &\le a(d,p) \mu^{-\frac{\alpha}{d}}(K \cap C) \rfloor \partial_{\mathbf{I}} f \lceil^{1-\alpha} \||\nabla \partial_{\mathbf{I}} f|_{K^\circ}\|^{\alpha}_{L_p(C)} \\
&\le a(d,p) \mu^{-\frac{\alpha}{d}}(K \cap C) \left(2^d \|f\|_{L_\infty(C)}\right)^{1-\alpha} \||\nabla \partial_{\mathbf{I}} f|_{K^\circ}\|^{\alpha}_{L_p(C)} \\
&= a(d,p) 2^{\frac{(m-d)\alpha}{d} + d(1-\alpha)} \|f\|^{1-\alpha}_{L_\infty(C)} \||\nabla \partial_{\mathbf{I}} f|_{K^\circ}\|^{\alpha}_{L_p(C)} \\
&= a(d,p) 2^{\alpha\left(\frac{m}{d} - \frac{d}{p}\right)} \|f\|^{1-\alpha}_{L_\infty(C)} \||\nabla \partial_{\mathbf{I}} f|_{K^\circ}\|^{\alpha}_{L_p(C)},
\end{aligned}$$

і нерівність (4.32) доведено.

Доведемо точність нерівностей (4.31) і (4.32) при $m = 0$. Розглянемо функцію

$$F_{e,h}(x) = \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_d} f_{e,h}(u) du,$$

де функція $f_{e,h}$ визначена у (4.11). Для цієї функції матимемо $\partial_{\mathbf{I}} F_{e,h} = f_{e,h}$, $|\nabla \partial_{\mathbf{I}} F_{e,h}(\cdot)|_{K^\circ} = |\nabla f_{e,h}(\cdot)|_{K^\circ}$ і в силу міркувань симетрії

$$2^d \|F_{e,h}\|_{L_\infty(C)} = 2^d \int_{(0,h)^d} f_{e,h}(u) du = \int_{(-h,h)^d} f_{e,h}(u) du = \rfloor f_{e,h} \lceil_h = \rfloor f_{e,h} \lceil. \tag{4.33}$$

Оскільки для функції $f_{e,h}$ нерівності (4.9) та (4.12) стають рівністю, то, враховуючи (4.33), отримаємо точність нерівностей (4.31) і (4.32) при $m = 0$.

Нарешті, доведемо точність нерівностей (4.31) і (4.32) у випадку $m = 1$. У цьому випадку $hK \cap C = (0,h) \times (-h,h)^{d-1}$ і $\mu(K \cap C) = 2^{d-1}$. Існує

число $a \in (0,h)$ таке, що

$$\int_{(0,a)\times(-h,h)^{d-1}} f_{e,h}(u)du = \int_{(a,h)\times(-h,h)^{d-1}} f_{e,h}(u)du. \tag{4.34}$$

Розглянемо функцію

$$G_{e,h}(x) = \int_a^{x_1}\int_0^{x_2}\dots\int_0^{x_d} f_{e,h}(u)du.$$

Для неї матимемо $\partial_{\mathbf{I}} G_{e,h} = f_{e,h}$, $|\nabla\partial_{\mathbf{I}} G_{e,h}(\cdot)|_{K^\circ} = |\nabla f_{e,h}(\cdot)|_{K^\circ}$.

Гіперплощини $x_1 = a$ та $x_j = 0$, $j = 2,\dots,d$, розбивають множину $(0,h)\times(-h,h)^{d-1}$ на 2^d паралелепіпедів $\Pi_1,\dots,\Pi_{2^d}$, причому в силу симетрії графіка функції $f_{e,h}$ відносно координатних гіперплощин і рівності (4.34), маємо

$$\int_{\Pi_i} f_{e,h}(u)du = \frac{1}{2^d}\int_{(0,h)\times(-h,h)^{d-1}} f_{e,h}(u)du, i = 1,\dots,2^d,$$

а тому

$$\|G_{e,h}\|_{L_\infty(C)} = \frac{1}{2^d}\int_{(0,h)\times(-h,h)^{d-1}} f_{e,h}(u)du = \frac{1}{2^d}\rfloor f_{e,h}\lceil_h = \frac{1}{2^d}\rfloor f_{e,h}\lceil.$$

З урахуванням цієї рівності і того, що нерівності (4.9) та (4.12) перетворюються на рівність для функції $f_{e,h}$, отримуємо точність нерівностей (4.31) і (4.32) при $m = 1$. □

4.5 Задача Стєчкіна і пов'язані екстремальні задачі

4.5.1 Загальні факти

У Вступі вже зазначалось, що нерівності для похідних тісно пов'язані з задачею Стєчкіна про наближення операторів обмеженими, і деякими іншими екстремальними задачами. В цьому підрозділі ми наведемо декілька результатів стосовно розв'язків цих екстремальних задач, які можна отримати з нерівностей, доведених раніше у цьому підрозділі. Ми ще раз

наведемо формулювання задач і загальних результатів щодо їх зв'язку у зручному для застосування у цьому підрозділі вигляді.

Нехай задано два лінійних простори X і Y, $\|\cdot\|_X$ — це напівнорма у просторі X, і $\|\cdot\|_Y$ — це норма у просторі Y. Лінійний оператор $A\colon X \to Y$ називається обмеженим, якщо

$$\|A\| = \|A\|_{X\to Y} := \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Ax\|_Y < \infty.$$

В іншому випадку оператор A називається необмеженим. Через $\mathcal{L}(X,Y)$ позначимо простір усіх лінійних обмежених операторів $S\colon X \to Y$.

Нехай задано $A\colon X \to Y$ (не обов'язково лінійний) оператор з областю визначення $D_A \subset X$ і деякий клас елементів $\mathfrak{M} \subset D_A$. Задача знаходження модуля неперервності оператора A на класі $\mathfrak{M}$, тобто величини

$$\Omega(\delta) = \Omega(A, \mathfrak{M}; \delta) := \sup\{\|Ax\|_Y : x \in \mathfrak{M},\ \|x\|_X \le \delta\},\ \delta \ge 0, \tag{4.35}$$

— це абстрактна версія задачі про нерівності типу Ландау–Колмогорова. Для оператора A і оператора $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ покладемо

$$U(A, S; \mathfrak{M}) := \sup\{\|Ax - Sx\|_Y \colon x \in \mathfrak{M}\}.$$

Задача Стєчкіна про наближення взагалі кажучи необмеженого оператора A за допомогою лінійних обмежених операторів формулюється так. Для заданого числа $N > 0$ знайти величину

$$E_N(A, \mathfrak{M}) := \inf\left\{U(A, S; \mathfrak{M})\colon S \in \mathcal{L}(X,Y), \|S\| \leqslant N\right\}, \tag{4.36}$$

і оператор S на якому досягається інфімум, якщо такий оператор існує. Задача Стєчкіна, в свою чергу, тісно пов'язана з нерівностями типу Ландау–Колмогорова. Наступна теорема описує цей зв'язок, див. [132].

Теорема 4.5.1. *Для кожного $x \in \mathfrak{M}$ і довільного $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ справедлива нерівність*

$$\|Ax\| \leqslant \|Ax - Sx\| + \|S\|\|x\| \leqslant U(A, S; \mathfrak{M}) + \|S\| \cdot \|x\|, \tag{4.37}$$

і, отже, для всіх $x \in \mathfrak{M}$ *і* $N > 0$,

$$\|Ax\| \leqslant E_N(A, \mathfrak{M}) + N\|x\|.$$

Якщо додатково існує оператор $\overline{S} \in \mathcal{L}(X, Y)$ *і елемент* $\overline{x} \in \mathfrak{M}$ *такі, що обидві нерівності у* (4.37) *перетворюються на рівності, то*

$$\Omega(\|\overline{x}\|_X) = \|A\overline{x}\|_Y \text{ і } E_{\|\overline{S}\|}(A, \mathfrak{M}) = U(A, \overline{S}; \mathfrak{M}) = \|A\overline{x}\| - \|\overline{S}\| \, \|\overline{x}\|.$$

Тому елемент $\overline{x}$ *є екстремальним у задачі* (4.35), *а оператор* $\overline{S}$ *є оптимальним у задачі* (4.36).

Зауваження 4.5.1. *У статті [132] припускається, що* X *і* Y *є банаховими просторами. В той же час, як неважко бачити, повнота, і навіть наявність норми у просторі* X *не є необхідними. Достатньо існування напівнорми у* X. *Повнота* Y *також не є істотною.*

Нехай $\mathfrak{M} \subset D(A)$ і $S \in \mathcal{L}(X, Y)$. Для $\delta \geq 0$ величина

$$U_\delta(A, S, \mathfrak{M}) := \sup\{\|Ax - S\eta\|_Y : x \in \mathfrak{M}, \eta \in X, \|x - \eta\|_X \leqslant \delta\},$$

називається відхиленням оператора $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ від оператора A на класі $\mathfrak{M}$, у якому елементи відомі з похибкою δ. Задача оптимального відновлення оператора A за допомогою лінійних операторів на цьому класі $\mathfrak{M}$ полягає у знаходженні величини

$$\mathcal{E}_\delta(A, \mathfrak{M}) := \inf_{S \in \mathcal{L}(X,Y)} U_\delta(A, S, \mathfrak{M})$$

і оператора S, на якому інфімум у правій частині досягається, якщо такий оператор існує.

Зв'язок між цією задачею і нерівностями типу Ландау–Колмогорова, а також задачею Стєчкіна дається у наступні теоремі, див. напр. [9, Теорема 2.1].

Теорема 4.5.2. *Якщо* $\mathfrak{M}$ *є опуклою центрально-симетричною множиною і* A *є однорідним оператором, то для всіх* $\delta > 0$

$$\Omega(A, \mathfrak{M}; \delta) \leqslant \mathcal{E}_\delta(A, \mathfrak{M}) \leqslant \inf_{N>0}\{E_N(A, \mathfrak{M}) + N\delta\}.$$

Якщо додатково відомо, що існує елемент $\overline{x} \in \mathfrak{M}$ і оператор $\overline{S}$ для якого обидві нерівності у (4.37) перетворюються на рівність, то

$$\mathcal{E}_{\|\overline{x}\|}(A, \mathfrak{M}) = \Omega(A, \mathfrak{M}; \|\overline{x}\|) = \|A\overline{x}\|.$$

4.5.2 Розв'язання екстремальних задач

Теорема 4.5.3. *Для $p \in (d, \infty]$ покладемо $X = W^{1,p}(C) \cap L_{\rfloor \cdot \lceil}(C)$, нехай $\mathfrak{M}$ позначає сім'ю функцій $f \in X$ таких, що $\||\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(C)} \leqslant 1$, і $J\colon X \to L_\infty(C)$ — це оператор вкладення. Для всіх $\delta > 0$ виконуються такі рівності:*

$$\mathcal{E}_\delta(J, \mathfrak{M}) = \Omega(J, \mathfrak{M}; \delta) = \frac{a(d,p)}{\mu^{\frac{\alpha}{d}}(K \cap C)} \delta^{1-\alpha}, \tag{4.38}$$

де α і $a(d,p)$ означені у (4.13). Для всіх $N > 0$,

$$E_N(J, \mathfrak{M}) = A(d,p)\mu^{-\frac{1}{d}}(K \cap C) N^{\frac{1}{p}-\frac{1}{d}}, \tag{4.39}$$

де величина $A(d,p)$ означена у (4.5).

Доведення. Перш за все відмітимо, що якщо нерівність (4.12) перетворюється на рівність для деякої функції f, то вона перетворюється на рівність і для функції $c \cdot f$, $c \in \mathbb{R}$, а тому з точності нерівності (4.12) випливає друга рівність у (4.38).

З точності (4.9) і теореми 4.5.1 випливає, що для всіх $h > 0$ справедлива рівність $E_{\|S_h\|}(J, \mathfrak{M}) = \|g_h(|\cdot|_K)\|_{L_{p'}(hK \cap C)}$. Використовуючи рівність (4.2) і лему 4.1.3, отримаємо (4.39). Нарешті, перша рівність у (4.38) випливає з теореми 4.5.2. □

Наступні дві теореми можна отримати з теорем 4.3.3 і 4.4.2 використовуючи аналогічні міркування.

Теорема 4.5.4. *Позначимо через $\mathfrak{M}$ сім'ю зарядів $\nu \in \mathfrak{N}_{\rceil \cdot \lfloor}(C)$ таких, що $\||\nabla D_\mu \nu|_{K^\circ}\|_{L_p(C)} \leqslant 1$. Для всіх $\delta > 0$ виконуються рівності*

$$\mathcal{E}_\delta(D_\mu, \mathfrak{M}) = \Omega(D_\mu, \mathfrak{M}; \delta) = \frac{a(d,p)}{\mu^{\frac{\alpha}{d}}(K \cap C)} \delta^{1-\alpha},$$

де α *і* $a(d,p)$ *означені у* (4.13). *Для всіх* $N > 0$,

$$E_N(D_\mu, \mathfrak{M}) = A(d,p)\mu^{-\frac{1}{d}}(K \cap C)N^{\frac{1}{p}-\frac{1}{d}},$$

де величина $A(d,p)$ *означена у* (4.5).

Теорема 4.5.5. *Нехай* $p > d$ *і* $m = 0$ *або* $m = 1$. *Позначимо через* $\mathfrak{M}$ *сім'ю функцій* $f \in L_\infty(\mathbb{R}^d_{m,+})$ *таких, що* $\||\nabla \partial_{\mathbf{I}} f|_1\|_{L_p(\mathbb{R}^d_{m,+})} \leqslant 1$. *Для всіх* $\delta > 0$ *виконуються рівності*

$$\mathcal{E}_\delta(\partial_{\mathbf{I}}, \mathfrak{M}) = \Omega\left(\partial_{\mathbf{I}}, \mathfrak{M}; \delta\right) = a(d,p)2^{\alpha\left(\frac{m}{d}-\frac{d}{p}\right)}\delta^{1-\alpha},$$

де α *і* $a(d,p)$ *означені в* (4.13). *Для всіх* $N > 0$

$$E_N(\partial_{\mathbf{I}}, \mathfrak{M}) = A(d,p) \cdot 2^{\frac{m}{d}-\frac{d}{p}} N^{\frac{1}{p}-\frac{1}{d}},$$

де величина $A(d,p)$ *означена у* (4.5).

4.6 Модуль неперервності оператора кратного диференціювання на класах Соболєва

Результати цього підрозділу містяться у статті [105].

4.6.1 Позначення і формулювання результатів

Нехай I позначає скінченний відрізок, або додатну пів пряму $\mathbb{R}_+$, X — це нормований простір дійсно-значних функцій, що визначені на множині I, і $f_\pm \in C(I)$ — неперервні додатні функції. Для $x \in X$ покладемо

$$\|x\|_{X,f_-,f_+} := \left\| \frac{\max\{x(\cdot),0\}}{f_+(\cdot)} + \frac{\max\{-x(\cdot),0\}}{f_-(\cdot)} \right\|_X .$$

Якщо $f_+ = f_- =: f$, то пишемо $\|x\|_{X,f}$ замість $\|x\|_{X,f_-,f_+}$.

Для додатних неперервних функцій $f_\pm, g \in C(I)$ і натурального r покладемо

$$W^r_{f_-,f_+,g}(I) := \Big\{x \in C(I) : x^{(r-1)} \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}},\ \|x\|_{C(I),f_-,f_+} < \infty,$$
$$\|x^{(r)}\|_{L_\infty(I),g} \le 1\Big\}.$$

Якщо $f_- = f_+$, то будемо писати $W^r_{f,g}(I)$ замість $W^r_{f_-,f_+,g}(I)$; у випадку, коли $f \equiv 1$, ми пишемо $W^r_{\infty,g}(I)$ замість $W^r_{f,g}(I)$.

Для $k = 1, \dots, r-1$, функція

$$\Omega(W^r_{f_-,f_+,g}(I), D^k, \delta) := \sup_{x \in W^r_{f_-,f_+,g}(I),\ \|x\|_{C(I),f_-,f_+} \le \delta} \|x^{(k)}\|_{C(I)},\ \delta > 0 \tag{4.40}$$

називається модулем неперервності оператора k-кратного диференціювання на класі $W^r_{f_-,f_+,g}(I)$.

Припустимо, що задано дві функції $\Phi, \varphi \in C(I)$ такі, що $\Phi(t) > \varphi(t)$ для всіх $t \in I$.

Означення 4.6.1. *Будемо казати, що функція $x \in C(I)$ має $n \in \mathbb{N}$ точок осциляції між функціями φ і Φ, якщо $\varphi(t) \le x(t) \le \Phi(t)$ для всіх $t \in I$ і існують точки $s_k \in I$, $k = 1, \dots, n$, $s_1 < s_2 < \dots < s_n$, такі, що $k = 1, \dots, n$*

$$x(s_k) = \begin{cases} \Phi(s_k), & k \text{ непарне}, \\ \varphi(s_k), & k \text{ парне}. \end{cases} \tag{4.41}$$

У випадку, коли $I = [0, \infty)$ і вагові функції $f_\pm$ і g є константами, то інформація про функціонал Ω містить у роботі [130]. Ми наведемо підхід до побудови екстремальних функцій для величини (4.40) з цієї роботи.

Можна довести, що для кожного $A > 0$ існує $\delta = \delta(A, r, n) > 0$ і ідеальний сплайн $G = G_{r,n,A}$ порядку $r \in \mathbb{N}$ з n вузлами, який визначений на відрізку $[0, A]$ і має $n+r+1$ точок осциляції між константними функціями $-\delta$ і δ. Для фіксованих r і n, δ є неперервно зростаючою функцією A, $\delta \to 0$ при $A \to +0$ і

$$\delta \to \infty, \text{ при } A \to \infty. \tag{4.42}$$

Крім того, для фіксованих r і A, δ є спадною послідовністю (занумерованою параметром n) і $\delta \to 0$ при $n \to \infty$.

Для кожного $\delta > 0$, ці властивості дозволяють визначити послідовність чисел A_n таких, що відповідна послідовність ідеальних сплайнів $G_n = G_{r,n,A_n}$ має n вузлів і осцилює між $-\delta$ і δ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді $A_n \to \infty$ при $n \to \infty$ і послідовність G_n породжує граничний ідеальний сплайн G_δ, що визначено на всій пів прямій, і має нескінченну кількість вузлів і точок осциляції між $-\delta$ і δ. Цей сплайн G_δ є екстремальним у задачі (4.40).

У випадку, коли g не є константною функцією, природнім замінником для поліноміальних сплайнів є так звані g-сплайни.

Нехай $I = (a, b)$, де $a \in \mathbb{R}$ і b позначає дійсне число або додатну нескінченність, і задана додатна функція $g \in C(I)$.

Означення 4.6.2. *Функція $G \in C^{r-1}(I)$ називається ідеальним g-сплайном порядку r з $n \in \mathbb{N}$ вузлами $a < t_1 < \ldots < t_n < b$, якщо на кожному інтервалі $(t_i, t_{i+1}), i = 0, 1, \ldots, n$, $t_0 := a, t_{n+1} := b$, існує похідна $G^{(r)}$ і $\frac{G^{(r)}(t)}{g(t)} \equiv \epsilon \cdot (-1)^i$ на інтервалах $(t_i, t_{i+1}), i = 0, 1, \ldots, n$, де $\epsilon \in \{1, -1\}$.*

У випадку неконстантних функцій g і $f_\pm$ (ми накладемо на них додаткові обмеження пізніше), можна повторити кроки описані вище, замінюючи поліноміальні сплайни g-сплайнами, які осцилюють між функціями $-\delta_A \cdot f_-$ і $\delta_A \cdot f_+$, див. [43], де розглядався випадок $f_- = f_+$.

Важливою відмінністю між випадками константних і неконстантних функцій $f_\pm$ і g є той факт, що (4.42) може не виконуватись у останньому випадку. Більш точно, у випадку $f_- = f_+$, такий результат було доведено у [43].

Покладемо $g_0 := g$ і $g_k(t) := \int\limits_0^t g_{k-1}(s)ds$, $t \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots, r$.

Теорема 4.6.1. *Нехай задано $r \in \mathbb{N}$ і незростаючі додатні функції $f, g \in C[0, \infty)$. Співвідношення (4.42) не виконується тоді і тільки тоді, коли*

$$A_0 := \int\limits_0^\infty g(t)dt < \infty, \tag{4.43}$$

для $k = 1, \ldots, r-1$

$$A_k := \int\limits_0^\infty \left[\sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^{k-s-1} A_s}{(k-s-1)!} t^{k-s-1} + (-1)^k g_k(t) \right] dt < \infty, \tag{4.44}$$

і

$$\sup_{t \in [0,\infty)} \frac{|P_r(t)|}{f(t)} < \infty, \tag{4.45}$$

де

$$P_r(t) := (-1)^r \sum_{s=0}^{r-1} \frac{(-1)^{r-s-1} A_s}{(r-s-1)!} t^{r-s-1} + g_r(t). \tag{4.46}$$

У [43] розглядався випадок $f_- = f_+$, і отримані такі результати. У випадку, коли (4.42) виконується, використовуючи підхід Шонберга і Каварета, значення $\Omega(W^r_{f,g}[0,\infty), D^k, \delta)$ були охарактеризовані у термінах граничного g-сплайна з нескінченною кількістю вузлів і точок осциляції для всіх $\delta > 0$.

У випадку, коли (4.42) не виконується, величину $\Omega(W^r_{f,g}[0,\infty), D^k, \delta)$ охарактеризовано тільки для незрозстаючої послідовності $\{\delta_{r,n}\}_{n=0}^\infty$, яка, взагалі кажучи, не обов'язково прямує до 0 при $n \to \infty$.

У цьому підрозділі для всіх значень $\delta > 0$ ми охарактеризуємо величину $\Omega(W^r_{f_-,f_+,g}[0,\infty), D^k, \delta)$ у випадку, коли (4.42) не виконується. При цьому ми накладемо більше обмежень на функції $f_\pm$ і g, ніж це було зроблено у теоремі 4.6.1. Точніше, ми будемо вимагати, щоб виконувались такі три припущення.

Припущення 4.6.1. *Функція* $g \in C[0,\infty)$ *є додатною незростаючою і такою, що виконуються умови* (4.43) *і* (4.44).

Припущення 4.6.2. *Функції* $f_\pm \in C[0,\infty)$ *є незростаючими, додатними і такими, що*

$$f_\pm(\infty) > 0 \tag{4.47}$$

Припущення 4.6.3.

$$\varliminf_{t \to \infty} \frac{f_\pm(t) - f_\pm(\infty)}{|P_r(t)|} = 0,$$

де функція P_r *означена у* (4.46).

Відмітимо, що припущення 4.6.1 є таким, як і у теоремі 4.6.1, але вимоги до функцій $f_\pm$ є більш сильними, ніж у теоремі 4.6.1; зокрема, з припущень 4.6.1 і 4.6.2 випливає (4.45) у випадку $f_- = f_+$. В той же час, важливий випадок константних функцій $f_\pm$ включається у розгляд.

Відповідно до означення 4.6.1, точки осциляції 'додатно орієнтовані', тобто $x(s_1) = \Phi(s_1)$. Ми можемо означити 'від'ємно орієнтовані' точки осциляції, замінюючи умову (4.41) на

$$x(s_k) = \begin{cases} \Phi(s_k), & k \text{ парне}, \\ \varphi(s_k), & k \text{ непарне}. \end{cases}$$

Зауваження 4.6.1. *Якщо функція $x_+ = x_+(\varphi, \Phi)$ має n додатно орієнтованих точок осциляції між функціями φ і Φ. Тоді функція $x_- = -x_+(-\Phi, -\varphi)$ має n від'ємно орієнтованих точок осциляції між функціями φ і Φ.*

Зокрема, якщо Φ є додатною і $\varphi \equiv -\Phi$, то $x_- = -x_+$. У загальному випадку такого зв'язку немає.

Означення 4.6.3. *Будемо називати функцію $x \in C[0, \infty)$ n-кусково монотонною, $n \in \mathbb{N}$, якщо існують $\epsilon \in \{1, -1\}$ і $0 =: t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n := \infty$ такі, що $\epsilon \cdot (-1)^k x$ є зростаючою на інтервалі (t_{k-1}, t_k), $k = 1, \ldots, n$.*

Для локально абсолютно неперервної функції x визначеної на деякому інтервалі, позначення $\operatorname{sgn} x'(t) = 1$ ($\operatorname{sgn} x'(t) = -1$) будуть означати, що функція x є зростаючою (спадною) у деякому околі точки t.

Означення 4.6.4. *Первісну G порядку r функції g або $-g$ на I будемо називати ідеальним g-сплайном порядку r з 0 вузлами.*

Означення 4.6.5. *Позначимо через $\Gamma^r_{n,g}(I)$ множину усіх ідеальних g-сплайнів G на I порядку r з не більше ніж $n \in \mathbb{Z}_+$ вузлами.*

Для того, щоб отримати головний результат цього підрозділу, ми вивчаємо властивості максимально осцилюючих ідеальних g-сплайнів. Ми

доводимо такий результат, який також має і самостійний інтерес. Зокрема, властивість (c) теореми стверджує, що максимально осцилюючі g-сплайни найменше відхиляються від нуля у несиметричній ваговій нормі серед усіх g-сплайнів класу $\Gamma^r_{n,g}(I)$. Для поліноміальних сплайнів ця властивість добре відома.

Теорема 4.6.2. *Нехай виконуються припущення 4.6.1, 4.6.2, і 4.6.3.*

(a) Існує дві незрозстаючі послідовності $\{a_n^\pm\}_{n=1}^\infty$ додатних чисел таких, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^\pm = 0$, і для кожного $\tau \in [a_{n+1}^\pm, a_n^\pm)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $a_0^\pm := \infty$, існує ідеальний g-сплайн $G_\tau^\pm \in \Gamma^r_{n,g}[0,\infty)$ з рівно n вузлами і $n+1$ (додатно орієнтованих для G_τ^+ і від'ємно орієнтованих для G_τ^-) точок осциляції між $-\tau f_-$ і τf_+.

(b) Для кожного $\tau \in [a_{n+1}^\pm, a_n^\pm)$ і $s = 0, 1, \ldots, r-1$, $(G_\tau^\pm)^{(s)}$ є $(n+1)$-кусково монотонною і для $s = 0, \ldots, r$,

$$\operatorname{sgn}(G_\tau^\pm)^{(s)}(0) = \pm(-1)^s. \tag{4.48}$$

(c) Для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\inf_{G\in\Gamma^r_{n,g}[0,\infty)} \|G\|_{C[0,\infty),f_-,f_+} = \min\{a_{n+1}^+, a_{n+1}^-\}.$$

Якщо $a_{n+1}^+ < a_{n+1}^-$, то інфімум досягається на $G^+_{a_{n+1}^+}$; в іншому випадку інфімум досягається на $G^-_{a_{n+1}^-}$.

Зауваження 4.6.2. *З доведення буде випливати, що g-сплайни $G^\pm_{a_{n+1}^\pm}$ задовольняють рівностям*

$$G^+_{a_{n+1}^+}(\infty) = \begin{cases} -a_{n+1}^+ f_-(\infty), & n \text{ парне}, \\ a_{n+1}^+ f_+(\infty), & n \text{ непарне}. \end{cases} \tag{4.49}$$

і

$$G^-_{a_{n+1}^-}(\infty) = \begin{cases} -a_{n+1}^- f_-(\infty), & n \text{ непарне}, \\ a_{n+1}^- f_+(\infty), & n \text{ парне}. \end{cases} \tag{4.50}$$

На ці g-сплайни можна дивитись як на аналоги ідеального сплайна Чебишова з точкою осциляції у нескінченності. Тут і далі $f(\infty)$ позначає $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.

У попередній теоремі ідеальні g-сплайни проіндексовані за допомогою їх несиметричної вагової норми. Та сама сім'я сплайнів може бути заіндексована за допомогою своїх значень у нескінченності. Для спрощення позначень ми формулюємо цю теорему для сплайнів з додатно орієнтованими точками осциляції; аналогічний результат справедливий і для сплайнів з від'ємною орієнтацією точок осциляції.

Теорема 4.6.3. *Нехай виконуються припущення 4.6.1 і 4.6.2, і задано $n \in \mathbb{Z}_+$. Для всіх*

$$\alpha \in \begin{cases} [0,\infty), & n \text{ непарне}, \\ (0,\infty], & n \text{ парне}, \end{cases}$$

існує $\tau = \tau_n(\alpha) > 0$ і ідеальний g-сплайн $G = G(n,\alpha) \in \Gamma^r_{n,g}[0,\infty)$ з рівно n вузлами і $n+1$ додатно орієнтованими точками осциляції між $-\tau \cdot f_-$ і $\tau \cdot f_+$ і такий, що

$$\frac{\tau f_+(\infty) - G(\infty)}{\tau f_-(\infty) + G(\infty)} = \alpha, \tag{4.51}$$

де (4.51) розуміється як $G(\infty) = -\tau f_-(\infty)$, якщо $\alpha = \infty$. Для $n \in \mathbb{Z}_+$, функція τ_n є неперервною, неспадною у випадку непарного n, і незростаючою у випадку парного n. Для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $\alpha, \beta > 0$ маємо $\tau_n(\alpha) \le \tau_{n-1}(\beta)$.

Зауваження 4.6.3. *Ми не доводимо єдиність максимально осцилюючого ідеального g-сплайна у теоремах 4.6.2 і 4.6.3. В той же час коректність означення функцій τ_n у теоремі 4.6.3 буде доведено нижче.*

Зауваження 4.6.4. *Відмітимо, що припущення 4.6.3 потрібне у теоремі 4.6.2, але не потрібне у теоремі 4.6.3. Це припущення гарантує відсутність 'дірки' між можливими значеннями несиметричної вагової норми ідеальних g-сплайнів з $n-1$ і n вузлами, $n \in \mathbb{N}$.*

Головним результатом даного підрозділу є така теорема.

Теорема 4.6.4. *Нехай $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$ і виконуються припущення 4.6.1, 4.6.2, і 4.6.3. Тоді для всіх $k = 1, \ldots, r-1$ і $\delta > 0$,*

$$\Omega(W^r_{f_-,f_+,g}[0,\infty), D^k, \delta) = \max\left\{|(G^+_\delta)^{(k)}(0)|, |(G^-_\delta)^{(k)}(0)|\right\},$$

де $G^\pm_\delta$ — це ідеальні g-сплайни з теореми 4.6.2. Якщо

$$|(G^+_\delta)^{(k)}(0)| > |(G^-_\delta)^{(k)}(0)|,$$

то супремум у означенні $\Omega(W^r_{f_-,f_+,g}[0,\infty), D^k, \delta)$ досягається на G^+_δ, в іншому випадку — на G^-_δ.

Зауваження 4.6.5. *Відмітимо, що якщо $\delta \geq \max\{a^+_1, a^-_1\}$, то $G^\pm_\delta$ має 0 вузлів, і тому $G^\pm_\delta = \pm|P_r| + C^\pm_\delta$, $C^\pm_\delta \in \mathbb{R}$. З цього випливає, що функціонал $\Omega(W^r_{f_-,f_+,g}[0,\infty), D^k, \cdot)$ є константою для всіх достатньо великих значеннях δ.*

Відмітимо, що у випадку $f_- = f_+ =: f$, враховуючи результати, наведені у цьому підрозділі і статтю [43], нерозв'язаною залишається ситуація, коли виконуються такі дві умови:

1. Існує обмежена первісна P_r порядку r функції g.
2. $\underline{\lim}_{t\to+\infty} \frac{f(t)-f(\infty)}{|P_r(t)|} > 0$.

4.6.2 Ідеальні g-сплайни

4.6.2.1 Допоміжні означення

У цьому підрозділі ми будемо часто рахувати або оцінювати кількість нулів і змін знака функцій. Нижче ми наводимо необхідні означення.

Нехай задано неперервну на інтервалі функцію x і $t_1 < \ldots < t_n$ — це її нулі, $n \geq 2$. Точки $t_1, \ldots, t_n$ називаються відокремленими нулями, якщо функція x не є тотожнім нулем на кожному з інтервалів (t_i, t_{i+1}), $i = 1, \ldots, n-1$.

Ми кажемо, що функція x має істотну зміну знака на інтервалі I, якщо обидві множини $\{t \in I \colon x(t) > 0\}$ і $\{t \in I \colon x(t) < 0\}$ мають додатні міри.

Ми кажемо, що функція x має істотну зміну знака у точці z, якщо існує $\varepsilon > 0$ таке що для майже всіх $0 < u < \varepsilon$, $\operatorname{sgn} x(z-u) = -\operatorname{sgn} x(z+u) \neq 0$.

Ми кажемо, що функція x має рівно n істотних змін знака на інтервалі I, якщо існують $n+1$ точка $t_1 < \ldots < t_{n+1}$ з цього інтервалу і число $\varepsilon > 0$ таке, що для майже всіх $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ маємо $\operatorname{sgn} x(t_i+u) = -\operatorname{sgn} x(t_{i+1}+u) \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$, і не існує жодної системи з $n+2$ точок з такою властивістю.

Для неперервних функцій ми використовуємо термін 'зміна знака' замість 'істотна зміна знака'.

Ми часто будемо застосовувати такий аналог теореми Ролля: між двома відокремленими нулями локально абсолютно неперервної функції x існує суттєва зміна знака функції x'.

4.6.2.2 Ідеальні g-сплайни з заданими нулями

Далі у доведенні теорем цього підпункту ми будемо використовувати теорему Борсука. Згідно з В. Л. Велікіним [139], ідея використання теореми Борсука при доведенні існування ідеальних сплайнів з заданими нулями, належить В. І. Рубану.

Лема 4.6.1. *Нехай $A > 0$, $n \in \mathbb{N}$ і $0 \leq s_1 < s_2 < \ldots < s_n < A$. Існує ідеальний g-сплайн $G \in \Gamma^r_{n,g}[0, A]$ такий, що*

$$G^{(k)}(A) = 0,\ k = 0, 1, \ldots, r-1. \tag{4.52}$$

і

$$G(s_k) = 0, k = 1, \ldots, n. \tag{4.53}$$

Крім того, з умов (4.52) і (4.53) випливає, що G змінює знак у кожній з точок s_k, $k = 1, \ldots, n$, і має рівно n вузлів.

Доведення. Розглянемо множину

$$S^n := \left\{ (\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \sum_{k=1}^{n+1} |\xi_k| = A \right\}.$$

Для довільного $\xi \in S^n$ розглянемо розбиття відрізка $[0, A]$ точками $t_m = \sum\limits_{k=1}^{m} |\xi_k|$, $m = 1, \ldots, n$. Нехай $G(\xi) \in C^{r-1}[0, A]$ є функцією, що задовольняє умовам (4.52) і $G^{(r)}(\xi, t) = \operatorname{sgn} \xi_k \cdot g(t)$ на інтервалі (t_{k-1}, t_k), $k = 1, \ldots, n+1$, $t_0 := 0$, $t_{n+1} = A$; така функція однозначно визначається вказаними умовами. Більше того, $G(\xi) = -G(-\xi)$ для довільного $\xi \in S^n$ і $G(\xi)$ рівномірно на $[0, A]$ збігається до $G(\xi_0)$ при $\xi \to \xi_0$.

Розглянемо відображення $\phi\colon S^n \to \mathbb{R}^n$, $\phi(\xi) = (G(\xi; s_1), \ldots, G(\xi; s_n))$. Воно є неперервним і непарним. З теореми Борсука випливає існування $\xi^* \in S^n$ такого, що $\phi(\xi^*) = 0$. Функція $G(\xi^*)$ задовольняє (4.52) і (4.53), і $G^{(r)}(\xi^*)$ приймає ненульові значення майже всюди. Тому усі нулі $s_1, \ldots, s_n$ сплайна $G(\xi^*)$ є відокремленими, отже за теоремою Ролля функція $G^{(r)}(\xi^*)$ має не менше ніж n змін знака. З побудови випливає, що функція $G^{(r)}(\xi^*)$ не може мати більше ніж n змін знака, а тому $G(\xi^*) \in \Gamma^r_{n,g}[0, A] \setminus \Gamma^r_{n-1,g}[0, A]$. Усі нулі $s_1, \ldots, s_n$ є простими, оскільки в протилежному випадку, з теореми Ролля ми отримали б, що функція $G^{(r)}(\xi^*)$ має більше ніж n змін знака, що неможливо. Тому $G(\xi^*)$ — це шуканий ідеальний g-сплайн. Лему доведено.

□

Лема 4.6.2. *Нехай задано $A > 0$, $n \in \mathbb{N}$ і $0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n < A$. Якщо два ідеальних g-сплайни $G_1, G_2 \in \Gamma^r_{n,g}[0, A]$ задовольняють умовам* (4.52) *і* (4.53)*, то або $G_1 \equiv G_2$, або $G_1 \equiv -G_2$.*

Доведення. Можемо вважати, що обидві функції G_1 і G_2 є додатніми на $[0, s_1)$. Тоді G_1 і G_2 мають однакові знаки на кожному з інтервалів (s_k, s_{k+1}), $k = 0, \ldots, n$, $s_0 := 0$, $s_{n+1} := A$.

Зафіксуємо $k \in \{0, \ldots, n\}$ і довільну точку $s \in (s_k, s_{k+1})$. Покажемо, що

$$G_1(s) = G_2(s). \tag{4.54}$$

Припустимо протилежне, без зменшення загальності можемо вважати, що $|G_1(s)| < |G_2(s)|$. Існує $\varepsilon \in (0, 1)$ таке, що $G_1(s) = (1 - \varepsilon) \cdot G_2(s)$. Різниця $G := G_1 - (1 - \varepsilon) \cdot G_2$ задовольняє умовам (4.52) і (4.53); крім того, вона має додатковий нуль у точці s. З означення функції G випливає, що $G^{(r)}$

є ненульовою майже всюди і змінює свій знак тільки у вузлах ідеального g-сплайн G_1. Тому усі нулі $s_1, \ldots, s_n$, s і A функції G є відокремленими, і отже за теоремою Ролля функція $G^{(r)}$ має не менше ніж $n+1$ змін знака, що неможливо. Ця суперечність доводить (4.54), а отже в силу довільності s, маємо $G_1 \equiv G_2$. Лему доведено. □

Лема 4.6.3. *Нехай задано $A > 0$ і $n \in \mathbb{N}$. Припустимо, що для кожного $m = 0, 1, \ldots$ задано точку $s^{(m)} = (s_{1,m}, \ldots, s_{n,m}) \in \mathbb{R}^n$, $0 \le s_{1,m} < \ldots < s_{n,m} < A$. Нехай $G_m \in \Gamma^r_{n,g}[0, A]$ — це ідеальний g-сплайн, що задовольняє умові (4.52) і дорівнює нулю у точках $s^{(m)}$, $m = 0, 1, \ldots$. Позначимо через $t^{(m)} = (t_{1,m}, \ldots, t_{n,m})$, $0 < t_{1,m} < \ldots < t_{n,m} < A$ вузли G_m. Тоді якщо $s^{(m)} \to s^{(0)}$ при $m \to \infty$, то $t^{(m)} \to t^{(0)}$ при $m \to \infty$.*

Доведення. Припустимо, що послідовність $\left\{t^{(m)}\right\}_{m=1}^{\infty}$ має дві різні граничні точки $u = (u_1, \ldots, u_n)$ і $v = (v_1, \ldots, v_n)$. Розглянемо ідеальні g-сплайни G_u і G_v з вузлами у точках u і v, які задовольняють умовам (4.52); кожен з цих сплайнів визначається однозначно з точністю до знака. Крім того, оскільки ідеальний g-сплайн неперервно (у сенсі рівномірної збіжності) залежить від своїх вузлів, обидва сплайни G_u і G_v дорівнюють нулю в точках $s^{(0)}$. Але це суперечить лемі 4.6.2. Тому послідовність $\left\{t^{(m)}\right\}_{m=1}^{\infty}$ має границю. Ця границя не може бути іншою ніж $t^{(0)}$ через лему 4.6.2. Лему доведено. □

4.6.2.3 Максимально осцилюючі ідеальні g-сплайни на відрізку

Зауваження 4.6.6. *Для скорочення далі ми пишемо 'функція має n точок осциляції' замість 'функція має n додатно орієнтованих точок осциляції'.*

Техніка, що використовує теорему Брауера про нерухому точку у доведенні існування осцилюючого сплайна використовувалась і раніше, див. напр. [96, Розділ 2.10].

Лема 4.6.4. *Нехай задано $A > 0$ і дві функції $f_+, f_- \in C[0, A]$. Припустимо, що $f_\pm(t) > 0$ для всіх $t \in [0, A]$. Тоді для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$ існує*

$\tau > 0$ і ідеальний g-сплайн $G \in \Gamma^r_{n,g}[0, A]$, який задовольняє (4.52)*, має n вузлів і $n+1$ точку осциляції між функціями $-\tau \cdot f_-$ і $\tau \cdot f_+$.*

Доведення. Для кожного $\varepsilon \in \left(0, \frac{A}{n+1}\right)$ розглянемо n-вимірний симплекс

$$\Xi^n_\varepsilon := \left\{ (\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \xi_1, \ldots, \xi_{n+1} \geq \varepsilon, \sum_{k=1}^{n+1} \xi_k = A \right\}.$$

Покладемо

$$\Xi^n_0 := \left\{ (\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \xi_1, \ldots, \xi_{n+1} > 0, \sum_{k=1}^{n+1} \xi_k = A \right\}.$$

Для кожної точки $\xi \in \Xi^n_\varepsilon$ розглянемо розбиття відрізка $[0, A]$ точками $s_m = \sum\limits_{k=1}^{m} |\xi_k|$, $m = 1, \ldots, n$. З означення симплекса маємо $0 < s_1 < \ldots < s_n < A$. Тому в силу леми 4.6.1, існує ідеальний g-сплайн $G(\xi)$ з рівно n вузлами, який задовольняє умовам (4.52) і (4.53). Знак функції $G(\xi)$ оберемо так, що $G(\xi)$ є додатною на $(0, s_1)$. Для кожного $k = 1, \ldots, n+1$, покладемо

$$\delta_k(\xi) := \min \left\{ \delta \geq 0 \colon |G(\xi; t)| \leq \delta \cdot f_k(t), t \in (s_{k-1}, s_k) \right\},$$

де $s_0 := 0$, $s_{n+1} := A$, $f_k = f_+$ для непарних k, і $f_k = f_-$ для парних k.

Покладемо $\Delta_k(\xi) := \delta_k(\xi) - \min\limits_{j=1,\ldots,n+1} \delta_j(\xi)$, $k = 1, \ldots, n+1$, і $\Delta(\xi) := \sum\limits_{k=1}^{n+1} \Delta_k(\xi)$.

Якщо для деякого $\varepsilon > 0$ існує $\xi \in \Xi^n_\varepsilon$ таке, що $\Delta(\xi) = 0$, то відповідний g-сплайн $G(\xi)$ є шуканим.

Припустимо, що для всіх $\varepsilon > 0$ і $\xi \in \Xi^n_\varepsilon$

$$\Delta(\xi) \neq 0. \tag{4.55}$$

З леми 4.6.3 випливає, що δ_k і Δ_k є неперервними функціями змінної ξ, $k = 1, \ldots, n+1$, тому Δ є також неперервною функцією змінної ξ.

Оскільки функції f_+ і f_- є відділеними від нуля, то

$$\sup_G \|G'\|_{C[0,A]} < \infty,$$

де супремум береться по усім сплайнам $G \in \Gamma^r_{n,g}[0, A]$, які задовольняються умову (4.52). Тому існує $\alpha > 0$, яке не залежить від ξ і ε таке, що

$$\delta_k(\xi) \le \alpha \cdot \xi_k,\ k = 1, \dots, n+1. \tag{4.56}$$

З $\inf\limits_{G \in \Gamma^r_{n,g}[0,A]} \|G\|_{C[0,A]} > 0$ випливає, що

$$\inf_{\varepsilon > 0} \min_{\xi \in \Xi^n_\varepsilon} \max_{k=1,\dots,n+1} \delta_k(\xi) =: \beta > 0. \tag{4.57}$$

Ми стверджуємо, що

$$\inf_{\varepsilon > 0} \min_{\xi \in \Xi^n_\varepsilon} \Delta(\xi) =: \gamma > 0. \tag{4.58}$$

Дійсно, якщо (4.58) не виконується, то враховуючи (4.55), отримаємо, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\xi_\varepsilon \in \Xi^n_0 \setminus \Xi^n_\varepsilon$ така, що $\Delta(\xi_\varepsilon) < \frac{\beta}{2}$. Тому

$$\frac{\beta}{2} > \Delta(\xi_\varepsilon) \ge \max_{k=1,\dots n+1} \Delta_k(\xi_\varepsilon) = \max_{k=1,\dots n+1} \delta_k(\xi_\varepsilon) - \min_{k=1,\dots,n+1} \delta_k(\xi_\varepsilon),$$

і, враховуючи (4.57), маємо $\min\limits_{k=1,\dots,n+1} \delta_k(\xi_\varepsilon) > \frac{\beta}{2}$, що суперечить (4.56).

Розглянемо відображення $\phi\colon \Xi^n_\varepsilon \to \Xi^n_\varepsilon$,

$$\phi(\xi) = \varepsilon + \frac{A - (n+1)\varepsilon}{\Delta(\xi)} \left(\Delta_2(\xi), \Delta_3(\xi), \dots, \Delta_{n+2}(\xi)\right),$$

де $\Delta_{n+2}(\xi) := \Delta_1(\xi)$. За побудовою ϕ є неперервним, а тому за теоремою Брауера існує $\xi^* \in \Xi^n_\varepsilon$ таке, що

$$\phi(\xi^*) = \xi^* = (\xi^*_1, \dots, \xi^*_{n+1}). \tag{4.59}$$

Тоді для $k = 1, \dots, n+1$, враховуючи (4.56) і (4.58), маємо

$$\xi^*_k = \varepsilon + \frac{A - (n+1)\varepsilon}{\Delta(\xi^*)} \Delta_{k+1}(\xi^*) < \varepsilon + \frac{A}{\gamma} \delta_{k+1}(\xi^*) < \varepsilon + \frac{\alpha \cdot A}{\gamma} \xi^*_{k+1}. \tag{4.60}$$

За означенням функцій Δ_k існує деяке $k \in \{1, \dots, n+1\}$ для якого $\Delta_k(\xi^*) = 0$. Нехай для визначеності $\Delta_1(\xi^*) = 0$. Тоді з (4.59) отримаємо, $\xi^*_{n+1} = \varepsilon$. Послідовне застосування оцінки (4.60) дає існування додатних чисел $\eta_1, \dots, \eta_n$, які не залежать від ε і ξ^* і таких, що $\xi^*_n < \eta_n \varepsilon$, $\xi^*_{n-1} < \eta_{n-1}\varepsilon$ і так далі, $\xi^*_1 < \eta_1 \varepsilon$. Але, якщо ε вибране достатньо малим, то це суперечить тому, що $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \xi^*_k = A$. $\square$

4.6.2.4 Допоміжні результати

Ми пишемо $W^r_{\infty,\infty}[0,\infty)$ замість $W^r_{\infty,g}[0,\infty)$ у випадку $g \equiv 1$. Наступний результат по суті належить Ландау [113]. Ми наведемо його доведення для повноти.

Лема 4.6.5. *Нехай задано $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$ і $x \in W^r_{\infty,\infty}[0,\infty)$. Якщо існує границя $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$, то $\lim\limits_{t\to\infty} x^{(k)}(t) = 0$, $k = 1,\dots,r-1$.*

Доведення. Функція $x^{(k)}$ є обмеженою, оскільки обмеженими є функції x і $x^{(r)}$, $k = 1,\dots,r-1$. Лему можна довести індукцією по k.

Нехай $t > 0$ і $\varepsilon > 0$. Тоді $x(t+\varepsilon) - x(t) = \varepsilon x'(t) + \frac{\varepsilon^2}{2} x''(\xi)$, $\xi \in (t, t+\varepsilon)$, тому

$$|x'(t)| \leq \frac{|x(t+\varepsilon) - x(t)|}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}|x''(\xi)|. \tag{4.61}$$

Оскільки існує границя $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ то знайдеться $M = M(\varepsilon) > 0$ таке, що $|x(s) - x(t)| < \varepsilon^2$ для всіх $t, s > M$. Тоді з обмеженості x'', права частина співвідношення (4.61) може бути зробленою скільки завгодно малою. З цього випливає твердження леми у випадку $k = 1$.

Індуктивний перехід може бути зробленим за допомогою аналогічних міркувань. □

Лема 4.6.6. *Нехай задано $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$ і $x \in W^r_{\infty,\infty}[0,\infty)$. Якщо $x^{(r)}$ має скінченну кількість істотних змін знака, то границя $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ існує і $\lim\limits_{t\to\infty} x^{(k)}(t) = 0$, $k = 1,\dots,r-1$.*

Доведення. З умов леми випливає, що функція x' має скінченну кількість змін знака. Тому x є монотонною у деякому околі нескінченності. Оскільки вона є обмеженою, то границя $x(\infty)$ існує. Для завершення доведення достатньо застосувати лему 4.6.5. □

Лема 4.6.7. *Нехай функція $x \in W^r_{\infty,\infty}[0,\infty)$ є такою, що $x^{(r)}$ є ненульовою майже всюди і має не більше ніж $n \in \mathbb{Z}_+$ істотних змін знака. Припустимо, що x' має не менше ніж n змін знака. Тоді кожна з функцій $x^{(k)}$, $k = 0,\dots,r-1$, є $(n+1)$-кусково монотонною. Крім того, якщо*

$\epsilon \in \{1, -1\}$ *і* $\epsilon \cdot x$ *зростає на першому інтервалі монотонності, то*

$$\operatorname{sgn} x^{(k)}(0) = \epsilon(-1)^{k+1}, k = 1, \ldots, r. \tag{4.62}$$

Доведення. З умови леми випливає, що функція x і усі її похідні є ненульовими майже всюди. З леми 4.6.6 маємо $x'(\infty) = 0$. Тому x'' має не менше n змін знака і, враховуючи лему 4.6.6, $x''(\infty) = 0$. Продовжуючи аналогічно, отримаємо, що $x^{(r)}$ має не менше ніж n суттєвих змін знака. Оскільки $x^{(r)}$ має не більше ніж n суттєвих змін знака, то кожна з похідних $x^{(k)}$ має рівно n змін знака, $k = 1, \ldots, r$. Тоді кожна з функцій $x^{(k)}$, $k = 0, \ldots, r-1$, є $(n+1)$-кусково монотонними. Крім того, функція $x^{(k)}$, $k = 1, \ldots, r-1$, змінює знак на кожному проміжку монотонності, окрім останнього (де вона прямує до 0). Звідси випливає (4.62). □

Означення 4.6.6. *При виконанні припущення 4.6.1 покладемо* $P_0 := g$ *і для* $k = 1, \ldots, r$ *і* $t \in [0, \infty)$ *покладемо*

$$P_k(t) := (-1)^k \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^{k-s-1} A_s}{(k-s-1)!} t^{k-s-1} + g_k(t).$$

Відмітимо, що P_k — це первісна порядку k функції g для якої $P_k(\infty) = 0$, $k = 1, \ldots, r$. Крім того, функція P_k є монотонною і не змінює знак на $[0, \infty)$.

Лема 4.6.8. *Нехай виконується припущення 4.6.1,* $r \in \mathbb{N}$, $x \in W^r_{\infty,g}[0, \infty)$ *і* $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = A \in \mathbb{R}$. *Тоді для всіх* $t \in \mathbb{R}$, $|x(t) - A| \le |P_r(t)|$.

Доведення. Достатньо довести лему у випадку $A = 0$. Це, у свою чергу, можна зробити індукцією по r. Дійсно, використовуючи індуктивне припущення для $r > 1$ (яке можна застосовувати завдяки лемі 4.6.5), або означення класу $W^r_{\infty,g}[0, \infty)$ для $r = 1$, отримаємо

$$|x(t)| = |x(t) - x(\infty)| = \left| \int_t^\infty x'(s) ds \right| \le \int_t^\infty |x'(s)|\, ds \le \int_t^\infty |P_{r-1}(s)|\, ds$$

$$= \left| \int_t^\infty P_{r-1}(s)ds \right| = |P_r(t) - P_r(\infty)| = |P_r(t)|.$$

Лему доведено. □

4.6.2.5 Максимально осцилюючі ідеальні g-сплайни на пів осі

У подальшому вважаємо, що виконуються припущення 4.6.1 і 4.6.2.

Лема 4.6.9. *Нехай задано $n \in \mathbb{Z}_+$. Для кожного $\alpha \in (0, \infty)$ існує $\tau > 0$ і ідеальний g-сплайн $G = G(n, \alpha) \in \Gamma^r_{n,g}[0, \infty)$ з рівно n вузлами і $n + 1$ точками осциляції між $-\tau \cdot f_-$ і $\tau \cdot f_+$ і такий, що*

$$\frac{\tau f_+(\infty) - G(\infty)}{\tau f_-(\infty) + G(\infty)} = \alpha. \tag{4.63}$$

Для будь-яких $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$ існує число $C = C(\alpha_1, \alpha_2) > 0$ таке, що $\tau \le C$, для всіх $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$.

Доведення. Покладемо $a := \frac{1}{1+\alpha} f_+(\infty) - \frac{\alpha}{1+\alpha} f_-(\infty)$. Тоді отримаємо, що $a \in (-f_-(\infty), f_+(\infty))$ і тому обидві функції $f_+ - a$ і $f_- + a$ є додатними неперервними незростаючими на $[0, \infty)$ функціями.

Для кожного $A > 0$ розглянемо ідеальний g-сплайн $G_A \in \Gamma^r_{n,g}[0, A]$, який максимально осцилює між функціями $-\tau_A(f_- + a)$ і $\tau_A(f_+ - a)$, де $\tau_A > 0$ і існування такого сплайна гарантується лемою 4.6.4. Нехай $0 \le s^A_1 < \ldots < s^A_{n+1} \le A$ — це точки осциляції G_A і $0 < t^A_1 < \ldots < t^A_n < A$ — це його вузли.

Спрямовуючи $A \to \infty$ і переходячи до підпослідовностей, якщо треба, можемо припустити, що кожна з послідовностей s^A_k, $k = 1, \ldots, n+1$, t^A_k, $k = 1, \ldots, n$ і τ_A, має скінченну або нескінченну границю s_k, t_k і τ відповідно.

Оскільки G_A задовольняє умовам (4.52), то його можна продовжити нулем за відрізок $[0, A]$ до функції класу $W^r_{\infty,g}[0, \infty)$. Відповідно до леми 4.6.8, для всіх $A > 0$ і $t \in [0, A]$

$$|G_A(t)| \le |P_r(t)|. \tag{4.64}$$

З цієї нерівності випливає, що для всіх $A > 0$, $\tau_A \le \|P_r\|_{C[0,\infty),f_-+a,f_+-a}$. Тому $\tau \le \|P_r\|_{C[0,\infty),f_-+a,f_+-a}$. Якщо $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$ фіксовані, то обидві функції $f_- + a$ і $f_+ - a$ відділені від нуля константою, що не залежить від $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ через (4.47). Тому $\|P_r\|_{C[0,\infty),f_-+a,f_+-a}$ є рівномірно обмеженою зверху для таких значень α.

Відмітимо, що $\tau > 0$, оскільки в протилежному випадку для кожного $\varepsilon > 0$ ми могли б знайти $A = A(\varepsilon) > 1$ таке, що $\|G_A\|_{C[0,1]} < \varepsilon$, що неможливо, оскільки звуження g-сплайна G_A на $[0,1]$ належить $\Gamma^r_{n,g}[0,1]$ і $\inf\limits_{G\in\Gamma^r_{n,g}[0,1]} \|G\|_{C[0,1]} > 0$.

Оскільки нерівність (4.64) виконується для $t = s^A_{n+1}$, з (4.47) і того факту, що $P_r(\infty) = 0$, маємо $s_{n+1} < \infty$. З (4.47) і того факту, що похідна G'_A не може бути скільки завгодно великою, отримуємо, що $s_k \ne s_j$, $k \ne j$. Беручи до уваги (4.64) і використовуючи стандартні міркування компактності, отримаємо, що ми можемо виділити граничний g-сплайн $G = \lim\limits_{A\to\infty} G_A$, де збіжність функції і усіх її похідних до порядку $\le r-1$ є рівномірною на кожному відрізку.

Тоді G має $n+1$ точку осциляції між $-\tau\cdot(f_- + a)$ і $\tau\cdot(f_+ - a)$. Тому G має n вузлів, тобто $t_k \ne t_j$, $k \ne j$. Дійсно, G має n нулів $z_1 < \ldots < z_n$ на $[0, s_{n+1}]$ і $G(\infty) = 0$. Тому G' має $n-1$ нуль на $(0, z_n)$ і один на (z_n, ∞). Продовжуючи аналогічно, отримаємо що $G^{(r)}$ має n суттєвих змін знака, а отже G має n вузлів. З цього випливає, що $G \in \Gamma^r_{n,g}[0,\infty)$.

Функція $G + \tau a$ є шуканою. Дійсно, це ідеальний g-сплайн з рівно n вузлами і $n+1$ точками осциляції між $-\tau\cdot f_-$ і $\tau\cdot f_+$. Крім того, завдяки вибору числа a виконується умова (4.63). □

Лема 4.6.10. *Нехай $n \in \mathbb{Z}_+$, G — це ідеальний g-сплайн з леми 4.6.9 з деяким $\alpha > 0$ і $x \in W^r_{\infty,g}[0,\infty)$ є таким, що*

$$\|x\|_{C[0,\infty),f_-,f_+} \le \|G\|_{C[0,\infty),f_-,f_+}.$$

Якщо $\varepsilon \in (-1,1)$ і $\Delta = G - \varepsilon\cdot x$, то Δ' має не менше ніж n змін знака.

Доведення. Нехай $s_1 < \ldots < s_{n+1}$ — це точки осциляції G. Спочатку дове-

демо частковий випадок леми, коли $x \equiv 0$. Оскільки $\operatorname{sgn} G(s_k) = (-1)^{k+1}$, $k = 1, \dots, n+1$, то існують інтервали $I_k \subset (s_k, s_{k+1})$, такі, що $\operatorname{sgn} G'(t) = (-1)^k$ для $t \in I_k$, $k = 1, \dots, n$. Оскільки $f_\pm$ є незростаючими функціями, то існує інтервал $I_{n+1} \subset (s_{n+1}, \infty)$ такий, що $G'(t) > 0$ для непарних n і $G'(t) < 0$ для парних n, тобто $\operatorname{sgn} G'(t) = (-1)^{n+1}$, $t \in I_{n+1}$. Звідси випливає, що G' має не менше n змін знака.

Крім того, згідно з лемою 4.6.7, G' має рівно n змін знака і тому

$$\operatorname{sgn} G'(t) = (-1)^{n+1},\ t > \inf I_{n+1}. \tag{4.65}$$

Повернемось тепер до доведення леми у загальному випадку. З умови леми випливає, що $\Delta^{(r)}$ є ненульовою майже всюди і змінює знак тільки у вузлах G, тому має рівно n істотних змін знаку. Тоді $\Delta'(\infty) = 0$ згідно з лемою 4.6.6. Тому $x'(\infty) = 0$, і отже для всіх $t > 0$

$$|x'(t)| \le |P_{r-1}(t)|, \tag{4.66}$$

за лемою 4.6.8.

Нехай t_n — це останній вузол G. Тоді $G'(t) = \pm P_{r-1}(t)$, $t > t_n$, оскільки обидві функції є первісними або g, або $-g$ порядку $r-1$, які прямують до нуля у нескінченності разом з усіма їх похідними. Разом з (4.66), з цього випливає, що $|x'(t)| \le |G'(t)|$, отже

$$\operatorname{sgn} \Delta'(t) = \operatorname{sgn} G'(t) \tag{4.67}$$

для $t > t_n$.

Оскільки $\operatorname{sgn} \Delta(s_k) = (-1)^{k+1}$, $k = 1, \dots, n+1$, то існують інтервали $J_k \subset (s_k, s_{k+1})$ такі, що $\operatorname{sgn} \Delta'(t) = (-1)^k$ для $t \in J_k$, $k = 1, \dots, n$. Поєднуючи (4.65) і (4.67), отримаємо, що існує інтервал $J_{n+1} \subset (s_{n+1}, \infty)$ такий, що $\operatorname{sgn} \Delta'(t) = (-1)^{n+1}$ для $t \in J_{n+1}$. Тому Δ' має не менше n змін знака. $\square$

Застосовуючи лему 4.6.10 з $x \equiv 0$ і лему 4.6.7, маємо

Лема 4.6.11. *Якщо $n \in \mathbb{Z}_+$ і $G \in \Gamma^r_{n,g}[0, \infty)$ має n вузлів і $n+1$ точку осциляції, то* $\operatorname{sgn} G^{(r)}(0) = (-1)^r$.

4.6.3 Максимально осцилюючі ідеальні сплайни з заданою нормою

4.6.3.1 Означення функцій τ_n

Лема 4.6.12. *Нехай задано $n \in \mathbb{Z}_+$ і припустимо, що існують два ідеальні g-сплайни $G_i \in \Gamma^r_{n,g}[0,\infty)$, які максимально осцилюють між $-\tau_i \cdot f_-$ і $\tau_i \cdot f_+$, $i = 1, 2$, і*

$$G_1(\infty) = G_2(\infty). \tag{4.68}$$

Тоді $\tau_1 = \tau_2$.

Доведення. У випадку, коли $n = 0$, різниця $G_1 - G_2$ є константою, а отже через (4.68) маємо $G_1 \equiv G_2$ і лему доведено у цьому випадку.

Нехай $n > 0$. Припустимо протилежне, і нехай для визначеності $\tau_1 > \tau_2$. Нехай $0 \le s_1 < \ldots < s_{n+1}$ — це точки осциляції G_1, $0 < t_1 < \ldots < t_n$ — це вузли G_1 і $0 < u_1 < \ldots < u_n$ — це вузли G_2. Покладемо $\delta := G_1 - G_2$. Тоді $\operatorname{sgn} \delta(s_k) = \operatorname{sgn} G_1(s_k)$, $k = 1, \ldots, n+1$, і

$$\delta^{(k)}(\infty) = 0, k = 0, \ldots, r-1. \tag{4.69}$$

Тому δ має n відокремлених нулів на $(0, s_{n+1})$. З (4.69) випливає, що δ' має n відокремлених нулів на $(0,\infty)$. Продовжуючи аналогічним чином, отримаємо, що $\delta^{(r)}$ маж n істотних змін знака на $(0,\infty)$. Тому $\delta^{(r)}$ не є тотожним нулем на кожному з інтервалів (t_k, t_{k+1}), $k = 0, \ldots, n$, $t_0 := 0$, $t_{n+1} := \infty$.

Тому $u_1 < t_1$, оскільки в іншому випадку, враховуючи лему 4.6.11, $\delta^{(r)}(t) = 0$, $t \in (t_0, t_1)$; $u_2 < t_2$, оскільки у протилежному випадку $(u_1, u_2) \supset (t_1, t_2)$, і тому $\delta^{(r)}(t) = 0$, $t \in (t_1, t_2)$, і так далі, $u_n < t_n$. Але тоді ми отримаємо, що $\delta^{(r)}(t) = 0$ для $t \in (t_n, t_{n+1})$ і тому $\delta^{(r)}$ має не більше ніж $n-1$ зміну знака. Прийшли до суперечності. □

Лема 4.6.13. *Висновок леми 4.6.12 залишиться справедливим, якщо умову* (4.68) *замінити на одну з таких:*

(a) Для деякого $\alpha > 0$,

$$\frac{\tau_i f_+(\infty) - G_i(\infty)}{\tau_i f_-(\infty) + G_i(\infty)} = \alpha, i = 1, 2.$$

(b) n *є непарним і* $G_i(\infty) = \tau_i f_+(\infty)$, $i = 1, 2$.

(c) n *є парним, і* $G_i(\infty) = -\tau_i f_-(\infty)$, $i = 1, 2$.

Доведення. Спочатку доведемо у випадку (a). Покладемо $a := \frac{1}{1+\alpha} f_+(\infty) - \frac{\alpha}{1+\alpha} f_-(\infty)$. Тоді для $i = 1, 2$, $G_i(\infty) = \tau_i \cdot a$. Ідеальні g-сплайни $G_i - G_i(\infty)$ задовольняють (4.68) і осцилюють максимально між $-\tau_i(f_- + a)$ і $\tau_i(f_+ - a)$, $i = 1, 2$. З леми 4.6.12 тепер випливає, що $\tau_1 = \tau_2$.

Випадки (b) і (c) доводяться аналогічно. Ми доведемо випадок (b). Якщо $\tau_1 > \tau_2$ і $s_1 < \ldots < s_{n+1}$ — це точки осциляції G_1, то $G_1(s_{n+1}) = -\tau_1 f_-(s_{n+1}) < G_2(s_{n+1})$ і $G_1(\infty) > G_2(\infty)$. Тому різниця $G_1 - G_2$ має n нулів між точками осциляції G_1 і додатковий нуль на інтервалі (s_{n+1}, ∞), разом — не менше ніж $n+1$ відокремлених нулів. Тепер ми можемо прийти до суперечності, застосувавши аргументи з доведення леми 4.6.12. □

З твердження (a) леми 4.6.13 випливає коректність такого означення.

Означення 4.6.7. *Для фіксованих* $n \in \mathbb{Z}_+$ *і* $\alpha > 0$ *покладемо*

$$\tau_n(\alpha) = \tau_{r,n,g,f_-,f_+}(\alpha) := \|G_\alpha\|_{C_{[0,\infty)},f_-,f_+},$$

де G_α *— це сплайн з* $\Gamma^r_{n,g}[0, \infty)$ *побудований згідно з лемою 4.6.9.*

4.6.3.2 Деякі властивості функцій τ_n

Лема 4.6.14. *Для кожного* $n \in \mathbb{Z}_+$ *функція* τ_n *є неперервною на* $(0, \infty)$.

Доведення. Нехай $\beta > 0$ і $\beta_s \to \beta$, $s \to \infty$. Позначимо через G_β і G_s, $s \in \mathbb{N}$, ідеальні g-сплайни побудовані відповідно до леми 4.6.9 з α у граничній умові (4.63) зміненій на β і β_s відповідно.

Припустимо, що τ_n не є неперервною у точці β. З леми 4.6.9 випливає, що послідовність $\{\tau_n(\beta_s)\}_{s=1}^{\infty}$ є обмеженою, а тому, переходячи до підпослідовності, якщо потрібно, ми можемо вважати, що вона має границю $\lim\limits_{s\to\infty} \tau_n(\beta_s) = \tau \neq \tau_n(\beta)$.

Переходячи до підпослідовності ще раз, якщо треба, ми можемо припустити, що послідовності вузлів і точок осциляції G_s мають границі при $s \to \infty$. Крім того, аналогічно до доведення леми 4.6.9, ми можемо довести, що усі границі послідовностей точок осциляції є скінченними і різними. Тому ми отримаємо ідеальний g-сплайн $G \in \Gamma_{n,g}^r[0,\infty)$, який максимально осцилює між $-\tau f_-$ і τf_+, і задовольняє (4.63) з $\alpha = \beta$. Але це суперечить твердженню (а) леми 4.6.13. Лему доведено. □

Лема 4.6.15. *Для $n \in \mathbb{Z}_+$ функція τ_n є неспадною у випадку непарного n, і незростаючою у випадку парного n.*

Доведення. Доведемо лему у випадку непарного n; випадок парного n можна довести аналогічно.

Для кожного $\alpha > 0$ нехай G_α — це ідеальний g-сплайн побудований згідно з лемою 4.6.9. Тоді в силу (4.63),

$$G_\alpha(\infty) = \frac{\tau_n(\alpha)}{\alpha+1}\left(f_+(\infty) - \alpha \cdot f_-(\infty)\right). \tag{4.70}$$

Відмітимо, що з леми 4.6.14 і (4.70) випливає, що $G_\alpha(\infty)$ є неперервною функцією змінної α. Оскільки n є непарним, то G_α зростає на інтервалі (M_α, ∞), де $M_\alpha > 0$ — це остання точка осциляції g-сплайна G_α.

Припустимо протилежне, нехай $0 < \gamma < \beta$ є такими, що $\tau_n(\gamma) > \tau_n(\beta)$. Ми стверджуємо, що

$$G_\beta(\infty) > G_\gamma(\infty). \tag{4.71}$$

Дійсно, у протилежному випадку ми отримаємо додатковий нуль функції $G_\gamma - G_\beta$ на інтервалі $(M_\gamma, \infty]$ і прийдемо до суперечності використовуючи міркування аналогічні тим, які були використані у доведенні леми 4.6.12.

Для довільного $0 < \alpha < \beta$ маємо $G_\alpha(\infty) \neq G_\beta(\infty)$. Дійсно, інакше з леми 4.6.12 отримаємо $\tau_n(\alpha) = \tau_n(\beta)$, і тому, в силу (4.70), $\alpha = \beta$, що

неможливо. З неперервності $G_\alpha(\infty)$ і (4.71) тепер випливає, що

$$G_\beta(\infty) > G_\alpha(\infty) \text{ для всіх } 0 < \alpha < \beta. \tag{4.72}$$

Відмітимо, що рівність (4.70) може бути записаною

$$G_\alpha(\infty) = \tau_n(\alpha) f_+(\infty) - \frac{\alpha}{1+\alpha}\tau_n(\alpha)(f_+(\infty) + f_-(\infty)).$$

Тоді $G_\beta(\infty) < \tau_n(\beta) f_+(\infty)$. Нехай число $\varepsilon > 0$ вибрано так, що $G_\beta(\infty)+\varepsilon < \tau_n(\beta) f_+(\infty)$. Маємо $\frac{\alpha}{1+\alpha}\tau_n(\alpha)(f_+(\infty) + f_-(\infty)) < \varepsilon$ для достатньо малих $\alpha > 0$, і тому для таких α

$$\begin{aligned}\tau_n(\alpha) f_+(\infty) = G_\alpha(\infty) + \frac{\alpha}{1+\alpha}\tau_n(\alpha)(f_+(\infty) + f_-(\infty)) \\ < G_\alpha(\infty) + \varepsilon < G_\beta(\infty) + \varepsilon < \tau_n(\beta) f_+(\infty).\end{aligned}$$

Тому для всіх достатньо малих $\alpha > 0$ маємо $\tau_n(\alpha) < \tau_n(\beta)$. Але з цієї нерівності випливає, що різниця $G_\beta - G_\alpha$ має n відокремлених нулів між точками осциляції G_β, і додатковий нуль на інтервалі (M_β, ∞) згідно з (4.72). Використовуючи аргументи як у доведенні леми 4.6.12, прийдемо до суперечності. Лему доведено. □

Лема 4.6.16. *Для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $\alpha, \beta > 0$ маємо $\tau_n(\alpha) \le \tau_{n-1}(\beta)$.*

Доведення. Припустимо протилежне, нехай $\tau_n(\alpha) > \tau_{n-1}(\beta)$. Нехай G_α і G_β — це максимально осцилюючі сплайни, побудовані згідно з лемою 4.6.9 з n і $n-1$ вузлами відповідно. Покладемо $\Delta := G_\alpha - G_\beta$.

Нехай $s_1 < \ldots < s_{n+1}$ — це точки осциляції G_α і нехай для визначеності $n = 2k-1$ є непарним числом, $k \in \mathbb{N}$. Тоді для кожного $m = 1, \ldots, 2k-1$, існує $s_m^1 \in (s_m, s_{m+1})$ таке, що $(-1)^m \Delta'(s_m^1) > 0$. Крім того, G_α зростає на (s_{2k}, ∞) і G_β спадає на (M, ∞), де M — це остання точка осциляції G_β. Тому існує $s_{2k}^1 > s_{2k-1}^1$ таке, що $\Delta'(s_{2k}^1) > 0$. Отже, Δ' має $2k-1$ змін знака і, крім того, $\Delta'(\infty) = 0$. Тому Δ'' має $2k-1$ змін знака і $\Delta''(\infty) = 0$. Продовжуючи аналогічно, отримаємо, що $\Delta^{(r)}$ має не менше ніж $2k-1 = n$ істотних змін знака. Але $\Delta^{(r)}$ може змінювати знак тільки у вузлах G_β, тобто не більше ніж $n-1$ раз. Прийшли до суперечності. □

4.6.3.3 Асимптотична поведінка функцій τ_n

Лема 4.6.17. *Нехай $n \in \mathbb{N}$ і $G \in \Gamma^r_{n,g}[0,\infty)$ має $n+1$ точку осциляції між $-f_-$ і f_+. Припустимо, що $s_1 < \ldots < s_n$ — це усі нулі G' і $t_1 < \ldots < t_n$ — вузли G. Тоді $t_k \geq s_k$, $k = 1, \ldots, n$.*

Доведення. Припустимо протилежне, нехай $k \in \{1, \ldots, n\}$ є таким, що $t_k < s_k$. Тоді існує $\varepsilon > 0$ таке, що G має не більше ніж $n-k$ вузлів на інтервалі $(s_k - \varepsilon, \infty)$. Оскільки усі нулі G' є простими, то на інтервалі $(s_k - \varepsilon, \infty)$ функція G' змінює знак у кожній точці s_l, $l = k, \ldots, n$, всього $n-k+1$ разів. Оскільки $G'(\infty) = 0$, G'' має не менше ніж $n-k+1$ змін знака на $(s_k - \varepsilon, \infty)$. Продовжуючи аналогічно, отримаємо, що $G^{(r)}$ має не менше $n-k+1$ змін знака на $(s_k - \varepsilon, \infty)$. Але це неможливо, оскільки на цьому інтервалі не більше ніж $n-k$ вузлів. Лему доведено. □

Наступні дві леми описують границі сплайнів, що побудовані у лемі 4.6.9 при $\alpha \to +0$ і $\alpha \to \infty$. Для скорочення позначень ми пишемо $\tau_n(+0)$ замість $\lim\limits_{\alpha \to +0} \tau_n(\alpha)$. Границі $\tau_n(+0)$, $n \in \mathbb{N}$, і $\tau_n(\infty) := \lim\limits_{\alpha \to \infty} \tau_n(\alpha)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, існують, оскільки τ_n є монотонною згідно з лемою 4.6.15. Крім того, ці границі додатні і скінченні в силу лем 4.6.15 і 4.6.16.

Лема 4.6.18. *Якщо число n є непарним, то існує ідеальний g-сплайн $G_0 \in \Gamma^r_{n,g}[0,\infty)$, який має рівно n вузлів і $n+1$ точку осциляції між $-\tau_n(+0)f_-$ і $\tau_n(+0)f_+$, і такий, що $G_0(\infty) = \tau_n(+0)f_+(\infty)$.*

Якщо додатково

$$\varliminf_{t \to \infty} \frac{f_-(t) - f_-(\infty)}{|P_r(t)|} = 0, \tag{4.73}$$

то існує ідеальний g-сплайн $G_\infty \in \Gamma^r_{n-1,g}[0,\infty)$ з рівно $n-1$ вузлом і n точками осциляції між $-\tau_n(\infty)f_-$ і $\tau_n(\infty)f_+$, і такий, що

$$G_\infty(\infty) = -\tau_n(\infty) \cdot f_-(\infty).$$

Доведення. Для кожного $\alpha > 0$ позначимо через G_α ідеальний g-сплайн з n вузлами, побудований згідно з лемою 4.6.9. Нехай $s_1^\alpha < \ldots < s_{n+1}^\alpha$ —

це його точки осциляції. Оскільки n непарне, то G_α зростає на інтервалі (s_{n+1}^α, ∞).

Опишемо доведення існування G_0. Нехай G_0 — це граничний g-сплайн відповідним чином вибраної послідовності сплайнів G_α, $\alpha \to +0$, і нехай $s_{n+1} = \lim\limits_{\alpha\to+0} s_{n+1}^\alpha$. Оскільки

$$G_\alpha(\infty) - G_\alpha(s_{n+1}^\alpha) \geq G_\alpha(\infty) + \tau_n(\alpha) f_-(\infty),$$

і доданок $\tau_n(\alpha) f_-(\infty)$ є відділеним від нуля константою незалежною від α, то з леми 4.6.8 випливає, що $s_{n+1} < \infty$. Повторюючи аргументи з доведення леми 4.6.9, можемо довести, що G_0 є шуканим g-сплайном.

Далі ми доведемо існування g-сплайна G_∞.

Переходячи до підпослідовності, якщо треба, можемо вважати, що числа $s_1 \leq \ldots \leq s_{n+1}$ — це (скінченні або нескінченні) границі послідовностей $s_1^\alpha, \ldots, s_{n+1}^\alpha$ при $\alpha \to \infty$. Нехай G_∞ — це граничний g-сплайн у цій послідовності G_α. Позначимо через z_n^α останній нуль G'_α і $z_n = \lim\limits_{\alpha\to\infty} z_n^\alpha$ (якщо треба, то ще раз переходимо до підпослідовності). Доведемо, що

$$z_n = \infty. \tag{4.74}$$

Припустимо протилежне, нехай $z_n < \infty$. Тоді G_∞ зростає на (z_n, ∞), і тому $G_\infty(t) = G_\infty(\infty) - |P_r(t)|$ для всіх достатньо великих t, оскільки звуження G_∞ на інтервал (M, ∞) з достатньо великим M є первісною порядку r функції g або функції $-g$.

З (4.73) випливає, що існує скільки завгодно велике число t таке, що

$$\frac{f_-(t) - f_-(\infty)}{|P_r(t)|} < \frac{1}{\tau_n(\infty)}.$$

Тому

$$\begin{aligned} G_\infty(t) = G_\infty(\infty) - |P_r(t)| &= -\tau_n(\infty) f_-(\infty) - |P_r(t)| \\ &< \tau_n(\infty)(-f_-(\infty) - f_-(t) + f_-(\infty)) = -\tau_n(\infty) f_-(t), \end{aligned}$$

що неможливо. Тому виконується (4.74), і отже $s_{n+1} = \infty$.

З леми 4.6.8 випливає, що для всіх $\alpha > 0$

$$|G_\alpha(s_{n+1}^\alpha) - G_\alpha(s_n^\alpha)| = |G_\alpha(s_{n+1}^\alpha) - G_\alpha(\infty) - (G_\alpha(s_n^\alpha) - G_\alpha(\infty))|$$
$$\leq |G_\alpha(s_{n+1}^\alpha) - G_\alpha(\infty)| + |G_\alpha(s_n^\alpha) - G_\alpha(\infty)| \leq |P_r(s_{n+1}^\alpha)| + |P_r(s_n^\alpha)|,$$

тому s_n^α не може бути скільки завгодно великим через (4.47). Тому $s_n < \infty$.

З леми 4.6.17 і (4.74) випливає, що G_∞ не може мати n вузлів. З іншого боку, G_∞ має n точок осциляції, а тому не може мати менше за $n-1$ вузол. Тому G_∞ має рівно $n-1$ вузол. Тому G_∞ є шуканим ідеальним g-сплайном і лему доведено. □

Лема 4.6.19. *Якщо число n є парним, то існує ідеальний g-сплайн $G_\infty \in \Gamma_{n,g}^r[0,\infty)$, який має рівно n вузлів і $n+1$ точку осциляції між $-\tau_n(\infty)f_-$ і $\tau_n(\infty)f_+$, і такий, що $G_\infty(\infty) = -\tau_n(\infty)f_-(\infty)$.*

Якщо $n \geq 2$ і додатково

$$\varliminf_{t\to\infty} \frac{f_+(t) - f_+(\infty)}{|P_r(t)|} = 0, \tag{4.75}$$

то існує ідеальний g-сплайн $G_0 \in \Gamma_{n-1,g}^r[0,\infty)$ з рівно $n-1$ вузлом, який має n точок осциляції між $-\tau_n(+0)f_-$ і $\tau_n(+0)f_+$, і такий, що

$$G_0(\infty) = \tau_n(+0) \cdot f_+(\infty).$$

Якщо виконується (4.75), *то $\tau_0(+0) = \infty$.*

Доведення. Ми доведемо останнє твердження леми, усі інші твердження можуть бути доведені аналогічно до леми 4.6.18.

Сплайн G_α, $\alpha > 0$, з леми 4.6.9 з 0 вузлами має вигляд $G_\alpha(t) = |P_r(t)| + C_\alpha$, $C_\alpha \in \mathbb{R}$. Якщо $\tau := \tau_0(+0) < \infty$, то сплайни G_α прямують до $G := |P_r| + \tau f_+(\infty)$ для деякої послідовності $\alpha \to +0$. Але з умови (4.75) випливає, що для деякого достатньо великого t, $G(t) = |P_r(t)| + \tau f_+(\infty) > \tau f_+(t)$, що неможливо. Лему доведено. □

4.6.4 Доведення основних теорем

4.6.4.1 Доведення теореми 4.6.2

Ми доводимо твердження (a) і (b) для g-сплайнів з додатно орієнтовними точками осциляції. Через зв'язок, описаний у зауваженні 4.6.1, випадок від'ємно орієнтованих точок осциляції може бути доведеним аналогічно.

Доведення. Нехай задано деяке $n \in \mathbb{Z}_+$. Для $\alpha \in (0, \infty)$ позначимо через $G_{n,\alpha}$ ідеальний g-сплайн з n вузлами з леми 4.6.9. Покладемо

$$T_n := \left\{ \|G_{n,\alpha}\|_{C[0,\infty),f_-,f_+} : \alpha \in (0, \infty) \right\}.$$

З леми 4.6.14 випливає, що T_n є інтервалом (відкритим, напіввідкритим або замкненим). Для усіх $t \in T_{n+1}$ і $s \in T_n$, маємо $t \leq s$, згідно з лемою 4.6.16. Тому $\sup T_{n+1} \leq \inf T_n$. Ми стверджуємо, що $\sup T_{n+1} = \inf T_n$.

Нехай для визначеності n буде парним. Тоді $n+1$ є непарним і позначимо через G_1 ідеальний g-сплайн G_∞ з леми 4.6.18 з n заміненим на $n+1$; згідно з лемою 4.6.15, $\tau_{n+1}(\infty) = \sup\limits_{\alpha>0} \tau_{n+1}(\alpha) = \sup T_{n+1}$.

Позначимо через G_2 ідеальний g-сплайн G_∞ з леми 4.6.19; згідно з лемою 4.6.15, $\tau_n(\infty) = \inf\limits_{\alpha>0} \tau_n(\alpha) = \inf T_n$. З випадку (c) леми 4.6.13 тепер отримаємо $\sup T_{n+1} = \inf T_n$.

Оскільки

$$\bigvee_0^\infty G_{n,\alpha} = \int_0^\infty |G'_{n,\alpha}(t)| dt,$$

то застосовуючи лему 4.6.8 до G' отримаємо, що варіації усіх сплайнів $G_{n,\alpha}$ обмежені деяким числом, що не залежить від n і α. Припущення 4.6.2 тепер дає $\inf T_n \to 0$ при $n \to \infty$. Для завершення доведення твердження (a), достатньо покласти $a^+_{n+1} := \inf T_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$ і відмітити, що $\sup T_0 = \infty$ згідно з лемою 4.6.19.

Для доведення твердження (b), достатньо застосувати лему 4.6.10 з $x \equiv 0$, лему 4.6.7 і помітити, що $G^+_\tau(0) > 0$ і G_τ спадає на першому інтервалі монотонності.

Для доведення властивості (c), перш за все відмітимо, що рівності (4.49) і (4.50) виконуються згідно з лемами 4.6.18 і 4.6.19.

Припустимо протилежне, нехай $G \in \Gamma^r_{n,g}[0,\infty)$ є таким, що

$$\|G\|_{C[0,\infty),f_-,f_+} < \min \|G_n^{\pm}\|_{C[0,\infty),f_-,f_+}.$$

Позначимо через G_n один з g-сплайнів $G^{\pm}_{a^{\pm}_{n+1}}$ для якого

$$\operatorname{sgn} G_n^{(r)}(0) = \operatorname{sgn} G^{(r)}(0).$$

Це можна зробити через (4.48).

Нехай s_k, $k = 1, \dots n+1$ — це точки осциляції G_n і $s_{n+2} = \infty$. Покладемо $\delta := G_n - G$. Тоді $\operatorname{sgn} \delta(s_k) = \operatorname{sgn} G_n(s_k)$, $k = 1, \dots, n+1$. Крім того, ця рівність також виконується для $k = n+2$, згідно з (4.49) або (4.50). Використовуючи аргументи з доведення леми 4.6.12, прийдемо до суперечності. □

4.6.4.2 Доведення теореми 4.6.3

Твердження теореми є комбінацією лем 4.6.9, 4.6.14, 4.6.15, 4.6.16, 4.6.18 і 4.6.19.

4.6.4.3 Доведення теореми 4.6.4

Доведення. Нехай $x \in W^r_{f_-,f_+,g}[0,\infty)$, $\|x\|_{C[0,\infty),f_-,f_+} \le \delta$ і припустимо, що

$$\|x^{(k)}\|_{C[0,\infty)} > \max\left\{|(G_\delta^+)^{(k)}(0)|, |(G_\delta^-)^{(k)}(0)|\right\}. \tag{4.76}$$

Оскільки $f_\pm$ і g є незростаючими, то для довільного $\alpha \ge 0$ маємо $x(\cdot + \alpha) \in W^r_{f_-,f_+,g}[0,\infty)$, і $\|x\|_{C[0,\infty),f_-,f_+} \ge \|x(\cdot+\alpha)\|_{C[0,\infty),f_-,f_+}$. Тому без зменшення загальності можемо вважати, що $\|x^{(k)}\|_{C[0,\infty)} = |x^{(k)}(0)|$.

Позначимо через G одну з функцій $G_\delta^{\pm}$, так, щоб виконувалась умова

$$\operatorname{sgn} x^{(k)}(0) = \operatorname{sgn} G^{(k)}(0). \tag{4.77}$$

Це можна зробити згідно з (4.48).

Припустимо для визначеності, що $G = G_\delta^+$, цей сплайн має n вузлів і $n+1$ точку осциляції $s_1 < \ldots < s_{n+1}$. Існує $\varepsilon > 0$ таке, що $(1-\varepsilon)|x^{(k)}(0)| > |G^{(k)}(0)|$. Покладемо $\Delta = G - (1-\varepsilon)x$.

З лем 4.6.10 і 4.6.7 випливає, що функції $\Delta^{(m)}$ і $G^{(m)}$, $m = 0, \ldots, r-1$, є $n+1$-кусково монотонними. Крім того, $\operatorname{sgn}\Delta(s_1) = \operatorname{sgn} G(s_1) = 1$. Застосовуючи аргументи з доведення леми 4.6.10, можна довести, що функції Δ і G є спадними на їх першому проміжку монотонності. Тоді з леми 4.6.7 випливає, що

$$\operatorname{sgn}\Delta^{(m)}(0) = \operatorname{sgn} G^{(m)}(0) = (-1)^m, m = 0, \ldots, r-1.$$

Але ці рівності з $m = k$ суперечать (4.76) і (4.77). □

Висновки до розділу 4

У цьому розділі доведено нерівності для похідних типу Надя і типу Ландау–Колмогорова, а також розв'язано пов'язані задачі, зокрема досліджуються задачі знаходження модуля неперервності операторів, задача Стєчкіна, задача оптимального відновлення оператора на множинах елементів заданих з похибкою, та деякі інші. Основними результатами даного розділу є:

1. Доведено точні нерівності типу Надя на класах $H^\omega(X)$ і $W^{1,p}(C)$, а також у метричних просторах з мірою. Як наслідки, доведено нерівності типу Ландау–Колмогорова для похідних Радона–Нікодима зарядів з деяких класів, розв'язано деякі задачі про наближення необмежених операторів обмеженими, та інші пов'язані задачі.

2. Досліджено модуль неперервності оператора кратного диференціювання на класах Соболєва функцій заданих на пів осі, і які мають неконстантні мажоранти функцій і їх старших похідних. У цих класах побудовано аналоги ідеальних сплайнів і доведено теореми про вужів для цих сплайнів. Отримані сплайни з максимально можливою

кількістю точок осциляції є екстремальними для задачі про модуль неперервності оператора кратного диференціювання.

Висновки

У дисертаційній роботі вивчаються класичні екстремальні задачі теорії наближень. Отримано розв'язання деяких задач найкращого відновлення операторів і функціоналів, доведено нерівності для похідних типу Ландау–Колмогорова і типу Надя, а також нерівності типу Островського, розглядається задача Стєчкіна про наближення необмежених операторів обмеженими і задача про обчислення модуля неперервності деяких операторів, а також розв'язано деякі інші екстремальні задачі.

Головними результатами роботи є:

1. Отримано розв'язання серії екстремальних задач на класах функцій зі значеннями у L–просторах, тобто у напівлінійних метричних просторах з додатковими аксіомами, що пов'язують метрику з алгебраїчними операціями. Узагальнено лему Корнєйчука–Стєчкіна на випадок класу $H^\omega([a,b],X)$ функцій зі значеннями у L–просторі X, що мають задану мажоранту ω модуля неперервності. Розв'язано задачі оптимального відновлення опуклюючого оператора і оператора інтегрування на класі $H^\omega([a,b],X)$ по інформації, що дає $n \in \mathbb{N}$ середніх значень функції по малих інтервалах; задачі оптимального відновлення одиничного оператора і оператора похідної типу Хукухара на класі $W^1H^\omega([a,b],X)$ функцій, чия похідна типу Хукухара належить до $H^\omega([a,b],X)$, інформаційний оператор дає інформацію про n значень функції в деяких точках; отримано точні оцінки відхилення між середніми по двом інтервалам значеннями функції з класу $H^\omega([a,b],X)$. Крім того, розв'язано задачі оптимального відновлення

монотонних операторів на класах монотонних функцій зі значеннями у частково впорядкованому L–просторі, а також деякі задачі найкращого наближення операторів, зокрема розглядається задача Стєчкіна про наближення необмежених операторів, що діють на класах функцій зі значеннями у L–просторах, обмеженими операторами.

2. Отримано розв'язання деяких екстремальних задач на класах Соболєва $W^{1,p}(C)$, $C \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ функцій багатьох змінних. Зокрема, отримано розв'язання задачі Стєчкіна про наближення, взагалі кажучи, необмежених гіперсингулярних інтегральних операторів (частковим випадком яких є дробова похідна в сенсі Ріса) за допомогою обмежених. Для таких інтегральних операторів отримано точні нерівності типу Ландау–Колмогорова, знайдено модуль неперервності, а також розв'язано задачу оптимального відновлення на класах елементів відомих з похибкою. Ми також розв'язуємо задачі оптимізації квадратурних формул для інтеграла з одиничною, або неодиничною вагою.

3. Ми пропонуємо загальний підхід до розв'язання деяких екстремальних задач теорії апроксимації і ілюструємо його доведенням серії точних нерівностей типу Островського. Ми вводимо до розгляду новий клас функцій обмеженої варіації, досліджуємо деякі властивості таких функцій і доводимо точну нерівність типу Островського. На класі випадкових процесів з заданою мажорантою модуля неперервності, ми доводимо точну нерівність типу Островського, що оцінює відхилення інтеграла випадкового процесу від його значення у випадковий момент часу. Ця нерівність далі використовується у задачі оптимізації квадратурних формул для цього класу випадкових процесів. Крім того, ми розглядаємо задачу оптимізації інформаційного оператора.

4. Ми доводимо нерівності типу Надя у метричних просторах з мірою, у соболєвських просторах функцій декількох змінних, а також у ме-

тричних просторах Соболєва із мірою. Крім того, ми отримуємо точні нерівності типу Ландау–Колмогорова для похідних Радона–Нікодима зарядів деяких класів. Ми також розв'язуємо задачу Стєчкіна для оператора вкладення, оператора похідної Радона–Нікодима і оператора мішаної похідної на деяких класах. Ми знаходимо модуль неперервності оператора кратного диференціювання на вагових класах Соболєва функцій, заданих на пів осі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] R.A. Adams, J.J.F. Fournier. *Sobolev Spaces.* ISSN. Elsevier Science, 2003.

[2] L. Ambrosio, P. Tilli. *Topics on Analysis in Metric Spaces.* Volume 25 of Oxford Lecture Mathematics. Oxford University Press, 2004.

[3] G.A. Anastassiou. Ostrowski type inequalities. *Proc. AMS*, **123**, 3775–3791, 1995.

[4] G.A. Anastassiou. Fuzzy Ostrowski type inequalities. *Comput. Appl. Math.*, **22**, №2, 279–292, 2003.

[5] G.A. Anastassiou. *Fuzzy Mathematics: Approximation Theory.* Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer, 2010.

[6] G.A. Anastassiou. Ostrowski and Landau inequalities for Banach space valued functions. *Math. Comput. Model.*, **55**, №3, 312 – 329, 2012. doi:10.1016/j.mcm.2011.08.003.

[7] G.A. Anastassiou. Multidimensional Ostrowski type inequalities for Banach space valued functions. In *Intelligent Comparisons: Analytic Inequalities*, 291–340. Springer International Publishing, Cham, 2016.

[8] V.V. Arestov. Inequalities for fractional derivatives on the half-line. *Approximation Theory. Banach Center Publication, PWN, Warsaw*, 19–34, 1979.

[9] V.V. Arestov. Approximation of unbounded operators by bounded operators and related extremal problems. *Russ. Math. Surv.*, **51**, №6, 1093–1126, 1996. doi:10.1070/RM1996v051n06ABEH003001.

[10] V.V. Arestov, V.N. Gabushin. Best approximation of unbounded operators by bounded operators. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, **39**, №11, 38–63, 1995.

[11] B.C. Arnold. *Majorization and the Lorenz Order: A Brief Introduction*, volume 43 of *Lecture Notes in Statistics*. Springer-Verlag, 1987.

[12] S.M. Aseev. Quasilinear operators and their application in the theory of multivalued mappings. *Proc. Steklov Inst. Math.*, **167**, 23–52, 1986.

[13] J.P. Aubin, H. Frankowska. *Set-valued analysis*. Birkhäuser, Boston, 1990.

[14] V. Babenko. Numerical methods for solution of Volterra and Fredholm integral equations for functions with values in L-spaces. *Appl. Math. Comput.*, **291**, 354–372, 2016. doi:10.1016/j.amc.2016.07.024.

[15] V. Babenko. Calculus and nonlinear integral equations for functions with values in L-spaces. *Anal. Math.*, **45**, 727–755, 2019. doi:10.1007/s10476-019-0004-3.

[16] V. Babenko, V. Babenko, O. Kovalenko. Optimal recovery of monotone operators in partially ordered L-spaces. *Numer. Func. Anal. Opt.*, **41**, №11, 1373–1397, 2020. doi:10.1080/01630563.2020.1775251.

[17] V. Babenko, V. Babenko, O. Kovalenko. Fixed points theorems in Hausdorff M-distance spaces. *arXiv:2111.13625*, 2021.

[18] V. Babenko, V. Babenko, O. Kovalenko. Korneichuk-Stechkin lemma, Ostrowski and Landau inequalities, and optimal recovery problems for L-space valued functions. *Numer. Func. Anal. Opt.*, **44**, №12, 1309–1341, 2023. doi:10.1080/01630563.2023.2246540.

[19] V. Babenko, V. Babenko, O. Kovalenko, M. Polishchuk. Optimal recovery of operators in function L-spaces. *Anal. Math.*, **47**, 13–32, 2021. doi:10.1007/s10476-021-0065-y.

[20] V. Babenko, Yu. Babenko, O. Kovalenko. On multivariate Ostrowski type

inequalities and their applications. *Math. Ineq. Appl.*, **23**, №2, 569–583, 2020. doi:10.7153/mia-2020-23-47.

[21] V. Babenko, O. Kovalenko, N. Parfinovych. On approximation of hypersingular integral operators by bounded ones. *J. Math. Anal. Appl.*, **513**, №2, 126215, 2022. doi:10.1016/j.jmaa.2022.126215.

[22] V.F. Babenko. Asymptotically sharp bounds for the best quadrature formulas for several classes of functions. *Math. Notes*, **19**, №3, 187–193, 1976. doi:10.1007/BF01437850.

[23] V.F. Babenko. Faithful asymptotics of remainders optimal for some classes of functions with cubic weight formulas. *Math. Notes*, **20**, №4, 887–890, 1976.

[24] V.F. Babenko. On the optimal error bound for cubature formulas on certain classes of continuous functions. *Anal. Math.*, **3**, №1, 3–9, 1977.

[25] V.F. Babenko. Approximation of convolution classes. *Siberian Math. J.*, **28**, №5, 697–709, 1987.

[26] V.F. Babenko, V.V. Babenko. Optimization of approximate integration of set-valued functions monotone with respect to inclusion. *Ukr. Math. J.*, **63**, №2, 177–186, 2011. doi:10.1007/s11253-011-0496-x.

[27] V.F. Babenko, V.V. Babenko. Best approximation, optimal recovery, and Landau inequalities for derivatives of Hukuhara-type in function L-spaces. *J. Appl. Numer. Optim.*, **1**, 167–182, 2019. doi:10.23952/jano.1.2019.2.07.

[28] V.F. Babenko, V.V. Babenko, O.V. Kovalenko, N.V. Parfinovych. Estimates for the deviations of integral operators in semilinear metric spaces and their applications. *Ukr. Math. J.*, **74**, 685–697, 2022. doi:10.1007/s11253-022-02094-2. Translation of Ukrain. Mat. Zh. **74** (5) 599–609, 2022.

[29] V.F. Babenko, V.V. Babenko, O.V. Kovalenko, N.V. Parfinovych. General form of (λ, φ)-additive operators on spaces of L-space-valued functions. *Res. Math.*, **30**, №1, 3–9, 2022. doi:10.15421/242201.

[30] V.F. Babenko, V.V. Babenko, O.V. Kovalenko, N.V. Parfinovych. Nagy type inequalities in metric measure spaces and some

applications. *Carpathian Math. Publ.*, **15**, №2, 563–575, 2023. doi:10.15330/cmp.15.2.563-575.

[31] V.F. Babenko, V.V. Babenko, O.V. Kovalenko, N.V. Parfinovych. On Landau – Kolmogorov type inequalities for charges and their applications. *Res. Math.*, **31**, №1, 3–16, 2023. doi:10.15421/242301.

[32] V.F. Babenko, V.V. Babenko, O.V. Kovalenko, N.V. Parfinovych. Some sharp Landau–Kolmogorov–Nagy-type inequalities in Sobolev spaces of multivariate functions. *Ukr. Math. J.*, **75**, 1525–1532, 2024. doi:10.1007/s11253-024-02275-1. Translation of Ukrain. Mat. Zh. **75** (10) 1347–1353, 2023.

[33] V.F. Babenko, V.V. Babenko, M.V. Polischuk. On the optimal recovery of integrals of set-valued functions. *Ukr. Math. J.*, **67**, №9, 1306–1315, 2016. doi:10.1007/s11253-016-1154-0.

[34] V.F. Babenko, V.V Babenko, M.V. Polishchuk. Approximation of some classes of set-valued periodic functions by generalized trigonometric polynomials. *Ukr. Math. J.*, **68**, №4, 502–514, 2016. doi:10.1007/s11253-016-1237-y.

[35] V.F. Babenko, Yu.V. Babenko, O.V. Kovalenko. On asymptotically optimal cubatures for multidimensional Sobolev spaces. *Res. Math.*, **29**, №2, 15–27, 2021. doi:10.15421/242106.

[36] V.F. Babenko, S.V. Borodachev. Optimization of approximate integration of monotone functions of two variables. *Ukr. Math. J.*, **51**, 986–995, 1999. doi:10.1007/BF02592035.

[37] V.F. Babenko, M.S. Churilova. Kolmogorov type inequalities for hypersingular integrals with homogeneous characteristic. *Banach J. Math. Anal.*, **1**, №1, 66 – 77, 2007. doi:10.15352/bjma/1240321556.

[38] V.F. Babenko, V.A. Kofanov, S.A. Pichugov. On inequalities of Landau-Hadamard-Kolmogorov type for L_2-norm of intermediate derivatives. *East J. Approx.*, **2**, №3, 343–368, 1996.

[39] V.F. Babenko, V.A. Kofanov, S.A. Pichugov. Exact inequalities of

Kolmogorov type for multivariate functions and their applications. *East J. Approx.*, **3**, №2, 155–188, 1997.

[40] V.F. Babenko, V.A. Kofanov, S.A. Pichugov. Multivariate inequalities of Kolmogorov type and their applications. In G. Nerberger, J.W. Schmidt, editors, *Multivariate approximation and splines*, 1–12. Birkhuser Verlag, Walz. Basel, 1997.

[41] V.F. Babenko, V.A. Kofanov, S.A. Pichugov. Inequalities of Kolmogorov type and some their applications in approximation theory. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Serie II, Suppl.*, **52**, 223–237, 1998.

[42] V.F. Babenko, V.A. Kofanov, S.A. Pichugov. Inequalities of Nagy type for periodic functions. *East J. Approx.*, **11**, №1, 3–11, 2005.

[43] V.F. Babenko, O.V. Kovalenko. On modulus of continuity of differentiation operator on weighted Sobolev classes. *J. Inequal. Appl.*, **2015:295**, 2015. doi:10.1186/s13660-015-0822-1.

[44] V.F. Babenko, A.A. Ligun. Development of studies on the exact solution of extremal problems of the theory of best approximation. *Ukr. Math. J.*, **42**, №1, 1–13, 1990.

[45] V.F. Babenko, N.V. Parfinovich. Inequalities of the Kolmogorov type for norms of Riesz derivatives of multivariate functions and some of their applications. *J. Math. Sci.*, **187**, 9–21, 2012. doi:10.1007/s10958-012-1045-3.

[46] V.F. Babenko, N.V. Parfinovich. Kolmogorov type inequalities for norms of Riesz derivatives of multivariate functions and some applications. *Proc. Steklov Inst. Math*, **277**, 9–20, 2012. doi:10.1134/S0081543812050033.

[47] V.F. Babenko, N.V. Parfinovich. Estimation of the uniform norm of one-dimensional Riesz potential of the partial derivative of a function with bounded Laplacian. *Ukr. Math. J.*, **68**, 987–999, 2016. doi:10.1007/s11253-016-1272-8.

[48] V.F. Babenko, N.V. Parfinovich, S.A. Pichugov. Sharp Kolmogorov-type inequalities for norms of fractional derivatives of multivariate functions. *Ukr. Math. J.*, **62**, 343–357, 2010. doi:10.1007/s11253-010-0358-y.

[49] V.F. Babenko, N.V. Parfinovich, S.A. Pichugov. Kolmogorov-type inequalities for norms of Riesz derivatives of functions of several variables with Laplacian bounded in L_∞ and related problems. *Math. Notes*, **95**, 3–14, 2014. doi:10.1134/S0001434614010015.

[50] V.F. Babenko, S.A. Pichugov. Best linear approximation of some classes of differentiable periodic functions. *Math. Notes*, **27**, №5, 325–329, 1980.

[51] V.F. Babenko, S.A. Pichugov. Kolmogorov type inequalities for fractional derivatives of Hölder functions of two variables. *East J. Approx.*, **13**, №3, 321–329, 2007.

[52] V.F. Babenko, S.A. Pichugov. Exact estimates of norms of fractional derivatives of multivariate functions sutisfying Hölder conditions. *Math. Notes*, **87**, 26–34, 2010. doi:10.1134/S0001434610010049.

[53] V.F. Babenko, D.S. Skorokhodov. On the best interval quadrature formulae for classes of differentiable periodic functions. *J. Complexity*, **23**, №4, 890–917, 2007. doi:10.1016/j.jco.2007.03.005.

[54] V.F. Babenko, D.S. Skorokhodov. On the best interval quadrature formulae for convolution classes. *East J. Approx.*, **14**, №3, 353–376, 2008.

[55] V.V. Babenko. Optimization of interval formulas for approximate integration of set-valued functions monotone with respect to inclusion. *Ukr. Math. J.*, **63**, №11, 1781–1786, 2012. doi:10.1007/s11253-012-0613-5.

[56] S. Bagdasarov. *Chebyshev Splines and Kolmogorov Inequalities.* Operator theory. Springer, 1998.

[57] S. Banach. Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie. *Fund. Math.*, **7**, 225–236, 1925.

[58] N.S. Barnet, P. Cerone, A.M. Dragomir, Fink A.M. Comparing two integral means for absolutely continuous mappings whose derivatives are in $L_\infty[a,b]$ and applications. *Comput. Math. Appl.*, **44**, №1, 241 – 251, 2002.

[59] Yu.M. Berezanski, G.F. Us, Z.G. Sheftel. *Functional analysis.* Elsevier Science, 2003.

[60] V.I. Bogachev. *Measure Theory, V. 2.* Springer, 2007.

[61] T. Bonnesen, W. Fenchel, L.F. Boron, C.O. Christenson, B.A. Smith. *Theory of Convex Bodies.* BCS Associates, 1987.

[62] Yu.G. Borisovich, B.D. Gel'man, A.D. Myshkis, V.V. Obukhovskii. Multivalued mappings. *J. Sov. Math.*, **24**, №6, 719–791, 1984.

[63] S.V. Borodachev. On optimization of "interval" and "pointwise" quadrature formulas for classes of monotone functions. *Ukr. Math. J.*, **53**, 1002–1011, 2001.

[64] K. Borsuk. Drei sätze über die n-dimensionale Euklidische sphäre. *Fundamenta Mathematicae*, **20**, №1, 177–190, 1933.

[65] A.P. Buslaev, V.M. Tikhomirov. Inequalities for derivatives in the multidimensional case. *Math. Notes*, **25**, №1, 32–40, 1979.

[66] Y. Chalco-Cano, A. Flores-Franulic, H. Roman-Flores. Ostrowski type inequalities for interval-valued functions using generalized Hukuhara derivative. *Comput. Appl. Math.*, **31**, №2, 457–472, 2012.

[67] Y. Chalco-Cano, W.A. Lodwick, W. Condori-Equice. Ostrowski type inequalities and applications in numerical integration for interval-valued functions. *Soft. Comput.*, **19**, 3293–3300, 2015. doi:10.1007/s00500-014-1483-6.

[68] E.V. Chernaya. Asymptotically exact estimation of the error of weighted cubature formulas optimal in some classes of continuous functions. *Ukr. Math. J.*, **47**, №10, 1606–1618, 1995.

[69] E.V. Chernaya. On the optimization of weighted cubature formulae on certain classes of continuous functions. *East J. Approx.*, **1**, 47–60, 1995.

[70] J. A. Clarkson, C. R. Adams. On definitions of bounded variation for functions of two variables. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **35**, №4, 824–854, 1933.

[71] P. Diamond, P. Kloeden. Metric spaces of fuzzy sets. *Fuzzy sets and systems*, **35**, №2, 241–249, 1990.

[72] P. Diamond, P. Kloeden. *Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications.* World Scientific Publishing Company, 1994.

[73] J. Ding, A Zhou. Eigenvalues of rank-one updated matrices with some applications. *Appl. Math. Lett.*, **20**, №12, 1223–1226, 2007. doi:10.1016/j.aml.2006.11.016.

[74] S. S. Dragomir. Ostrowski type inequalities for Lebesgue integral: a survey of recent results. *Australian J. Math. Anal. Appl.*, **14**, №1, 1—287, 2017.

[75] S.S. Dragomir, (Eds.) Rassias, Th.M. *Ostrowski Type Inequalities and Applications in Numerical Integration.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 2002.

[76] N. Dyn, E. Farkhi, A. Mokhov. *Approximation Of Set-valued Functions: Adaptation Of Classical Approximation Operators.* World Scientific Publishing Company, 2014.

[77] V.K. Dzyadyk. On best approximation in classes of periodic functions defined by integrals of a linear combination of absolutely monotonic kernels. *Math. Notes*, **16**, №5, 1008–1014, 1974.

[78] D.E. Edmunds, V. Kokilashvili, A. Meskhi. *Bounded and Compact Integral Operators.* Mathematics and Its Applications. Springer Netherlands, 2002.

[79] H. Federer. *Geometric measure theory.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, 1969.

[80] A. M. Fink. Bounds on the deviation of a function from its averages. *Czechoslov. Math. J.*, **42**, 289–310, 1992.

[81] S.P. Geisberg. Generalization of Hadamard inequality. *Sb.Nauchn. Tr. Leningr. Mech. Inst.*, **50**, 42–54, 1965.

[82] D.V. Gorbachev. Construction of the extremal function for a functional on the class $H_\omega^{(n)}$. *Math. Notes*, **61**, №4, 430–439, 1997.

[83] P. Gruber. Optimum quantization and its applications. *Adv. Math.*, **186**, №2, 456–497, 2004.

[84] P.M. Gruber, C.G. Lekkerkerker. *Geometry of Numbers.* Bibliotheca mathematica. North-Holland, 1987.

[85] A. Guessab, G. Schmeisser. Sharp integral inequalities of the Hermite–Hadamard type. *J. Approx. Theory*, **115**, №2, 260–288, 2002.

[86] J. Hadamard. Sur le module maximum d'une fonction et de ses derivees. *C. R. Soc. Math. France*, **41**, 68–72, 1914.

[87] G.H. Hardy, J.E. Littlewood. Contribution to the arithmetic theory of series. *Proc. London Math. Soc.*, **11**, №2, 411–478, 1912.

[88] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya. *Inequalities.* Cambridge University Press, 1952.

[89] J. Heinonen. *Lectures on Lipschitz Analysis.* Bericht (Jyväskylän yliopisto. Matematiikan ja tilastotieteen laitos). University of Jyväskylä, 2005.

[90] J. Heinonen, P. Koskela, N. Shanmugalingam, J.T. Tyson. *Sobolev Spaces on Metric Measure Spaces: An Approach Based on Upper Gradients.* New Mathematical Monographs. Cambridge University Press, 2015.

[91] M. Hukuhara. Intégration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe. *Funkcial. Ekvac.*, **10**, 205–223, 1967.

[92] T. Jech. *Set Theory. Second edition.* Perspectives in Mathematical Logic. Springer–Verlang, Berlin, 1994.

[93] L.V. Kantorovich, G.P. Akilov. *Functional Analysis.* Elsevier Science, 2014.

[94] J. Karamata. Sur une inégalité relative aux fonctions convexes. *Publ. Math. Univ. Belgrade*, **1**, 145—148, 1932. (in French)

[95] S. Karlin. *Total Positivity.* Stanford University Press, 1968.

[96] S. Karlin, W.J. Studden. *Tchebycheff Systems: with Applications in Analysis and Statistics.* Interscience, New York, 1966.

[97] J. Kiefer. Optimum sequential search and approximation methods under minimum regularity assumption. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, **5**, 105–136, 1957.

[98] V.A. Kofanov, I.V. Popovich. Sharp Nagy type inequalities for the classes of functions with given quotient of the uniform norms of positive and negative parts of a function. *Res. Math.*, **28**, №1, 3–11, 2020. doi:10.15421/242001.

[99] A.N. Kolmogorov. Une generalisation de J.Hadamard entre les bornes

superieures des derivees succesives d'une fonction. *C. R. Acad. Sci.*, **36**, 764–765, 1938.

[100] A.N. Kolmogorov, V.M. Tikhomirov. *Selected Works I: Mathematics and Mechanics.* Mathematics and its Applications. Springer Netherlands, 2012.

[101] V.N. Konovalov. Precise inequalities for norms of functions, third partial, second mixed, or directional derivatives. *Math. Notes*, **23**, №1, 38–44, 1978.

[102] N.P. Korneichuk. Best cubature formulas for some classes of functions of many variables. *Math. Notes*, **3**, 360–367, 1968.

[103] N.P. Korneichuk. Extreme values of functionals and best approximation on classes of periodic functions. *Math. USSR-Izv.*, **5**, №1, 97–129, 1971.

[104] N.P. Korneichuk. *Exact Constants in Approximation Theory.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1991.

[105] O. Kovalenko. On maximally oscillating perfect splines and some of their extremal properties. *Anal. Math.*, **46**, №3, 555–577, 2020. doi:10.1007/s10476-020-0037-7.

[106] O. Kovalenko. On optimal recovery of integrals of random processes. *J. Math. Anal. Appl.*, **487**, №1, 123949, 2020. doi:10.1016/j.jmaa.2020.123949.

[107] O. Kovalenko. On a general approach to some problems of approximation of operators. *J. Math. Sci.*, **279**, 67–76, 2024. doi:10.1007/s10958-024-06987-4. Translation of Ukrain. Mat. Visn. **20** (4) 544–556, 2023.

[108] O. Kovalenko. On optimization of cubature formulae for Sobolev classes of functions defined on star domains. *Mat. Stud.*, **61**, №1, 84–96, 2024. doi:10.30970/ms.61.1.84-96.

[109] O.V. Kovalenko. Ostrowski type inequalities for sets and functions of bounded variation. *J. Inequal. Appl.*, **151**, 2017. doi:10.1186/s13660-017-1429-5.

[110] O.V. Kovalenko. On multidimensional Ostrowski-type inequalities. *Ukr.*

Math. J., **72**, 741–758, 2020. doi:10.1007/s11253-020-01814-w. Translation of Ukrain. Mat. Zh. **72** (5) 644–657, 2020.

[111] P. Kumar. An inequality of Ostrowski type for cumulative distribution functions. *Kyungpook Math. J.*, **39**, №2, 303–311, 1999.

[112] E. Landau. Einige Ungleichungen fur zweimal differenzierbare Funktionen. *Proc. London Math. Soc.*, **13**, 43–49, 1913.

[113] E. Landau. Über einen Satz des Herrn Littlewood. *Rend. Circ. Mat. Palermo (1884-1940)*, **35**, 177–188, 1913.

[114] E.H. Lieb, M. Loss. *Analysis.* Crm Proceedings & Lecture Notes. American Mathematical Society, 2001.

[115] G.G. Magaril-Il'jaev, V.M. Tikhomirov. On the Kolmogorov inequality for fractional derivatives on the half-line. *Anal. Math.*, **1**, №7, 37–47, 1981.

[116] V.N. Malozemov. On polygonal interpolation. *Math. Notes*, **1**, №5, 355–357, 1967.

[117] L.J. Mordell. The magnitude of the derivative of a function. *J. London. Math. Soc.*, **3**, 119–121, 1928. doi:10.1112/jlms/s1-3.2.119.

[118] V.P. Motornyi. On the best quadrature formula of the form $\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)$ for some classes of differentiable periodic functions. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, **8**, №3, 591–620, 1974.

[119] V.P. Motornyi. On the best interval quadrature formula in the class of functions with bounded r-th derivative. *East J. Approx.*, **4**, №4, 459–478, 1998.

[120] V.P. Motornyi, D.A. Ovsyannikov. Estimates of the error of interval quadrature formulas on some classes of differentiable functions. *Res. Math.*, **28**, №1, 12–21, 2020. doi:10.15421/242002.

[121] E. Novak. Optimal algorithms for numerical integration: Recent results and open problems. *arXiv:2307.06787*, 2023.

[122] K.Yu. Osipenko. *Optimal recovery of analytic functions.* Nova Science Publishers Inc., Huntington, New York, 2000.

[123] A. Ostrowski. Uber die Absolutabweichung einer differentienbaren Funktionen von ihren Integralmittelwert. *Comment. Math. Hel*, **10**, 226–227, 1938.

[124] A. Papageorgiou. Integration of monotone functions of several variables. *J. Complexity*, **9**, №2, 252 – 268, 1993.

[125] N.V. Parfinovych, V.V. Pylypenko. Kolmogorov inequalities for norms of Marchaud-type fractional derivatives of multivariate functions. *Res. Math.*, **28**, №2, 10–23, 2020. doi:0.15421/242007.

[126] L. Plaskota. *Noisy information and computational complexity.* Cambridge Univ. Press, 1996.

[127] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis.* Princeton University Press, 1970.

[128] H. Sagan. *Space–Filling Curves.* Springer–Verlag, New-York, 1994.

[129] S. Samko, A. Kilbas, O. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications.* Gordon and Breach Science Publishers, Yveron, 1993.

[130] I.J. Shoenberg, A. Cavaretta. Solution of Landau's problem, concerning higher derivatives on halfline. *M.R.C. Technical Summary Report*, 1970.

[131] I.J. Shoenberg, A. Cavaretta. Solution of Landau's problem, concerning higher derivatives on halfline. *Proc. of Conf. on Approx. Theory.-Varna, Sofia*, 297–308, 1972.

[132] S.B. Stechkin. Best approximation of linear operators. *Math. Notes*, **1**, №2, 91–99, 1967.

[133] E.M. Stein. Functions of exponential type. *Ann. Math.*, **65**, №3, 582–592, 1957.

[134] E.M. Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions.* Monographs in harmonic analysis. Princeton University Press, 1970.

[135] B. Sz.-Nagy. Über Integralungleichungen zwischen einer Function und ihrer Ableitung. *Acta Sci. Math.*, **10**, 64–74, 1941.

[136] V. Temlyakov. *Multivariate Approximation.* Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, 2018.

[137] V.G. Timofeev. Landau inequality for function of several variables. *Math. Notes*, **37**, №5, 369–377, 1985.

[138] J.F. Traub, H. Woźniakowski. *A general theory of optimal algorithms.* Academic Press, 1980.

[139] V.L. Velikin. Optimal interpolation of differentiable periodic functions with bounded higher derivative. *Math. Notes*, **22**, №5, 860–865, 1977. doi:10.1007/BF01098350.

[140] B.Z. Vulich. *Introduction to the theory of partially ordered spaces.* Noordhoff, 1967.

[141] J. Warga. *Optimal Control of Differential and Functional Equations.* Acad. Press, 1972.

[142] В.Ф. Бабенко. Об одной задаче оптимизации приближенного интегрирования. In *Исслед. по совр. пробл. суммирования и приближения функцийи их приложениям.*, 3–13. Днепропетровск, 1984.

[143] В.Ф. Бабенко. О точных неравенствах типа Колмогорова для функций двух переменных. *Доп. НАН України*, **5**, 7–11, 2000.

[144] В.Ф. Бабенко, Н.П. Корнейчук, В.А. Кофанов, С.А. Пичугов. *Неравенства для производных и их приложения.* К.: Наук. думка, 2003.

[145] В.Ф. Бабенко, В.А. Кофанов, С.А. Пичугов. Неравенства типа Надя для периодических функций. *Доп. НАН України*, **6**, 7–10, 2000.

[146] В.Ф. Бабенко, Д.А. Левченко. Неравенства типа Колмогорова для гиперсингулярных интегралов со знакопеременной характеристикой. *Вестн. Днепропетровского ун-та. Матем.*, **18**, №1, 18–27, 2010.

[147] В.Ф. Бабенко, Т.В. Матвеева. Неравенства типа Колмогорова для дробных производных функций многих переменных. *Вестн. Днепропетровского ун-та. Матем.*, **16**, 15–20, 2008.

[148] В.Ф. Бабенко, Н.В. Парфинович. Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных и некоторые их приложения. *Труды института математики и механики УрО РАН*, **17**, №3, 60–70, 2011.

[149] В.Ф. Бабенко, Н.В. Парфинович. Неравенства типа Колмогорова для

норм производных Рисса функций многих переменных и некоторые их приложения. *Укр. мат. вісн.*, **9**, №2, 157–174, 2012.

[150] В.Ф. Бабенко, С.А. Пичугов. Точные оценки для норм дробных производных функций многих переменных, удовлетворяющих условию Гельдера. *Мат. заметки.*, **87**, №1, 26–34, 2010.

[151] В.Ф. Бабенко, Д.С. Скороходов. Об оптимизации интервальных квадратурных формул. *Вестн. Днепропетровского ун-та. Матем.*, **15**, 16–25, 2007.

[152] В.Ф. Бабенко, М.С. Чурилова. О неравенствах типа Колмогорова для производных дробного порядка. *Вестн. Днепропетровского ун-та. Матем.*, **9**, 16–20, 2001.

[153] С.В. Бородачев. Оптимизация «интервальных» квадратурных формул для классов $H^{\omega_+;\omega_-}$. *Вестн. Днепропетровского ун-та. Матем.*, **6**, 19–26, 1998.

[154] С.В. Бородачев. Об оптимизации «интервальных» квадратурных формул на некоторых несимметричных классах периодических функций. *Вестн. Днепропетровского ун-та. Матем.*, **4**, 19–24, 1999.

[155] С.В. Бородачев. Об оптимизации интервальных квадратурных формул на некоторых классах абсолютно непрерывных функций. *Вестн. Днепропетровского ун-та. Матем.*, **6**, 28–34, 2000.

[156] С.А. Вахрамеев. *Прикладная математика и математическое обеспечение ЭВМ.* Изд-во МГУ, 1980.

[157] А.Г. Витушкин. *О многомерных вариациях.* М.: Гостехиздат, 1955.

[158] В.Н. Габушин. О наилучшем приближении оператора дифференцирования на полупрямой. *Мат. заметки*, **6**, №5, 573–582, 1969.

[159] В.Н. Габушин. Наилучшее приближение функционалов на некоторых множествах. *Мат. заметки.*, **8**, №5, 551–562, 1970.

[160] В.Н. Габушин. Оптимальные методы вычисления значений оператора Ux, если x задано с погрешностью. Дифференцирование функций, определенных с ошибкой. *Тр. МИАН СССР.*, **145**, 63–78, 1980.

[161] Е.В. Дерец. Об оптимизации квадратурных формул для некоторых

классов периодических дифференцируемых функций. *Вестн. Днепропетровского ун-та. Матем.*, **13**, 43–57, 2005.

[162] Е.В. Дерец. О погрешности интервальной квадратурной формулы прямоугольников для класса $W^2H_1^\omega$. *Вестн. Днепропетровского ун-та. Матем.*, **15**, 84–88, 2007.

[163] Е.В. Дерец. О наилучшей интервальной квадратурной формуле для класса $W^2H_1^\omega$. *Вестн. Днепропетровского ун-та. Матем.*, **16**, 73–83, 2008.

[164] Е.В. Дерец. О наилучшей интервальной квадратурной формуле для класса функций W^3H^ω. *Вестн. Днепропетровского ун-та. Матем.*, **19**, 47–56, 2011.

[165] Е.В. Дерец. Об оптимизации интервальных квадратурных формул на некоторых классах периодических дифференцируемых функций. *Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету. Технічні науки.*, **Темат. вип.**, 32–37, 2012.

[166] В.К. Дзядык. *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.* М.: Наука, 1977.

[167] Динь-Дзунг, В.М. Тихомиров. О неравенствах для производных в L_2 метрике. *Вестник МГУ Сер. мат., мех.*, **2**, 7–11, 1979.

[168] Л.В. Дрожжина. Про квадратурні формули для випадкових процесів. *Доп. НАН України*, **9**, 775–777, 1975.

[169] А.А. Женсыкбаев. *Проблемы восстановления операторов.* Институт компьютерных исследований, Ижевск, 2003.

[170] Л.Д. Иванов. *Вариации множеств и функций.* М.: Наука, 1975.

[171] Г.А. Калябин. Точные константы в неравенствах для промежуточных производных (случай Габушина). *Функц. анализ и его прил.*, **38**, №3, 29–38, 2004.

[172] А. Н. Колмогоров. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале. *Уч. зап. МГУ. Математика*, **30**, №3, 3–13, 1939.

[173] А.А. Кореновский. *Свойства функций, определяемые в терминах средних колебаний.* Канд. дис. Одесса, 1998.

[174] Н.П. Корнейчук. О приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Бернштейна – Рогозинского. *ДАН СССР*, **125**, 258–261, 1959.

[175] Н.П. Корнейчук. Об оценке приближений функций класса $H^{(a)}$ тригонометрическими многочленами. In *Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций*, 148–154. М.: Физматгиз, 1961.

[176] Н.П. Корнейчук. Об экстремальных свойствах периодических функций. *Докл. АН. УССР. Сер. А.*, **8**, 993–998, 1962.

[177] Н.П. Корнейчук. *Экстремальные задачи в теории приближений.* М.: Наука, 1976.

[178] Н.П. Корнейчук. *Сплайны в теории приближения.* М.: Наука, 1984.

[179] Н.П. Корнейчук, В.Ф. Бабенко, А.А. Лигун. *Экстремальные свойства полиномов и сплайнов.* К: Наукова думка, 1992.

[180] А.С. Кронрод. О функциях двух переменных. *УМН*, **5**, №1, 24–134, 1950.

[181] Н.П. Купцов. Колмогоровские оценки для производных в $L_2[0,\infty)$. *Тр. МИАН СССР*, **138**, 94–117, 1975.

[182] Н.П. Купцов. О точных константах в неравенствах между нормами функций и их производных. *Мат. заметки*, **41**, №3, 313–319, 1987.

[183] Ю.И. Любич. О неравенствах между степенями линейного оператора. *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **24**, №6, 825–864, 1960.

[184] В.Н. Малоземов. Об отклонении ломаных. *Вестн. ЛГУ. Серия матем. и мех.*, **7**, №2, 150–153, 1966.

[185] А.П. Маторин. О неравенствах между максимумами абсолютных значений функций и ее производных на полуоси. *Укр. мат. журн.*, **7**, 262–266, 1955.

[186] В.П. Моторный, Бабенко В.Ф., А.А. Довгошей, О.И. Кузнецова. *Те-*

ория аппроксимации и гармонический анализ. Задачи и методы: математика, механика, кибернетика. К.: Наук. думка, 2012.

[187] С.М. Никольский. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем. *Изв. АН СССР, Сер. мат.*, **10**, 207–256, 1946.

[188] С.М. Никольский. Ряд Фурье функции с данным модулем непрерывности. *ДАН СССР*, **52**, 191–194, 1946.

[189] С.М. Никольский. *Квадратурные формулы.* М.: Наука, 1988.

[190] Н.В. Парфінович. Нерівності Колмогорова для норм похідних Рісса функцій багатьох змінних. *Укр. мат. вісн.*, **14**, №2, 265–178, 2017.

[191] Н.В. Парфинович. Неравенства типа Колмогорова для норм гиперсингулярных интегралов с однородной знакопостоянной характеристикой. *Вестн. Днепропетровского ун-та. Матем.*, **20**, 58–69, 2015.

[192] Н.В. Парфинович. Оцінки норм похідних за Ріссом функцій багатьох змінних. *Дослідження в математиці і механіці*, **22**, №1(29), 46–61, 2017. doi:10.18524/2519-206x.2017.1(29).135730.

[193] Н.В. Парфінович. *Сплайни в екстремальних задачах теорії наближень, нерівності для похідних та їх застосування.* Докт. дис. ДНУ ім. О. Гончара, 2018.

[194] В.А. Плотников, А.В. Плотников, А.Н. Витюк. *Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы.* Одесса: Астропринт, 1999.

[195] А.С. Романюк. *Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных.* Праці Ін-ту математики НАН України, 93, 2012.

[196] Д.С. Скороходов. О существовании обобщенного несимметричного (α, β)-сплайна, усреднения которого принимают равные минимумы в заданных точках. *Укр. мат. журн.*, **61**, №2, 261–267, 2009.

[197] Д.С. Скороходов. *Оптимальне відновлення операторів та функціоналів і суміжні екстремальні задачі теорії наближення.* Докт. дис. ДНУ ім. О. Гончара, 2019.

[198] С.А. Смоляк. *Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них.* Канд. дисс. МГУ, М., 1965.

[199] А.И. Степанец. Об одной экстремальной задаче в пространстве непрерывных функций двух переменных. In *Вопросы теории приближений функций и ее приложений*, 160–178. ИМАН УССР, Киев, 1976.

[200] А.И. Степанец. *Равномерные приближения тригонометрическими полиномами: линейные методы.* Наукова Думка, 1981.

[201] А.И. Степанец. *Методы теории приближений.* в 2 ч. К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002.

[202] А.Г. Сухарев. Оптимальные формулы численного интегрирования для некоторых классов функций многих переменных. *Докл. АН СССР*, **246**, №2, 282–285, 1979.

[203] Л.В. Тайков. Неравенства типа Колмогорова и наилучшие формулы численного дифференцирования. *Мат. заметки*, **4**, №2, 233–238, 1968.

[204] В.Г. Тимофеев. *Неравенства типа Колмогорова с оператором Лапласа*, 84–92. Изд-во Саратовского ун-та, Саратов, 1983.

[205] О.А. Тимошин. Точные неравенства между нормами частных производных второго и третьего порядка. *Докл. РАН*, **344**, №1, 20–22, 1995.

[206] Р.Н. Шарипов. Наилучшие интервальные квадратурные формулы для классов Липшица. *Конструктивная теория функций и функцион. анализ. Казань*, **4**, 124–132, 1983.

[207] Г.Е. Шилов. О неравенствах между производными. *Сб. научных студ. работ МГУ.*, **1**, 17–27, 1937.

Додаток А

Список публікацій здобувача:

[1] O.V. Kovalenko. Ostrowski type inequalities for sets and functions of bounded variation. *J. Inequal. Appl.*, **151**, 2017. doi:10.1186/s13660-017-1429-5. (SJR — Q3).

[2] O. Kovalenko. On optimal recovery of integrals of random processes. *J. Math. Anal. Appl.*, **487**, №1, 123949, 2020. doi:10.1016/j.jmaa.2020.123949. (SJR — Q2).

[3] V. Babenko, Yu. Babenko, O. Kovalenko. On multivariate Ostrowski type inequalities and their applications. *Math. Ineq. Appl.*, **23**, №2, 569–583, 2020. doi:10.7153/mia-2020-23-47. (SJR — Q2).

[4] V. Babenko, V. Babenko, O. Kovalenko. Optimal recovery of monotone operators in partially ordered L-spaces. *Numer. Func. Anal. Opt.*, **41**, №11, 1373–1397, 2020. doi:10.1080/01630563.2020.1775251. (SJR — Q3).

[5] O. Kovalenko. On maximally oscillating perfect splines and some of their extremal properties. *Anal. Math.*, **46**, №3, 555–577, 2020. doi:10.1007/s10476-020-0037-7. (SJR — Q3).

[6] O.V. Kovalenko. On multidimensional Ostrowski-type inequalities. *Ukr. Math. J.*, **72**, 741–758, 2020. doi:10.1007/s11253-020-01814-w. Translation of Ukrain. Mat. Zh. **72** (5) 644–657, 2020. (SJR — Q3).

[7] V. Babenko, V. Babenko, O. Kovalenko, M. Polishchuk. Optimal recovery of operators in function L-spaces. *Anal. Math.*, **47**, 13–32, 2021. doi:10.1007/s10476-021-0065-y. (SJR — Q3).

[8] V.F. Babenko, Yu.V. Babenko, O.V. Kovalenko. On asymptotically optimal cubatures for multidimensional Sobolev spaces. *Res. Math.*, **29**, №2, 15–27, 2021. doi:10.15421/242106.

[9] V. Babenko, O. Kovalenko, N. Parfinovych. On approximation of hypersingular integral operators by bounded ones. *J. Math. Anal. Appl.*, **513**, №2, 126215, 2022. doi:10.1016/j.jmaa.2022.126215. (SJR — Q1).

[10] V.F. Babenko, V.V. Babenko, O.V. Kovalenko, N.V. Parfinovych. General form of (λ, φ)-additive operators on spaces of L-space-valued functions. *Res. Math.*, **30**, №1, 3–9, 2022. doi:10.15421/242201. (SJR — Q4).

[11] V.F. Babenko, V.V. Babenko, O.V. Kovalenko, N.V. Parfinovych. Estimates for the deviations of integral operators in semilinear metric spaces and their applications. *Ukr. Math. J.*, **74**, 685–697, 2022. doi:10.1007/s11253-022-02094-2. Translation of Ukrain. Mat. Zh. **74** (5) 599–609, 2022. (SJR — Q3).

[12] V.F. Babenko, V.V. Babenko, O.V. Kovalenko, N.V. Parfinovych. On Landau – Kolmogorov type inequalities for charges and their applications. *Res. Math.*, **31**, №1, 3–16, 2023. doi:10.15421/242301. (SJR — Q4).

[13] V. Babenko, V. Babenko, O. Kovalenko. Korneichuk-Stechkin lemma, Ostrowski and Landau inequalities, and optimal recovery problems for L-space valued functions. *Numer. Func. Anal. Opt.*, **44**, №12, 1309–1341, 2023. doi:10.1080/01630563.2023.2246540. (SJR — Q2).

[14] V.F. Babenko, V.V. Babenko, O.V. Kovalenko, N.V. Parfinovych. Nagy type inequalities in metric measure spaces and some applications. *Carpathian Math. Publ.*, **15**, №2, 563–575, 2023. doi:10.15330/cmp.15.2.563-575. (SJR — Q2).

[15] V.F. Babenko, V.V. Babenko, O.V. Kovalenko, N.V. Parfinovych. Some sharp Landau–Kolmogorov–Nagy-type inequalities in Sobolev spaces of multivariate functions. *Ukr. Math. J.*, **75**, 1525–1532, 2024. doi:10.1007/s11253-024-02275-1. Translation of Ukrain. Mat. Zh. **75** (10) 1347–1353, 2023.

[16] O. Kovalenko. On a general approach to some problems of approximation of operators. *J. Math. Sci.*, **279**, 67–76, 2024. doi:10.1007/s10958-024-06987-4. Translation of Ukrain. Mat. Visn. **20** (4) 544–556, 2023.

[17] O. Kovalenko. On optimization of cubature formulae for Sobolev classes of functions defined on star domains. *Mat. Stud.*, **61**, №1, 84–96, 2024. doi:10.30970/ms.61.1.84-96.

[18] O.V. Kovalenko. Maximally oscillating perfect splines and some of their applications. In *Тези доповідей Міжнародної математичної конференції "Теорія наближень і її застосування"*, Україна, Дніпро, 3-5 жовтня 2019.

[19] В.Ф. Бабенко, В.В. Бабенко, О.В. Коваленко, Поліщук М.В. Екстремальні задачі теорії апроксимації для функцій зі значеннями у L-просторах. In *Тези доповідей Міжнародної математичної конференції "Теорія наближень і її застосування"*, Україна, Дніпро, 3-5 жовтня 2019.

[20] V.F. Babenko, V.V. Babenko, O.V. Kovalenko. Korneichuk-Stechkin lemma and Ostrowski type inequalities for functions with values in L-spaces. In *Thesis of Joint Mathematics Meetings*, Colorado Convention Center, Denver, CO, January 15-18, 2020.

[21] V.F. Babenko, V.V. Babenko, O.V. Kovalenko. Korneichuk–Stechkin lemma for L-space valued functions and some applications. In *Тези доповідей ТЕОРІЯ НАБЛИЖЕНЬ І ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ присвячена 100-річчю з дня народження Миколи Павловича Корнєйчука*, Дніпро, Україна, 16-19 вересня 2020.

[22] O.V. Kovalenko. On optimal recovery of integrals of random processes. In *Тези доповідей ТЕОРІЯ НАБЛИЖЕНЬ І ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ при-*

свячена 100-річчю з дня народження Миколи Павловича Корнєйчука, Дніпро, Україна, 16-19 вересня 2020.

[23] O. Kovalenko. Ostrowski type inequalities for sets and functions of bounded variation. In *International Online Workshop on Approximation Theory*, Ivano-Frankivsk, Ukraine, March 19-21, 2021.

[24] V. Babenko, V. Babenko, O. Kovalenko, N. Parfinovych. Approximation of some classes of L-space valued periodic functions by generalized trigonometric polynomials. In *International Online Workshop on Approximation Theory*, Ivano-Frankivsk, Ukraine, March 19-21, 2021.

[25] V. Babenko, Yu. Babenko, O. Kovalenko. On multivariate Ostrowski type inequalities and their applications. In *International Conference of Young Mathematicians*, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine (online), Kyiv, Ukraine, June 3–5, 2021.

[26] V. Babenko, V. Babenko, O. Kovalenko. Approximation of operators in semi-linear metric spaces and some applications. In *2022 Spring Eastern Virtual Sectional Meeting*, March 19-20, 2022.

[27] V. Babenko, V. Babenko, O. Kovalenko. Approximation of operators in semi-linear metric spaces. In *The international online conference "Current trends in abstract and applied analysis"*, May 12-15, 2022.

[28] V. Babenko, V. Babenko, O. Kovalenko. Fixed sets and fixed points for mappings in generalized Fréchet spaces. In *The international online conference "Current trends in abstract and applied analysis"*, May 12-15, 2022.

[29] V. Babenko, Yu. Babenko, O. Kovalenko. On asymptotically optimal cubatures for multidimensional Sobolev spaces. In *The international online conference "Current trends in abstract and applied analysis"*, May 12-15, 2022.

[30] V. Babenko, O. Kovalenko, N. Parfinovych. On approximation of hypersingular integral operators by bounded ones. In *International Conference "Theory of Approximation of Functions and its Applications", dedicated to the 80th anniversary of Corresponding Member of the National Academy*

of Sciences of Ukraine, Professor Alexander STEPANETS (1942-2007), Lutsk, Ukraine, June 6–10, 2022.

[31] V.F. Babenko, V.V. Babenko, O.V. Kovalenko, N.V. Parfinovych. Landau–Kolmogorov–Nagy type inequalities and some applications. In *International Workshop on Current Trends in Analysis and Approximation Theory*, July 18, 2023.

[32] V.F. Babenko, V.V. Babenko, O.V. Kovalenko, N.V. Parfinovych. On Landau-Kolmogorov-type inequalities for charges and their applications. In *International Conference on Approximation Theory and Beyond*, May 15-18, 2023 Vanderbilt University, Nashville, Tennessee, USA.

Відомості про апробацію результатів дисертації:

Результати дисертаційної роботи були представлені та доповідались на:

– Міжнародна математична конференція "Теорія наближень і її застосування" (3-5 жовтня 2019, Дніпро, Україна); форма участі — доповідь;

– Joint Mathematics Meetings (January 15-18, 2020, Colorado Convention Center, Denver, CO, USA); форма участі — заочно;

– Міжнародна математична конференція "Теорія наближень і її застосування" присвячена 100-річчю з дня народження Миколи Павловича Корнєйчука (16-19 вересня 2020, Дніпро, Україна); форма участі — доповідь;

– International Online Workshop on Approximation Theory (March 19-21, 2021, Ivano-Frankivsk, Ukraine); форма участі — доповідь;

– International Conference of Young Mathematicians, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine (online) (June 3–5, 2021, Kyiv, Ukraine); форма участі — доповідь;

– 2022 Spring Eastern Virtual Sectional Meeting, (March 19-20, 2022, Tufts University, Medford, USA); форма участі — заочно;

– International online conference "Current trends in abstract and applied analysis", (May 12-15, 2022, Ivano-Frankivsk, Ukraine); форма участі — доповідь;

– International Conference "Theory of Approximation of Functions and its

Applications", dedicated to the 80th anniversary of Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Alexander Stepanets (1942-2007) (June 6–10, 2022, Lutsk, Ukraine); форма участі — слухач;

– International Workshop on Current Trends in Analysis and Approximation Theory (July 18, 2023, Rome, Italy); форма участі — доповідь;

– International Conference on Approximation Theory and Beyond, (May 15-18, 2023, Nashville, TN, USA); форма участі — заочно.

Результати роботи також доповідались на семінарах:

– з теорії функцій при кафедрі математичного аналізу та оптимізації (до 2022 року — кафедрі математичного аналізу і теорії функцій) Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара (Дніпро, неодноразово протягом 2020–2023 років, керівники семінару: член-кореспондент НАН України, д-р. фіз.-мат. наук, проф. В. П. Моторний і д-р. фіз.-мат. наук, проф. Н. В. Парфінович); форма участі — доповідь;

– відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (12.01 та 19.01 2024 року, керівник семінару д-р. фіз.-мат. наук, проф. А. С. Романюк); форма участі — доповідь;

– "Сучасний аналіз" у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка (14.03.2024, керівники семінару: д-р. фіз.-мат. наук, проф. О. О. Курченко, д-р. фіз.-мат. наук, проф. В. М. Радченко, член-кореспондент НАН України, д-р. фіз.-мат. наук, проф. І. О. Шевчук); форма участі — доповідь;

– з теорії аналітичних функцій (28.03.2024, Львів, керівник семінару: д-р. фіз.-мат. наук, проф. О. Б. Скасків); форма участі — доповідь.