Голові
разової спеціалізованої вченої ради
Інституту математики НАН України
доктору фізико-математичних наук,
професору, головному науковому співробітнику
відділу математичної фізики
Інституту математики НАН України
Ребенку Олексію Лукичу

ВІДГУК

офіційного опонента Юрика Івана Івановича,
кандидата фізико-математичних наук, професора
на дисертаційну роботу Віннічeнко Олександри Олександрівни на тему:
“Geometric and algebraic properties of dispersionless Nizhnik equation”,
подану на здобуття ступеня доктора філософії у галузі знань
11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика

Дисертаційну роботу Олександри Олександрівни Віннічeнко присвячено актуальним проблемам, пов’язаним із розвитком та використанням алгебраїчних методів у задачах симетрійного аналізу диференціальних рівнянь. Останніми роками цей напрямок сучасної математики продовжують інтенсивно розвивати співробітники відділу математичної фізики Інституту математики НАН України. Завдяки новим алгебраїчним методам, запропонованим у роботах А.Г. Нікітіна, Р.О. Поповича, В.М. Бойка, О.О. Ванєєвої, М.О. Нестеренко та їх учнів, вдалось отримати низку фундаментальних результатів у груповому аналізі диференціальних рівнянь. Зокрема, вперше проведено вичерпний розширений симетрійний аналіз різних складних класів диференціальних рівнянь таких як нелінійні рівняння Клейна–Гордона, рівняння мілкої води зі змінною топографією дна, різні узагальнення рівнянь дифузії, реакції чи конвекції, лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку тощо. Ці методи також дозволили у деяких випадках значно покращити, або навіть виправи-

Електронний підпис
ЮРИК ІВАН ІВАНОВИЧ
Ідентифікаційний код
1744405039
Підписано у Вчасно

ти наявні на сьогодні в літературі класичні результати симетрійного аналізу, наприклад, щодо псевдогрупи точкових симетрій, дискретних точкових симетрій, ліївських редукцій та узагальнених симетрій (1+1)-вимірного лінійного рівняння теплопровідності.

Дослідження Олександри Олександрівни є наступною ґрунтовною дисертацією в київській школі симетрійного аналізу та включає цілу низку оригінальних і теоретично обґрунтованих результатів, більшість із яких можна охарактеризувати словом «вперше». Потрібно особливо підкреслити, що дисертація повністю присвячена дослідженню лише одного рівняння — бездисперсійного рівняння Нижника. Разом і у зв'язку з ним розглянуто лише його нелінійне представлення Лакса та бездисперсійний відповідник симетричної системи Нижника. Це не характерно для дисертацій у цій тематиці.

У вступі до першого розділу чітко зазначено, що бездисперсійне рівняння Нижника розглянуто над дійсним полем, тобто і незалежні, і залежна змінні є дійсними. Хоча обмеження такого типу опускають у багатьох роботах, вони є важливими для досліджень у рамках симетрійного аналізу диференціальних рівнянь, адже зміна базового поля для незалежних чи залежних змінних може призводити до суттєвої модифікації результатів. Отже, нечітка постановка задачі з ігноруванням базового поля є одним із джерел помилок у цій галузі математики.

Побудові точних розв'язків систем диференціальних рівнянь із частинними похідними за допомогою процедури ліївської редукції присвячено багато робіт, але лише незначна їх кількість є коректними та систематичними дослідженнями таких редукцій. І навіть переважна частина з цієї незначної кількості містить рутинні громіздкі обчислення та вимагає детального розгляду багатьох нееквівалентних випадків. Тому передумовою успішного виконання вищевказаної процедури є її оптимізація. У дисертації описано оптимізовану процедуру ліївської редукції для систем диференціальних рівнянь із частинними похідними з трьома незалежними змінними. Перший крок цієї процедури для бездисперсійного рівняння Нижника реалізовано в параграфах 1.1 та 1.2 дисертації, де зокрема обчислено максимальні алгебри ліївської інваріантності цього рівняння і його нелі-

нійного представлення Лакса, а також їхні псевдогрупи точкових симетрій. Для кожної з цих псевдогруп її дію на відповідній алгебрі Лі краще знаходити через підняття векторних полів з алгебри елементами псевдогрупи. Для цього потрібно отримати їх явний вигляд як (скінченних) точкових перетворень, що виконано у дисертації через застосування оригінальної версії алгебраїчного методу побудови псевдогруп точкових симетрій систем диференціальних рівнянь. У цій версії необхідну умову, що перетворення з псевдогрупи стабілізують алгебру та кожен з її мегаідеалів, перевіряють лише для скінченного набору лінійно незалежних елементів алгебри. Як показано в дисертації, нехтування мегаідеалами призводить до необхідності такої перевірки на суттєво більших наборах елементів алгебри.

У роботі побудовано оптимальні системи підалгебр розмірності один і два для максимальної алгебри ліївської інваріантності бездисперсійного рівняння Нижника, які додатково проаналізовано та модифіковано в контексті описаної процедури ліївської редукції. З вигляду цього рівняння очевидно, що серед редукованих рівнянь, отриманих його ліївськими редукціями корозмірностей і один, і два, має бути багато диференціальних рівнянь немаксимального рангу. Такі рівняння вивчено у дисертації так само систематично, як і звичніші редуковані рівняння максимального рангу. У всіх випадках, де це суттєво, обчислено (псевдо)групи ліївських і точкових (включно з дискретними) симетрій редукованих рівнянь, відібраних у ході застосування оптимізованої процедури ліївської редукції до бездисперсійного рівняння Нижника. Також визначено, які з цих симетрій індуковані симетріями вихідного рівняння, що дозволило одразу під час побудови виокремлювати лише ті розв’язки редукованих рівнянь, які відповідають його нееквівалентним розв’язкам. Це є першим таким дослідженням у літературі з точки зору як повноти вивчення симетрій редукованих рівнянь, так і розгляду диференціальних рівнянь немаксимального рангу. Показано, що навіть за оптимального вибору анзаців прості та очевидні дискретні точкові симетрії бездисперсійного рівняння Нижника можуть індукувати складні та нетривіальні дискретні точкові симетрії редукованих рівнянь. Для неперервних симетрій такого феномена немає.

Поряд із ліївськими редукціями бездисперсійного рівняння Нижника виконано ліївські редукції його нелінійного представлення Лакса. Класифікацію нееквівалентних підалгебр розмірності один і два для максимальної алгебри ліївської інваріантності нелінійного представлення Лакса отримано оптимальним шляхом із зазначеної вище аналогічної класифікації для бездисперсійного рівняння Нижника. Відповідність між оптимальними списками підалгебр не є взаємно однозначною: деяким підалгебрам зі списку для рівняння відповідає декілька підалгебр або навіть нескінченна сім'я підалгебр зі списку для його нелінійного представлення Лакса. Це призводить до неоднозначної відповідності між ліївськими редукціями рівняння і його представлення.

Один із цікавих результатів щодо ліївських редукцій у дисертації пов'язаний з сім'єю нееквівалентних одновимірних підалгебр, параметризованих довільною функцією від часу. При правильному виборі анзаців, асоційованих із цими підалгебрами, відповідні редуковані рівняння збігаються, а проста диференціальна підстановка другого порядку одночасно зводить їх до нев'язкого рівняння Бюргерса, яке також називають рівнянням Хопфа і яке є найпростішим нелінійним транспортним рівнянням. У результаті, використання зазначеної сім'ї підалгебр дає широку сім'ю інваріантних розв'язків бездисперсійного рівняння Нижника, що виражається через одну довільну функцію від часу та подвійну квадратуру загального розв'язку нев'язкого рівняння Бюргерса, для якого є добре відома неявна формула. Водночас, оскільки таке зображення розв'язків бездисперсійного рівняння Нижника не є достатньо явним, у дисертації також досліджено його істотні прямі ліївські редукції корозмірності два, які можна інтерпретувати як двокрокові ліївські редукції із зазначеними редукціями корозмірності один як першим кроком.

Для інтегрування редукованих звичайних диференціальних рівнянь використано різні методи, зокрема пониження порядку за допомогою ліївських симетрій або факторизація у випадку немаксимального рангу. Коли безпосередньо для редукованого рівняння не вдавалося побудувати хоча б частинних розв'язків, їх знайдено за допомогою розгляду відповідних редукованих систем для нелінійного представлення Лакса. Загалом це

дало різноманітні широкі сім'ї точних розв'язків бездисперсійного рівняння Нижника у різних виглядах — явному, параметричному та неявному.

Для повноти також проаналізовано ліївські редукції корозмірності три для бездисперсійного рівняння Нижника, які зводять його до алгебраїчних рівнянь. Не класифікуючи тривимірні підалгебри його максимальної алгебри ліївської інваріантності (що є громіздкою задачею) і не виконуючи ці редукції, показано, що вони не можуть давати нових розв'язків порівняно з тими, які побудовано на попередніх кроках із використанням ліївських редукцій корозмірностей один і два.

Прокласифіковано всі розв'язки бездисперсійного рівняння Нижника, які можна отримати за допомогою мультиплікативного розділення стандартних просторових змінних. Знайдені у результаті сім'ї його точних розв'язків суттєво узагальнюють деякі побудовані сім'ї ліївських інваріантних розв'язків, оскільки вони параметризовані додатковими довільними функціями від часової змінної.

Дисертація має суто теоретичний характер. Розроблені методи та отримані результати можна використати у подальших дослідженнях рівнянь математичної фізики.

До дисертації можна зробити такі пропозиції і зауваження:

- У дисертації згадується про зв'язок бездисперсійного рівняння Нижника з оригінальною системою Нижника, але як такі симетрійні властивості оригінальної системи Нижника не досліджено. Цікаво було б переглянути літературу, дізнатися, що про них відомо та детально вивчити і дослідити це питання.
- Як неліївський метод побудови точних розв'язків у дисертації використано лише мультиплікативне розділення стандартних просторових змінних. Це цікаве та актуальне дослідження, адже таким чином можна отримати ще більше розв'язків бездисперсійного рівняння Нижника в замкненій формі. Тому було б варто застосувати й інші неліївські методи для пошуку його розв'язків, наприклад, метод узагальненого розділення змінних та метод некласичних редукцій.
- У роботі вивчено точкові, контактні, дискретні, ліївські, приховані симетрії бездисперсійного рівняння Нижника. Це дослідження можна

розширити на його умовні, Q-умовні та узагальнені симетрії і закони збереження.

– Як зазначено дисертанткою, поштовхом до початку її роботи над бездисперсійним рівнянням Нижника була стаття [92], багато результатів якої є частковими або помилковими. Для повноти розгляду і демонстрації переваги підходів, розвинутих у дисертації, корисно було б включити до неї порівняння з результатами статті [92].

Наведені пропозиції та зауваження не впливають на загальну позитивну оцінку дисертації. Скоріше їх можна розглядати як побажання для подальших досліджень.

Оформлення дисертації відповідає вимогам, які затверджені наказом Міністерства освіти і науки України від 12 січня 2017 р. № 40 «Про затвердження Вимог до оформлення дисертації». Окрім цього, у дисертаційній роботі та наукових публікаціях, де висвітлено результати наукових досліджень Олександри Вінніченко, жодних порушень академічної доброчесності не виявлено.

Результати дисертації викладено у двох наукових статтях, опублікованих в іноземних виданнях, що індексуються в SCOPUS та Web of Sciences (журнал Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation належить до Q1 у цих наукометричних базах, а журнал Analysis and Mathematical Physics – до квартилів Q1 та Q2, відповідно), а також у семи тезах доповідей наукових конференцій.

Дисертаційна робота Олександри Олександрівни Вінніченко має високий науковий рівень, структура дисертації добре продумана, а матеріал логічно викладений. Отримані результати є достовірними, перевіреними, всі твердження чітко сформульовано і строго доведено. Дуже важливо, що усі результати пройшли апробацію на низці наукових конференцій та семінарів. Вони є новими, цікавими та відкривають нові напрямки для досліджень у галузі групового аналізу диференціальних рівнянь.

Отже, оформлення дисертації, високий рівень результатів та публікацій відповідають спеціальності 111 Математика та вимогам постанови, затвердженої Кабінетом Міністрів України від 12 січня 2022 р. №44, «Про

затвердження Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», а їх авторка, Олександра Олександрівна Вінніченко, заслуговує на присудження ступеня доктора філософії.

Офіційний опонент
завідувач кафедри вищої математики
імені проф. Можара В.І.,
Національний університет
харчових технологій
кандидат фізико-математичних наук,
професор Іван ЮРИК

Документ підписано у сервісі Вчасно (початок)
Vidhuk_Yuryk.pdf

Документ підписано у сервісі Вчасно (продовження)
Vidhuk_Yuryk.pdf

Документ відправлено: 11:54 25.11.2024

Відправник документу

Електронний підпис
11:54 25.11.2024
Ідентифікаційний код: 1744405039
ЮРИК ІВАН ІВАНОВИЧ
Власник ключа: ЮРИК ІВАН ІВАНОВИЧ
Час перевірки КЕП/ЕЦП: 11:54 25.11.2024
Статус перевірки сертифікату: Сертифікат діє
Серійний номер: 5E984D526F82F38F04000000779FE3006BD3A805
Тип підпису: удосконалений