НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

КОВАЛЕНКО Олег Вікторович

УДК 517.5

Нерівності для похідних і екстремальні задачі теорії наближень у метричних просторах

01.01.01 – Математичний аналіз
111 – Математика

Реферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 2024

Дисертацією є рукопис.

Дисертаційну роботу виконано у Дніпровському національному університеті імені Олеся Гончара Міністерства освіти і науки України.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
КОРЕНОВСЬКИЙ Анатолій Олександрович,
завідувач кафедри математичного аналізу Одеського
національного університету імені І. І. Мечникова;

доктор фізико-математичних наук, професор
СЕРДЮК Анатолій Сергійович,
провідний науковий співробітник відділу теорії функцій
Інституту математики НАН України;

доктор фізико-математичних наук, професор
ЧАЙЧЕНКО Станіслав Олегович,
проректор з науково-педагогічної роботи
Донбаського державного педагогічного університету.

Захист відбудеться 19 листопада 2024 р. о 15:00 на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України та на офіційному сайті інституту за адресою:
https://www.imath.kiev.ua/zahyst/.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **А. Л. Шидліч**

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми. Нерівності для похідних — це класичний розділ теорії наближень, що має більше ніж столітню історію. Перші результати Ж. Адамара, Ґ. Г. Гарді, Дж. І. Літтлвуда та Е. Ландау в цьому напрямку з'явились у 1910-х роках. Один з найважливіших результатів в цій тематиці належить А. М. Колмогорову, який отримав точну нерівність, що оцінює рівномірну норму k-ї похідної функції заданої на числовій прямій через рівномірні норми функції і її r-ї похідної, $k, r \in \mathbb{N}$, $k < r$. Саме після цієї роботи нерівності такого роду називають нерівностями типу Колмогорова. У цій тематиці працювали багато математиків, зокрема В. Ф. Бабенко, Б. Боянов, А. П. Буслаєв, В. М. Габушин, С. Карлін, В. О. Кофанов, М. П. Купцов, А. О. Лігун, Ю. І. Любіч, Г. Г. Магаріл-Ільяєв, А. П. Маторін, Б. Надь, Г. Поліа, С. О. Пічугов, І. М. Стейн, Л. В. Тайков, О. Ю. Шадрін, І. Дж. Шонберг, та багато інших. Нерівності для похідних для функцій однієї або декількох змінних, особливо нерівності з найменшою можливою константою, знаходять застосування у різноманітних задачах, зокрема у чисельних методах, звичайних диференціальних рівняннях і рівняннях у частинних похідних, та інших напрямах аналізу. Тому важливим є отримання нових точних нерівностей такого типу для різних класів функцій і областей їх визначення, зокрема для класів Соболєва функцій однієї і багатьох дійсних змінних, які, зокрема, є природними класами для пошуку розв'язків диференціальних рівнянь та варіаційних задач.

Нерівності для похідних тісно пов'язані з деякими іншими екстремальними задачами теорії наближень, зокрема з задачею Стєчкіна про наближення, взагалі кажучи, необмежених операторів обмеженими, задачею наближення одного класу функцій іншим, задачами оптимального відновлення функціоналів і операторів по точно або неточно заданій інформації, та іншими задачами. Ці задачі також досліджувались багатьма математиками, серед яких В. В. Арєстов, В. Л. Велікін, Х. Вожняковський, О. А. Женсикбаєв, М. П. Корнєйчук, В. П. Моторний, С. М. Нікольський, Е. Новак, К. Ю. Осипенко, В. І. Рубан, С. Б. Стєчкін, Ю. М. Субботін, В. М. Тихоміров, Дж. Трауб, та інші.

Протягом останніх десятиліть, виходячи як з теоретичних, так і практичних міркувань, також мали місце спроби розвитку теорії апроксимації багатозначних і нечітко-значних функцій. Розвиток теорії апроксимації у напівлінійних метричних просторах по-перше дозволяє з єдиної точки зору розглядати відповідні задачі для багатозначних, нечітко-значних, а також функцій зі значеннями у банахових просторах (зокрема для випадкових процесів), а по-друге, така робота може стати основою для розробки обчислювальних алгоритмів для розв'язку різноманітних задач, пов'язаних з такими функціями. Крім того, становить теоретичний інтерес питання про те, наскільки далеко можна пройти у напрямку узагальнення відомих результатів для числових функцій на випадок функцій зі значеннями у напівлінійних метричних просторах.

Одним з найважливіших конкретних випадків загальної задачі оптимального відновлення, і однією з найстаріших задач теорії апроксимації, є задача про оптимальні квадратурні формули. Перші результати в цьому напрямку отримав К. Ф. Гаус ще на початку XIX століття. Серед математиків, які займались питаннями оптимізації квадратурних формул, слід відзначити В. Ф. Бабенка, Б. Боянова, О. А. Женсикбаєва, А. М. Колмогорова, М. П. Корнєйчука, А. О. Лігуна, Г. Л. Лоеба, В. П. Моторного, С. М. Нікольського, Е. Новака, К. І. Осколкова, А. Сарда, та інших. В силу важливості квадратурних формул, зокрема для питань чисельного аналізу, цікавим є отримання оптимальних або асимптотично оптимальних квадратурних формул на різних класах функцій, включаючи багатозначні та нечітко-значні функції, а також функції що приймають значення у нормованих просторах, наприклад, випадкові процеси.

Одним з найпростіших варіантів задачі оптимізації квадратурних формул є знаходження максимального на класі відхилення середнього значення функції від її значення в деякій точці. Такого роду нерівності часто називають нерівностями типу Островського. Для класів функцій малої гладкості нерівності типу Островського можуть бути використані як основний елементу розв'язання деяких екстремальних задач, зокрема для доведення нерівностей типу Ландау–Колмогорова та Надя, а також для розв'язання задач оптимізації квадратурних формул. Тому представляє інтерес доведення нових нерівностей типу Островського, зокрема для функцій зі значеннями у напівлінійних просторах. Таким чином, екстремальні задачі теорії наближень у метричних просторах є актуальною тематикою і потребують подальших досліджень.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалась згідно з загальними планами досліджень кафедри математичного аналізу та оптимізації (до 2022 року — кафедри математичного аналізу і теорії функцій) Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, а також згідно з держбюджетними темами НДР-1-666-22 "Теоретичні та прикладні аспекти відновлення операторів та оптимізації наближення функцій" № державної реєстрації 0122U001223; НДР-1–326–17 "Екстремальні проблеми теорії наближень функцій дійсного змінного і нерівності типу Колмогорова" № державної реєстрації 0117U001208.

Мета і завдання дослідження. *Метою* роботи є доведення нових нерівностей типу Ландау–Колмогорова, Надя та Островського, одержання розв'язань задач найкращого наближення і оптимального відновлення функціоналів та операторів, а також інших екстремальних задач теорії наближень для різних класів функцій, зокрема для функцій однієї та багатьох змінних з класів Соболєва, функцій багатьох змінних з обмеженою варіацією, а також класів функцій зі значеннями у нормованих і напівлінійних просторах.

Об'єктом дослідження є класи функцій однієї і багатьох змінних, серед яких класи Соболєва, класи функцій з обмеженою варіацією, класи функцій, що задаються мажорантою їх модуля неперервності, класи функцій зі значеннями у напівлінійних метричних просторах, та класи випадкових процесів.

Предметом дослідження є нерівності для похідних функцій різних класів; задачі оптимального відновлення операторів і функціоналів, що діють на різних класах функцій, по точно та неточно заданій інформації; задача Стєчкіна про наближення необмежених операторів обмеженими; модуль неперервності операторів.

Для реалізації поставленої мети у роботі було поставлено такі ***завдання***:

- Дослідити можливість узагальнення леми Корнєйчука–Стєчкіна на класи функцій зі значеннями у напівлінійних метричних просторах.
- Дослідити можливість розв'язання задач оптимального відновлення на класах функцій зі значеннями у напівлінійних метричних просторах, що задаються мажорантою модуля неперервності функції або її похідної.
- Розв'язати задачу оптимального відновлення монотонних операторів, що задані на класах монотонних функцій зі значеннями у напівлінійному метричному просторі.
- Дослідити задачі наближення операторів, що діють на класах функцій зі значеннями у напівлінійному метричному просторі.
- Розв'язати задачу Стєчкіна про наближення гіперсингулярних інтегральних операторів, що задані на класах Соболєва функцій багатьох змінних.
- Розв'язати задачі оптимізації квадратурних формул на класах Соболєва функцій багатьох змінних.
- Дослідити можливість доведення нерівностей типу Островського для функцій багатьох змінних, що мають обмежену варіацію.
- Розв'язати задачу про оптимізацію квадратурних формул для випадкових процесів за інформацією про значення процесу у випадкові моменти часу.
- Довести нерівності типу Надя для функцій у метричних просторах з мірою та на класах Соболєва функцій багатьох змінних.
- Дослідити модуль неперервності оператора кратного диференціювання на класі Соболєва функцій, що задані на пів осі.

Методи дослідження. В роботі використовуються сучасні методи аналізу і теорії наближень, загальні методи розв'язання екстремальних задач теорії наближень, зокрема методи доведення нерівностей для похідних і методи дослідження пов'язаних задач.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи є новими, і полягають у такому:

- Отримано узагальнення леми Корнєйчука–Стєчкіна на класи, що задаються мажорантою модуля неперервності функцій зі значеннями у напівлінійних метричних просторах. Із застосуванням цього результату, отримано точні на цьому класі функцій оцінки відхилення між середніми значеннями функцій на різних відрізках.

- На класах $H^\omega([a,b],X)$ функцій зі значеннями у напівлінійному метричному просторі X, що задаються мажорантою модуля неперервності функції, отримано розв'язання задач оптимального відновлення опуклюючого оператора і оператора інтегрування на основі середніх значень функції на $n \in \mathbb{N}$ інтервалах. Для класу $W^1H^\omega([a,b],X)$ функцій, що задається мажорантою модуля неперервності похідної типу Хукухара функції, отримано розв'язання задач оптимального відновлення тотожного оператора і оператора диференціювання в сенсі Хукухара на основі $n \in \mathbb{N}$ значень функції.

- Розв'язано задачу оптимального відновлення монотонних (λ,φ)–адитивних операторів, що задані на класах монотонних функцій зі значеннями у напівлінійному метричному просторі на основі $n \in \mathbb{N}$ значень функції.

- Отримано точні оцінки відхилення інтегральних операторів, що діють на класах функцій зі значеннями у напівлінійному метричному просторі. На класі $W^1H^\omega([a,b],X)$ отримано точні оцінки відхилення між різницевими операторами і оператором диференціювання (у сенсі Хукухара), а також розв'язання деяких пов'язаних задач.

- Розв'язано задачу Стєчкіна про наближення гіперсингулярних інтегральних операторів, що задано на класах Соболєва функцій багатьох змінних, обмеженими операторами. Доведено точні нерівності типу Островського і типу Ландау–Колмогорова, а також досліджено модуль неперервності такого інтегрального оператора.

- Знайдено оптимальні або асимптотично оптимальні квадратурні формули для вагових інтегралів по опуклим і зірчатим множинам на класах Соболєва функцій багатьох змінних.

- Запропоновано нове означення багатовимірних множин і функцій багатьох змінних обмеженої варіації, і для них отримано точні нерівності типу Островського.

- Розв'язано задачу про оптимальне відновлення інтеграла $\int_0^1 \xi_t dt$ на класі випадкових процесів, що задаються мажорантою модуля неперервності, на основі випадкових величин $\xi_{\tau_1}, \ldots, \xi_{\tau_n}$, де $\tau_1, \ldots, \tau_n$ — це деякі випадкові величини.

- Доведено точні нерівності типу Надя для функцій у метричних просторах з мірою та у класах Соболєва функцій багатьох змінних. Як наслідок, отримано точні нерівності типу Ландау–Колмогорова для зарядів, а також мішаних похідних функцій з класів Соболєва багатьох змінних.

- На класах диференційовних функцій $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, що задаються обмеженнями на вагові норми функції і її старшої похідної, досліджено модуль неперервності оператора кратного диференціювання та подано його у термінах норм узагальнених ідеальних сплайнів.

Практичне значення одержаних результатів. Робота носить теоретичний характер. Отримані результати та розроблені методи можуть бути використані при подальших дослідженнях екстремальних задач теорії наближень, а також при розробці нових чисельних методів.

Особистий внесок здобувача. Результати роботи опубліковано у 6-х одноосібних статтях і 11-х статтях у співавторстві. Усі результати, що виносяться на захист, одержано здобувачем самостійно. У результатах, що включено до дисертації зі статей, які написано у співавторстві, особистий внесок здобувача такий.

Ідея дослідження екстремальних задач у просторах функцій, що приймають значення у напівлінійних метричних просторах, належить професору В. Ф. Бабенку. У статтях [4, 7] співавтори брали участь у виборі аксіом і означень, в термінах яких формулюються основні результати, а також брали участь у перевірці робочих гіпотез; докладне доведення усіх основних тверджень належать здобувачеві. У статті [10] співавторам належить гіпотеза про можливість інтегрального представлення (λ, φ) – адитивних операторів; перевірка цієї та інших робочих гіпотез і доведення основних результатів належить здобувачеві. У статті [11] вибір напрямку дослідження належить співавторам, доведення головних теорем належить здобувачеві. У статті [13] співавторам належить гіпотези про можливість узагальнення леми Корнєйчука–Стєчкіна на класи функцій зі значеннями у L–просторах та про можливі області застосування цього узагальнення; формулювання і доведення відповідних результатів належить здобувачеві.

У статтях [3,8,9] співавторам належить постановка задач, вибір класів функцій, на яких розглядаються екстремальні задачі, та контроль за правильністю викладення результатів; доведення результатів належить здобувачеві.

У статтях [12,14,15] співавторам належить ідея застосування отриманої у [9] нерівності типу Островського до нерівностей типу Ландау–Колмогорова та нерівностей типу Надя. Здобувачу належить ідея побудови екстремальних функцій у нерівностях типу Надя і нерівностях типу Ландау–Колмогорова для зарядів, а також детальне доведення основних результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи були представлені та доповідались на:

– Міжнародна математична конференція "Теорія наближень і її застосування" (3-5 жовтня 2019, Дніпро, Україна);

– Joint Mathematics Meetings (January 15-18, 2020, Colorado Convention Center, Denver, CO, USA);

– Міжнародна математична конференція "Теорія наближень і її застосування" присвячена 100-річчю з дня народження Миколи Павловича Корнєйчука (16-19 вересня 2020, Дніпро, Україна);

– International Online Workshop on Approximation Theory (March 19-21, 2021, Ivano-Frankivsk, Ukraine);

– International Conference of Young Mathematicians, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine (online) (June 3–5, 2021, Kyiv, Ukraine);

– 2022 Spring Eastern Virtual Sectional Meeting, (March 19-20, 2022, Tufts University, Medford, USA);

– International online conference "Current trends in abstract and applied analysis", (May 12-15, 2022, Ivano-Frankivsk, Ukraine);

– International Conference "Theory of Approximation of Functions and its Applications", dedicated to the 80th anniversary of Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Alexander Stepanets (1942-2007) (June 6–10, 2022, Lutsk, Ukraine);

– International Workshop on Current Trends in Analysis and Approximation Theory (July 18, 2023, Rome, Italy);

– International Conference on Approximation Theory and Beyond, (May 15-18, 2023, Nashville, TN, USA).

Результати роботи також доповідались на семінарах:

– з теорії функцій при кафедрі математичного аналізу та оптимізації (до 2022 року — кафедрі математичного аналізу і теорії функцій) Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара (Дніпро, неодноразово протягом 2020–2023 років, керівники семінару: член-кореспондент НАН України, д-р. фіз.-мат. наук, проф. В. П. Моторний і д-р. фіз.-мат. наук, проф. Н. В. Парфінович);

– відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (12.01 та

19.01 2024 року, керівник семінару д-р. фіз.-мат. наук, проф. А. С. Романюк);

– "Сучасний аналіз" у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка (14.03.2024, керівники семінару: д-р. фіз.-мат. наук, проф. О. О. Курченко, д-р. фіз.-мат. наук, проф. В. М. Радченко, член-кореспондент НАН України, д-р. фіз.-мат. наук, проф. І. О. Шевчук);

– з теорії аналітичних функцій (28.03.2024, Львів, керівник семінару: д-р. фіз.-мат. наук, проф. О. Б. Скасків).

Публікації. Статті [1–17] зі Списку публікацій здобувача опубліковано у журналах, що входять до наукометричної бази Scopus. Відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, стаття [9] опублікована у виданні квартилю Q1, статті [2,3,13,14] опубліковані у виданнях квартилю Q2, статті [1,4–7,11] опубліковані у виданнях квартилю Q3, а статті [10,12] — у виданнях квартилю Q4. Джерела [18–32] — це тези доповідей.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, переліку умовних позначень, змісту, вступу, чотирьох розділів, висновків і переліку використаних джерел. Повний обсяг роботи складає 332 сторінки.

Основний зміст дисертаційної роботи

Перший розділ роботи присвячено дослідженню екстремальних задач теорії наближень у напівлінійних метричних просторах. Головні результати цього розділу містяться у статтях [4, 7, 10, 11, 13].

Теорія функцій зі значеннями у банахових просторах, а також багато- і нечітко- значних функцій активно розвивалась протягом декількох останніх десятиліть, зокрема, через численні застосування у теорії оптимізації, теорії наближень, математичній економіці, чисельних методах, і багатьох інших розділах прикладної математики.

Метричний простір $X = (X, h_X)$ будемо називати L–простором, якщо на множині X означені операції додавання елементів і множення на дійсне число, і для всіх $x, y, z \in X$ і $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ виконуються такі властивості:

$$
\begin{gathered}
x + y = y + x;\\
x + (y + z) = (x + y) + z;\\
\exists\, \theta \in X : x + \theta = x;\\
\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y;\\
\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)\, x;\\
1 \cdot x = x, 0 \cdot x = \theta;\\
h_X(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \cdot h_X(x, y);\\
h_X(x + z, y + z) \le h_X(x, y).
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Банахові простори, простори множин і простори нечітких множин є L–просторами. Поняття L–простору ввів С. О. Вахрамєєв (1980), схожу конструкцію розглядав С. М. Асєєв (1986). Розгляд функцій зі значеннями у L–просторах дає уніфікований підхід до розв'язання різноманітних екстремальних задач для згаданих вище класів функцій.

L–простір X називається ізотропним, якщо нерівність (1) перетворюється на рівність для всіх $x, y, z \in X$. Елемент $x \in X$ називається оборотним, якщо існує $x' \in X$ такий, що $x + x' = \theta$. У цьому випадку елемент x' називається протилежним до x. Через X^{inv} ми позначаємо множину усіх оборотних елементів простору X. Нарешті, елемент $x \in X$ називається опуклим, якщо для всіх $\alpha, \beta \geq 0$, $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$. Через X^{c} ми будемо позначати підпростір простору X, що складається з усіх опуклих елементів.

У підрозділах 1.1 і 1.2 ми наводимо необхідні означення і факти стосовно L–просторів.

Підрозділ 1.3 присвячено узагальненню леми Корнєйчука–Стєчкіна на випадок класів функцій, що приймають значення у L–просторах.

Нехай ω — це модуль неперервності, тобто неспадна неперервна напівадитивна функція така, що $\omega(0) = 0$. Для відрізка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ позначимо через $H^\omega([a, b], \mathbb{R})$ клас функцій $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ таких, що $|f(t) - f(s)| \leq \omega(|t - s|)$ для всіх $t, s \in [a, b]$. Модулі неперервності, як самостійні функції з вказаними вище властивостями, класи $H^\omega([a, b], \mathbb{R})$, а також класи $W^r H^\omega([a, b], \mathbb{R})$, вперше з'явились у роботі С. М. Нікольського (1946). Для двох додатних майже всюди інтегровних функцій $\psi_1\colon [a, a'] \to \mathbb{R}_+$ і $\psi_2\colon [b', b] \to \mathbb{R}_+$, $a < a' \leq b' < b$ таких, що $\int_a^{a'} \psi_1(t)dt = \int_{b'}^{b} \psi_2(t)dt$, лема Корнєйчука–Стєчкіна дає оцінку для функціонала

$$(\psi_1, \psi_2) \mapsto \sup_{f \in H^\omega([a,b],\mathbb{R})} \left| \int_a^{a'} f(t)\psi_1(t)dt - \int_{b'}^{b} f(t)\psi_2(t)dt \right|,$$

яка є точною у випадку опуклого догори модуля неперервності ω. Ця лема була опублікована у роботах М. П. Корнєйчука (1959, 1961) для класів $H^\omega([a, b], \mathbb{R})$ з $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, і була узагальнена на випадок довільного модуля неперервності у роботі М. П. Корнєйчука (1962). Лема Корнєйчука–Стєчкіна зіграла важливу роль у розв'язанні багатьох екстремальних задач теорії наближень. Деякі її узагальнення і багато застосувань можна знайти у монографіях А. І. Степанця (1981) та С. К. Багдасарова (1998). Ми узагальнюємо лему Корнєйчука–Стєчкіна на випадок функцій зі значеннями у L–просторах.

Сюр'єктивний ліпшицевий оператор $P\colon X \to X^{\mathrm{c}}$ ми називаємо опуклюючим, якщо $P \circ P = P$ і $P(\alpha x + \beta y) = \alpha P(x) + \beta P(y)$, для всіх $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Інтеграл Лебега від функції зі значеннями у L–просторах можна означити за стандартною схемою; для збереження основних властивостей інтеграла, для простих функцій $f\colon T \to X$,

$$f = \sum_{k=1}^{n} \chi_{T_i} \, f_i, f_i \in X, \tag{2}$$

де χ_{T_i} — це характеристична функція множини T_i, $i = 1, \ldots, n$, $\{T_i\}$ — це розбиття множини T на вимірні підмножини, ми означаємо

$$\int_T f(s)d\mu(t) := \sum_{i=1}^{n} \mu(T_i)P(f_i),$$

де μ — це деяка міра на T, а P—деякий опуклюючий оператор на X. Зазначимо, що якщо $X = X^{c}$, то єдиним опуклюючим оператором є тотожній оператор.

Нехай (X, h_X) — це L–простір і $H^{\omega}([a,b],X)$ позначає клас функцій $f\colon [a,b] \to X$ таких, що для всіх $t', t'' \in [a,b]$ маємо $h_X(f(t'), f(t'')) \leqslant \omega(|t' - t''|)$. Нехай також задано ψ_1 і ψ_2 з вказаними вище властивостями. Розглянемо функцію $\rho\colon [a,c] \to [c,b]$, $c = (a' + b')/2$, що задається співвідношеннями

$$\int_a^s \psi_1(t)dt = \int_{\rho(s)}^b \psi_2(t)dt, \text{ якщо } s \in [a, a'],$$

$$\text{і } \rho(s) = a' + b' - s, \text{ якщо } s \in [a', c],$$

Лема 1.3.2. *Для модуля неперервності* ω

$$\sup_{f \in H^{\omega}([a,b],X)} h_X\left(\int_a^{a'} f(t)\psi_1(t)dt, \int_{b'}^{b} f(t)\psi_2(t)dt\right) \leqslant \int_a^{a'} \psi_1(s)\omega(\rho(s) - s)ds = \int_{b'}^{b} \psi_2(t)\omega(t - \rho^{-1}(t))dt. \tag{3}$$

Якщо ω є опуклим догори модулем неперервності, а простір X є ізотропним і таким, що

$$X^{c} \cap X^{\text{inv}} \neq \{\theta\}, \tag{4}$$

то (3) *перетворюється на рівність. У цьому випадку супремум досягається для функцій $(\pm g + \alpha)_x(\cdot) + y \in H^{\omega}([a,b],X)$, де $\alpha \in \mathbb{R}$, $y \in X$, $x \in X^{c} \cap X^{\text{inv}}$, $h_X(x,\theta) = 1$, а функція g задається формулою*

$$g(t) = \begin{cases} \int_t^c \omega'(\rho(s) - s)ds, & a \leqslant t \leqslant c, \\ \int_c^t \omega'(s - \rho^{-1}(s))ds, & c \leqslant t \leqslant b. \end{cases}$$

У серії застосувань, які ми наводимо далі у цьому розділі, ми показуємо, що це узагальнення може бути важливим інструментом для розв'язання екстремальних задач для функцій зі значеннями у L–просторах.

Як одне з застосувань леми 1.3.2, ми доводимо такий результат.

Теорема 1.3.2. *Нехай задано два відрізки $[a,b]$ і $[c,d]$. Покладемо $M = \max\{b-a, d-c\}$, $m = \min\{b-a, d-c\}$, і для $\alpha,\beta \geq 0$, $I(\alpha,\beta) = \int_\alpha^\beta \omega(s)ds$. Для визначеності будемо вважати, що $a \leq c$. Тоді для всіх $f \in H^\omega([a, \max\{b,d\}], X)$*

$$h_X\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt, \frac{1}{d-c}\int_c^d f(t)dt\right) \leq$$
$$\leq \begin{cases} \frac{M-m}{M^2}\left\{I\left(0, \frac{M(c-a)}{M-m}\right) + I\left(0, \frac{M(b-d)}{M-m}\right)\right\}, & [c,d] \subset [a,b], \\ \frac{1}{M+m} I\left(\frac{M(b-c)}{m}, d-a\right) + \frac{M-m}{M^2} I\left(0, \frac{M(b-c)}{m}\right), & b \in [c,d], \\ \frac{1}{M+m} I(c-b, d-a), & c \geq b. \end{cases}$$

Якщо X є ізотропним, виконується умова (4) і ω є опуклим модулем неперервності, то нерівність є точною.

Важливим напрямком у теорії наближень і оптимальних алгоритмів є задачі оптимального відновлення функціоналів і операторів. Постановка цих задач, багато результатів і подальші посилання можуть бути знайдені у монографіях Дж. Трауба і Х. Вожняковського (1983), Л. Пласкота (1996), К. Ю. Осіпенка (2000), О. А. Женсикбаєва (2003). У підрозділі 1.4 ми розв'язуємо деякі задачі оптимального відновлення для функцій зі значеннями у L–просторах. Ми розглядаємо задачу оптимального відновлення у такій постановці.

Для множини A через $P_0(A)$ ми позначаємо сім'ю всіх непорожніх підмножин множини A. Нехай задано метричний простір (X, h_X), множини Y і W, а також відображення $\Lambda\colon W \to X$ і $I\colon W \to P_0(Y)$. Довільну функцію $U\colon Y \to X$ ми будемо називати методом відновлення відображення Λ на класі W за інформацією, що задана відображенням I. Похибкою відновлення відображення Λ на класі W методом U маючи інформацію, що дається (багатозначним) відображенням I, називається величина

$$E(\Lambda, W, I, U, X) = \sup_{w \in W} \sup_{y \in I(w)} h_X(\Lambda(w), U(y)).$$

Величина

$$E(\Lambda, W, I, X) = \inf_U E(\Lambda, W, I, U, X) \tag{5}$$

називається оптимальною похибкою відновлення відображення Λ на класі W, маючи інформацію, що задається відображенням I.

Відповідно до даного означення, ми розглядаємо багатозначні інформаційні оператори. Це дозволяє включити до розгляду випадок, коли інформація відома із похибкою. Наприклад, якщо Y — це метричний простір і для всіх $w \in W$, $I(w)$ є кулею в Y з деяким радіусом $\varepsilon > 0$, то на такий інформаційний оператор можна дивитись як на модель вимірювання з похибкою ε. Якщо для кожного $w \in W$, $I(w)$ є одноточковою множиною, тобто інформація відома точно, то ми можемо дещо спростити позначення. У цьому випадку $I\colon W \to Y$ і

$$E(\;,W,I,U,X) = \sup_{w \in W} h_X(\;(w),U(I(w))).$$

Задача оптимального відновлення відображення на класі W по інформації, що дається інформаційним відображенням I, в метриці простору X полягає у знаходженні величини (5) і методу U (якщо він існує), на якому досягається інфімум в правій частині (5). Якщо $\mathbf{I}$ — це деякий клас інформаційних операторів, то цікавим також є знаходження величини

$$E(\;,W,\mathbf{I},X) = \inf_{I \in \mathbf{I}} E(\;,W,I,X)$$

і оптимального інформаційного відображення, на якому досягається інфімум в правій частині (якщо такий оператор існує), або асимптотично оптимальної послідовності операторів, якщо оптимальний інформаційний оператор не існує, або його важко знайти.

У пункті 1.4.1 ми розглядаємо задачу оптимального відновлення опуклюючого оператора і оператора інтегрування на класі $H^\omega([a,b],X)$, маючи інформацію, що задається інформаційним оператором

$$I_{\mathbf{t}}(f) = \left(\frac{1}{2h}\int_{t_1-h}^{t_1+h} f(t)dt, \ldots, \frac{1}{2h}\int_{t_n-h}^{t_n+h} f(t)dt\right),$$

де $n \in \mathbb{N}$, $h > 0$ і $\mathbf{t} := (t_1,\ldots,t_n)$ є такими, що

$$a \leq t_1 - h < t_1 + h < t_2 - h < \ldots < t_n + h \leq b,$$

використовуючи довільний метод відновлення $U\colon X^n \to B([a,b],X)$ при відновленні опуклюючого оператора і метод відновлення $U\colon X^n \to X$ при відновленні інтеграла; $B([a,b],X)$ позначає простір вимірних обмежених функцій $f\colon [a,b] \to X$ з метрикою

$$h_{B([a,b],X)}(f,g) = \sup_{x \in [a,b]} h_X(f(x),g(x)).$$

Розглянемо вектор $\tau = \tau(\mathbf{t})$ з компонентами

$$\tau_1 = a, \tau_i = \frac{1}{2}(t_{i-1} + t_i), i = 2,\ldots,n, \tau_{n+1} = b \tag{6}$$

і покладемо

$$\mathbf{t} = (t_1, t_2 \ldots, t_n) = \left(a + \frac{b-a}{2n}, a + \frac{3(b-a)}{2n}, \ldots, a + \frac{(2n-1)(b-a)}{2n}\right). \tag{7}$$

Головними результатами цього пункту є такі теореми.

Теорема 1.4.1. *Для опуклюючого оператора P, ізотропного простору X для якого виконується властивість* (4)*, і довільного модуля неперервності ω маємо*

$$\inf_{\mathbf{t}} E(P, H^{\omega}([a,b],X), I_{\mathbf{t}}, B([a,b],X)) = \frac{1}{2h} \int_{(b\ \ a)/(2n)\ \ h}^{(b\ \ a)/(2n)+h} \omega(u)du.$$

Оптимальним інформаційним оператором є $I_{\mathbf{t}}$, оптимальним методом відновлення є

$$U\ \ (I_{\mathbf{t}}\ (f))(u) = \frac{1}{2h} \int_{t_k\ \ h}^{t_k+h} f(t)dt,\ u\ 2\ [\tau_k(\mathbf{t}\ ), \tau_{k+1}(\mathbf{t}\ )],$$

де вектори $\mathbf{t}$ і $\tau = \tau(\mathbf{t}\ )$ визначені у (7) *і* (6) *відповідно.*

Результати оптимального відновлення функції, або одночасного відновлення функції і її похідної, для класів дійснозначних функцій однієї змінної можна знайти у монографії М. П. Корнєйчука (1984).

Позначимо через Int оператор інтегрування по відрізку $[a,b]$.

Теорема 1.4.2. *Для ізотропного простору X, для якого виконується властивість* (4)*, і опуклого модуля неперервності ω, маємо*

$$\inf_{\mathbf{t}} E(\mathrm{Int}, H^{\omega}([a,b],X), I_{\mathbf{t}}, X) = 2n \left(1\ \ \frac{2nh}{b\ \ a}\right) \int_{0}^{(b\ \ a)/(2n)} \omega(t)dt.$$

Оптимальним інформаційним оператором є $I_{\mathbf{t}}$, а оптимальним методом відновлення є

$$U\ \ (I_{\mathbf{t}}\ (f)) = \frac{b\ \ a}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2h} \int_{t_k\ \ h}^{t_k+h} f(t)dt,$$

де вектор $\mathbf{t}$ означений у (7)*.*

Результати стосовно оптимізації інтервальних квадратурних формул для дійснозначних функцій можна знайти у роботах Р. Н. Шаріпова (1983), В. Ф. Бабенка (1984), В. П. Моторного (1998), С. В. Бородачьова (1998, 1999, 2000), Є. В. Дерець (2005, 2007, 2008, 2011, 2012), В. Ф. Бабенка і Д. С. Скороходова (2007, 2007, 2008), В. П. Мотороного і Д. А. Овсяннікова (2020). У роботі В. Ф. Бабенка, В. В. Бабенко, М. С. Поліщук (2016) розглядалась аналогічна задача для багатозначних функцій.

Поняття різниці Хукухара для множин було введено у статті М. Хукухара (1967). Це поняття має безпосереднє узагальнення для довільних L–просторів. Детально такого роду узагальнення розглядалось у статті В. В. Бабенко (2019).

Нехай X — це L–простір. Будемо казати, що елемент $z \in X$ є різницею Хукухара елементів $x, y \in X$, якщо $x = y + z$. Ми використовуватиме таке позначення $z = x \ominus_H y$. Відмітимо, що у ізотропному L–просторі, якщо різниця Хукухара $x \ominus_H y$ існує, то вона єдина. Якщо $t \in (a, b)$, і для всіх достатньо малих $\gamma > 0$ існують різниці $f(t+\gamma) \ominus_H f(t)$ і $f(t) \ominus_H f(t-\gamma)$, і обидві границі $\lim_{\gamma \to +0} \gamma^{-1}(f(t+\gamma) \ominus_H f(t))$ і $\lim_{\gamma \to +0} \gamma^{-1}(f(t) \ominus_H f(t-\gamma))$ існують і рівні, то функція $f\colon [a,b] \to X$ має похідну $D_H f(t)$ типу Хукухара у точці t (якщо $t = a$ або $t = b$, то вимагаємо існування однієї з границь) і

$$D_H f(t) := \lim_{\gamma \to +0} \gamma^{-1}(f(t+\gamma) \ominus_H f(t)).$$

У пункті 1.4.2 ми розглядаємо задачі оптимального відновлення одиничного відображення і оператора D_H похідної типу Хукухара на класі $W^1H^\omega([a,b], X)$ функцій $f\colon [a,b] \to X$, чия похідна типу Хукухара належить до класу $H^\omega([a,b], X)$. У цих задачах інформаційними операторами виступають оператори

$$I_{\mathbf{t}}(f) = (f(t_0), f(t_1), \ldots, f(t_n)), \tag{8}$$

де $\mathbf{t} = (t_0, \ldots, t_n)$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$.

Теорема 1.4.3. *Якщо ω — це опуклий модуль неперервності, а* Id — *це одиничний оператор, то для ізотропного L–простору X з властивістю* (4)*, маємо*

$$\inf_{\mathbf{t}} E(\mathrm{Id}, W^1H^\omega([a,b], X), I_{\mathbf{t}}, C([a,b], X)) = \frac{1}{4}\int_0^{(b-a)/n} \omega(t)\,dt.$$

Оптимальним інформаційним оператором є оператор $I_{\mathbf{t}^*}$ де $\mathbf{t}^*$ — це рівномірне розбиття, а оптимальним методом відновлення є $U(I_{\mathbf{t}^*}(f)) = l_f(\mathbf{t}^*)$, де

$$l_f(\mathbf{t}; t) = \frac{t_{k+1} - t}{t_{k+1} - t_k} f(t_k) + \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} f(t_{k+1}),\ t \in [t_k, t_{k+1}], k = 0, \ldots, n-1.$$

Ми отримуємо узагальнення результату В. Н. Малозьомова (1967).

Теорема 1.4.4. *Нехай задано модуль неперервності ω і $\mathbf{t}^* = (t_0, \ldots, t_n)$ позначає рівномірне розбиття відрізка* $[a,b]$*. Тоді для ізотропного L–простору X з властивістю* (4)*,*

$$E(D_H, W^1H^\omega([a,b], X), I_{\mathbf{t}^*}, B([a,b], X)) = \frac{n}{b-a}\int_0^{(b-a)/n} \omega(u)\,du.$$

Оптимальним методом відновлення є

$$U(f(t_0), f(t_1), \ldots, f(t_n)) = D_H l_f(\mathbf{t}^*).$$

У пункті 1.4.3 ми розглядаємо задачу оптимального відновлення монотонних операторів, що діють у частково впорядкованих L–просторах функцій. Задачі оптимізації квадратурних формул на класах монотонних дійснозначних функцій розглядалися у роботах Дж. Кіфера (1957), А. Папагеоргіу (1993), В. Ф. Бабенка і С. В. Бородачьова (1999), С. В. Бородачьова (2001). У статті В .Ф. Бабенка і В. В. Бабенко (2011) ця задача розглядалась на класах багатозначних функцій.

Нехай задано частково впорядковані L–простори (тобто L–простори у яких введено частковий порядок, що є узгодженим з алгебраїчними операціями і топологією L–простору) X і Y, метричний компакт S з борелівською мірою ν і ідеальна банахова решітка $E(S,\mathbb{R})$ дійснозначних функцій $f\colon S\to\mathbb{R}$. За допомогою цієї решітки можна визначити простір $E(S,Y)$ вимірних функцій $f\colon S\to Y$ з метрикою $h_{E(S,Y)}(f,g)=\|h_Y(f(\cdot),g(\cdot))\|_{E(S,\mathbb{R})}$.

Інтервали $(\alpha,\beta),(\alpha,\beta],[\alpha,\beta)$ або $[\alpha,\beta]$, що містяться у $[0,1]$, будемо називати підінтервалами відрізка $[0,1]$. Позначимо через $\mathrm{si}([0,1])$ множину усіх таких підінтервалів. Нехай задано неспадний оператор $\lambda\colon X\to Y^{\mathrm{c}}$ і оператор φ, визначений на множині характеристичних функцій χ_T, $T\in\mathrm{si}([0,1])$, який приймає значення у просторі $E(S,\mathbb{R})$, і такий, що $\varphi(\chi_T)\geq 0$ майже всюди для кожного $T\in\mathrm{si}([0,1])$ і $\|\varphi(\chi_{T'})\|_{E(S,\mathbb{R})}=\|\varphi(\chi_{T''})\|_{E(S,\mathbb{R})}$, якщо кінці підінтервалів T' і T'' співпадають.

Будемо казати, що оператор $\colon B([0,1],X)\to E(S,Y)$ є (λ,φ)–адитивним, якщо для кожного розбиття $\{T_1,\dots,T_n\}$, $T_i\in\mathrm{si}([0,1])$, $i=1,\dots,n$ відрізка $[0,1]$ і простої функції f, що задається формулою (2), справедлива рівність

$$(f)(\cdot)=\left(\sum_{k=1}^{n}\chi_{T_k}\cdot f_k\right)(\cdot)=\sum_{k=1}^{n}\varphi(\chi_{T_k})(\cdot)\cdot\lambda(f_k). \tag{9}$$

Найважливішими прикладами (λ,φ)–адитивних операторів є інтеграл Лебега функції зі значеннями у L–просторі, і інтегральні оператори, які означаються за допомогою інтеграла Лебега.

Ми припускаємо, що L–простір Y є ізотропним, центрованим (тобто для кожного порядкового інтервалу $[x,y]:=\{z\in Y: x\leq z\leq y\}$ множина $C([x,y])$ його чебишовських центрів є непорожньою і чебишовський радіус порядкового інтервалу $[x,y]$ дорівнює $\frac{1}{2}h_Y(x,y)$), і має подільну метрику (тобто $\sum_{i=1}^{n}h_Y(y_i,y_{i+1})=h_Y(y_1,y_{n+1})$ для всіх наборів $y_1\leqslant y_2\leqslant\dots\leqslant y_{n+1}$ елементів з простору Y).

Класом W виступають класи $W_{\alpha,\beta}$ монотонних функцій $f\colon[0,1]\to X$ таких, що $f(0)=\alpha$ і $f(1)=\beta$, $\alpha,\beta\in X$. Інформаційні оператори — оператори (8) (з $[a,b]=[0,1]$).

Теорема 1.4.5. *При виконання описаних вище припущень, для кожного*

(λ,φ)-адитивного оператора $\Lambda\colon B([0,1],X)\to E(S,Y)$, маємо

$$E(\Lambda, W_{\alpha,\beta}, I_{\mathbf{t}}, E(S,Y)) = \frac{h_Y(\lambda(\alpha),\lambda(\beta))}{2}\max_{i=0,\dots,n-1}\|\varphi(\chi_{(t_i,t_{i+1})})\|_{E(S,\mathbb{R})}.$$

Будь-яка однозначна гілка $U_\Lambda(f_0,\dots,f_n)(t)$ з багатозначної функції

$$[0,1]\ni t\mapsto C\left(\left[\Lambda\left(\sum_{i=0}^{n-1}\chi_{\Delta_i}f_i\right),\ \Lambda\left(\sum_{i=0}^{n-1}\chi_{\Delta_i}f_{i+1}\right)\right]\right)$$
$$= C\left(\left[\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(\chi_{\Delta_i})(t)\lambda(f_i), \sum_{i=0}^{n-1}\varphi(\chi_{\Delta_i})(t)\lambda(f_{i+1})\right]\right)$$

є оптимальним методом відновлення, де $\Delta_i=[t_i,t_{i+1})$ для $i=0,\dots,n-2$ і $\Delta_{n-1}=[t_{n-1},t_n]$.

Ми також досліджуємо питання оптимізації інформаційних вузлів $\mathbf{t}$.

У пункті 1.4.4 ми розглядаємо інше узагальнення оператора інтегрування, а саме оператори $\Lambda\colon B(T,X)\to E(S,Y)$, які для деяких фіксованих операторів $\lambda\colon X\to Y$ і $\varphi\colon(T,\mathbb{R})\to E(S,\mathbb{R})$ задовольняють таким властивостям: для всіх $f,g\in B(T,X)$ і $s\in S$

$$h_Y(\Lambda f(s),\Lambda g(s))\leqslant\varphi(h_Y(\lambda\circ f(\cdot),\lambda\circ g(\cdot)))(s),$$

і для всіх невід'ємних функцій $u\in B(T,\mathbb{R})$, і довільного $x\in X$

$$\Lambda(u(\cdot)x)=\varphi(u(\cdot))\lambda(x).$$

У цьому пункті ми наводимо загальну теорему про оптимальне відновлення таких операторів Λ, використовуючи інформацію про значення функцій у n точках, які відомі із похибкою, тобто інформаційні оператори

$$I_{\mathbf{t}}^{\varepsilon}(f):=(B(f(t_1),\varepsilon_1),\dots,B(f(t_n),\varepsilon_n)),$$

де $t_1,\dots,t_n\in T$, $\mathbf{t}=(t_1,\dots,t_n)$, $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ — це фіксовані невід'ємні числа, $\varepsilon=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$, і для $a\in X$ і $\delta\geqslant 0$, $B(a,\delta)=\{x\in X\colon h_X(a,x)\leqslant\delta\}$.

Нехай $L_p=L_p(\Omega,F,P)$ — це простір випадкових величин ξ зі скінченним математичним сподіванням $\mathbf{E}(|\xi|^p)$, $p\geqslant 1$. Ми розглядаємо дві метрики у просторі L_p: $\delta_X(\eta,\zeta):=(\mathbf{E}|\eta-\zeta|^p)^{\frac{1}{p}}$ і $\delta_Y(\eta,\zeta):=(\mathbf{E}(\tau\cdot|\eta-\zeta|^p))^{\frac{1}{p}}$, де τ є невід'ємною випадковою величиною для якої $\operatorname{ess\,sup}_{w\in\Omega}\tau(w)=1$. Для заданого модуля неперервності ω, і компактного метричного простору (T,d_T), розглянемо клас $H^\omega(T)$ вимірних випадкових процесів ξ_t, $t\in T$ таких, що $\xi_t\in L_p$ для всіх $t\in T$, і $\mathbf{E}|\xi_t-\xi_s|^p\leqslant\omega^p(d_T(t,s))$ для всіх $t,s\in T$. Для невід'ємної функції $\rho\in L_1(T,\mathbb{R})$, розглянемо оператор

$$\mathrm{Int}_\rho\colon B(T,(L_p,\delta_X))\to(L_p,\delta_Y),\ \mathrm{Int}_\rho\xi_t=\int_T\rho(t)\xi_t dt.$$

Ми доводимо, що

$$E(\mathrm{Int}_\rho, H^\omega(T), I_{\mathbf{t}}^{\varepsilon}, (L_p, \delta_Y)) = \int_T \rho(t) f_{\omega,\mathbf{t},\varepsilon}(t)dt,$$

де $f_{\omega,\mathbf{t},\varepsilon}(t) := \min_{i=1,\dots,n}\{\varepsilon_i + \omega(d_T(t,t_i))\}$, а оптимальний метод відновлення дається формулою $U(\eta_1,\dots,\eta_n) = \sum_{k=1}^n \eta_k \int_{T_k}\rho(t)dt$. У випадку $T = [0,1]$, $\tau \equiv 1$, $\rho \equiv 1$ і $p = 2$ цей результат міститься у статті Л. В. Дрожжиної (1975).

У підрозділі 1.5 ми розглядаємо задачі наближення операторів та деякі пов'язані задачі. Нехай X та Y — це два L–простори, а $A, S\colon X \to Y$ — це два оператори з областями $D_A, D_S \subset X$ відповідно. Нехай також задано деякий клас елементів $Q \subset D_A \cap D_S$. Задача знаходження відхилення між операторами A і S на множині Q, тобто задача знаходження величини

$$U(A,S,Q) := \sup_{x\in Q} h_Y(Ax, Sx), \tag{10}$$

має важливу роль у теорії апроксимації і чисельному аналізі. Наприклад, якщо Q є деякою множиною неперервних функцій $f\colon T \to \mathbb{R}$, оператори A і S задаються формулами $Af = \int_T f(s)ds$, $Sf = \sum_{k=1}^n c_k f(x_k)$ $(c_k \in \mathbb{R}, t_k \in T, k = 1,\dots,n)$, і h_Y — це звичайна метрика у $\mathbb{R}$, то величина (10) дає похибку кубатурної формули S на класі Q; якщо A є одиничним оператором, h_Y є деякою метрикою, і S є оператором найкращого наближення елементами з множини R, тобто $Sf = \arg\min_{g\in R} h_Y(f,g)$, то величина (10) стає наближенням множини Q множиною R у метриці h_Y, яка означається формулою $\sup_{f\in Q}\inf_{g\in R} h(f,g)$; ми припускаємо, що мінімум в означенні оператора S існує при будь-якому $f \in Q$.

Величина (10) пов'язана з рядом оптимізаційних задач. Наприклад, вважаючи оператор A, множину Q, і сім'ю S операторів S заданими, ми можемо поставити задачу знаходження величини

$$E_{\mathsf{S}}(A,Q) := \inf_{S\in\mathsf{S}} U(A,S,Q) \tag{11}$$

і найкращого оператора $S \in \mathsf{S}$ на якому досягається інфімум, якщо такий оператор існує. Вперше такого роду задачу розглядав С. Б. Стєчкін у 1965 році, у випадку, коли X і Y — це нормовані простори, а сім'я S — це сукупність лінійних обмежених операторів з нормою, що не перевищує числа $N > 0$; зазвичай у цьому випадку пишуть $E_N(A,Q)$ замість $E_{\mathsf{S}}(A,Q)$. Формулювання цієї задачі, перші важливі результати, а також розв'язання цієї задачі для диференціальних операторів малих порядків можна знайти у статті С. Б. Стєчкін (1967). Огляд подальших результатів стосовно цієї тематики можна знайти у оглядовій статті В. В. Арестова (1996) та монографії В. Ф. Бабенка, М. П. Корнєйчука, В. О. Кофанова і С. О. Пічугова (2003). Деякі екстремальні задачі для функцій зі значеннями у L–просторах розглядались у статтях В. В. Бабенко (2016), В. Ф. Бабенка і В. В. Бабенко (2019).

Задача Стєчкіна, у свою чергу, тісно пов'язана з нерівностями типу Ландау–Колмогорова. Перші нерівності для похідних були отримані на початку XX століття у роботах Ґ. Г. Гарді і Дж. І. Літтлвуда (1912), і Е. Ландау (1913). Одним з найважливіших результатів у цій тематиці є результат А. М. Колмогорова (1938), після якого нерівності, що оцінюють норму проміжної похідної функції за допомогою норми функції і норми її старшої похідних, стали називати нерівностями типу Колмогорова, або, у випадках функцій малої гладкості, нерівностями типу Ландау–Колмогорова.

Огляд результатів для дійснозначних функцій однієї і багатьох змінних, а також подальші посилання, можуть бути знайдені, наприклад, у монографії В. Ф. Бабенка, М. П. Корнєйчука, В. О. Кофанова і С. О. Пічугова (2003) і у докторській дисертації Н. В. Парфінович (2018). Нерівності типу Ландау–Колмогорова для класів функцій зі значеннями у L–просторах містяться у статті В. Ф. Бабенка і В. В. Бабенко (2019).

Задача знаходження модуля неперервності оператора A на класі Q, тобто функції

$$\omega(\delta) = \omega(A, Q; \delta) := \sup\{\|Ax\| \colon x \in Q, \|x\| \le \delta\}, \ \delta \ge 0, \tag{12}$$

є абстрактною версією задачі про нерівності типу Ландау–Колмогорова.

Деяким узагальненням задачі (10) є така задача. Для $\delta \ge 0$ величину

$$U_\delta(A, S, Q) := \sup\{h_Y(Ax, S\eta) \colon x \in Q, \eta \in X, h_X(x, \eta) \leqslant \delta\},$$

називають відхиленням оператора $S \in \mathfrak{S}$ від оператора A на класі Q, при умові, що елементи відомі з похибкою δ. Задача оптимального відновлення оператора A операторами з сім'ї $\mathfrak{S}$ на класі Q елементів, що відомі з похибкою δ, полягає у знаходженні величини

$$E_\delta(A, Q, \mathfrak{S}) := \inf_{S \in \mathfrak{S}} U_\delta(A, S, Q)$$

і оператора S, на якому досягається інфімум у правій частині, якщо такий оператор існує. Загальні результати про зв'язок між сформульованими задачами можна знайти у оглядових статтях В. М. Габушина (1970, 1980) і В. В. Арестова та В. М. Габушина (1995).

У пункті 1.5.1 ми досліджуємо задачу про оцінки відхилення інтегральних операторів у просторах функцій зі значеннями в L-просторах, обговорюємо можливі застосування одержаних результатів до задач апроксимації узагальненими тригонометричними поліномами, оптимізації формул наближеного інтегрування, а також відновлення функцій по неточно заданій інформації. Як завжди, для $p \in [1, \infty]$ покладаємо $p' = p/(p-1)$. Нехай Q – деяка множина і (S, F) — це вимірний простір зі скінченною повною мірою μ. Головною теоремою цього пункту є така теорема.

Теорема 1.5.1. *Нехай $p \in (1, \infty]$ і функції $K, N\colon Q \times S \to \mathbb{R}$ є такими, що $K(t,\cdot), N(t,\cdot) \in L_{p'}(S)$ для кожного $t \in Q$. Тоді для операторів*

$$(\widetilde{K}\phi)(t) = \int_S K(t,s)\phi(s)d\mu(s), (\widetilde{N}\phi)(t) = \int_S N(t,s)\phi(s)d\mu(s),$$

довільної функції $\phi \in L_p(S,X)$ і кожного $t \in Q$ має місце нерівність

$$h_X((\widetilde{K}\phi)(t),(\widetilde{N}\phi)(t)) \le \|K(t,\cdot) - N(t,\cdot)\|_{L_{p'}(S)}\|h_X(\phi,\theta)\|_{L_p(S)}. \qquad (13)$$

Якщо простір X є ізотропним і у множині $X^c \setminus X^{inv}$ знайдеться ненульовий елемент a для якого $a' = -a$, то нерівність (13) непокращувана і перетворюється на рівність для довільної функції виду

$$\phi_t(s) = \varphi_t(s)\cdot a, t \in Q,$$

де $\varphi_t(s) = |K(t,s) - N(t,s)|^{p'-1}\mathrm{sgn}(K(t,s) - N(t,s))$, $s \in S$.

У пункті 1.5.2 для (λ,φ)–адитивних операторів (в рівності (9) тепер $\{T_i\}$ — це довільне розбиття метричного компакту T на вимірні підмножини), ми знаходимо величину $U(\ , f \mapsto \ (f(t_0)\chi_T), H^\omega(T,X))$, де $t_0 \in T$ — деяка фіксована точка. Позначимо через $B_s(T,X)$ замикання у просторі $B(T,X)$ множини вимірних функцій, які приймають скінченну кількість значень. Оператор $\lambda\colon X \to Y$ будемо називати додатно-однорідним, якщо для всіх $\alpha \ge 0$ і $x \in X^c$ справедлива рівність $\lambda(\alpha x) = \alpha\lambda(x)$. Послідовність $\{x_n\} \subset X$ будемо називати λ–екстремальною, якщо для всіх $n \in \mathbb{N}$ маємо $h_X(x_n,\theta_X) = 1$, і $h_Y(\lambda(x_n),\theta_Y) \to 1$ при $n \to \infty$.

Теорема 1.5.3. *Нехай $\lambda\colon X \to Y^c$ — ліпшицевий оператор, $\varphi\colon B(T,\mathbb{R}) \to B(S,\mathbb{R})$ — лінійний обмежений додатній оператор, задано неперервний (λ,φ)–адитивний оператор $\ \colon B_s(T,X) \to B(S,Y)$ і модуль неперервності ω. Тоді для будь-якої функції $f \in H^\omega(T,X)$ і довільного $t_0 \in T$ справедлива нерівність*

$$h_Y(\ f(s), \ (f(t_0)\chi_T)(s)) \le \left(\int_T \omega(\rho(t,t_0))d\mu_\varphi\right)(s), s \in S, \qquad (14)$$

де інтеграл справа — це інтеграл по векторо-значній мірі μ_φ, що породжена оператором φ; для неї, зокрема, $\mu_\varphi(A) = \varphi(\chi_A)$. Якщо додатково оператор λ є додатно-однорідним і існує λ–екстремальна послідовність $\{x_n\} \subset X^c$, то нерівність (14) є точною.

У пункті 1.5.3 на класі функцій $W^1H^\omega([a,b],X)$ ми отримуємо результати стосовно відхилення між різницевими операторами (різниці розуміються у сенсі Хукухара), а також між різницевим оператором і похідною у сенсі Хукухара. Крім того, на цьому класі ми отримуємо нерівності типу

Ландау–Колмогорова, результати стосовно задачі Стєчкіна і задачі оптимального відновлення оператора, що обчислює похідну Хукухара у точці, за елементами, що відомі з похибкою.

Нехай $t \in [a,b]$ і задано невід'ємні числа $\gamma_1, \gamma_2, h_1, h_2$ такі, що

$$\gamma_1 + \gamma_2 > 0, h_1 + h_2 > 0, \text{ і } [t - \gamma_1, t + \gamma_2] \subset [t - h_1, t + h_2] \subset [a,b]. \tag{15}$$

Для функції $f \in W^1H^\omega([a,b],X)$ покладемо $\Delta^H_{\gamma_1,\gamma_2} f(t) = \frac{f(t+\gamma_2) -_H f(t-\gamma_1)}{\gamma_1+\gamma_2}$ і

$$K(\gamma_1,\gamma_2;h_1,h_2) := \frac{(h_1-\gamma_1)+(h_2-\gamma_2)}{(h_1+h_2)^2}\left\{ I\left(\frac{(h_1+h_2)(h_1-\gamma_1)}{(h_1-\gamma_1)+(h_2-\gamma_2)}\right) \right.$$
$$\left. + I\left(\frac{(h_1+h_2)(h_2-\gamma_2)}{(h_1-\gamma_1)+(h_2-\gamma_2)}\right)\right\},$$

де $I(\alpha) = \int_0^\alpha \omega(s)ds$. Ми використовуємо наступні позначення:

$$\overline{W}^1 H^\omega([a,b],X) = \bigcup_{k>0} k \cdot W^1H^\omega([a,b],X),$$

$\|x\|_X = h_X(x,\theta)$, $\|f\|_{\omega,X} = \sup\limits_{\substack{t',t''\in[a,b]\\ t'\neq t''}} \frac{h_X(f(t'),f(t''))}{\omega(|t'-t''|)}$ і $\|f\|_{C([a,b],X)} = \sup\limits_{t\in[a,b]} \|f(t)\|_X$.

Теорема 1.5.4. *Для ізотропного простору X, всіх $t \in [a,b]$, невід'ємних чисел $\gamma_1, \gamma_2, h_1, h_2$, що задовольняють (15), і $f \in \overline{W}^1H^\omega([a,b],X)$,*

$$\|\Delta^H_{\gamma_1,\gamma_2} f(t)\|_X \leqslant K(\gamma_1,\gamma_2;h_1,h_2)\|D_H f\|_{\omega,X} + \|\Delta^H_{h_1,h_2} f(t)\|_X, \tag{16}$$

$$\|D_H f(t)\|_X \leqslant \frac{I(h_1)+I(h_2)}{h_1+h_2}\|D_H f\|_{\omega,X} + \|\Delta^H_{h_1,h_2} f(t)\|_X. \tag{17}$$

Нерівність (16) є точною для опуклого модуля неперервності ω. Нерівність (17) є точною для довільного модуля неперервності ω.

Теорема 1.5.5. *При виконанні умов теореми 1.5.4 для кожної функції $f \in \overline{W}^1H^\omega([a,b],X)$,*

$$\|\Delta^H_{\gamma_1,\gamma_2} f(t)\|_X \leqslant K(\gamma_1,\gamma_2;h_1,h_2)\|D_H f\|_{\omega,X} + \frac{2}{h_1+h_2}\|f\|_{C([a,b],X)}, \tag{18}$$

$$\|D_H f(t)\|_X \leqslant \frac{I(h_1)+I(h_2)}{h_1+h_2}\|D_H f\|_{\omega,X} + \frac{2}{h_1+h_2}\|f\|_{C([a,b],X)}. \tag{19}$$

Якщо для фіксованих $t \in [a,b]$ і $h > \gamma > 0$

$$\gamma_1 = \min\{\gamma, t-a\}, \gamma_2 = \min\{\gamma, b-t\}, h_1 = \min\{h, t-a\}, h_2 = \min\{h, b-t\} \tag{20}$$

і ω є опуклим модулем неперервності, то нерівність (18) *є точною. Якщо для $t \in [a,b]$ і $h > 0$*

$$h_1 = \min\{h, t - a\}, \; h_2 = \min\{h, b - t\}, \tag{21}$$

і ω є довільним модулем неперервності, то нерівність (19) *є точною.*

Для $t \in [a,b]$ позначимо через ${}_{\gamma_1,\gamma_2}(t)$ і $D_H(t)$ оператори, що діють за формулами

$${}_{\gamma_1,\gamma_2}(t)f = {}^{H}_{\gamma_1,\gamma_2}f(t) \text{ і } D_H(t)f = D_H f(t).$$

Теорема 1.5.6. *Нехай задано модуль неперервності ω, ізотропний простір X, $t \in [a,b]$, і числа $h > \gamma > 0$. Нехай також $\gamma_1, \gamma_2, h_1, h_2$ — це числа означені у* (20)*. Якщо ω є опуклим модулем неперервності, то*

$$E_{\frac{2}{h_1+h_2}}\left({}_{\gamma_1,\gamma_2}(t), W^1H^\omega([a,b],X)\right)$$
$$= U\left({}_{\gamma_1,\gamma_2}(t), {}_{h_1,h_2}(t), W^1H^\omega([a,b],X)\right) = K(\gamma_1,\gamma_2;h_1,h_2).$$

Для довільного модуля неперервності ω

$$E_{\frac{2}{h_1+h_2}}\left(D_H(t), W^1H^\omega([a,b],X)\right)$$
$$= U\left(D_H(t), {}_{h_1,h_2}(t), W^1H^\omega([a,b],X)\right) = \frac{I(h_1)+I(h_2)}{h_1+h_2}.$$

Теорема 1.5.7. *Нехай задано модуль неперервності ω, $t \in [a,b]$, $h > 0$, і $D_H(t)f = D_H f(t)$ для $f \in W^1H^\omega([a,b],X)$. Якщо числа h_1, h_2 задовольняють умовам* (21), *і*

$$\delta = \frac{h_1+h_2}{2}\max\{\omega(h_1),\omega(h_2)\} - \frac{I(h_1)+I(h_2)}{2},$$

то для оператора ${}_{h_1,h_2}(t)f = {}^{H}_{h_1,h_2}f(t)$ маємо

$$E_\delta(D_H(t), W^1H^\omega([a,b],X))$$
$$= U_\delta(D_H(t), {}_{h_1,h_2}(t), W^1H^\omega([a,b],X)) = \max\{\omega(h_1),\omega(h_2)\}.$$

У *другому розділі* ми розглядаємо екстремальні задачі на класах функцій Соболєва багатьох змінних. Головні результати цього розділу містяться у статтях [3, 8, 9, 17].

Нехай задано відкритий опуклий конус $C \subset \mathbb{R}^d$, що породжений скінченною кількістю точок, тобто непорожню множину виду

$$\operatorname{int}\left\{\sum_{k=1}^{n} c_k x_k \colon c_k \geq 0, k = 1, \ldots, n\right\} \subset \mathbb{R}^d,$$

$n\in\mathbb{N}$, $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}^d$ (множину таких конусів позначаємо $\mathcal{C}$), і опуклу обмежену центрально-симетричну множину $K\subset\mathbb{R}^d$, що містить початок координат у своїй внутрішності (сім'ю таких множин позначаємо $\mathcal{K}$). Для $C\in\mathcal{C}$ через $L^1_{\infty,p}(C)$, $p\in[1,\infty]$, ми позначаємо множину функцій $f\colon C\to\mathbb{R}$ таких, що $f\in L_\infty(C)$ і всі (узагальнені) частинні похідні першого порядку належать до $L_p(C)$. Для $p\in[1,\infty]$ і $C\in\mathcal{C}$ покладемо

$$W^K_{\infty,p}=W^K_{\infty,p}(C):=\left\{f\in L^1_{\infty,p}(C)\colon \||\nabla f|_{K^*}\|_{L_p(C)}\le 1\right\},$$

де K^* — це полярна до K множина, $|\cdot|_K$ позначає норму у $\mathbb{R}^d$, що породжена множиною K, тобто $|x|_K:=\inf\{\lambda>0\colon x\in\lambda K\}$. На цьому класі функцій ми розв'язуємо задачу Стєчкіна найкращого наближення взагалі кажучи необмеженого гіперсингулярного інтегрального оператора

$$D_{K,w}\colon L^1_{\infty,p}(C)\to L_\infty(C), D_{K,w}f(x)=\int_C w(|t|_K)(f(x)-f(x+t))dt$$

за допомогою обмежених, де $w\colon(0,\infty)\to[0,\infty)$ деяка вагова функція, що може мати неінтегровну особливість в точці 0. У випадку, коли K — це евклідова куля у $\mathbb{R}^d$, $C=\mathbb{R}^d$ і $w(t)=t^{-(d+\alpha)}$, $\alpha\in(0,1)$, цей інтеграл перетворюється на оператор дробової похідної у сенсі Ріса.

Для того, щоб означити класи вагових функцій, нам потрібні декілька означень. Для $0\le a<b\le+\infty$ і $p\in[1,\infty]$, позначимо через $\mathbf{L}_p(a,b)$ простір усіх вимірних функцій $w\colon(a,b)\to\mathbb{R}_+$ зі скінченною нормою

$$\|w\|_{\mathbf{L}_p(a,b)}=\begin{cases}\left(\int_a^b t^{d-1}w^p(t)dt\right)^{1/p}, & p<\infty,\\ \operatorname{ess\,sup}_{t\in(a,b)} t^{d-1}w(t), & p=\infty.\end{cases}$$

Відмітимо, що умова $w\in\mathbf{L}_p(0,1)$ у випадку $p\in[1,\infty)$ гарантує, що інтеграл $\int_{K\cap C}w^p(|t|_K)dt$ існує у випадку, коли K — це політоп.

Для $h>0$ і $p\in[1,\infty]$ позначимо через $\mathbf{W}_p(0,h)$ простір усіх невід'ємних функцій $w\colon(0,h]\to\mathbb{R}$ таких, що $w\in\mathbf{L}_1(u,h)$ для всіх $u\in(0,h)$ і функція

$$g_{w,h}(u)=g_w(u)=\frac{1}{u^{d-1}}\int_u^h w(t)t^{d-1}dt$$

належить до $\mathbf{L}_p(0,h)$. Для $h>0$ і $p\in[1,\infty]$ позначимо через $\mathcal{W}_p(0,h)$ простір усіх невід'ємних функцій $w\colon(0,h]\to\mathbb{R}$ таких, що $w\in\mathbf{L}_p(u,h)$ для всіх $u\in(0,h)$, для усіх ν достатньо близьких до 1 зліва, функція

$$w_\nu(u)=\sup_{t\in[\nu u,u]}|w(t)-w(u)|$$

належить до $\mathbf{W}_p(0,h)$, і $\lim_{\nu\to1-0}\|g_{w_\nu,h}\|_{\mathbf{L}_p(0,h)}=0$. Можна довести, що оператор $D_{K,w}$ є необмеженим, якщо інтеграл $\int_0^\infty w(\rho)\rho^{d-1}\,d\rho$ розбігається, і є обмеженим з нормою $2d\cdot\operatorname{meas}(K\cap C)\int_0^\infty w(\rho)\rho^{d-1}\,d\rho$, якщо інтеграл збігається. Головним результатом підрозділу 2.3 є така теорема.

Теорема 2.3.1. *Нехай $p\in(d,\infty]$, $C\in\mathcal{C}$, $K\in\mathcal{K}$ — це політоп, і $w\in W_{p'}(0,1)\cap L_1(1,\infty)$, або $K\in\mathcal{K}$ і $w\in W_{p'}(0,1)\cap L_1(1,\infty)$. Для всіх*

$$N\in\begin{cases}(0,\infty), & D_{K,w} \text{ є необмеженим},\\ (0,\|D_{K,w}\|), & D_{K,w} \text{ є обмеженим},\end{cases}$$

нехай h_N є таким, що $2d\cdot\mathrm{meas}(K\cap C)\int_{h_N}^{\infty}w(\rho)\rho^{d-1}\,d\rho=N$. Тоді

$$E_N(D_{K,w},W^K_{\infty,p})=(d\cdot\mathrm{meas}(K\cap C))^{\frac{1}{p'}}\|g_{w,h_N}\|_{L_{p'}(0,h_N)}.$$

Крім того, екстремальним оператором є

$$(D_{K,w,h_N}f)(x):=\int_{C\setminus h_N K}w(|t|_K)(f(x)-f(x+t))\,dt,\ x\in C.$$

У підрозділі 2.4 ми знаходимо величину

$$U(D_{K,w},D_{K,w,h},W^K_{\infty,p}). \tag{22}$$

Справедлива така теорема.

Теорема 2.4.1. *Нехай $p\in(d,\infty]$, $C\in\mathcal{C}$, $K\in\mathcal{K}$ — це політоп, $h>0$ і $f\in W^{1,p}(hK\cap C)$. Для кожного $w\in W_{p'}(0,h)$ маємо*

$$\left|\int_{hK\cap C}w(|y|_K)[f(y)-f(\theta)]\,dy\right| \le (d\cdot\mathrm{meas}(K\cap C))^{\frac{1}{p'}}\|g_{w,h}\|_{L_{p'}(0,h)}\||\nabla f|_K\|_{L_p(hK\cap C)}. \tag{23}$$

Нерівність є точною. Вона перетворюється на рівність для функцій $a\cdot f_e+b$, де $a,b\in\mathbb{R}$ і

$$f_e(y)=f_{e,h}(y)=\int_0^{|y|_K}g_{w,h}^{p'-1}(u)\,du,\ y\in hK\cap C. \tag{24}$$

Якщо додатково $w\in W_{p'}(0,h)$, то нерівність (23) справедлива і точна для усіх $K\in\mathcal{K}$.

Нерівність (23) з одного боку є цікавою сама по собі, а з іншого — є важливим кроком для доведення як теореми 2.3.1, так і деяких подальших результатів.

Гіперсингулярні інтегральні оператори тісно пов'язані з операторами дробового диференціювання. Екстремальні задачі теорії наближення для таких операторів для функцій однієї і багатьох змінних досліджувались багатьма математиками. Точні нерівності типу Колмогорова для функцій багатьох змінних були отримані у таких роботах: В. Н. Коновалов (1978), А. П. Буслаєв і В. М. Тихоміров (1979), Динь-Дзунг і В. М. Тихоміров (1979), В. Г. Тимофеєв (1983, 1985), В. Ф. Бабенко, В. О. Кофанов і С. О. Пічугов (1996, 1997), В. Ф. Бабенко (2000), В. Ф. Бабенко і С. О. Пічугов (2007, 2010), В. Ф. Бабенко і М. С. Чурілова (2007), В. Ф. Бабенко і Т. В. Матвеєва (2008), В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфінович і С. О. Пічугов (2010, 2014), В. Ф. Бабенко і Д. А. Левченко (2010), В. Ф. Бабенко і Н. В. Парфінович (2011, 2012), Н. В. Парфінович (2015, 2017).

У підрозділі 2.5 ми доводимо точну адитивну нерівність типу Ландау–Колмогорова, що оцінює $\|D_{K,w,h}f\|_{L_\infty(C)}$ за допомогою норм $\||\nabla f|_K\|_{L_p(C)}$ і $\|f\|_{L_\infty(C)}$.

Теорема 2.5.1. *Нехай задано $p \in (d,\infty]$, $C \in \mathcal{C}$, політоп $K \in \mathcal{K}$, $h > 0$, $w \in W_{p'}(0,h) \cap L_1(h,\infty)$. Для кожної функції $f \in L^1_{\infty,p}(C)$ маємо*

$$\|D_{K,w}f\|_{L_\infty(C)} \leqslant (d \cdot \mathrm{meas}(K \cap C))^{\frac{1}{p'}} \|g_{w,h}\|_{L_{p'}(0,h)} \||\nabla f|_K\|_{L_p(C)} + 2d \cdot \mathrm{meas}(K \cap C)\left(\int_h^\infty w(\rho)\rho^{d-1}\,d\rho\right)\|f\|_{L_\infty(C)}. \quad (25)$$

Нерівність є точною. Вона перетворюється на рівність для функцій $a \cdot \psi$, де $a \in \mathbb{R}$ і

$$\psi(t) = \psi_{K,w,h}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^h g_{w,h}^{p'-1}(u)du - \int_0^{|t|_K} g_{w,h}^{p'-1}(u)du, & |t|_K \leqslant h, \\ -\frac{1}{2}\int_0^h g_{w,h}^{p'-1}(u)du, & |t|_K > h. \end{cases} \quad (26)$$

Якщо додатково $w \in W_{p'}(0,h)$, то нерівність (25) *справедлива і точна для довільного $K \in \mathcal{K}$.*

Якщо вага w є степеневою функцією, то з теореми 2.5.1 отримаємо нерівність типу Ландау–Колмогорова у мультиплікативній формі.

Теорема 2.5.2. *Нехай $p \in (d,\infty]$, $C \in \mathcal{C}$, $K \in \mathcal{K}$, і*

$$w(t) = \frac{1}{t^{d+\gamma}}, t > 0, \text{ з } 0 < \gamma < 1 - \frac{d}{p}.$$

Тоді для кожної $f \in L^1_{\infty,p}(C)$ маємо

$$\|D_{K,w}f\|_{L_\infty(C)} \leqslant \frac{X^{p'} + YZ}{X^{(p'-1)\alpha} \cdot Z^{1-\alpha}} \|f\|^{1-\alpha}_{L_\infty(C)} \||\nabla f|_K\|^{\alpha}_{L_p(C)}, \quad (27)$$

де $\alpha = \frac{p\gamma}{p-d}$, $X = (d \cdot \mathrm{meas}(K \cap C))^{\frac{1}{p'}}\|g_{w,1}\|_{L_{p'}(0,1)}$, $Y = \frac{2d\,\mathrm{meas}(K \cap C)}{\gamma}$ і $Z = \frac{1}{2}\int_0^1 g_{w,1}^{p'-1}(u)du$. Нерівність є точною. Якщо K — це політоп, то для кожного $h > 0$ вона перетворюється на рівність на функції $\psi_{K,w,h}$ означеній у (26).

Крім того, ми знаходимо модуль неперервності оператора $D_{K,w}$, а також розв'язуємо задачу найкращого відновлення оператора $D_{K,w}$ за неточно заданими елементами.

Інша частина цього розділу присвячена оптимізації квадратурних формул для класів Соболєва багатьох змінних. Головними результатами у цьому напрямі є асимптотично точні квадратурні формули. Результати, у яких знайдено асимптотично точні методи відновлення інтеграла, містяться у таких роботах: В. Ф. Бабенко (1976, 1977), Є. В. Чорная (1995), П. Грубер (2004), Є. В. Дерець (2005).

У підрозділі 2.7 ми розглядаємо задачу оптимального відновлення оператора $\mathrm{Int} f = \int_Q f(x)dx$ на класі $W_p^{\mathbf{1}}(Q) := \{f \in W^{1,p}(Q) \colon \| |\nabla f|_1 \|_p \le 1\}$, $p \in (d, \infty]$ для деяких типів множин Q. Для фіксованого $n \in \mathbb{N}$ ми розглядаємо множину $\mathcal{I}_n$ інформаційних операторів

$$If = (f(x_1), \dots, f(x_n)), x_1, \dots, x_n \in Q. \qquad (28)$$

Ми будемо казати, що область $Q \subset \mathbb{R}^d$ складена з $n \in \mathbb{N}$ кубів, якщо існує $h > 0$ і точки $x_1, \dots, x_n$ такі, що куби $C_k := \{x \in \mathbb{R}^d \colon |x - x_k|_\infty < h\}$, $k = 1, \dots, n$, попарно не перетинаються і $\mathrm{meas}\,[Q \setminus \bigcup_{k=1}^n C_k] = 0$. У пункті 2.7.2 ми доводимо таку теорему

Теорема 2.7.2. *Нехай задано $d \in \mathbb{N}$, область $Q \subset \mathbb{R}^d$, що складена з n кубів з центрами x_k, $k = 1, \dots, n$, і $p \in (d, \infty]$. Тоді*

$$E(\mathrm{Int}, W_p^{\mathbf{1}}(Q), \mathcal{I}_n, \mathbb{R}) = \frac{c(d,p)}{n^{\frac{1}{d}}} \left[\frac{\mathrm{meas}\, Q}{2^d}\right]^{\frac{1}{d} + \frac{1}{p'}},$$

де

$$c(d,p) := \frac{1}{d} \left\| \frac{1}{|\cdot|_1^{d-1}} \cdot |\cdot|_1 \right\|_{L_{p'}(B_1^d)}. \qquad (29)$$

Оптимальним набором інформаційних вузлів є множина $\{x_k\}_{k=1}^n$, а оптимальним методом відновлення є

$$\widetilde{\Phi}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \frac{\mathrm{meas}\, Q}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k).$$

Головним результатом у пункті 2.7.3 є така теорема, що дає асимптотично оптимальний розв'язок задачі оптимального відновлення інтеграла.

Теорема 2.7.3. *Нехай задано $d \in \mathbb{N}$, $p \in (d, \infty]$, і обмежену відкриту опуклу множину Q. Тоді*

$$E(\mathrm{Int}, W_p^{\mathbf{1}}(Q), \mathcal{I}_n, \mathbb{R}) = c(d,p) \left(\frac{\mathrm{meas}\, Q}{2^d}\right)^{\frac{1}{d} + \frac{1}{p'}} \frac{1 + o(1)}{n^{\frac{1}{d}}}, n \to \infty,$$

де $c(d,p)$ означено у (29).

Ми також описуємо асимптотично оптимальні набори інформаційних вузлів і методи відновлення.

У пункті 2.7.4 ми доводимо, що теорема 2.7.3 залишається справедливою і у випадку, коли Q є зірчатою відносно деякої кулі множиною, тобто коли існує куля $B\subset Q$ така, що для всіх $x\in Q$ і $y\in B$ відрізок xy належить Q.

Нехай задано обмежену вимірну множину $Q\subset\mathbb{R}^d$. Ми називаємо функцію $w\colon Q\to\mathbb{R}$ допустимою, якщо вона додатна майже всюди, обмежена, і існує $M\in\mathbb{N}$ таке, що для всіх $C_1<C_2$ множина $\{x\in Q\colon w(x)\in[C_1,C_2]\}$ складена з $m\le M$ опуклих множин.

У підрозділі 2.8 ми розглядаємо задачу оптимального відновлення оператора $\mathrm{Int}_w f=\int_Q w(x)f(x)dx$ з допустимою вагою w на класі $f\in W_p^1(Q)$, використовуючи інформаційні оператори (28). Головним результатом цього підрозділу є така теорема.

Теорема 2.8.2. *Нехай задано $p>d$ і допустиму функцію w на множині $Q\subset\mathbb{R}^d$. Тоді*

$$\mathcal{E}(\mathrm{Int}_w,W_p^1(Q),\mathcal{I}_n,\mathbb{R})=\frac{c(d,p)(1+o(1))}{2^{1+\frac{d}{p'}}n^{\frac{1}{d}}}\|w\|_{L_q(Q)},\ n\to\infty,$$

де $q=\frac{p'd}{p'+d}$ і $c(d,p)$ означено у (29).

У *третьому розділі* ми отримуємо точні нерівності типу Островського. Головні результати цього розділу містяться у статтях [1,2,6,16].

У 1937 році А. Островський довів, що для диференційовної на $[0,1]$ функції f з обмеженою похідною і $x\in[0,1]$ справедлива така точна нерівність

$$\left|\int_0^1 f(t)dt-f(x)\right|\le\left(\frac{1}{4}+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right)\sup_{t\in(0,1)}|f'(t)|. \tag{30}$$

Нерівності, що оцінюють відхилення функції від її середнього значення за допомогою деяких характеристик функції інколи називають нерівностями типу Островського. Такі нерівності мають багато застосувань, зокрема у чисельних методах, і багато вивчались, див. напр. монографію С. С. Драгомір і Т. М. Рассіас (2002) та оглядову статтю С. С. Драгомір (2017).

Відмітимо, що на нерівність (30) можна дивитись як на знаходження відхилення (10) на класі диференційовних функцій $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ таких, що $|f'(t)|\le 1$, $t\in(0,1)$, між функціоналами $\int\colon f\mapsto\int_0^1 f(t)dt$ і $f\mapsto\int(f(x)\cdot\chi_{[0,1]}(\cdot))$, де $x\in[0,1]$ — це деяке фіксоване число; тобто точні нерівності типу Островського є частковим випадком задачі знаходження відхилень між операторами. З іншого боку, такого роду нерівності можуть бути використані для розв'язання інших екстремальних задач теорії наближень. Зокрема, відмітимо, що задача знаходження величини (22) є по суті доведенням нерівності типу Островського, і є ключовим елементом для отримання більшості результатів з розділу 2.

У багатьох відомих ситуаціях розв'язання задачі знаходження величини (10) використовує такий підхід. Припустимо, що інформація про клас Q задана у термінах значень λf, $f \in Q$ деякого оператора λ. Наприклад, класи Соболєва $W^r_q(a,b)$, $r \in \mathbb{N}$, $q \in [1, \infty]$, $(a,b) \subset \mathbb{R}$, визначаються умовою $\|f^{(r)}\|_{L_q(a,b)} \le 1$ на функцію $\lambda f = f^{(r)}$. Нехай також для кожної $f \in Q$ відхилення $h_Y(Af, Sf)$ може бути оціненим

$$h_Y(Af, Sf) \le \varphi(\lambda f) \tag{31}$$

у термінах деякого функціонала φ, що діє на множині $\lambda(Q)$, ми вміємо розв'язувати екстремальну задачу

$$\varphi(g) \to \sup \text{ по } g \in \lambda(Q), \tag{32}$$

і нерівність (31) перетворюється на рівність на множині функцій $f \in Q$, для яких функції λf є екстремальними у задачі (32) (множина екстремальних функцій може складатись з однієї функції, наприклад, якщо супремум у (32) досягається). Тоді справедлива точна нерівність

$$h_Y(Af, Sf) \le \sup_{g \in \lambda(Q)} \varphi(g).$$

У підрозділі 3.1 ми наводимо серію прикладів застосування цього підходу, зокрема доводимо точні нерівності типу Островського на класах функцій, старша похідна (або результат дії більш загального диференціального оператора) яких належить до $L_p(a,b)$, $p \in [1, \infty]$, або $H^\omega([a,b], \mathbb{R})$. Зокрема, ми доводимо таку теорему.

Теорема 3.1.2. *Нехай задано непарне $n \in \mathbb{N}$, модуль неперервності ω, інтегровну додатну майже всюди на $[a,b]$ функцію p і точку $x \in [a,b]$ таку, що виконується умова $\int_a^b r_x^n(t)dt = 0$, де $r_x^0 = p$, $r_x^k = r_x(r_x^{k-1})$, $k = 1, \dots, n$, а*

$$r_x(\varphi; s) = \begin{cases} \int_a^s \varphi(t)dt, & s \le x, \\ -\int_s^b \varphi(t)dt, & s > x \end{cases}$$

(така точка x існує і єдина). Тоді

$$\sup_{f \in W^n H^\omega[a,b]} \left| \int_a^b p(t)f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\int_a^b p(t)(t-x)^k dt \right) f^{(k)}(x) \right|$$
$$= \sup_{g \in H^\omega[a,b]} \left| \int_a^b r_x^n(t)g(t)dt \right| \le \int_a^x |r_x^n(t)| \omega(\rho(t) - t)dt, \tag{33}$$

де $\rho\colon [a,x] \to [x,b]$ однозначно визначається умовою

$$\int_a^t r_x^n(s)ds = \int_a^{\rho(t)} r_x^n(s)ds \text{ для всіх } t \in [a,x].$$

Якщо модуль неперервності ω є опуклим, то нерівність у (33) стає рівністю.

У підрозділі 3.2 ми доводимо точні нерівності типу Островського для функцій багатьох змінних і множин у скінченно-вимірних просторах. Існує багато способів поширити поняття обмеженої варіації на функції багатьох змінних, див. напр. огляд Дж. А. Кларксон (1933) різних підходів у випадку функцій двох змінних. Ми пропонуємо ще одне означення обмеженої варіації для функцій багатьох змінних і багатовимірних множин, яке засноване на підході Кронрода–Вітушкіна.

Через $\mathbb{P}^{d-1}$, $d \geq 2$ ми будемо позначати $d-1$-вимірний дійсний проєктивний простір, тобто множину усіх прямих в $\mathbb{R}^d$, які містять θ. Через $N(F)$ будемо позначати число компонент зв'язності множини $F \subset \mathbb{R}^d$; 0 для порожньої множини, і $+\infty$, якщо число компонент зв'язності є нескінченним. Для компактної множини $F \subset \mathbb{R}^d$ і прямої $r \in \mathbb{P}^{d-1}$ варіацією множини F у напрямку $r \in \mathbb{P}^{d-1}$ назвемо величину

$$v(F,r) := \operatorname*{ess\,sup}_{\beta \in \Pi^{d-1}(r)} N\left(F \cap l(r,\beta)\right),$$

де $\Pi^{d-1}(r)$ позначає гіперплощину, що містить θ і є ортогональною до прямої r, а $l(r,\beta)$ — пряма, паралельна до r, що проходить через точку β. Для компактної множини $F \subset \mathbb{R}^d$ і $p \in [1,\infty]$ число

$$v_p(F) := \begin{cases} \left(\frac{1}{\mu \mathbb{P}^{d-1}} \int_{\mathbb{P}^{d-1}} v^p(F,r)dr\right)^{\frac{1}{p}}, & p \in [1,\infty), \\ \operatorname{ess\,sup}_{r \in \mathbb{P}^{d-1}} v(F,r), & p = \infty. \end{cases}$$

будемо називати варіацією множини F.

Для функції $f\colon F \to \mathbb{R}$ і $t \in \mathbb{R}$ через $L(f;t) = \{x \in F\colon f(x) = t\}$ позначаємо її множину рівня t. Для $p \in [1,\infty]$ варіацією неперервної функції $f\colon F \to \mathbb{R}$ на компактній множині $F \subset \mathbb{R}^d$ будемо називати величину

$$v_p(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v_p(L(f;t))dt.$$

Запропоноване означення варіації функцій багатьох змінних задовольняє, зокрема, таким двом властивостям: для кожного $\alpha \neq 0$,

$$v_p(f;F) = v_p\left(f(\alpha\,\cdot);\alpha^{-1}F\right);$$

якщо для деякої неперервної функції $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_\varphi\colon B^d \to \mathbb{R}$, $f_\varphi(x) = \varphi(|x|)$, то для всіх $p \in [1, \infty]$ $v_p(f_\varphi; B^d) = 2\ \bigvee_0^1 \varphi$; тут B^d — одинична куля у $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, $|x|$ – це евклідова норма елемента $x \in \mathbb{R}^d$, а $\bigvee_0^1 \varphi$ — варіація функції φ.

Позначимо через A сім'ю всіх компактних опуклих множин $A \subset \mathbb{R}^d$ таких, що $\theta \in \operatorname{int} A$ і для всіх $\lambda \in \left(0, \frac{\mu S^{d-1}}{2}\right]$ точна нижня грань

$$C(A,\lambda) := \inf_{\substack{\ \ \subset S^{d-1},\, \mu\ \ = \lambda,\\ \ \ \cap(-\ \ ) = \varnothing}} \mu^d [\mathrm{C}(\ \ ) \cap A]$$

досягається на деякій множині $\ (\lambda)$ для якої конус породжений множиною $\ (\lambda)$ є опуклим. Покладемо

$$C_p(A) = \begin{cases} \sup_{\lambda \in [0, \mu S^{d-1}]} \dfrac{\mu^d A - C\left(A, \frac{\lambda}{2}\right)}{\left(\frac{(1-2^p)\lambda}{\mu S^{d-1}} + 2^p\right)^{\frac{1}{p}}}, & p < \infty \\ \dfrac{\mu^d A}{2}, & p = \infty. \end{cases}$$

У цьому підрозділі ми даємо еквівалентне, більш геометричне означення для множин з сім'ї A, і доводимо дві точні нерівності типу Островського.

Теорема 3.2.2. *Нехай $A \in \mathsf{A}$ і задано неперервну функцію $f\colon A \to \mathbb{R}$. Тоді для всіх $p \in [1, \infty]$*

$$\left| \int_A f(x)dx - \mu^d A \cdot f(\theta) \right| \le C_p(A) v_p(f).$$

Нерівність є точною. Вона перетворюється на рівність тільки у випадку сталої f.

Теорема 3.2.3. *Нехай $A \in \mathsf{A}$ і задано замкнену множину $F \subset A$. Якщо $\theta \notin F$, то для всіх $p \in [1, \infty]$*

$$\mu^d F \le C_p(A) v_p(F).$$

Нерівність точна. Якщо вона перетворюється на рівність, то $\mu^d F = 0$.

У підрозділі 3.3 ми розглядаємо клас H^ω випадкових процесів $\xi_t, t \in [0,1]$, для яких $\mathbf{E}|\xi_\tau - \xi_\theta| \le \omega(\operatorname{ess\,sup}_w |\tau(w) - \theta(w)|)$ для будь-яких випадкових величин τ і θ, що приймають значення на відрізку $[0,1]$ (клас таких випадкових величин позначаємо через R); тут $\mathbf{E}$ позначає математичне сподівання, а ω — це деякий опуклий модуль неперервності. На цьому класі ми доводимо точну нерівність типу Островського:

Теорема 3.3.1. *Для заданої випадкової величини $\tau \in R$ покладемо $t^* := \left\|\tau(\cdot) - \frac{1}{2}\right\|_\infty$. Тоді*

$$\sup_{\xi \in H^\omega} \mathbf{E}\left| \int_0^1 \xi_t dt - \xi_\tau \right| = \int_0^{\frac{1}{2}-t^*} \omega(s)ds + \int_0^{\frac{1}{2}+t^*} \omega(s)ds.$$

Деякі результати стосовно нерівностей Островського для нечислових функцій можуть бути знайдені у статтях Г. А. Анастасіо (2003, 2012, 2016), Ю. Чалко-Кано, А. Флорес-Френаліч і Г. Роман-Флорес (2012), Ю. Чалко-Кано і В. А. Лодвік (2015).

Застосовуючи цю нерівність, ми отримуємо розв'язання задачі оптимального відновлення інтеграла $\mathrm{Int}\,\xi_t := \int_0^1 \xi_t dt$ на класі випадкових процесів H^ω, на основі інформаційного оператора $J_{\mathbf{t}}(\xi_t) = (\xi_{\tau_1}, \ldots, \xi_{\tau_n})$, де $n \in \mathbb{N}$, $\tau_k = \tau + t_k$, $\tau \in R$, і $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$, а числа $0 = t_1 < \ldots < t_n$ є такими, що $\tau + t_n \le 1$ майже напевно. Похибка відхилення вимірюється у просторі R з метрикою $(\zeta, \eta) \mapsto \mathbf{E}|\zeta - \eta|$. Для $t \ge 0$ покладемо $I(t) := \int_0^t \omega(s)ds$.

Теорема 3.3.2. *Нехай задано $n \in \mathbb{N}$, $\tau \in R$ і числа $0 = t_1 < \ldots < t_n$ такі, що $\tau + t_n \le 1$ майже напевно. Покладемо $\tau_k := \tau + t_k$, $k = 1, \ldots, n$, і $t^* := \left\|\tau - \frac{1-t_n}{2}\right\|_\infty$. Тоді*

$$E(\mathrm{Int}, H^\omega, J_{\mathbf{t}}, R) = 2\sum_{k=1}^{n-1} I\left(\frac{t_{k+1} - t_k}{2}\right) + I\left(\frac{1 - t_n}{2} - t^*\right) + I\left(\frac{1 - t_n}{2} + t^*\right).$$

Найкращим методом відновлення є метод $U = \sum_{k=1}^n c_k \xi_{\tau_k}$, де $c_1 = \tau + \frac{t_2 - t_1}{2}$, $c_k = \frac{t_{k+1} - t_{k-1}}{2}$, $k = 2, \ldots, n-1$ і $c_n = 1 - \tau - \frac{t_n + t_{n-1}}{2}$.

Відповідно до нашого означення, похибка відновлення визначається похибкою на "найгіршому" випадковому процесі. Виявляється, що у такій постановці, можливість вибирати час вимірювань випадково не дає переваг у порівнянні з ситуацією, коли вимірювання величини робиться у фіксовані невипадкові моменти часу. Більш точно, справедливе таке твердження.

Наслідок 3.3.1. *В умовах теореми 3.3.2,*

$$\inf_{\tau_1, \ldots, \tau_n} E(\mathrm{Int}, H^\omega, J_{\mathbf{t}}, R) = 2nI\left(\frac{1}{2n}\right).$$

Оптимальними моментами часу вимірювань є $\tau_k = \frac{2k-1}{2n}$, $k = 1, \ldots, n$.

Нехай тепер вимірювання роблять пристроєм, який вмикається і робить перше вимірювання внаслідок появи деякої випадкової події (яка відбувається у момент часу $\tau_1 = \tau$), а наступні $n - 1$ вимірювань робляться у моменти $\tau_k = \tau_1 + t_k$, тобто через t_k одиниць часу після першого вимірювання, $k = 2, \ldots, n$. Наступне твердження оптимізує вибір чисел $t_2, \ldots, t_n$, маючи деяку інформацію про випадкову величину τ.

Теорема 3.3.3. *Припустимо, що виконуються умови теореми 3.3.2. Нехай $m := \operatorname{ess\,inf}_{w \in \Omega} \tau(w)$ і $M := \operatorname{ess\,sup}_{w \in \Omega} \tau(w)$. Якщо $(2n-1)m + M \le 1$, то*

$$\inf_{t_2, \ldots, t_n} E(\mathrm{Int}, H^\omega, J_{\mathbf{t}}, R) = (2n-1)I\left(\frac{1 - M}{2n-1}\right) + I(M)$$

і інфімум досягається для $t_k = \frac{2(k-1)(1-M)}{2n-1}$, $k = 2, \ldots, n$. *Якщо* $(2n-1)M + m \geqslant 1$, *то*

$$\inf_{t_2,\ldots,t_n} E(\mathrm{Int}, H^\omega, J_{\mathrm{t}}, R) = (2n-1)I\left(\frac{1-m}{2n-1}\right) + I(m)$$

і інфімум досягається для $t_k = \frac{2(k-1)(1-m)}{2n-1}$, $k = 2, \ldots, n$. *В іншому випадку,*

$$\inf_{t_2,\ldots,t_n} E(\mathrm{Int}, H^\omega, J_{\mathrm{t}}, R) = (2n-2)I\left(\frac{1-m-M}{2n-2}\right) + I(m) + I(M)$$

і інфімум досягається для $t_k = \frac{(k-1)(1-m-M)}{n-1}$, $k = 2, \ldots, n$.

У ***четвертому розділі*** ми отримуємо нерівності типу Надя а також типу Ландау–Колмогорова, і розв'язуємо пов'язані екстремальні задачі. Головні результати цього розділу містяться у статтях [5, 12, 14, 15].

У 1941 році Б. С. Надь отримав точні нерівності виду

$$\|x\|_{L_q(\mathbb{R})} \leqslant K\|x\|^{\alpha}_{L_p(\mathbb{R})}\|x'\|^{\beta}_{L_s(\mathbb{R})}$$

для всіх допустимих значень параметрів q, p, s. Деякі результати стосовно нерівностей типу Надя містяться у статтях В. Ф. Бабенко, В. О. Кофанов і С. О. Пічугов (2000) та В. О. Кофанов і І .В. Попович (2020).

Трійку (X, ρ, μ) будемо називати метричним простором з мірою, якщо (X, ρ) — це метричний простір, а μ — це борелівська міра. Ми припускаємо, що X є комутативним моноїдом (тобто на множині X задано асоціативну комутативну бінарну операцію $+$, і існує елемент $\theta \in X$ такий, що $x + \theta = x$ для всіх $x \in X$) такий, що для кожної вимірної множини $Q \subset X$ і кожного $x \in X$ маємо $\mu(x + Q) = \mu(Q)$. Ми також припускаємо, що для всіх $x, y \in X$, $\rho(x + y, x) \leqslant \rho(y, \theta)$. Через $B_h = B_h(\theta)$ ми позначаємо відкриту кулю радіусу $h > 0$ з центром в точці θ; ми припускаємо, що $0 < \mu(B_h) < \infty$ і $B_h \neq \{\theta\}$ для всіх $h > 0$.

Ми розглядаємо простори $L_p(X)$ зі звичайними нормами, $p \in [1, \infty]$; через $L_{\mathrm{loc}}(X)$ ми позначаємо простір усіх функцій $f\colon X \to \mathbb{R}$, які інтегровні на кожній відкритій кулі простору X. У просторі $L_{\mathrm{loc}}(X)$ ми розглядаємо сім'ю напівнорм

$$\lceil f\rceil_h = \sup_{x \in X}\left|\int_{x+B_h} f(u)d\mu(u)\right|, \; h > 0 \text{ і } \lceil f\rceil = \sup_{h>0}\lceil f\rceil_h.$$

Через $L_{\lceil\cdot\rceil_h}(X)$ $(L_{\lceil\cdot\rceil}(X))$ ми позначаємо множину функцій $f \in L_{\mathrm{loc}}(X)$ зі скінченною напівнормою $\lceil\cdot\rceil_h$ (відп. $\lceil\cdot\rceil$). Легко бачити, що простір $L_1(X)$ міститься у кожній з цих множин. Через $B(X)$ ми позначаємо простір обмежених функцій $f\colon X \to \mathbb{R}$ з нормою $\|f\|_{B(X)} = \sup_{x \in X}|f(x)|$. В цьому розділі ми припускаємо, що міра μ є такою, що кожна неперервна функція належить простору $L_{\mathrm{loc}}(X)$.

Для модуля неперервності ω через $H^\omega(X)$ ми позначаємо простір функцій $f\colon X\to\mathbb{R}$ таких, що

$$\|f\|_{H^\omega(X)} := \sup_{x,y\in X,\,x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{\omega(\rho(x,y))}<\infty .$$

Для деяких подальших результатів ми розглядаємо випадок, коли X є деяким опуклим конусом C у просторі $\mathbb{R}^d$, $d\geqslant 2$, метріка ρ задається опуклою центрально-симетричною множиною K, що містить початок координат у своїй внутрішності, тобто $\rho(x,y)=|x-y|_K$, і $\mu=\mathrm{meas}$ є мірою Лебега у $\mathbb{R}^d$. У цьому випадку ми пишемо (C,K,meas) замість (X,ρ,μ); $B_h=hK\cap C$; а введені напівнорми приймають вид

$$\lfloor f\rceil_h=\sup_{x\in C}\left|\int_{hK\cap C} f(x+u)du\right|, h>0.$$

У підрозділі 4.1 ми доводимо нерівності типу Надя. Для $\alpha\in\mathbb{R}$ покладемо $\alpha_+:=\max\{\alpha,0\}$. Розглянемо оператор

$$S_h\colon L_{\lfloor\cdot\rceil_h}(X)\to B(X),\ S_hf(x)=\frac{1}{\mu(B_h)}\int_{B_h} f(x+u)d\mu(u).$$

Теорема 4.1.1. *Якщо $h>0$ і $f\in H^\omega(X)\cap L_{\lfloor\cdot\rceil_h}(X)$, то*

$$\begin{aligned}\|f\|_{B(X)}&\leqslant\|f-S_hf\|_{B(X)}+\|S_h\|_{L_{\lfloor\cdot\rceil_h}(X)\to B(X)}\|f\|_{L_{\lfloor\cdot\rceil_h}(X)}\\&\leqslant\frac{\|f\|_{H^\omega(X)}}{\mu(B_h)}\int_{B_h}\omega(\rho(u,\theta))d\mu(u)+\frac{\lfloor f\rceil_h}{\mu(B_h)}.\end{aligned}$$

Нерівність є точною. Вона перетворюється на рівність для функції

$$f_{e,h}(x)=(\omega(h)-\omega(\rho(x,\theta)))_+.$$

Крім того, $f_{e,h}\in H^\omega(X)\cap L_{\lfloor\cdot\rceil}(X)$, $\lfloor f_{e,h}\rceil=\lfloor f_{e,h}\rceil_h$, і тому для кожного $h>0$ виконується нерівність

$$\|f\|_{B(X)}\leqslant\frac{\|f\|_{H^\omega(X)}}{\mu(B_h)}\int_{B_h}\omega(\rho(u,\theta))d\mu(u)+\frac{\lfloor f\rceil}{\mu(B_h)}.$$

Ця нерівність є точною на класі $H^\omega(X)\cap L_{\lfloor\cdot\rceil}(X)$.

У випадку, коли $(X,\rho,\mu)=(C,K,\mathrm{meas})$, для кожного $h>0$ розглянемо функцію $g_h\colon(0,h)\to\mathbb{R}$, $g_h(u)=\frac{1}{d\,\mu(K\cap C)}\left(\frac{1}{u^{d-1}}-\frac{u}{h^d}\right)$. У термінах B функції Ейлера для кожного $p\in(d,\infty]$ справедлива рівність $\|g_h(|\cdot|_K)\|_{L_{p'}(hK\cap C)}=A\mu^{-\frac{1}{p}}(K\cap C)h^{1-\frac{d}{p}}$, де

$$A=A(d,p)=d^{-1}B^{\frac{1}{p'}}\left(1-\frac{(d-1)p'}{d},p'+1\right). \tag{34}$$

Теорема 4.1.2. *Якщо $h > 0$, $p \in (d, \infty]$ і $f \in W^{1,p}(C) \cap L_{\rfloor\cdot\lceil_h}(C)$, то $f \in L_\infty(C)$ і виконується нерівність*

$$\begin{aligned}\|f\|_{L_\infty(C)} &\le \|f - S_h f\|_{L_\infty(C)} + \|S_h\|_{L_{\rfloor\cdot\lceil_h}(C) \to L_\infty(C)} \rfloor f \lceil_h \\ &\le \|g_h(|\cdot|_K)\|_{L_{p'}(hK \cap C)} \| |\nabla f|_K \|_{L_p(C)} + \mu^{-1}(K \cap C) h^{-d} \rfloor f \lceil_h.\end{aligned}$$

Нерівність є точною. Вона перетворюється на рівність на функції $\alpha (f_{e,h} + \beta)$, де $\alpha > 0$, $\beta \geq -\frac{1}{2} f_{e,h}(0)$,

$$f_{e,h}(y) = \begin{cases} \int_{|y|_K}^{h} g_h^{p'-1}(u)du, & y \in hK \cap C, \\ 0, & y \in C \setminus hK. \end{cases}$$

Для кожної функції $f \in W^{1,p}(C) \cap L_{\rfloor\cdot\lceil}(C)$ виконується така мультиплікативна нерівність

$$\|f\|_{L_\infty(C)} \le a(d,p)\mu^{-\frac{\alpha}{d}}(K \cap C) \rfloor f \lceil^{1-\alpha} \| |\nabla f|_K \|^{\alpha}_{L_p(C)}, \tag{35}$$

де

$$\alpha = \frac{p-d}{p + (p-1)d} \text{ і } a(d,p) = \left(\frac{(p-d)A(d,p)}{pd} \right)^{\alpha} \left(\frac{pd}{p-d} + 1 \right), \tag{36}$$

$A(d,p)$ означена у (34). Нерівність (35) є точною. Вона перетворюється на рівність для функції $f_{e,h}$, $h > 0$.

У підрозділі 4.3 ми доводимо нерівності типу Ландау–Колмогорова для зарядів. Через $\mathcal{N}(X)$ ми позначаємо сім'ю зарядів ν, що визначені на множині усіх μ–вимірних підмножин простору X, і які є абсолютно неперервними відносно міри μ. Через $D_\mu \nu$ ми позначаємо похідну Радона–Нікодима заряду ν по мірі μ. Сім'я $\mathcal{N}(X)$ є лінійним простором відносно звичайного додавання і множення на дійсне число. Визначимо сім'ю напівнорм $\{\rceil\cdot\lfloor_h,\ h > 0\}$ у такий спосіб: $\rceil\nu\lfloor_h := \|\nu(\cdot + B_h)\|_{\mathcal{B}(X)}$, $\rceil\nu\lfloor := \sup_{h>0} \rceil\nu\lfloor_h$. Легко бачити, що $\rceil\nu\lfloor_h = \rfloor D_\mu \nu \lceil_h$ і $\rceil\nu\lfloor = \rfloor D_\mu \nu \lceil$. Для $h > 0$ через $\mathcal{N}_{\rceil\cdot\lfloor_h}(X)$ ($\mathcal{N}_{\rceil\cdot\lfloor}(X)$) позначимо множину зарядів $\nu \in \mathcal{N}(X)$ зі скінченними напівнормами $\rceil\cdot\lfloor_h$ (відповідно $\rceil\cdot\lfloor$). Справедливі такі теореми.

Теорема 4.3.1. *Якщо $h > 0$ і заряд $\nu \in \mathcal{N}_{\rceil\cdot\lfloor_h}(X)$ є таким, що $D_\mu \nu \in H^\omega(X)$, то*

$$\begin{aligned}\|D_\mu \nu\|_{\mathcal{B}(X)} &\le \left\| D_\mu \nu - \overline{S}_h \nu \right\|_{\mathcal{B}(X)} + \|\overline{S}_h\|_{\mathcal{N}_{\rceil\cdot\lfloor_h}(X) \to \mathcal{B}(X)} \rceil\nu\lfloor_h \\ &\le \frac{\|D_\mu \nu\|_{H^\omega(X)}}{\mu(B_h)} \int_{B_h} \omega(\rho(u, \theta)) d\mu(u) + \frac{\rceil\nu\lfloor_h}{\mu(B_h)},\end{aligned}$$

де оператор $\overline{S}_h \colon \mathcal{N}_{\rceil\cdot\lfloor_h}(X) \to \mathcal{B}(X)$ задається формулою $\overline{S}_h \nu(x) = \frac{\nu(x+B_h)}{\mu(B_h)}$. Нерівність є точною.

Теорема 4.3.3. *Якщо $h > 0$ і $\nu \in \mathrm{N}_{\rceil\lfloor_{h}}(C)$ є таким, що $D_\mu \nu \in W^{1,p}(C)$, то*

$$\|D_\mu\nu\|_{L_\infty(C)} \le \left\|D_\mu\nu - \overline{S}_h\nu\right\|_{L_\infty(C)} + \|\overline{S}_h\|_{\mathrm{N}_{\rceil\lfloor_{h}}(C)\to L_\infty(C)}\rceil\nu\lfloor_h$$
$$\le A\mu^{-\frac{1}{p}}(K\cap C)h^{1-\frac{d}{p}}\||\nabla D_\mu\nu|_K\|_{L_p(C)} + \mu^{-1}(K\cap C)h^{-d}\rceil\nu\lfloor_h, \quad (37)$$

де величина $A(d,p)$ означена у (34), і $\overline{S}_h\nu(x) = \frac{\nu(x+hK\cap C)}{h^d\mu(K\cap C)}$. Нерівність (37) є точною. Якщо $\nu \in \mathrm{N}_{\rceil\lfloor}(C)$ є таким, що $D_\mu\nu \in W^{1,p}(C)$, то

$$\|D_\mu\nu\|_{L_\infty(C)} \le a(d,p)\mu^{-\frac{\alpha}{d}}(K\cap C)\rfloor\nu\lceil^{1-\alpha}\||\nabla D_\mu\nu|_K\|^\alpha_{L_p(C)}, \quad (38)$$

де α і $a(d,p)$ означені у (36). Нерівність (38) є точною.

У підрозділі 4.4 ми доводимо нерівності для мішаних похідних. Ми припускаємо, що $(X,\rho,\mu) = (C,K,\mathrm{meas})$, де $C = \mathbb{R}^d_{m,+} := \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^{d-m}$, $0 \le m \le d$, $K = (-1,1)^d$, так, що $|x|_K = |x|_\infty = \max_{i=1,\dots,d}|x_i|$ і $B_h = hK \cap C = (0,h)^m \times (-h,h)^{d-m}$. Для $\mathbf{I} = (1,\dots,1) \in \mathbb{R}^d$ покладемо $\partial_{\mathbf{I}}f = \frac{\partial^d f}{\partial x_1\dots\partial x_d}$. Розглянемо оператор $\mathrm{S}_{h,m}\colon L_\infty(C) \to L_\infty(C)$,

$$\mathrm{S}_{h,m}f(x) = \frac{1}{2^{d-m}h^d}\left(\Delta^+_{1,h}\cdots\Delta^+_{m,h}\Delta_{m+1,h}\cdots\Delta_{d,h}\right)f(x),$$

де для $h > 0$ і стандартного базису $\{e_i\}_{i=1}^d$ у $\mathbb{R}^d$ ми позначаємо

$$\Delta^+_{i,h}f(x) := f(x+he_i) - f(x) \text{ і } \Delta_{i,h}f(x) := f(x+he_i) - f(x-he_i).$$

Теорема 4.4.1. *Якщо $h > 0$ і $f \in B(\mathbb{R}^d_{m,+})$ є такою, що $\partial_{\mathbf{I}}f \in H^\omega(\mathbb{R}^d_{m,+})$, то*

$$\|\partial_{\mathbf{I}}f\|_{B(\mathbb{R}^d_{m,+})} \le \|\partial_{\mathbf{I}}f - \mathrm{S}_hf\|_{B(\mathbb{R}^d_{m,+})} + \|\mathrm{S}_h\|\|f\|_{B(\mathbb{R}^d_{m,+})}$$
$$\le \frac{\|\partial_{\mathbf{I}}f\|_{H^\omega(\mathbb{R}^d_{m,+})}}{2^{d-m}h^d}\int_{B_h}\omega(|u|_\infty)du + \frac{2^m}{h^d}\|f\|_{B(\mathbb{R}^d_{m,+})}.$$

У випадку $\omega(t) = t^\alpha$, $\alpha \in (0,1]$, виконується така мультиплікативна нерівність:

$$\|\partial_{\mathbf{I}}f\|_{B(\mathbb{R}^d_{m,+})} \le 2^{\frac{m\alpha}{d+\alpha}}\left(\frac{d+\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{d+\alpha}}\|f\|^{\frac{\alpha}{d+\alpha}}_{B(\mathbb{R}^d_{m,+})}\|\partial_{\mathbf{I}}f\|^{\frac{d}{d+\alpha}}_{H^\omega(\mathbb{R}^d_{m,+})}.$$

Для $m = 0$ і $m = 1$ ці нерівності є точними.

Теорема 4.4.2. *Для $h > 0$ і функції $f \in L_\infty(\mathbb{R}^d_{m,+})$ такої, що $\partial_{\mathbf{I}}f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d_{m,+})$, виконується нерівність*

$$\|\partial_{\mathbf{I}} f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d_{m,+})} \le \|\partial_{\mathbf{I}} f - S_{h,m} f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d_{m,+})} + \|S_{h,m}\|\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d_{m,+})}$$
$$\le A(d,p)h^{1-\frac{d}{p}}2^{\frac{m-d}{p}}\||\nabla \partial_{\mathbf{I}} f|_K\|_{L_p(\mathbb{R}^d_{m,+})} + 2^m h^{-d}\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d_{m,+})},$$

де $A(d,p)$ означено у (34). Виконується також така мультиплікативна нерівність:

$$\|\partial_{\mathbf{I}} f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d_{m,+})} \le a(d,p)2^{\alpha\left(\frac{m}{d}-\frac{d}{p}\right)}\|f\|^{1-\alpha}_{L_\infty(\mathbb{R}^d_{m,+})}\||\nabla \partial_{\mathbf{I}} f|_K\|^{\alpha}_{L_p(\mathbb{R}^d_{m,+})},$$

де α і $a(d,p)$ означені у (36). Для $m = 0$ і $m = 1$ обидві нерівності є точними.

У підрозділі 4.5 використовуючи отримані нерівності для похідних і загальні факти про зв'язок між екстремальними задачами, ми отримуємо розв'язання задачі Стєчкіна про наближення необмежених операторів обмеженими для операторів $\partial_{\mathbf{I}}$ і D_μ.

Підроділ 4.6 присвячено дослідженню модуля неперервності оператора кратного диференціювання на вагових класах Соболєва функцій заданих на пів осі.

Для додатних неперервних на $\mathbb{R}_+$ функцій f_+ і f_- і неперервної на $\mathbb{R}_+$ функції x ми розглядаємо вагову норму

$$\|x\|_{C(\mathbb{R}_+),f_-,f_+} := \left\|\frac{\max\{x(\cdot),0\}}{f_+(\cdot)} + \frac{\max\{-x(\cdot),0\}}{f_-(\cdot)}\right\|_{C(\mathbb{R}_+)};$$

для додатної неперервної на $\mathbb{R}_+$ функцій g і функції $x \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$, норму $\|x\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+),g} := \left\|\frac{x}{g}\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}$. Для натурального числа r ми розглядаємо клас $W^r_{f_-,f_+,g}(\mathbb{R}_+)$ неперервних функцій $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ у яких похідна $x^{(r-1)}$ є локально абсолютно неперервною, $x^{(r)} \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$ і таких, що $\|x\|_{C(\mathbb{R}_+),f_-,f_+} < \infty$ і $\|x^{(r)}\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+),g} \le 1$.

Нехай $g \in C(\mathbb{R}_+)$ є додатною незростаючою функцією. Покладемо $g_0 := g$ і $g_k(t) := \int_t^\infty g_{k-1}(s)ds$, $t \ge 0$, $k = 1,2,\dots,r$. Припустимо, що $A_0 := \int_0^\infty g(t)dt < \infty$, і для $k = 1,\dots,r-1$

$$A_k := \int_0^\infty \left[\sum_{s=0}^{k-1}\frac{(-1)^{k-s-1}A_s}{(k-s-1)!}t^{k-s-1} + (-1)^k g_k(t)\right]dt < \infty.$$

Нехай також $f_\pm$ є додатними незростаючими функціями, $f_\pm(+\infty) > 0$ і $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f_\pm(t)-f_\pm(\infty)}{|P_r(t)|} = 0$, де $P_r(t) := (-1)^r\sum_{s=0}^{r-1}\frac{(-1)^{r-s-1}A_s}{(r-s-1)!}t^{r-s-1} + g_r(t)$. При таких обмеженнях на функції $f_\pm$ і g, ми знаходимо модуль неперервності (12) оператора D^k k–кратного диференціювання, $k = 1,\dots,r-1$, на класі $W^r_{f_-,f_+,g}(\mathbb{R}_+)$, тобто величину

$$\omega(W^r_{f_-,f_+,g}(\mathbb{R}_+), D^k, \delta) := \sup_{x\in W^r_{f_-,f_+,g}(\mathbb{R}_+),\, \|x\|_{C(\mathbb{R}_+),f_-,f_+}\le\delta}\|x^{(k)}\|_{C(\mathbb{R}_+)},\ \delta \ge 0.$$

Пов'язані результати містяться у статтях Ґ. Г. Гарді і Дж. І. Літтлвуд (1912), Л. Дж. Морделл (1928), А. П. Маторін (1955), І. Дж. Шонберг і А. Каваретта (1970), В. Ф. Бабенко і О. В. Коваленко (2015).

Припустимо, що задано дві функції $\psi, \varphi \in C(\mathbb{R}_+)$ такі, що $\psi(t) > \varphi(t)$ для всіх $t \in \mathbb{R}_+$. Будемо казати, що функція $x \in C(\mathbb{R}_+)$ має $n \in \mathbb{N}$ додатно орієнтованих точок осциляції між функціями φ і ψ, якщо $\varphi(t) \le x(t) \le \psi(t)$ для всіх $t \in \mathbb{R}_+$ і існують точки $s_k \in \mathbb{R}_+$, $k = 1, \ldots, n$, $s_1 < s_2 < \ldots < s_n$, такі, що $k = 1, \ldots, n$

$$x(s_k) = \begin{cases} \psi(s_k), & k \text{ непарне}, \\ \varphi(s_k), & k \text{ парне}. \end{cases}$$

Аналогічно можна ввести означення функції, що має n від'ємно орієнтованих точок осциляції.

Функція $G \in C^{r-1}(\mathbb{R}_+)$ називається ідеальним g-сплайном порядку r з $n \in \mathbb{N}$ вузлами $0 < t_1 < \ldots < t_n$, якщо на кожному інтервалі $(t_i, t_{i+1}), i = 0, 1, \ldots, n$, $t_0 := 0, t_{n+1} := +\infty$, існує похідна $G^{(r)}$ і $\frac{G^{(r)}(t)}{g(t)} \equiv \epsilon(-1)^i$ на інтервалах $(t_i, t_{i+1}), i = 0, 1, \ldots, n$, де $\epsilon \in \{1, -1\}$. Первісну G порядку r функції g або $-g$ на $\mathbb{R}_+$ будемо називати ідеальним g-сплайном порядку r з 0 вузлами. Позначимо через $\Sigma^r_{n,g}$ множину усіх ідеальних g-сплайнів порядку r з не більше ніж $n \in \mathbb{Z}_+$ вузлами.

При вказаних припущеннях стосовно функцій f_- і g справедлива такий аналог теореми про вужів. Відмітимо, що властивість (b) теореми стверджує, що максимально осцилюючі g-сплайни найменше відхиляються від нуля у несиметричній ваговій нормі серед усіх g-сплайнів класу $\Sigma^r_{n,g}(\mathbb{R}_+)$. Для поліноміальних сплайнів ця властивість добре відома.

Теорема 4.6.2. *(a) Існує дві незростаючі послідовності $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ додатних чисел таких, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, і для кожного $\tau \in [a_{n+1}, a_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $a_0 := \infty$, існує ідеальний g-сплайн $G_\tau \in \Sigma^r_{n,g}[0, \infty)$ з рівно n вузлами і $n+1$ (додатно орієнтованих для G^+_τ і від'ємно орієнтованих для G_τ) точок осциляції між $-\tau f_-$ і τf_+.*

(b) Для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\inf_{G \in \Sigma^r_{n,g}[0,\infty)} \|G\|_{C[0,\infty), f_-, f_+} = \min\{a^+_{n+1}, a_{n+1}\}.$$

Якщо $a^+_{n+1} < a_{n+1}$, то інфімум досягається на $G^+_{a^+_{n+1}}$; в іншому випадку інфімум досягається на $G_{a_{n+1}}$.

Головним результатом даного підрозділу є така теорема.

Теорема 4.6.4. *Нехай $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$ і $\delta > 0$. Для всіх $k = 1, \ldots, r-1$,*

$$\omega(W^r_{f_-,f_+,g}[0, \infty), D^k, \delta) = \max\left\{|(G_\delta^+)^{(k)}(0)|, |(G_\delta^-)^{(k)}(0)|\right\},$$

де $G_\delta^\pm$ — це ідеальні g-сплайни з теореми 4.6.2. Якщо

$$|(G_\delta^+)^{(k)}(0)| > |(G_\delta^-)^{(k)}(0)|,$$

то супремум у означенні $\omega(W^r_{f_-,f_+,g}[0, \infty), D^k, \delta)$ досягається на G_δ^+, в іншому випадку — на G_δ^-.

Відмітимо, що якщо $\delta \geq \max\{a_1^+, a_1^-\}$, то $G_\delta^\pm$ має 0 вузлів, і тому $G_\delta^\pm = \pm|P_r| + C_\delta^\pm$, $C_\delta^\pm \in \mathbb{R}$. З цього випливає, що модуль неперервності $\omega(W^r_{f_-,f_+,g}[0, \infty), D^k, \cdot)$ є константою для всіх достатньо великих значеннях аргументу.

Висновки

У дисертаційній роботі вивчаються класичні екстремальні задачі теорії наближень. Отримано розв'язання деяких задач найкращого відновлення операторів і функціоналів, доведено нерівності для похідних типу Ландау–Колмогорова і типу Надя, а також нерівності типу Островського, розглядається задача Стєчкіна про наближення необмежених операторів обмеженими і задача про обчислення модуля неперервності деяких операторів, а також розв'язано деякі інші екстремальні задачі.

Головними результатами роботи є:

1. Отримано розв'язання серії екстремальних задач на класах функцій зі значеннями у L–просторах, тобто у напівлінійних метричних просторах з додатковими аксіомами, що пов'язують метрику з алгебраїчними операціями. Узагальнено лему Корнєйчука–Стєчкіна на випадок класу $H^\omega([a,b], X)$ функцій зі значеннями у L–просторі X, що мають задану мажоранту ω модуля неперервності. Розв'язано задачі оптимального відновлення опуклюючого оператора і оператора інтегрування на класі $H^\omega([a,b], X)$ по інформації, що дає $n \in \mathbb{N}$ середніх значень функції по малих інтервалах; задачі оптимального відновлення одиничного оператора і оператора похідної типу Хукухара на класі $W^1H^\omega([a,b], X)$ функцій, чия похідна типу Хукухара належить до $H^\omega([a,b], X)$, інформаційний оператор дає інформацію про n значень функції в деяких точках; отримано точні оцінки відхилення між середніми по двом інтервалам значеннями функції з класу $H^\omega([a,b], X)$. Крім того, розв'язано задачі оптимального відновлення монотонних операторів на класах монотонних функцій зі значеннями

у частково впорядкованому L–просторі, а також деякі задачі найкращого наближення операторів, зокрема розглядається задача Стєчкіна про наближення необмежених операторів, що діють на класах функцій зі значеннями у L–просторах, обмеженими операторами.

2. Отримано розв'язання деяких екстремальних задач на класах Соболєва $W^{1,p}(C)$, $C \quad \mathsf{R}^d$, $d \quad 2$ функцій багатьох змінних. Зокрема, отримано розв'язання задачі Стєчкіна про наближення, взагалі кажучи, необмежених гіперсингулярних інтегральних операторів (частковим випадком яких є дробова похідна в сенсі Ріса) за допомогою обмежених. Для таких інтегральних операторів отримано точні нерівності типу Ландау–Колмогорова, знайдено модуль неперервності, а також розв'язано задачу оптимального відновлення на класах елементів відомих з похибкою. Ми також розв'язуємо задачі оптимізації квадратурних формул для інтеграла з одиничною, або неодиничною вагою.

3. Ми пропонуємо загальний підхід до розв'язання деяких екстремальних задач теорії апроксимації і ілюструємо його доведенням серії точних нерівностей типу Островського. Ми вводимо до розгляду новий клас функцій обмеженої варіації, досліджуємо деякі властивості таких функцій і доводимо точну нерівність типу Островського. На класі випадкових процесів з заданою мажорантою модуля неперервності, ми доводимо точну нерівність типу Островського, що оцінює відхилення інтеграла випадкового процесу від його значення у випадковий момент часу. Ця нерівність далі використовується у задачі оптимізації квадратурних формул для цього класу випадкових процесів. Крім того, ми розглядаємо задачу оптимізації інформаційного оператора.

4. Ми доводимо нерівності типу Надя у метричних просторах з мірою, у соболєвських просторах функцій декількох змінних, а також у метричних просторах Соболєва із мірою. Крім того, ми отримуємо точні нерівності типу Ландау–Колмогорова для похідних Радона–Нікодима зарядів деяких класів. Ми також розв'язуємо задачу Стєчкіна для оператора вкладення, оператора похідної Радона–Нікодима і оператора мішаної похідної на деяких класах. Ми знаходимо модуль неперервності оператора кратного диференціювання на вагових класах Соболєва функцій, заданих на пів осі.

Список опублікованих праць за темою дисертації

[1] O.V. Kovalenko. Ostrowski type inequalities for sets and functions of bounded variation. *J. Inequal. Appl.*, **151**, 2017. doi:10.1186/s13660-017-1429-5. (SJR — Q3).

[2] O. Kovalenko. On optimal recovery of integrals of random processes. *J. Math. Anal. Appl.*, **487**, №1, 123949, 2020. doi:10.1016/j.jmaa.2020.123949. (SJR — Q2).

[3] V. Babenko, Yu. Babenko, O. Kovalenko. On multivariate Ostrowski type inequalities and their applications. *Math. Ineq. Appl.*, **23**, №2, 569–583, 2020. doi:10.7153/mia-2020-23-47. (SJR — Q2).

[4] V. Babenko, V. Babenko, O. Kovalenko. Optimal recovery of monotone operators in partially ordered L-spaces. *Numer. Func. Anal. Opt.*, **41**, №11, 1373–1397, 2020. doi:10.1080/01630563.2020.1775251. (SJR — Q3).

[5] O. Kovalenko. On maximally oscillating perfect splines and some of their extremal properties. *Anal. Math.*, **46**, №3, 555–577, 2020. doi:10.1007/s10476-020-0037-7. (SJR — Q3).

[6] O.V. Kovalenko. On multidimensional Ostrowski-type inequalities. *Ukr. Math. J.*, **72**, 741–758, 2020. doi:10.1007/s11253-020-01814-w. Translation of Ukrain. Mat. Zh. **72** (5) 644–657, 2020. (SJR — Q3).

[7] V. Babenko, V. Babenko, O. Kovalenko, M. Polishchuk. Optimal recovery of operators in function L-spaces. *Anal. Math.*, **47**, 13–32, 2021. doi:10.1007/s10476-021-0065-y. (SJR — Q3).

[8] V.F. Babenko, Yu.V. Babenko, O.V. Kovalenko. On asymptotically optimal cubatures for multidimensional Sobolev spaces. *Res. Math.*, **29**, №2, 15–27, 2021. doi:10.15421/242106.

[9] V. Babenko, O. Kovalenko, N. Parfinovych. On approximation of hypersingular integral operators by bounded ones. *J. Math. Anal. Appl.*, **513**, №2, 126215, 2022. doi:10.1016/j.jmaa.2022.126215. (SJR — Q1).

[10] V.F. Babenko, V.V. Babenko, O.V. Kovalenko, N.V. Parfinovych. General form of (λ,φ)-additive operators on spaces of L-space-valued functions. *Res. Math.*, **30**, №1, 3–9, 2022. doi:10.15421/242201. (SJR — Q4).

[11] V.F. Babenko, V.V. Babenko, O.V. Kovalenko, N.V. Parfinovych. Estimates for the deviations of integral operators in semilinear metric spaces and their applications. *Ukr. Math. J.*, **74**, 685–697, 2022. doi:10.1007/s11253-022-02094-2. Translation of Ukrain. Mat. Zh. **74** (5) 599–609, 2022. (SJR — Q3).

[12] V.F. Babenko, V.V. Babenko, O.V. Kovalenko, N.V. Parfinovych. On Landau – Kolmogorov type inequalities for charges and their applications. *Res. Math.*, **31**, №1, 3–16, 2023. doi:10.15421/242301. (SJR — Q4).

[13] V. Babenko, V. Babenko, O. Kovalenko. Korneichuk-Stechkin lemma,

Ostrowski and Landau inequalities, and optimal recovery problems for L-space valued functions. *Numer. Func. Anal. Opt.*, **44**, №12, 1309–1341, 2023. doi:10.1080/01630563.2023.2246540. (SJR — Q2).

[14] V.F. Babenko, V.V. Babenko, O.V. Kovalenko, N.V. Parfinovych. Nagy type inequalities in metric measure spaces and some applications. *Carpathian Math. Publ.*, **15**, №2, 563–575, 2023. doi:10.15330/cmp.15.2.563-575. (SJR — Q2).

[15] V.F. Babenko, V.V. Babenko, O.V. Kovalenko, N.V. Parfinovych. Some sharp Landau–Kolmogorov–Nagy-type inequalities in Sobolev spaces of multivariate functions. *Ukr. Math. J.*, **75**, 1525–1532, 2024. doi:10.1007/s11253-024-02275-1. Translation of Ukrain. Mat. Zh. **75** (10) 1347–1353, 2023.

[16] O. Kovalenko. On a general approach to some problems of approximation of operators. *J. Math. Sci.*, **279**, 67–76, 2024. doi:10.1007/s10958-024-06987-4. Translation of Ukrain. Mat. Visn. **20** (4) 544–556, 2023.

[17] O. Kovalenko. On optimization of cubature formulae for Sobolev classes of functions defined on star domains. *Mat. Stud.*, **61**, №1, 84–96, 2024. doi:10.30970/ms.61.1.84-96.

[18] O.V. Kovalenko. Maximally oscillating perfect splines and some of their applications. In *Тези доповідей Міжнародної математичної конференції "Теорія наближень і її застосування"*, Україна, Дніпро, 3-5 жовтня 2019.

[19] В.Ф. Бабенко, В.В. Бабенко, О.В. Коваленко, Поліщук М.В. Екстремальні задачі теорії апроксимації для функцій зі значеннями у L-просторах. In *Тези доповідей Міжнародної математичної конференції "Теорія наближень і її застосування"*, Україна, Дніпро, 3-5 жовтня 2019.

[20] V.F. Babenko, V.V. Babenko, O.V. Kovalenko. Korneichuk-Stechkin lemma and Ostrowski type inequalities for functions with values in L-spaces. In *Thesis of Joint Mathematics Meetings*, Colorado Convention Center, Denver, CO, January 15-18, 2020.

[21] V.F. Babenko, V.V. Babenko, O.V. Kovalenko. Korneichuk–Stechkin lemma for L-space valued functions and some applications. In *Тези доповідей ТЕОРІЯ НАБЛИЖЕНЬ І ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ присвячена 100-річчю з дня народження Миколи Павловича Корнєйчука*, Дніпро, Україна, 16-19 вересня 2020.

[22] O.V. Kovalenko. On optimal recovery of integrals of random processes. In *Тези доповідей ТЕОРІЯ НАБЛИЖЕНЬ І ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ присвячена 100-річчю з дня народження Миколи Павловича Корнєйчука*, Дніпро, Україна, 16-19 вересня 2020.

[23] O. Kovalenko. Ostrowski type inequalities for sets and functions of bounded variation. In *International Online Workshop on Approximation Theory*, Ivano-Frankivsk, Ukraine, March 19-21, 2021.

[24] V. Babenko, V. Babenko, O. Kovalenko, N. Parfinovych. Approximation of some classes of L-space valued periodic functions by generalized trigonometric polynomials. In *International Online Workshop on Approximation Theory*, Ivano-Frankivsk, Ukraine, March 19-21, 2021.

[25] V. Babenko, Yu. Babenko, O. Kovalenko. On multivariate Ostrowski type inequalities and their applications. In *International Conference of Young Mathematicians*, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine (online), Kyiv, Ukraine, June 3–5, 2021.

[26] V. Babenko, V. Babenko, O. Kovalenko. Approximation of operators in semi-linear metric spaces and some applications. In *2022 Spring Eastern Virtual Sectional Meeting*, March 19-20, 2022.

[27] V. Babenko, V. Babenko, O. Kovalenko. Approximation of operators in semi-linear metric spaces. In *The international online conference "Current trends in abstract and applied analysis"*, May 12-15, 2022.

[28] V. Babenko, V. Babenko, O. Kovalenko. Fixed sets and fixed points for mappings in generalized Fréchet spaces. In *The international online conference "Current trends in abstract and applied analysis"*, May 12-15, 2022.

[29] V. Babenko, Yu. Babenko, O. Kovalenko. On asymptotically optimal cubatures for multidimensional Sobolev spaces. In *The international online conference "Current trends in abstract and applied analysis"*, May 12-15, 2022.

[30] V. Babenko, O. Kovalenko, N. Parfinovych. On approximation of hypersingular integral operators by bounded ones. In *International Conference "Theory of Approximation of Functions and its Applications", dedicated to the 80th anniversary of Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Alexander STEPANETS (1942-2007), Lutsk, Ukraine*, June 6–10, 2022.

[31] V.F. Babenko, V.V. Babenko, O.V. Kovalenko, N.V. Parfinovych. Landau–Kolmogorov–Nagy type inequalities and some applications. In *International Workshop on Current Trends in Analysis and Approximation Theory*, July 18, 2023.

[32] V.F. Babenko, V.V. Babenko, O.V. Kovalenko, N.V. Parfinovych. On Landau-Kolmogorov-type inequalities for charges and their applications. In *International Conference on Approximation Theory and Beyond*, May 15-18, 2023 Vanderbilt University, Nashville, Tennessee, USA.

Анотації

Коваленко О.В. Нерівності для похідних і екстремальні задачі теорії наближень у метричних просторах — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — "Математичний аналіз" (111 — Математика). — Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара Міністерства освіти і науки України, Дніпро; Інститут математики НАН України, Київ, 2024.

Дисертаційна робота присвячена класичним задачам теорії наближень, зокрема точним нерівностям для похідних типу Ландау–Колмогорова, задачі Стєчкіна про наближення необмежених операторів обмеженими, задачі знаходження модуля неперервності операторів, а також задачам оптимального відновлення операторів і функціоналів за точною і неточною інформацією, зокрема задачам про найкращі кубатурні формули.

Ключові слова: нерівність для похідних, нерівність типу Надя, нерівність типу Ландау–Колмогорова, нерівність типу Островського, оптимальне відновлення, найкраще наближення, модуль неперервності оператора, L–простір, лема Корнєйчука–Стєчкіна, клас функцій з заданою мажорантою модуля неперервності.

Kovalenko O.V. Inequalities for derivatives and extremal problems of Approximation Theory in metric spaces — Manuscript.

Dissertation for the Doctor Degree in Physical and Mathematical Sciences in Speciality 01.01.01 — Mathematical Analysis (111 — Mathematics). — Oles Honchar Dnipro National University of Ministry of Education and Science of Ukraine, Dnipro; Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2024.

The dissertation is devoted to classical problems of Approximation Theory, in particular to sharp Landau–Kolmogorov type inequalities, to the Stechkin problem about approximation of unbounded operators by bounded ones, to the problem to find the modulus of continuity of operators, as well as to problems of optimal recovery of operators and functionals given exact or inexact information, in particular to problems of optimization of cubature formulae.

Chapter 1 is devoted to a study of extremal problems in spaces of functions with values in L–spaces i.e., in semilinear metric spaces with additional axioms that connect the metric with the algebraic operations. Such approach allows to include into consideration various classes of functions, in particular classes of multi-valued and fuzzy-valued functions, as well as classes of functions with values in normed spaces, including classes of random processes.

We obtain a generalization of the Korneichuk–Stechkin lemma for functions with values in L–spaces. As applications of this result, we prove sharp Ostrowski type inequalities and solve problems of optimal recovery of the convexifying operator, as well as a problem of optimal recovery of the integral for classes of functions with given majorant of modulus of continuity. The recovery is done based on n mean over small intervals values of the function. We solve problems of optimal recovery of a function, and of the Hukuhara type derivative on the classes of functions with given majorant of the modulus of continuity of their Hukuhara type derivative. In this case the recovery is done based on n values of the function. We prove sharp Landau type inequalities, solve the Stechkin problem about approximation of unbounded operators by bounded ones, and solve the problem of optimal recovery of an unbounded operator on a class of elements known with error.

We solve a problem of optimal recovery of monotone operators in partially ordered L–spaces and study the question of the optimal choice of an information operator. We also solve a problem of optimal recovery of (λ, φ)–type operators on the classes of functions with given majorant of modulus of continuity based on n values of a function that are given with some error; as an application of this result, we solve a problem of optimal recovery of the integral of a random process.

Moreover, in this chapter we obtain estimates for the deviation between integral operators on classes of L–space-valued functions, prove an integral representation for (λ, φ)–additive operators, and a sharp Ostrowski type inequality for such operators.

Chapter 2 is devoted to extremal problems for operators that act on the Sobolev classes of multivariate functions. For a convex cone $C \subset \mathbb{R}^d$ and a convex bounded centrally–symmetric set $K \subset \mathbb{R}^d$ that contains the origin in its interior, we consider the classes of functions $f\colon C \to \mathbb{R}$ such that $f \in L_\infty(C)$ and $\| |\nabla f|_{K^\circ} \|_{L_p(C)} \le 1$, where $p \in [1, \infty]$, K° is the polar to K set, $|\cdot|_K$ denotes the norm in $\mathbb{R}^d$ that is generated by the set K, and the derivatives of the function f are understood in the distributional sense. For these classes of functions we consider the problem of the best approximation of the hypersingular integral operator

$$D_{K,w}f(x) = \int_C w(|t|_K)(f(x) - f(x+t))dt, x \in C$$

using bounded operators, where $w\colon (0,\infty) \to [0,\infty)$ is some weight function that can have non-integrable discontinuity at 0. In the case, when K is the Euclidean ball in $\mathbb{R}^d$, $C = \mathbb{R}^d$ and $w(t) = t^{-(d+\alpha)}$, $\alpha \in (0,1)$, this operator becomes the Riesz fractional derivative.

In order to solve this problem, we obtain several auxiliary results, which are interesting on their own. We compute the quantity

$$\sup_{\| |\nabla f|_{K^\circ} \|_{L_p(K \cap C)} \le 1} \int_{K \cap C} w(|y|_K)(f(y) - f(\theta))dy,$$

which then is used in the solutions of several other extremal problems, in particular in the problem of optimization of cubature formulae. We also prove sharp Landau type inequalities in the additive form that estimate $\|D_{K,w}f\|_{L_\infty(C)}$ via $\|f\|_{L_\infty(C)}$ and $\| |\nabla f|_{K^\circ} \|_{L_p(C)}$, $p \in (d, \infty]$. In the case of a power weight function w, we also obtain sharp Landau type inequalities in the multiplicative form.

Moreover, we study the modulus of continuity of the operator $D_{K,w}$ and solve the problem of optimal recovery of this operator given elements known with error.

In the case $K = (-1,1)^d$, we consider the problem of optimal recovery of the functional $f \mapsto \int_Q w(x)f(x)dx$ given n values of the function f. In the case of the unit weight w and the domain Q that can be represented as a union of several shifts of the set K, we find the optimal error of recovery and an optimal method of recovery; in the case of a more general weight and (or) a more complex domain Q, we find an asymptotically optimal solution of the optimal recovery problem.

Chapter 3 is devoted to inequalities that estimate the deviation between the value of a function at some point and the mean value of the function, via some characteristics of the function. Such inequalities are often called Ostrowski type inequalities. Inequalities of this kind can be applied to solutions of other extremal problems of Approximation Theory, in particular for classes of functions of low smoothness they can be applied to problems of optimal recovery and to prove Landau–Kolmogorov type inequalities.

Many ways to extend the notion of a function of bounded variation from the case of univariate to the case of multivariate functions are known. We propose a new way for such a generalization. The approach is based on the Kronrod–Vitushkin variations (which, in turn, are based on the Banach indicatrix theorem). Unlike the Kronrod–Vitushkin variations, the proposed definition satisfies the following two properties: the variation of a function does not change after multiplication of its argument by a non-zero constant; the variation of a radial function is twice as big as the variation of the generating univariate function. Using the introduced notions of bounded variation for multidimensional sets and multivariate functions, we prove sharp Ostrowski type inequalities.

For a class of random processes that is determined by a majorant of modulus of continuity of the processes, we prove a sharp Ostrowski type inequality that estimates the deviation between the integral $\int_0^1 \xi_t dt$ and the random variable ξ_τ, where τ is some random variable. Using this inequality, we solve a problem of optimal recovery of the integral of the random process, given the random variables $\xi_{\tau_1}, \ldots, \xi_{\tau_n}$, where $\tau_1, \ldots, \tau_n$ are some random variables. We also consider the problem of optimal choice of the variables $\tau_1, \ldots, \tau_n$.

Chapter 4 is devoted to the inequalities for derivatives of Landau–Kolmogorov type, of Nagy type, and related extremal problems.

We obtain sharp Nagy type inequalities that estimate the uniform norm of a function from a Sobolev space using the L_p-norm of its gradient and some seminorm that is defined on the space of locally integrable on an open cone $C \subset \mathbb{R}^d$ functions. In a metric space (X, ρ) with measure μ we prove a sharp Nagy type inequality that estimates the uniform norm of a function via its $\|\cdot\|_{H^\omega}$–norm that is defined by a modulus of continuity ω, and a seminorm defined in the space of locally integrable functions.

Using this inequality, we prove a sharp Landau–Kolmogorov type inequality that estimates the uniform norm of the Radon–Nikodym derivative of a charge using the L_p–norm of the gradient of this derivative (or $\|\cdot\|_{H^\omega}$–norm of this derivative) and some seminorm that is defined on the space of charges.

In the case, when $C = \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^{d-m}$, $0 \leqslant m \leqslant d$, we prove inequalities that estimate the uniform norm of a mixed derivative of a function $f\colon C \to \mathbb{R}$ using the uniform norm of the function and the L_p–norm of the gradient of the function's mixed derivative (or the $\|\cdot\|_{H^\omega}$–norm of this mixed derivative). In the cases $m = 0, 1$ these inequalities are sharp.

We show that the obtained results can be used in order to solve the problem of approximation of the corresponding unbounded operators by bounded ones.

We find the modulus of continuity of a higher order differentiation operator on the classes of functions defined on a half-line that are determined by (non-constant) majorants of the functions and their higher derivatives. We prove a snake theorem that guarantees existence of perfect spline analogues that oscillate maximally. These splines are extremal in the problem to find the modulus of continuity of the differentiation operator.

Keywords: inequality for derivatives, Nagy type inequality, Landau–Kolmogorov type inequality, Ostrowski type inequality, optimal recovery, best approximation, modulus of continuity of an operator, L–space, Korneichuk–Stechkin lemma, class of function with given majorant of modulus of continuity.