

Голові
разової спеціалізованої вченої ради
Інституту математики НАН України
доктору фізико-математичних наук, професору,
головному науковому співробітнику
відділу математичної фізики
Інституту математики НАН України
РЕБЕНКУ Олексію Лукичу

ВІДГУК

офіційного опонента Самойленко Юлії Іванівни,
доктора фізико-математичних наук, старшого наукового співробітника,
на дисертаційну роботу
ВІННІЧЕНКО Олександри Олександрівни на тему:
«Geometric and algebraic properties of dispersionless Nizhnik equation»,
що подана на здобуття ступеня доктора філософії
у галузі знань 11 Математика та статистика
за спеціальністю 111 Математика

Актуальність дослідження. Дана дисертаційна робота стосується бездисперсійного рівняння Нижника вигляду

$$u_{txy} = (u_{xy}u_{xx})_x + (u_{xy}u_{yy})_y, \quad (1)$$

яке є нелінійним, а, отже, його дослідження є нетривіальною задачею.

Варто нагадати, що вивчення нелінійних систем потребує використання різних методів і підходів, серед яких особливий інтерес становлять ті, що дозволяють отримати розв'язки у явному вигляді з огляду на можливі практичні застосування. Серед таких методів, перш за все, можна згадати методи перенесення Дарбу і Беклунда, інші алгебро-геометричні методи, метод



відокремлення змінних, білінійний метод Хіרותи, метод ізоспектральних деформацій (метод задачі Рімана–Гільберта, метод оберненої задачі розсіювання) та інші.

Революційним методом дослідження нелінійних систем став метод оберненої задачі розсіювання, за допомогою якого було проінтегровано в явному вигляді низку фізично змістовних нелінійних моделей теоретичної і математичної фізики. Успішне застосування цього методу для одновимірних систем спонукало спроби поширення цього методу на багатовимірні системи, що, як виявилось, в загальному випадку зустрічається із суттєвими труднощами.

У 1980 році професор Нижник Л.П., якому належить видатний внесок у розвиток методу оберненої задачі, запропонував нове узагальнення рівняння Кортевега–де Фріза для двох просторових змінних

$$u_t = k_1 u_{xxx} + k_2 u_{yyy} + 3(v_1 u)_x + 3(v_2 u)_y, \quad (2)$$

$$v_{1y} = k_1 u_x, \quad v_{2x} = k_2 u_y.$$

У подальшому система (2), як і система (1) активно вивчалися у працях багатьох дослідників.

Іншим ефективним методом вивчення нелінійних диференціальних рівнянь є симетрійний аналіз, який став одним із найдієвіших інструментів для знаходження точних розв'язків систем диференціальних рівнянь, опису їх законів збереження, тощо.

Симетрійний аналіз, основи якого були закладені у працях Софуса Лі у 19 столітті, є конструктивним методом для дослідження нелінійних диференціальних рівнянь і продемонстрував свою ефективність при вивченні багатьох математичних моделей сучасного природознавства. Більш того, сьогодні математику і теоретичну фізику неможливо уявити без використання алгебро-геометричних методів, зокрема, методів теорії груп і алгебр Лі.

Дисертаційне дослідження Вінніченко Олександри Олександрівни, центральним об'єктом вивчення якого є бездисперсійний аналог рівняння Нижника, має низку характерних особливостей, які виокремлюють його серед інших дисертаційних робіт, присвячених симетрійному аналізу диференціальних рівнянь. Зокрема, як об'єкт, воно має лише одне диференціальне

рівняння — рівняння (1), яке є бездисперсійною границею (дійсного симетричного потенціального) рівняння Нижника (2). Останнє рівняння є одним із перших у літературі прикладів інтегровних систем з трьома незалежними змінними. Проте бездисперсійний аналог цього рівняння виник лише у 2006 році при вивченні зв'язків між відомими гідродинамічними ланцюжками і нелінійними $(2 + 1)$ -вимірними системами. Зазначимо, що коректний і вичерпний класичний симетрійний аналіз цього аналога вперше виконано саме у роботі дисертантки.

Тому, без сумніву, тема дисертаційної роботи Вінніченко О.О. «Geometric and algebraic properties of dispersionless Nizhnik equation» є вельми актуальною. Зазначимо також, що у цій роботі продовжено дослідження з актуальних питань сучасної математичної фізики представників школи симетрійного аналізу Інституту математики НАН України, яка має міжнародне визнання.

Структура дисертації. Дисертаційна робота написана англійською мовою. Дисертація складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаної літератури, що містить 132 найменування, додатка, в якому наведено список публікацій дисертантки і описано апробацію результатів дисертації. На початку дисертації подано анотації українською і англійською мовами, список публікацій здобувачки, подяку.

Загальний обсяг дисертації — 171 сторінка, з яких список використаної літератури займає 15 сторінок, а додаток — 4 сторінки.

У *вступі* описано актуальність теми дисертаційного дослідження, зв'язок з академічними програмами, планами, темами і грантами, мету та об'єкт дослідження, наукову новизну і практичне значення отриманих наукових результатів, особистий внесок здобувача, апробацію результатів дисертації, а також охарактеризовано публікації дисертантки, структуру і об'єм дисертації.

У *першому* розділі дисертації досліджено *ліївські і загальні точкові симетрії* бездисперсійного рівняння Нижника (1), його представлення Лакса та бездисперсійного відповідника симетричної системи Нижника. Зокрема,

знайдено їх максимальні алгебри ліївської інваріантності і максимальну алгебру контактних симетрій досліджуваного рівняння.

Застосовуючи оригінальну версію алгебраїчного методу на основі мегаідеалів, обчислено їх псевдогрупи точкових симетрій і псевдогрупу контактних симетрій цього рівняння.

Варто зауважити, що у дисертації отримано перший приклад в літературі, коли необхідна алгебраїчна умова, що є основою методу, повністю визначає псевдогрупу рівняння. Це є унікальним явищем, оскільки навіть відповідне представлення Лакса і бездисперсійна симетрична система Нижника не мають цієї властивості. Окрім цього, вперше застосовано версію алгебраїчного методу на основі мегаідеалів для знаходження псевдогрупи контактних симетрій диференціального рівняння.

Перевірено, чи скінченновимірні підалгебри максимальної алгебри ліївської інваріантності бездисперсійного рівняння Нижника, які виникають природним чином у процесі обчислення псевдогрупи точкових симетрій рівняння, визначають дифеоморфізми, що стабілізують цю алгебру.

Знайдено також необхідний набір геометричних властивостей досліджуваного рівняння, які виокремлюють його серед класу диференціальних рівнянь із частинними похідними третього порядку з трьома незалежними змінними.

Другий розділ присвячено вивченню ліївських редукцій бездисперсійного рівняння Нижника (1) та побудові широких сімей його інваріантних розв'язків.

Теоретичною основою цього розділу є перший у літературі точний формалізований опис повної оптимізованої процедури ліївської редукції для систем диференціальних рівнянь із частинними похідними з трьома незалежними змінними (параграф 2.1).

Застосовуючи результати першого розділу, у цьому розділі здійснено класифікацію одно- та двовимірних підалгебр максимальної алгебри ліївської інваріантності бездисперсійного рівняння Нижника (1) і одновимірних підалгебр максимальної алгебри ліївської інваріантності представлення Лакса

(параграф 2.2). Потім побудовані підалгебри використані для вичерпної класифікації ліївських редукцій рівняння (1) (параграфи 2.4 і 2.5).

Всебічний симетрійний аналіз редукованих рівнянь є ще однією характерною особливістю дисертації. Зокрема, вперше обчислено псевдогрупи точкових симетрій всіх редукованих звичайних диференціальних рівнянь включно з їх дискретними точковими симетріями і перевірено, чи є ці симетрії прихованими або індукованими. Зазначимо також, що цей аналіз редукованих рівнянь є першим в літературі явним і систематичним дослідженням ліївських і загальних точкових симетрій диференціальних рівнянь немаксимального рангу.

Широкі сім'ї нових інваріантних розв'язків рівняння (1) побудовано у явному вигляді в термінах елементарних функцій, функцій Ламберта, гіпергеометричних функцій, у параметричній або неявній формах. Для інтегрування та знаходження точних розв'язків деяких редукованих диференціальних рівнянь використано відповідні ліївські редукції представлення Лакса рівняння (1) (параграф 2.6).

Сім'ї неліївських розв'язків рівняння (1), що узагальнюють деякі побудовані сім'ї нових інваріантних розв'язків, знайдено за допомогою мультиплікативного розділення змінних (параграф 2.7). У цьому параграфі також продемонстровано, що використання інших методів симетрійного аналізу диференціальних рівнянь дозволяє побудувати ще більше розв'язків бездисперсійного рівняння Нижника (1) у замкненій формі.

Дисертація Вінніченко О.О. має теоретичний характер.

Отримані результати є логічно завершеними та самостійними.

Публікації та апробація отриманих результатів. Результати дисертації опубліковано у 9 наукових працях, серед яких дві статті у високорейтингових міжнародних журналах (Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation (Scopus – Q1; WoS – Q1; SJR – Q1; IF – 3,4; CiteScore – 6,8), Analysis and Mathematical Physics (Scopus – Q1; WoS – Q2; SJR – Q1; IF – 1,4; CiteScore – 2,7)), та 7 тез доповідей міжнародних та всеукраїнських конференцій.

Основні результати пройшли достатню апробацію і доповідалися на 5 міжнародних і 2 всеукраїнських конференціях, а також на наукових семінарах.

Зауваження та побажання щодо змісту роботи:

- Цікаво було б побачити явні формули для переходу від оригінальної системи Нижника (2) до бездисперсійного рівняння Нижника (1), оскільки він є нетривіальним і його докладний опис відсутній у літературі. Презентація повного виведення рівняння і глибший аналіз попередніх робіт важливі для закріплення пріоритету щодо цього рівняння за Л.П. Нижником.
- Авторка успішно використала систему символьних обчислень MAPLE для перевірки отриманих розв'язків бездисперсійного рівняння Нижника, але оскільки у багатьох випадках це технічно складна задача, то варто було б навести в додатках відповідний програмний код і результати його виконання. Аналогічне зауваження можна висловити також щодо обчислення та перевірки максимальних алгебр лівських симетрій усіх систем диференціальних рівнянь, що розглядаються у даній дисертації.
- У дисертації отримано низку цікавих результатів щодо геометричних та алгебраїчних властивостей бездисперсійного рівняння Нижника, а також побудовано його розв'язки різних типів у замкненій формі. Водночас, за виключенням декількох зауважень на початку першого розділу, у роботі недостатню увагу приділено аналізу застосувань цього рівняння та фізичній інтерпретації отриманих розв'язків, хоча такий аналіз є важливим з точки зору подальшого використання результатів дисертації.
- Оскільки в дисертаційній роботі наведено низку нових розв'язків для бездисперсійного рівняння Нижника, то варто було б дослідити їх якісну поведінку, а також для наведених розв'язків було б корисно додати їх графічну візуалізацію. Крім того, в роботі варто було б виділити стаціонарні та нестаціонарні розв'язки, оскільки така класифікація може

бути корисна при вивченні властивостей відповідних розв'язків та їх різноманітних застосувань.

Проте висловлені зауваження не впливають на загальну високу оцінку дисертаційної роботи Вінніченко О.О.

Дисертація та публікації, у яких висвітлено наукові результати Вінніченко О.О., не містять порушення академічної доброчесності.

Дисертаційна робота Вінніченко О.О. на тему «Geometric and algebraic properties of dispersionless Nizhnik equation», виконана на високому науковому рівні. Отримані в ній наукові результати є новими, достовірними та мають важливе теоретичне значення для вивчення різних нелінійних диференціальних рівнянь математичної і теоретичної фізики.

Дана робота відповідає усім вимогам щодо оформлення дисертації, які затверджені наказом Міністерства освіти і науки України від 12 січня 2017 року, № 40.

Враховуючи зазначене вище, вважаю, що дисертаційне дослідження Вінніченко О.О. на тему «Geometric and algebraic properties of dispersionless Nizhnik equation», та наукові публікації, в яких представлено результати цього дослідження, відповідають компетентностям спеціальності 111 Математика та вимогам «Про затвердження Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», від 12 січня 2022 року, № 44, а її авторка, ВІННІЧЕНКО Олександра Олександрівна, заслуговує на присудження їй ступеня доктора філософії.

Офіційний опонент

дослідник, Інститут Каміля Жордана,

Університет Клода Бернара, Ліон, 1,

доктор фізико-математичних наук,

старший науковий співробітник

Юлія САМОЙЛЕНКО

Документ підписано у сервісі Вчасно (продовження)
Vidhuk_Samoilenko.pdf

Документ відправлено: 23:12 20.11.2024

Відправник документу

Електронний підпис

23:12 20.11.2024

Ідентифікаційний код: 2779712487

Самойленко Юлія Іванівна

Власник ключа: Самойленко Юлія Іванівна

Час перевірки КЕП/ЕЦП: 23:12 20.11.2024

Статус перевірки сертифікату: Сертифікат діє

Серійний номер: 382367105294AF97040000005F49FA002EFF1F03

Тип підпису: кваліфікований