

Голові
разової спеціалізованої вченої ради
Інституту математики НАН України
доктору фізико-математичних наук,
професору, головному науковому
співробітнику відділу математичної фізики
Інституту математики НАН України
Ребенку Олексію Лукичу

РЕЦЕНЗІЯ

на дисертаційну роботу Вінніченко Олександри Олександрівни на тему:
“Geometric and algebraic properties of dispersionless Nizhnik equation”,
подану на здобуття ступеня доктора філософії у галузі знань
11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика

У літературі існує декілька методів знаходження груп точкових (чи контактних) симетрій систем диференціальних рівнянь, але, наприклад, найпростіший з них — інфінітезимальний метод для обчислення генераторів однопараметричних груп ліївських симетрій — не дає можливості побудувати повні групи точкових симетрій. Використання ж прямого методу призводить до необхідності розв’язання нелінійних перевизначених систем рівнянь із частинними похідними для компонент точкових перетворень симетрії, які значно складніші, ніж їх (лінійні) аналоги для векторних полів ліївської симетрії. Тому, враховуючи деякі незручності цих методів, розроблено низку спеціальних прийомів для спрощення обчислень, наприклад, різноманітні версії алгебраїчного методу на основі автоморфізмів або мегаідеалів. Зокрема, саме науковці київської школи симетрійного аналізу запропонували такі версії на основі мегаідеалів та використали їх при дослідженні низки диференціальних рівнянь математичної фізики.



Головним досягненням дисертаційної роботи О.О. Вінніченко є систематичне та глибоке дослідження бездисперсійного рівняння Нижника, його нелінійного представлення Лакса та бездисперсійної системи Нижника з симетрійної точки зору. Хоча в літературі існує велика кількість робіт, які присвячені побудові точних розв'язків систем диференціальних рівнянь із частинними похідними за допомогою процедури ліївської редукції, частка тих, що містять правильні та вичерпні результати, досить мала, причому наведені обчислення як правило є занадто громіздкими та ґрунтуються на неоптимізованому переборі багатьох нееквівалентних випадків. Тому опис оптимізованої процедури ліївської редукції для загальних систем диференціальних рівнянь із трьома незалежними змінними та її ефективного застосування до важливої моделі математичної фізики є суттєвим кроком у розвитку симетрійного аналізу диференціальних рівнянь.

Першим кроком цієї процедури є обчислення максимальної (псевдо)алгебри ліївської інваріантності системи диференціальних рівнянь разом із її (псевдо)групою точкових симетрій. Для знаходження псевдогруп точкових симетрій бездисперсійного рівняння Нижника, його нелінійного представлення Лакса та бездисперсійної системи Нижника, а також псевдогрупи контактних симетрій цього рівняння у дослідженні використано оригінальну версію алгебраїчного методу на основі мегаідеалів.

З точністю до еквівалентності, породженої відповідними псевдогрупами точкових симетрій, у дисертації прокласифіковано одно- та двовимірні підалгебри максимальної алгебри ліївської інваріантності бездисперсійного рівняння Нижника та одновимірні підалгебри максимальної алгебри ліївської інваріантності його нелінійного представлення Лакса, що є наступним кроком для дослідження його ліївських редукцій та побудови його точних розв'язків. Зокрема, в рамках оптимізованої процедури ліївської редукції відібрано лише суттєві редукції і вивчено необхідні симетрійні властивості кожного суттєвого редукованого рівняння та їх зв'язок із симетрійними властивостями вихідного рівняння.

На основі аналізу отриманих результатів, вперше у літературі зауважено декілька цікавих явищ. Наприклад, виявилось, що редуковані рівняння не обов'язково успадковують усі параметри відповідних сімей нееквівалентних підалгебр, а всі нееквівалентні підалгебри з сім'ї, навіть параметризованої довільними функціями за належного вибору анзаців, можуть відповідати тому самому редукованому рівнянню. Окрім цього, є можливість відображення класу редукованих рівнянь у його підклас, який має меншу кількість параметрів. Максимальна алгебра ліївської інваріантності бездисперсійного рівняння Нижника вкладається в максимальну алгебру ліївської інваріантності нелінійного представлення Лакса шляхом продовження векторних полів від алгебри рівняння до псевдопотенціалу представлення і, таким чином, будь-яка ліївська редукція рівняння має відповідник серед ліївських редукцій його представлення, але він не завжди єдиний.

Автори багатьох статей у літературі ігнорують етапи перевірки, аналізу та порівняння побудованих точних розв'язків диференціальних рівнянь. Як результат, значна їх кількість є помилковими, еквівалентними чи тривіальними або ті ж самі розв'язки наводять декілька разів у різних формах. У дисертації ж усі знайдені розв'язки ретельно перевірено, а тому вони є коректними. Як підготовчий етап у пошуку точних розв'язків бездисперсійного рівняння Нижника, виокремлено велику сім'ю його тривіальних розв'язків, якими знехтувано у подальшому розгляді. Оскільки представники цієї сім'ї складають значну частку всіх його ліївськи інваріантних розв'язків, це суттєво оптимізує всю процедуру ліївської редукції для цього рівняння. Якщо можливо, розв'язки побудовано у явному вигляді. В інших випадках використано їх параметричне або неявне представлення. Очевидно еквівалентні шляхи редукції у дисертації виключено уже на рівні процедури, але навіть при цьому підході все одно можна отримати еквівалентні розв'язки. Тому обчислено групи точкових симетрій усіх редукованих рівнянь, які використано для калібрування сталих, що параметризують сім'ї отриманих розв'язків. Та-

кож виконано додаткову оптимізацію їх представлення, а тому вони виглядають елегантно, незважаючи на удавану громіздкість. Наприклад, такі розв'язки редукованого рівняння як на сторінці 132 дисертації є досить складними, але навіть їх вигляд дисертантка змогла уніфікувати настільки, що завдяки вибору додаткових змінних основні частини представлення цих суттєво різних розв'язків відрізняються лише однією цифрою — 1, 2 або 3. Із зазначеного очевидно, що авторка ретельно опрацювала роботи [74, 117], де проаналізовано типові помилки та некоректні підходи до пошуку точних розв'язків диференціальних рівнянь.

У дисертації зауважено, що спробу подібного дослідження бездисперсійного рівняння Нижника зроблено раніше у статті [92], де отримано лише деякі часткові результати і, більш того, серед них є багато помилкових або надлишкових. Дійсно, результати дисертації на порядок кращі, ніж результати статті [92], у якій, зокрема, присутні всі типи помилок, що проаналізовано у роботах [74, 117]: некоректні, тривіальні та еквівалентні розв'язки, одруківки, неспрощений вигляд, втрата розв'язків при інтегруванні тощо. Наприклад, щодо згаданих розв'язків на сторінці 132 дисертації, то у статті [92] їх вигляд є громіздким, не настільки замкненим і однотипним.

Слід також наголосити, що дисертацію написано англійською мовою і це має свої переваги, адже таким чином є можливість охопити ширше коло читачів, включно із закордоном.

Зауваження до дисертації та пропозиції для подальших досліджень такі:

- У роботі наведено найпростіші характеристики закону збереження бездисперсійного рівняння Нижника. Було б цікаво провести повний опис законів збереження цього рівняння, тим паче, що перші кроки для цього вже зроблені.
- У параграфі 1.1 дисертації зазначено, що ліівські симетрії бездисперсійного рівняння Нижника вичерпують його узагальнені симетрії

до порядку п'ять включно. Варто розширити цей результат на узагальнені симетрії довільного порядку, хоча це дуже нетривіальна задача. Аналогічне дослідження можна також виконати для відповідного нелінійного представлення Лакса і, особливо, для бездисперсійної системи Нижника, оскільки вона є системою гідродинамічного типу.

- У дисертації велику увагу приділено методу, за допомогою якого обчислено псевдогрупи точкових та контактних симетрій низки систем диференціальних рівнянь, а саме оригінальній версії алгебраїчного методу на основі мегаідеалів. Водночас, означення мегаідеалу в роботі немає, наведено лише посилання на відповідну літературу. Оскільки це поняття є одним із ключових у дослідженні, варто було б навести означення та властивості мегаідеалів безпосередньо у дисертації.
- Два останні посилання на рівняння (2.5) у першому абзаці на сторінці 109 некоректні. У контексті про асоціацію з прихованими ліївськими симетріями та дослідження істотних прямих ліївських редуцій потрібно посилатися на бездисперсійне рівняння Нижника (1.1), а не на модифіковане редуковане рівняння (2.5).

Результати дисертації є новими і завершеними. Вони мають важливе теоретичне значення для подальших досліджень диференціальних рівнянь математичної фізики та їх застосувань у прикладних задачах. Їх опубліковано у престижних журналах *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* та *Analysis and Mathematical Physics* кваліфікації Q1. Також вони пройшли апробацію на наукових семінарах та міжнародних і всеукраїнських конференціях. Дисертацію виконано згідно усіх діючих вимог щодо присудження ступеня доктора філософії. Порушень академічної доброчесності у роботах дисертантки не виявлено.

Дисертаційна робота Олександри Олександрівни Вінніченко на тему “Geometric and algebraic properties of dispersionless Nizhnik equation”,

публікації та їх апробація відповідають профілю спеціальності 111 Математика і задовольняють вимоги “Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії”, затвердженого постановою № 44 Кабінету Міністрів України від 12 січня 2022 р., а їх авторка заслуговує на присудження ступеня доктора філософії.

Рецензент

провідний науковий співробітник
відділу математичної фізики
Інституту математики НАН України,
член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук,
старший дослідник

Олена ВАНЄЄВА

Документ підписано у сервісі Вчасно (продовження)
Review_Vaneeva.pdf

Документ відправлено: 15:56 27.11.2024

Відправник документу

Електронний підпис

15:56 27.11.2024

Ідентифікаційний код: 3012917809

Ванеєва Олена Олександрівна

Власник ключа: Ванеєва Олена Олександрівна

Час перевірки КЕП/ЕЦП: 15:56 27.11.2024

Статус перевірки сертифікату: Сертифікат діє

Серійний номер: 382367105294AF9704000000D12D170042ECA702

Тип підпису: кваліфікований