

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ



**ЯНЧЕНКО Сергій Якович**

УДК 517.5

**Екстремальні задачі теорії наближень  
класів гладких функцій однієї та  
багатьох змінних**

01.01.01 — математичний аналіз  
111 — математика

Реферат  
дисертації на здобуття наукового ступеня  
доктора фізико-математичних наук

Київ — 2024

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано в Інституті математики НАН України.

Науковий консультант:

доктор фізико-математичних наук, професор  
**РОМАНЮК Анатолій Сергійович**  
Інститут математики НАН України,  
завідувач відділу теорії функцій.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор  
**ВАКАРЧУК Сергій Борисович**,  
Вищий навчальний заклад  
“Університет імені Альфреда Нобеля”,  
професор кафедри інформаційних технологій;


доктор фізико-математичних наук, професор  
**ПАРФІНОВИЧ Наталія Вікторівна**,  
Дніпровський національний університет  
імені Олеся Гончара, завідувач кафедри  
математичного аналізу та оптимізації;

доктор фізико-математичних наук, професор  
**СКАСКІВ Олег Богданович**,  
Львівський національний університет  
імені Івана Франка, завідувач кафедри  
теорії функцій і функціонального аналізу.

Захист відбудеться «17» вересня 2024 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України та на офіційному сайті інституту за адресою: <https://www.imath.kiev.ua/zahyst/>.

Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради

 **А. Л. Шидліч**

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Дисертаційна робота** присвячена розв'язанню важливих екстремальних задач теорії наближень у нормованих просторах на класах функцій однієї та багатьох змінних (класах Соболева, Нікольського–Бесова, а також їхніх узагальненнях). Зокрема, в роботі розглядаються задачі про знаходження оцінок: точних верхніх меж величин найкращих ортогональних тригонометричних наближень функцій зі згаданих класів, найкращих наближень функцій за допомогою цілих функцій експоненціального типу, з носієм їхнього перетворення Фур'є у різних множинах скінченної міри Лебега (східчастому гіперболічному хресті,  $d$ -вимірних “паралелепіпедах”), наближень функцій з відповідних класів їхніми східчастогіперболічними сумами Фур'є,  $M$ -вимірного колмогоровського поперечника, ентропійних чисел та ін.

**Обґрунтування вибору теми дослідження.** Теорія наближення — важливий і фундаментальний розділ математичного аналізу, виникнення якого пов'язане з роботами таких всесвітньо відомих математиків як Жан Б. Фур'є, К. Вейерштрасса, П. Л. Чебишова, А. Лебега, Д. Джексона, Ш. Валле Пуссена, С. Н. Бернштейна. Актуальними проблемами теорії наближення є розв'язання широкого кола екстремальних задач, зокрема, дослідження питань апроксимації класів функцій, як однієї так і багатьох змінних, різними методами, а також знаходження серед них оптимальних у тому чи іншому сенсі. Особливе місце серед екстремальних проблем теорії наближення функцій займають задачі пов'язані з лінійною та нелінійною апроксимацією функціональних класів. Поглиблений інтерес в останні десятиліття до нелінійної апроксимації (зокрема, найкращих ортогональних тригонометричних наближень і найкращих  $M$ -членних тригонометричних наближень) зумовлений, насамперед, тим, що у багатьох випадках нелінійні методи наближення виявились більш ефективними у порівнянні з лінійними методами. Цей напрямок досліджень пов'язаний з роботами Е. С. Белінського, Р. Де Вора, Д. Зунга, Р. С. Ісмаїлова, С. Б. Кашина, Т. Кюна, В. Є. Майорова, А. С. Романюка, А. С. Сердюка, О. І. Степанця, В. М. Темлякова, Х. Трібеля, Т. Ульріха.

З середини 30-х років минулого століття одним із важливих напрямків теорії апроксимації функцій став напрямок, пов'язаний з дослідженням класів функцій, зокрема, класів Соболева. Проте, як

з'ясувалося у процесі досліджень, шкала просторів Соболева не могла повністю охопити і вичерпно описати диференціальні властивості функцій. Як наслідок, для більш “тонкої” класифікації функцій почали з'являтися і досліджуватися нові простори як періодичних так і не періодичних функцій, зокрема, спочатку ізотропні та анізотропні простори Нікольського, а пізніше відповідні ізотропні та анізотропні простори Бесова. Згодом були введені простори Нікольського–Бесова з домінуючою мішаною похідною, а далі різні аналоги і узагальнення усіх вище згаданих просторів функцій. Крім самостійного інтересу з точки зору теорії функцій, дослідження таких просторів знаходять застосування у теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, до розв'язання крайових задач регулярних еліптичних диференціальних рівнянь, обчислювальній математиці, фінансовій математиці, передачі сигналів, відтворенні зображень та ін.

З початку 60-х років ХХ століття важливе місце в теорії наближення посідає напрям пов'язаний з дослідженням апроксимаційних характеристик класів функцій багатьох змінних, який почав активно розвиватися завдяки роботам К. І. Бабенка. Йому вдалося розв'язати задачу А. М. Колмогорова по відшукуванню відхилення фіксованого класу функцій від довільного підпростору заданої розмірності, а далі мінімізувати це відхилення по усіх таких підпросторах. К. І. Бабенком було встановлено, що при наближенні класів Соболева  $W_{2,\alpha}^r(\mathbb{T}^d)$  у метриці простору  $L_2(\mathbb{T}^d)$  екстремальним підпростором (оптимальним у певному сенсі) є підпростір тригонометричних поліномів з “номерами” гармонік з множини, яка згодом отримала назву “гіперболічного хреста”, а відповідна характеристика відома як колмогоровський поперечник ( $M$ -вимірний колмогоровський поперечник). Згодом наближення функцій багатьох змінних з класів Соболева  $W_{2,\alpha}^r(\mathbb{T}^d)$ , а також класів Нікольського–Бесова функцій з домінуючою мішаною похідною  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)$  за допомогою тригонометричних поліномів зі спектром у гіперболічних хрестах проводилося в роботах Е. С. Белінського, Е. М. Галеева, Н. С. Нікольської, А. С. Романюка, В. М. Темлякова та багатьох інших. Тому, на сьогоднішній день, є підстави стверджувати, що у багатьох важливих напрямках теорія наближення відомих класів періодичних функцій як однієї, так і багатьох змінних вже носить практично завершений характер, хоча, безумовно, тут ще залишаються принципові задачі, які потребують свого розв'язання. Зокрема, у деяких випадках це відноситься до відшукування точних за порядком оцінок таких важливих

апроксимаційних характеристик як ентропійні числа і колмогоровські поперечники у так званих “граничних” випадках (для крайніх значень параметрів 1 і  $\infty$  в означенні класів функцій або метрики, в якій здійснюється оцінка похибки наближення), а саме для класів Нікольського–Бесова у рівномірній метриці.

Для наближення неперіодичних функцій, заданих на  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ , на відміну від періодичних, де у якості наближаючого апарату використовуються тригонометричні поліноми різного вигляду, природним апаратом наближення є цілі функції експоненціального типу. Основи сучасної теорії наближення цілими функціями експоненціального типу закладено в роботах С. Н. Бернштейна і було розвинено Н. І. Ахієзером, Н. Вінером, М. В. Келдишем, Н. Пелі та С. М. Нікольським. Результати досліджень, пов’язаних з наближенням функцій, заданих на дійсній осі, відображені у відомих працях Н. І. Ахієзера, І. І. Ібрагімова, О. І. Степанця, О. П. Тімана, П. Л. Бутцера і Р. Й. Нессела та інших. Паралельно, однак менш інтенсивно, розвивалася теорія наближення функцій і у просторі  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ . Відповідні результати у цьому напрямі наведено, зокрема, в книгах С. М. Нікольського та Х. Трібеля. Окрім цього, дослідженню наближень функцій однієї та багатьох змінних за допомогою цілих функцій зі спектром на різних множинах, в тому числі і східчастому гіперболічному хресті, присвячена велика кількість статей, серед яких варто відзначити наступних авторів: О. В. Бесова, С. Б. Вакарчука, Л. Д. Кудрявцева, П. І. Лізоркіна, Г. Г. Магаріл-Ільяєва, С. М. Нікольського, В. Сікеля, О. І. Степанця, В. М. Тіхомірова, Т. Ульріх, А. Л. Шидліча, Х.-Ю. Шмайссера, Wang Heping, Sun Yongsheng.

В останні 20–30 років досягнуто суттєвого прогресу у дослідженні питань апроксимації періодичних функцій багатьох змінних із анізотропних і відповідно ізотропних класів Нікольського–Бесова та Соболева. Основні результати щодо анізотропних класів Нікольського і Соболева відображені в монографії В. М. Темлякова (1993). Дослідженню ж ізотропних класів Бесова, зокрема, присвячені роботи Р. Де Вора і В. М. Темлякова (1995), А. С. Романюка (2008, 2009). У випадку анізотропних класів Бесова періодичних функцій багатьох змінних в останні роки ряд результатів було отримано у роботах В. В. Миронюка. Проте, як і у випадку ізотропних, так і анізотропних класів Нікольського–Бесова неперіодичних функцій  $B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)$  питання апроксимації досліджені значно менше і на даний час у цьому напрямку залишається ціла низка задач, які потребують свого роз-

в'язання, а тому результати дисертаційної роботи у цьому напрямку мають безумовний науковий інтерес.

Подальший розвиток у вивченні просторів Нікольського–Бесова пов'язаний з дослідженням їхніх узагальнень. Так, одним з важливих напрямів є узагальнення гладкості, коли замість степеневі функції гладкості спочатку розглядалася функція, яка задовольняє умови Барі–Стєчка, а згодом довільна і не монотонна функція. Проте дослідження у значній мірі були пов'язані з доведенням теорем вкладення, теорем продовження, відшукування слідів функцій з даних просторів. Інтенсивні дослідження різних апроксимаційних характеристик з точки зору знаходження їхніх порядків для узагальнених класів типу Нікольського–Бесова ( $S_{p,\theta}^\Omega B(\mathbb{T}^d)$ ) у періодичному випадку беруть свій початок з робіт М. М. Пустовойтова (1994) і Sun Yongsheng та Wang Heping (1997) та розвинуті у роботах великої кількості математиків. Так, зокрема, було запропоновано розглядати наближення на множинах, які породжуються поверхнями рівня функцій  $\Omega$ . Дані множини є узагальненням гіперболічних хрестів на випадок довільної функції  $\Omega$ . Зауважимо, що пристосування вибору наближаючого агрегату до функцій  $\Omega$  дало можливість відмовитися від низки умов на саму функцію  $\Omega$ , які необхідні при наближенні у східчастому гіперболічному хресті. Однак у випадку класів неперіодичних функцій  $S_{p,\theta}^\Omega B(\mathbb{R}^d)$  такі питання не були досліджені.

Аналіз літератури свідчить про те, що в останнє десятиліття ведуться досить інтенсивні дослідження згаданих класів функцій та їхніх узагальнень в роботах китайських, німецьких, в'єтнамських, казахських і українських математиків. Констатуючи значний внесок цих науковців у розвиток досліджуваної проблематики і незважаючи на значну кількість опублікованих робіт у даних напрямках, варто зазначити, що залишилися ціла низка принципівих нез'ясованих питань важливих для розвитку теорії наближення, які потребують свого вирішення.

Таким чином, з огляду на сказане вище, актуальним є дослідження різних апроксимаційних характеристик, особливо для “граничних” значень деяких параметрів або у близьких ситуаціях, класів Нікольського–Бесова періодичних та неперіодичних функцій з домінуючою мішаною похідною  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)$ ,  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$  та їхніх узагальнень у неперіодичному випадку —  $S_{p,\theta}^\Omega B(\mathbb{R}^d)$ , ізотропних та анізотропних класів Нікольського–Бесова неперіодичних функцій —  $B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)$ , а та-

кож класів Соболева періодичних функцій —  $W_{p,\alpha}^r(\mathbb{T}^d)$ .

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертацію виконано у відділі теорії функцій Інституту математики НАН України згідно з науково-дослідними темами “Апроксимативні та структурні характеристики функціональних множин”, номер державної реєстрації 0111U002079; “Розробка методів математичного моделювання та теорії наближень для розв’язання актуальних проблем сучасного природознавства”, номер державної реєстрації 0112U002322; “Еволюційні крайові задачі й апроксимативні властивості функціональних множин та їх застосування”, номер державної реєстрації 0118U005389; “Апроксимаційні характеристики та структурні властивості функціональних множин”, номер державної реєстрації 0116U003102; “Інноваційні методи у теорії диференціальних рівнянь, обчислювальній математиці та математичному моделюванні”, номер державної реєстрації 0122U000670; “Дослідження структурних та апроксимаційних властивостей функціональних множин”, номер державної реєстрації 0121U100477.

**Мета і завдання дослідження.** Основною метою роботи є створення нових і вдосконалення відомих методів розв’язання екстремальних задач теорії апроксимації, а саме методів для знаходження точних за порядком оцінок лінійної та нелінійної апроксимації важливих функціональних класів у нормованих просторах.

*Об’єктом дослідження* є класи функцій однієї та багатьох дійсних змінних, що належать відповідним нормованим просторам: класи періодичних та неперіодичних функцій з домінуючою мішаною похідною; класи Соболева періодичних функцій; ізотропні та анізотропні класи Нікольського–Бесова неперіодичних функцій; класи неперіодичних функцій, що є узагальненням класів з домінуючою мішаною похідною. Також у дисертаційній роботі досліджуються аналоги періодичних сум Валле Пуссена та лінійні оператори, які реалізують порядкові значення найкращих наближень.

*Предметом дослідження* даної роботи є апроксимаційні характеристики класів функцій однієї та багатьох змінних у нормованих просторах функцій, що визначені в  $\mathbb{R}^d$  і  $\mathbb{T}^d$ , оцінки норм аналогів періодичних сум Валле Пуссена. Досліджуються величини найкращого наближення класів функцій за допомогою цілих функцій експоненціального типу, з носієм їхнього перетворення Фур’є у різних множинах скінченної міри Лебега, зокрема, у східчастому гіперболічному хресті,  $M$ -вимірний колмогоровський поперечник, ентропійні числа,

найкращі ортогональні тригонометричні наближення, наближення східчасто-гіперболічними сумами Фур'є, ортопоперечники.

*Завдання дослідження:*

- Знайти точні за порядком оцінки наближення класів функцій з домінуючою мішаною похідною  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті в метриці простору Лебега  $L_q(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 < q \leq \infty$ .
- Для функцій з класів  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$  знайти точні за порядком оцінки наближення за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є зосередженим на множинах лебегова міра яких є скінченною при деяких значеннях параметрів.
- Отримати порядкові оцінки ентропійних чисел та  $M$ -вимірного колмогоровського поперечника класів періодичних функцій з домінуючою мішаною гладкістю  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)$ ,  $d \geq 2$ , у метриці простору квазінеперервних функцій  $QC(\mathbb{T}^d)$ .
- Встановити точні за порядком оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів  $S_{1,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)$ ,  $1 \leq \theta \leq \infty$ , у просторі  $B_{\infty,1}(\mathbb{T}^d)$ ,  $d \geq 1$ . У багатовимірному випадку,  $d \geq 2$ , встановити точні за порядком оцінки наближень класів функцій  $S_{1,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)$  їхніми східчасто-гіперболічними сумами Фур'є у цьому ж просторі, а також знайти порядки ортопоперечників.
- Одержати точні за порядком оцінки ортопоперечників і близьких до них апроксимаційних характеристик класів Соболева  $W_{p,\alpha}^r(\mathbb{T}^d)$  та класів  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)$  періодичних функцій однієї та багатьох змінних у просторі  $B_{1,1}(\mathbb{T}^d)$ .
- Дослідити норми лінійних операторів, які реалізують порядкові значення найкращого наближення класів  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)$  у просторі  $B_{1,1}(\mathbb{T}^d)$  за допомогою тригонометричних поліномів з “номерами” гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів.
- Встановити точні за порядком оцінки наближення функцій з узагальнених класів із домінуючою мішаною похідною  $S_{p,\theta}^\Omega B(\mathbb{R}^d)$  за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є на множинах, які породжуються поверхнями рівня функції  $\Omega(\mathbf{t})$  у метриці просторів Лебега.
- Знайти точні за порядком оцінки наближення функцій із класів  $S_{p,\theta}^\Omega B(\mathbb{R}^d)$  у рівномірній метриці за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є у східча-

стому гіперболічному хресті.

- Одержати точні за порядком оцінки величини наближення функцій із класів  $S_{p,\theta}^\Omega B(\mathbb{R}^d)$  у просторі  $L_q(\mathbb{R}^d)$  за допомогою цілих функцій спеціального вигляду при деяких співвідношеннях між параметрами  $p$  і  $q$ .
- Встановити точні за порядком оцінки наближення функцій багатьох змінних із ізотропних класів Нікольського–Бесова сумами типу Валле Пуссена у рівномірній та інтегральній метриках.
- Знайти точні за порядком оцінки наближення функцій багатьох змінних із ізотропних класів Нікольського–Бесова  $B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)$  у метриці простору Лебега  $L_q(\mathbb{R}^d)$  за допомогою цілих функцій експоненціального типу з певними обмеженнями на їхній спектр.
- Для функцій багатьох змінних із анізотропних класів Нікольського–Бесова  $B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)$  встановити точні за порядком оцінки найкращого наближення за допомогою цілих функцій з носіями їхнього перетворення Фур'є у  $d$ -вимірних “паралелепіпедах” у метриці просторів Лебега та одержати точні за порядком оцінки відхилення функцій з даних класів від їхніх відрізків інтеграла Фур'є у рівномірній метриці.

**Методи дослідження.** У роботі використано сучасні методи математичного та функціонального аналізу, теорії функцій багатьох змінних, теорії наближень, загальні методи розв'язування екстремальних задач теорії функцій, зокрема, методи дискретизації та декомпозиції, відповідним чином розвинуті, модифіковані або вдосконалені у залежності від поставлених завдань.

**Наукова новизна отриманих результатів.** Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, є новими і полягають у такому:

- Встановлено нові оцінки норми “блоків” Валле Пуссена, які є аналогами сум Валле Пуссена періодичних функцій багатьох змінних, у просторі Лебега.
- Одержано точні за порядком оцінки наближення класів функцій з домінуючою мішаною похідною  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , у просторі Лебега  $L_q(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 < q \leq \infty$ , за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті.
- Одержано точні за порядком оцінки наближення функцій з класів  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , за допомогою цілих функцій експо-

ненціального типу зі спектром зосередженим на множинах лебегова міра яких є скінченною і похибка наближення оцінюється у рівномірній метриці.

- Для функцій з класів  $S_{2,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$  знайдено точні за порядком оцінки наближення у просторі  $L_2(\mathbb{R}^d)$  за допомогою цілих функцій експоненціального типу зі спектром зосередженим на множинах лебегова міра яких є скінченною. Встановлено, що у деяких випадках такого роду наближення мають переваги у порівнянні з наближенням цих класів за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті.
- Отримано порядкові оцінки ентропійних чисел класів функцій  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)$ ,  $d \geq 2$ , з домінуючою мішаною гладкістю у просторі квазінеперервних функцій  $QC(\mathbb{T}^d)$ . Показано, що при  $2 \leq p \leq \infty$ ,  $2 \leq \theta < \infty$ ,  $r_1 > \frac{1}{2}$  оцінка відповідної асимптотичної характеристики є точною за порядком.
- Для класів  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)$ ,  $d \geq 2$ , у метриці простору квазінеперервних функцій  $QC(\mathbb{T}^d)$  за рахунок модифікації та вдосконалення методу дискретизації знайдено точну за порядком оцінку для  $M$ -вимірного колмогоровського поперечника у випадку  $2 \leq p \leq \infty$ ,  $2 \leq \theta < \infty$ ,  $r_1 > \frac{1}{2}$  та встановлено оцінку зверху для деяких інших співвідношень між параметрами  $p$  та  $\theta$ .
- Встановлено точні за порядком оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів  $S_{1,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)$ ,  $1 \leq \theta \leq \infty$ , у просторі  $B_{\infty,1}(\mathbb{T}^d)$ ,  $d \geq 1$ . У випадку  $d \geq 2$  встановлено точні за порядком оцінки наближень класів функцій  $S_{1,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)$  їхніми східчато-гіперболічними сумами Фур'є у просторі  $B_{\infty,1}(\mathbb{T}^d)$ , а також порядки ортопоперечників у цьому ж просторі. У деяких випадках досліджено поведінку відповідних апроксимаційних характеристик класів Соболева  $W_{1,\alpha}^r(\mathbb{T}^d)$  при  $d \in \{1, 2\}$ .
- Одержано точні за порядком оцінки ортопоперечників і близьких до них апроксимаційних характеристик класів Соболева  $W_{p,\alpha}^r(\mathbb{T}^d)$  та класів  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)$  періодичних функцій однієї та багатьох змінних у просторі  $B_{1,1}(\mathbb{T}^d)$ .
- Встановлено, що у багатовимірному випадку, на противагу одновимірному, послідовність норм лінійних операторів, які реалізують порядкові значення найкращого наближення класів  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)$  у просторі  $B_{1,1}(\mathbb{T}^d)$  за допомогою тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів, є необмеженою.

- Встановлено точні за порядком оцінки наближення функцій з узагальнених класів з домінуючою мішаною похідною  $S_{p,\theta}^\Omega B(\mathbb{R}^d)$  за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є на множинах, які породжуються поверхнями рівня функції  $\Omega(\mathbf{t})$  у випадку, коли похибка наближення оцінюється у просторі  $L_q(\mathbb{R}^d)$ , а параметри  $p$  та  $q$  задовольняють співвідношенням  $1 < p \leq q < \infty$  і  $1 < p < \infty$ ,  $q = \infty$ .
- Знайдено точні за порядком оцінки наближення функцій із класів  $S_{p,\theta}^\Omega B(\mathbb{R}^d)$  у рівномірній метриці за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті.
- Одержано точні за порядком оцінки величини наближення функцій із класів  $S_{p,\theta}^\Omega B(\mathbb{R}^d)$  за допомогою цілих функцій зі спектром на множинах скінченної міри у просторі  $L_q(\mathbb{R}^d)$  при деяких співвідношеннях між параметрами  $p$  і  $q$ , а саме:  $1 < p < q < \infty$ ;  $1 < p = q \leq 2$ ;  $1 < p < \infty$ ,  $q = \infty$ . При цьому встановлено, що у деяких ситуаціях величина  $e_M^{\mathfrak{F}}(S_{p,\theta}^\Omega B(\mathbb{R}^d))_{L_q(\mathbb{R}^d)}$  і величина найкращого наближення функцій із даних класів за допомогою цілих функцій з носієм їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті —  $\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n}^{\mathfrak{F}}(S_{p,\theta}^\Omega B(\mathbb{R}^d))_{L_q(\mathbb{R}^d)}$  мають різні порядки.
- Одержано точні за порядком оцінки наближення функцій багатьох змінних із ізотропних класів Нікольського–Бесова сумами типу Валле Пуссена у рівномірній та інтегральній метриках.
- Знайдено точні за порядком оцінки наближення функцій багатьох змінних із ізотропних класів Нікольського–Бесова  $B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)$  у просторі Лебега  $L_q(\mathbb{R}^d)$  за допомогою цілих функцій експоненціального типу з певними обмеженнями на їхній спектр.
- Для функцій багатьох змінних із анізотропних класів Нікольського–Бесова встановлено точні за порядком оцінки найкращого наближення за допомогою цілих функцій з носіями їхнього перетворення Фур'є у  $d$ -вимірних “паралелепіпедах”, похибка наближення при цьому вимірюється у просторі Лебега  $L_p(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 < p < \infty$ . Також для даних класів функцій одержано точні за порядком оцінки відхилення функцій від їхніх відрізків інтеграла Фур'є у рівномірній метриці.

**Практичне значення одержаних результатів.** Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати і розвинені в ній методи можуть знайти практичне застосування у подаль-

ших дослідженнях екстремальних задач теорії наближення функцій дійсної і комплексної змінних та функціональному аналізу, а також вони можуть бути використані в теоретичних дослідженнях і у деяких інших галузях науки і техніки, зокрема, математичній фізиці, обчислювальній математиці, фінансовій математиці.

**Особистий внесок здобувача.** Усі результати, що виносяться на захист, одержано здобувачем самостійно. У статтях, які опубліковано разом із іншими авторами, розподіл особистих внесків такий.

У роботах [1–4] — визначення напрямку досліджень, обговорення результатів, контроль якості викладення результатів належить науковому консультанту А. С. Романюку, перевірка основних гіпотез і детальне доведення тверджень належить здобувачеві.

У статті [6] співавторка О. Я. Радченко незалежно виконувала комп'ютерні обчислення для перевірки лем 1 та 2, а у роботі [5] співавторці належить перевірка результатів теореми 4. Постановка задач у цих роботах, вибір методів їхнього розв'язання й доведення результатів належать здобувачеві.

У спільних з С. А. Стасюком роботах [9, 12] внесок авторів рівноцінний. Результати робіт включені С. А. Стасюком у дисертацію на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук “Апроксимаційні характеристики класів гладких функцій однієї та багатьох змінних” (<https://www.imath.kiev.ua/zahyst/?n=anons&id=173>).

У спільній з В. В. Миронюком роботі [16] внесок авторів рівноцінний. Результати роботи включені В. В. Миронюком у дисертацію на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук “Апроксимативні характеристики класів функцій багатьох змінних”.

**Апробація результатів дисертації.** Результати роботи були представлені, доповідалися і обговорювалися на: Міжнародній математичній конференції “Боголюбівські читання DIF–2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування” з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, Севастополь, 23–30 червня 2013 року; Міжнародній математичній конференції “Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки” до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Георгія Миколайовича, 23–24 квітня 2014 р., Київ; Міжнародній математичній конференції “Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування” присвяченій 60-річчю В. І. Рукасова (1953–2009), 21–24 травня

2014 р., Слов'янськ; IV міжнародній ганській конференції присвяченій 135 річниці від дня народження Ганса Гана. 30 червня – 5 липня 2014 р., Чернівці; Mecklenburg Workshop “Approximation Methods and Function Spaces”, Hasenwinkel, Germany, March 16 – 20, 2015; Міжнародній конференції молодих математиків. 3–6 червня 2015 р., Київ, Україна; Third conference “Mathematics for Life Sciences”. Rivne, September 15 – 19, 2015; II Всеукраїнській науковій конференції “Теорія наближень і її застосування”. Дніпропетровськ (Україна) 8–11 жовтня 2015 р.; AMMODIT and final EUMLS Workshop “Mathematics for Life Sciences”, Hasenwinkel, Germany, March 07–11, 2016; Конференції молодих учених “Підстригачівські читання – 2016”, Львів, 25–27 травня 2016 року; Міжнародній конференції “Теорія наближення функцій та її застосування”, присвяченій 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця, Слов'янськ, 28 травня – 3 червня 2017 року; Міжнародній конференції молодих математиків, присвяченій 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю.О. Митропольського, Київ, 7–10 червня 2017 року; Міжнародній конференції молодих математиків, Київ, 6–8 червня 2019 року; Міжнародній конференції “Функціональні методи в теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV”, присвяченій 100-річчю з дня народження В.К. Дзядика (1919–1998), Світязь (Волинська обл.), 20–26 червня 2019 року; Всеукраїнській науковій конференції “Теорія наближень і її застосування” з нагоди 70-річчя Владислава Федоровича Бабенка, Дніпро, Україна, 3–5 жовтня 2019 р.; Міжнародній науковій конференції “Теорія наближень і її застосування” присвяченій 100-річчю з дня народження Миколи Павловича Корнейчука, Дніпро, Україна, 16–19 жовтня 2020 р.; International Online Workshop on Approximation Theory, March 19–21, 2021, Ivano-Frankivsk; International Conference Mathematical Analysis, Differential Equation and Applications (MADEA–9), Kyrgyz–Turkish Manas University, Bishkek, Kyrgyz Republic, June 21–25, 2021; The International Online Conference “Current Trends in Abstract and Applied Analysis”, May 12–15, 2022, Ivano-Frankivsk, Ukraine; Конференції молодих учених “Підстригачівські читання – 2022”, 25–27 травня 2022 р., Львів; Міжнародній конференції “Теорія наближення функцій та її застосування”, присвяченій 80-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця (1942–2007), 6–10 червня 2022 р., Луцьк, Україна; International

Workshop “Current Trends in Analysis and Approximation Theory”, July 18, 2023, the International Telematic University UNINETTUNO, Roma, Italy; Workshop “From Modeling and Analysis to Approximation and Fast Algorithms”, Hasenwinkel, Germany, September 02–06, 2023; засідання Вченої ради Інституту математики НАН України; семінарах відділу теорії функцій Інституту математики НАН України, керівник семінару – доктор фіз.-мат. наук, проф. А. С. Романюк; семінарі Інституту математики НАН України, керівники семінару – чл.-кор. НАН України С. І. Максименко, доктор фіз.-мат. наук, проф. А. Ю. Пилипенко; семінарі Інституту математики Університету м. Любек, Німеччина, керівник семінару – проф. Ю. Престін; семінарі кафедри математичного аналізу та оптимізації Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, керівник семінару – доктор фіз.-мат. наук, проф. Н. В. Парфінович; семінарі “Сучасний аналіз” в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, керівники семінару – чл.-кор. НАН України І. О. Шевчук, доктор фіз.-мат. наук, проф. О. О. Курченко, доктор фіз.-мат. наук, проф. В. М. Радченко; семінарі з теорії аналітичних функцій Львівського національного університету імені Івана Франка, керівник семінару – доктор фіз.-мат. наук, проф. О. Б. Скасків; семінарах молодих вчених Інституту математики НАН України.

**Публікації.** Результати дисертації висвітлено у 39 наукових публікаціях, з них 17 — статті у наукових виданнях, внесених до переліку наукових фахових видань України та закордонних виданнях, а також 22 публікації у тезах доповідей і матеріалах міжнародних та вітчизняних конференцій. Статті [1–13, 15] проіндексовані у міжнародних наукометричних базах Scopus або Web of Science, стаття [16] проіндексована у наукометричній базі MathSciNet. Статті [1, 5, 7] опубліковані у виданні з квартиля Q2 відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, статті [2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 15] у виданнях з квартиля Q3, стаття [12] у виданні з квартиля Q4. Відповідно до п. 2 Наказу № 1220 МОН України від 23.09.2019 вказані 17 статей зараховуються як 33 наукові публікації. Публікації [7, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 17] одноосібні.

**Структура й обсяг дисертації.** Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, п’яти розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 249 найменувань та додатку зі списком публікацій і апробацією результатів. Повний обсяг роботи становить 312 сторінок друкованого тексту із них список використа-

них джерел міститься на 28 сторінках, а додаток — на 11 сторінках.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми, проаналізовано сучасний стан розглянутих у дисертації проблем, сформульовано задачі дослідження й коротко описані основні результати, які визначають наукову новизну й виносяться на захист. Основну частину роботи складають п'ять розділів.

У **першому** розділі означено основні класи функцій, дослідженню яких присвячена робота, зокрема, класи періодичних та неперіодичних функцій з домінуючою мішаною похідною  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)$ ,  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$  та їхніх узагальнень у неперіодичному випадку —  $S_{p,\theta}^\Omega B(\mathbb{R}^d)$ , ізотропних та анізотропних класів Нікольського–Бесова неперіодичних функцій —  $B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)$ , класи Соболева періодичних функцій —  $W_{p,\alpha}^r(\mathbb{T}^d)$ ; апроксимаційні характеристики, а також наведено коротку історичну довідку та огляд відомих результатів.

**Другий розділ** дисертації присвячено вивченню наближення класів функцій з домінуючою мішаною похідною  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$  у метриці простору Лебега  $L_q(\mathbb{R}^d)$  за допомогою цілих функцій експоненціального типу.

Нехай  $\mathbb{R}^d$  —  $d$ -вимірний евклідів простір з елементами  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$  і  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$ . Нехай  $L_q(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 \leq q \leq \infty$ , — простір вимірних на  $\mathbb{R}^d$  функцій  $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_d)$  зі скінченною нормою

$$\|f\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} := \left( \int_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})|^q d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{q}}, \quad 1 \leq q < \infty, \quad (1)$$

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} := \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})|. \quad (2)$$

Тепер дамо означення просторів Нікольського–Бесова функцій мішаної гладкості  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$  опосередковано через так зване декомпозиційне представлення елементів цих просторів. Уперше декомпозиційне представлення та відповідне йому нормування з'явилося у роботі С. М. Нікольського та П. І. Лізоркіна<sup>1</sup> і, як з'ясувалося пізні-

<sup>1</sup>Лизоркин П. И., Никольский С. М. Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения. Тр. Мат. ин-та АН СССР 1989, **187**, 143–161.

ше, відіграло ключову роль у дослідженнях, які пов'язані з апроксимацією класів функцій. Це представлення істотно використовується при доведенні одержаних результатів і базується на понятті перетворення Фур'є, яке означається з використанням теорії узагальнених функцій. Зазначимо, що теорія перетворення Фур'є є потужним інструментом для дослідження функціональних просторів, зокрема, і просторів Нікольського–Бесова.

Для  $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_+^d$  розглянемо множину

$$Q_{2^{\mathbf{s}}}^* = \left\{ \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) : \eta(s_j)2^{s_j-1} \leq |\lambda_j| < 2^{s_j}, \lambda_j \in \mathbb{R}, j = \overline{1, d} \right\}, \quad (3)$$

де  $\eta(0) = 0$  і  $\eta(t) = 1$ ,  $t > 0$ . Нехай  $A \subset \mathbb{R}^d$  — деяка вимірна множина,  $\chi_A$  — характеристична функція множини  $A$ . Для  $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 < p < \infty$ , коректно визначена і належить до  $L_p(\mathbb{R}^d)$  функція

$$\delta_{\mathbf{s}}^*(f, \mathbf{x}) = \mathfrak{F}^{-1}(\chi_{Q_{2^{\mathbf{s}}}} \cdot \mathfrak{F}f).$$

Тоді простори  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 < p < \infty$ ,  $1 \leq \theta \leq \infty$ ,  $\mathbf{r} > \mathbf{0}$ , можна означити таким чином:

$$S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in L_p(\mathbb{R}^d) : \|f\|_{S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)} < \infty \right\},$$

де

$$\|f\|_{S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)} \asymp \left( \sum_{\mathbf{s} \geq \mathbf{0}} 2^{(\mathbf{s}, \mathbf{r})\theta} \|\delta_{\mathbf{s}}^*(f, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \quad (4)$$

при  $1 \leq \theta < \infty$  і

$$\|f\|_{S_{p,\infty}^r B(\mathbb{R}^d)} \equiv \|f\|_{S_p^r H(\mathbb{R}^d)} \asymp \sup_{\mathbf{s} \geq \mathbf{0}} 2^{(\mathbf{s}, \mathbf{r})} \|\delta_{\mathbf{s}}^*(f, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}. \quad (5)$$

Тут і далі по тексту для додатних величин  $A$  і  $B$  використовуємо запис  $A \asymp B$ , який означає, що існують такі додатні сталі  $C_1$  і  $C_2$ , які не залежать від одного істотного параметра у величинах  $A$  і  $B$  (наприклад, у співвідношеннях (4) і (5) — від функції  $f$ ), що  $C_1 A \leq B \leq C_2 A$ . Якщо тільки  $B \leq C_2 A$  ( $B \geq C_1 A$ ), то пишемо  $B \ll A$  ( $B \gg A$ ).

Видозмінивши  $\delta_{\mathbf{s}}^*(f, \mathbf{x})$ , наприклад, по типу Валле Пуссена —  $A_{\mathbf{s}}^*(f, \mathbf{x})$ , норму функцій з просторів  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$  можна означити і у випадку  $1 \leq p \leq \infty$ .

У подальшому будемо вважати, що координати вектора  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d)$ , що входить в означення просторів  $S_{p,\theta}^{\mathbf{r}}B(\mathbb{R}^d)$ , впорядковані таким чином:  $0 < r_1 = r_2 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_d$ . Також вектору  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d)$  поставимо у відповідність вектор  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$ ,  $\gamma_j = \frac{r_j}{r_1}$ ,  $j = \overline{1, d}$ , а вектору  $\gamma$ , в свою чергу, — вектор  $\gamma'$ , де  $\gamma'_j = \gamma_j$  при  $j = \overline{1, \nu}$  і  $1 < \gamma'_j < \gamma_j$  при  $j = \overline{\nu+1, d}$ .

Під класом  $S_{p,\theta}^{\mathbf{r}}B(\mathbb{R}^d)$ , як і в усіх розглядуваних випадках, будемо розуміти множину функцій  $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$  для яких  $\|f\|_{S_{p,\theta}^{\mathbf{r}}B(\mathbb{R}^d)} \leq 1$ .

Перейдемо до означення апроксимаційних характеристик, які досліджуються у дисертаційній роботі та, зокрема, її другому розділі. Нехай  $\mathcal{L} \subset \mathbb{Z}_+^d$  — деяка скінченна множина. Покладемо

$$Q(\mathcal{L}) := \bigcup_{s \in \mathcal{L}} Q_{2^s}^*, \quad G(Q(\mathcal{L})) := \left\{ f \in L_q(\mathbb{R}^d) : \text{supp} \mathfrak{F} f \subseteq Q(\mathcal{L}) \right\},$$

де елементи множини  $G(Q(\mathcal{L}))$  є цілі функції експоненціального типу, носій перетворення Фур'є яких міститься на множині  $Q(\mathcal{L})$ .

Для  $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 \leq q \leq \infty$ , означимо величину

$$E_{Q(\mathcal{L})}(f)_{L_q(\mathbb{R}^d)} := \inf_{g \in G(Q(\mathcal{L}))} \|f(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}, \quad (6)$$

яка називається найкращим наближенням функції  $f$  цілими функціями експоненціального типу з множини  $G(Q(\mathcal{L}))$ .

Якщо  $F \subset L_q(\mathbb{R}^d)$  — деякий функціональний клас, то покладемо

$$E_{Q(\mathcal{L})}(F)_{L_q(\mathbb{R}^d)} := \sup_{f \in F} E_{Q(\mathcal{L})}(f)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \quad (7)$$

і відповідно величина  $E_{Q(\mathcal{L})}(F)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$  — найкраще наближення класу  $F$  цілими функціями експоненціального типу з множини  $G(Q(\mathcal{L}))$ .

Далі для  $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 \leq q \leq \infty$ , розглянемо функцію вигляду

$$S_{Q(\mathcal{L})}(f, \mathbf{x}) = \sum_{s \in \mathcal{L}} \delta_s^*(f, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$$

і означимо

$$\mathcal{E}_{Q(\mathcal{L})}(F)_{L_q(\mathbb{R}^d)} := \sup_{f \in F} \|f(\cdot) - S_{Q(\mathcal{L})}(f, \cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}. \quad (8)$$

У залежності від вибору елементів множини  $\mathcal{L}$  і відповідно побудови множини  $Q(\mathcal{L})$  у дисертаційній роботі розглядається декілька апроксимаційних характеристик вигляду (7) і (8).

Однією з множин, яка відіграє важливе значення у теорії наближення класів функцій  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$ , як уже зазначалося, є східчастий гіперболічний хрест, який в  $\mathbb{R}^d$  означається таким чином:

$$\tilde{Q}_n^\gamma = \bigcup_{(\mathbf{s}, \gamma) \leq n} Q_{2^{\mathbf{s}}}^*,$$

тобто  $\mathcal{L} = \{\mathbf{s} : (\mathbf{s}, \gamma) \leq n\}$  і при цьому  $\text{mes } \tilde{Q}_n^\gamma \asymp 2^n n^{d-1}$ .

У підрозділі 2.2 одержано точні за порядком оцінки наближення функцій з класів  $S_{1,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$  за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті у метриці простору Лебега  $L_q(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 < q \leq \infty$ . Одним з основних результатів даного підрозділу є така теорема.

**Теорема 2.10.** *Нехай  $1 < q < \infty$  і  $r_1 > 1 - \frac{1}{q}$ . Тоді для  $1 \leq \theta \leq \infty$  мають місце порядкові співвідношення*

$$\begin{aligned} E_{\tilde{Q}_n^\gamma}(S_{1,\theta}^r B(\mathbb{R}^d))_{L_q(\mathbb{R}^d)} &\asymp \mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^\gamma}(S_{1,\theta}^r B(\mathbb{R}^d))_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp \\ &\asymp 2^{-n(r_1 - 1 + \frac{1}{q})} n^{(\nu-1)(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta})_+}, \end{aligned}$$

де  $a_+ = \max\{a; 0\}$ .

Точні за порядком оцінки величини (7) для класів Нікольського  $S_1^r H(\mathbb{R}^d)$ , тобто у випадку  $\theta = \infty$ , у метриці простору  $L_q(\mathbb{R}^d)$  при  $1 \leq q < \infty$  встановлено Wang Heping та Sun Youngsheng<sup>2</sup>. Зауважимо, що методи, які використовувалися для встановлення оцінок у теоремі 2.10 при  $\theta = \infty$ , відрізняються від методів, які застосовували Wang Heping та Sun Youngsheng.

Крім того зауважимо, що основою для одержання цих оцінок слугували встановлені оцінки норми “блоків” Валле Пуссена (Лема 2.5, 2.6, 2.7), які є аналогами сум Валле Пуссена періодичних функцій багатьох змінних, і відіграли ключову роль при побудові екстремальних функцій, що реалізують оцінки знизу відповідних величин.

<sup>2</sup>Wang Heping, Sun Yongsheng. Approximation of functions in  $\widetilde{S_1^r L}$ ,  $S_1^r H$  by entire functions. Approx. Theory and its Appl. 1999, 11 (4), 88–93.

У підрозділі 2.3 знайдено точні за порядком оцінки величини (8) для функцій з класів  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 < p < \infty$ , у рівномірній метриці (теорема 2.15).

У підрозділі 2.4 досліджується наближення функцій з класів  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$  за допомогою цілих функцій експоненціального типу зі спектром спеціального вигляду. Дано означення відповідної апроксимаційної характеристики.

Для  $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 \leq q \leq \infty$ ,  $M \in \mathbb{N}$ , покладемо

$$e_M^{\mathfrak{F}}(f)_{L_q(\mathbb{R}^d)} := \inf_{\mathcal{L}: \text{mes } \mathfrak{M} \leq M} \|f(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f, \cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)},$$

$$S_{\mathfrak{M}}(f, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{L}} \delta_{\mathbf{s}}^*(f, \mathbf{x}).$$

Тобто у якості множини  $Q(\mathcal{L})$  вибираємо множину  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathcal{L}) = \bigcup_{\mathbf{s} \in \mathcal{L}} Q_{2^s}^*$ ,  $\text{mes } \mathfrak{M} \leq M$ .

Зауважимо, що  $S_{\mathfrak{M}}(f, \mathbf{x})$  є цілою функцією, яка належить простору  $L_q(\mathbb{R}^d)$  і  $\text{supp } S_{\mathfrak{M}}(f, \mathbf{x}) \subseteq \mathfrak{M}$ .

Для  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d) \subset L_q(\mathbb{R}^d)$  позначимо

$$e_M^{\mathfrak{F}}(S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d))_{L_q(\mathbb{R}^d)} := \sup_{f \in S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)} e_M^{\mathfrak{F}}(f)_{L_q(\mathbb{R}^d)}. \quad (9)$$

Безпосередньо з означення апроксимаційних характеристик (8) і (9) маємо, що у випадку  $\text{mes } \tilde{Q}_n^\gamma \asymp \text{mes } \mathfrak{M}$

$$e_M^{\mathfrak{F}}(S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d))_{L_q(\mathbb{R}^d)} \ll \mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^\gamma}(S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d))_{L_q(\mathbb{R}^d)}.$$

**Теорема 2.20.** *Нехай  $r_1 > 1$ ,  $1 \leq \theta \leq \infty$ . Тоді при  $d \geq 2$  виконується порядкова оцінка*

$$e_M^{\mathfrak{F}}(S_{1,\theta}^r B(\mathbb{R}^d))_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1-1} (\log^{\nu-1} M)^{1-\frac{1}{\theta}}.$$

Зауважимо, що відповідне твердження встановлено і в одновимірному випадку (Теорема 2.19).

**Теорема 2.21.** *Нехай  $1 < p < \infty$ ,  $r_1 > \frac{1}{p}$ ,  $1 \leq \theta \leq \infty$ ,  $d \geq 1$ . Тоді має місце оцінка*

$$e_M^{\mathfrak{F}}(S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d))_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1-\frac{1}{p}} (\log^{\nu-1} M)^{1-\frac{1}{\theta}}.$$

Результати теореми 2.19–2.21 є новими і для класів Нікольського  $S_p^r H(\mathbb{R}^d)$ ,  $d \geq 1$ . Окрім того, оцінка величини  $e_M^{\mathfrak{F}}(S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d))_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}$  у відповідних результатах не залежить від параметра  $\theta$  на відміну від випадку  $d \geq 2$ .

Порівнюючи порядкові оцінки величини  $\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^\gamma}(S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d))_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $d \geq 1$  (теореми 2.8 і 2.15), з оцінками з теорем 2.20, 2.21, за відповідних умов на параметри для всіх їхніх значень, робимо висновок, що

$$\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^\gamma}(S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d))_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp e_M^{\mathfrak{F}}(S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d))_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}, \quad M \asymp 2^n n^{\nu-1}.$$

Також у підрозділі 2.4 знайдено точні за порядком оцінки даної величини у метриці простору  $L_2(\mathbb{R}^d)$  і для функцій з класів  $S_{2,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$ .

**Теорема 2.26.** *Нехай  $1 \leq \theta \leq \infty$ ,  $r_1 > 0$ . Тоді має місце оцінка*

$$e_M^{\mathfrak{F}}(S_{2,\theta}^r B(\mathbb{R}^d))_{L_2(\mathbb{R}^d)} \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{(r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})_+}.$$

Проаналізувавши та порівнявши результат теореми 2.26 з відповідним результатом наближення функцій з класів  $S_{2,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$  за допомогою цілих функцій з носієм перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті —  $\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^\gamma}(S_{2,\theta}^r B(\mathbb{R}^d))_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ , які встановлені Sun Yongsheng та Wang Heping<sup>3</sup> робимо висновок, що при  $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$  маємо:

– у випадку  $p = 2 \leq \theta \leq \infty$  величини  $e_M^{\mathfrak{F}}(S_{2,\theta}^r B(\mathbb{R}^d))_{L_2(\mathbb{R}^d)}$  і  $\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^{\gamma'}}(S_{2,\theta}^r B(\mathbb{R}^d))_{L_2(\mathbb{R}^d)}$  співпадають за порядком;

– у випадку  $1 \leq \theta < 2 = p$  оцінки величин  $e_M^{\mathfrak{F}}(S_{2,\theta}^r B(\mathbb{R}^d))_{L_2(\mathbb{R}^d)}$  і  $\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^{\gamma'}}(S_{2,\theta}^r B(\mathbb{R}^d))_{L_2(\mathbb{R}^d)}$  відрізняються за порядком:

- якщо  $0 < r_1 < \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}$ , то має місце співвідношення

$$e_M^{\mathfrak{F}}(S_{2,\theta}^r B(\mathbb{R}^d))_{L_2(\mathbb{R}^d)} \asymp \mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^{\gamma'}}(S_{2,\theta}^r B(\mathbb{R}^d))_{L_2(\mathbb{R}^d)} n^{-(\nu-1)r_1};$$

- якщо  $r_1 \geq \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}$ , то має місце співвідношення

$$e_M^{\mathfrak{F}}(S_{2,\theta}^r B(\mathbb{R}^d))_{L_2(\mathbb{R}^d)} \asymp \mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^{\gamma'}}(S_{2,\theta}^r B(\mathbb{R}^d))_{L_2(\mathbb{R}^d)} n^{-(\nu-1)(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2})}.$$

---

<sup>3</sup>Wang Heping, Sun Yongsheng. Approximation of multivariate functions with certain mixed smoothness by entire functions. Northeast. Math. J. 1995, **11** (4), 454–466.

Як видно з наведеного порівняння, оцінки вказаних величин на класах Нікольського  $S_2^r H(\mathbb{R}^d)$  у метриці простору  $L_2(\mathbb{R}^d)$  збігаються за порядком при всіх значеннях параметра  $\mathbf{r}$ .

**Третій розділ** дисертації присвячено дослідженню апроксимаційних характеристик класів періодичних функцій з домінуючою мішаною похідною  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)$  у метриках просторів відмінних від простору Лебега  $L_q(\mathbb{T}^d)$ ,  $q \in \{1, \infty\}$ , але які тісно пов'язані з ним. Зауважимо, що дані простори функцій означаються аналогічно до того як означалися простори  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$ , але з тією відмінністю, що замість норм (1), (2) розглядається норма функцій не в  $\mathbb{R}^d$ , а на періоді  $0 \leq x_j < 2\pi$ ,  $j = \overline{1, d}$ , тобто у просторі  $L_q(\mathbb{T}^d)$ .

Далі будемо розглядати лише ті функції  $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ , для яких виконано умову  $\int_0^{2\pi} f(\mathbf{x}) dx_j = 0$ ,  $j = \overline{1, d}$ , майже скрізь. Множину таких функцій позначимо  $L_p^0(\mathbb{T}^d)$ .

Для векторів  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{N}^d$ ,  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ , покладемо

$$\rho(\mathbf{s}) = \left\{ \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d) : 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = \overline{1, d} \right\}$$

і для  $f \in L_p^0(\mathbb{T}^d)$  позначимо

$$\delta_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s})} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})},$$

де  $\widehat{f}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{t}) e^{-i(\mathbf{k}, \mathbf{t})} d\mathbf{t}$  — коефіцієнти Фур'є функції  $f$ .

Тоді простори  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)$ ,  $1 < p < \infty$ ,  $1 \leq \theta \leq \infty$ ,  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d)$ ,  $r_j > 0$ ,  $j = \overline{1, d}$ , можна означити таким чином<sup>1</sup>:

$$S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}^d) := \left\{ f \in L_p^0(\mathbb{T}^d) : \|f\|_{S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)} < \infty \right\},$$

де

$$\|f\|_{S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)} \asymp \left( \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{N}^d} 2^{(\mathbf{s}, \mathbf{r})\theta} \|\delta_{\mathbf{s}}(f, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{T}^d)}^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

при  $1 \leq \theta < \infty$  і

$$\|f\|_{S_{p,\infty}^r B(\mathbb{T}^d)} \equiv \|f\|_{S_p^r H(\mathbb{T}^d)} \asymp \sup_{\mathbf{s} \in \mathbb{N}^d} 2^{(\mathbf{s}, \mathbf{r})} \|\delta_{\mathbf{s}}(f, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{T}^d)}.$$

Зазначимо, що видозмінивши “блоки”  $\delta_s(f, \mathbf{x})$  (по типу Валле Пуссена), наведене означення просторів  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)$  можна поширити також і на крайні значення  $p \in \{1, \infty\}$ .

Наведемо також означення класів Соболева  $W_{p,\alpha}^r(\mathbb{T}^d)$ .

Нехай  $F_r(\mathbf{x}, \alpha)$  — багатовимірні аналоги ядер Бернуллі, тобто

$$F_r(\mathbf{x}, \alpha) = 2^d \sum_{\mathbf{k}} \prod_{j=1}^d k_j^{-r_j} \cos\left(k_j x_j - \frac{\alpha_j \pi}{2}\right), r_j > 0, \alpha_j \in \mathbb{R},$$

і підсумовування проводиться по  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d)$ , для яких  $k_j > 0$ ,  $j = \overline{1, d}$ . Тоді через  $W_{p,\alpha}^r(\mathbb{T}^d)$  позначимо клас функцій  $f$  вигляду

$$f(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) * F_r(\mathbf{x}, \alpha) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(\mathbf{y}) F_r(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \alpha) d\mathbf{y},$$

$$\varphi \in L_p(\mathbb{T}^d), \|\varphi\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} \leq 1.$$

Тепер означимо апроксимаційні характеристики, зокрема, спочатку означимо  $M$ -вимірний колмогоровський поперечник та ентропійні числа.

Нехай  $\mathcal{X}$  — нормований простір з нормою  $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ ,  $\mathfrak{L}_M(\mathcal{X})$  — сукупність підпросторів у просторі  $\mathcal{X}$  розмірності, що не перевищує  $M$  і  $\Phi$  — центрально-симетрична множина в  $\mathcal{X}$ . Тоді величина

$$d_M(\Phi, \mathcal{X}) := \inf_{L_M \in \mathfrak{L}_M(\mathcal{X})} \sup_{f \in \Phi} \inf_{u \in L_M} \|f - u\|_{\mathcal{X}}, \quad (10)$$

називається  $M$ -вимірним колмогоровським поперечником множини  $\Phi$  у просторі  $\mathcal{X}$ . Поперечник  $d_M(\Phi, \mathcal{X})$  увів у 1936 р. А.М. Колмогоров, і він характеризує апроксимаційні властивості  $M$ -вимірних підпросторів.

Нехай  $\mathcal{X}$  — банахів простір і  $B_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}, R) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_{\mathcal{X}} \leq R\}$  — куля радіуса  $R$  з центром у точці  $\mathbf{y}$ .

Для компактної множини  $A \subset \mathcal{X}$  і  $\varepsilon > 0$  позначимо її ентропійні числа  $\varepsilon_k(A, \mathcal{X})$ , які були введені К. Höllig в 1980 р.:

$$\varepsilon_k(A, \mathcal{X}) := \inf \left\{ \varepsilon : \exists \mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^{2^k} \in \mathcal{X} : A \subseteq \bigcup_{j=1}^{2^k} B_{\mathcal{X}}(\mathbf{y}^j, \varepsilon) \right\}. \quad (11)$$

Дослідження  $M$ -вимірних колмогоровських поперечників та ентропійних чисел різних класів функцій, як однієї так і багатьох змінних мають багату історію та відображені у працях значної кількості математиків із різних країн світу.

У підрозділах 3.2 і 3.3 знайдено оцінки для величин (10) і (11) у метриці  $QC(\mathbb{T}^d)$ -простору квазінеперервних функцій, який за своїми властивостями близький до  $L_\infty(\mathbb{T}^d)$ . Показано, що при деяких значеннях параметрів одержані оцінки є точними за порядком. Важливо зазначити, що оцінки досліджуваних характеристик у метриці простору  $L_\infty(\mathbb{T}^d)$  у переважній більшості випадків є відомими лише при  $d \in \{1, 2\}$ .

Для функції  $f \in L_1(\mathbb{T})$  з рядом Фур'є

$$f \sim \sum_{s=0}^{\infty} \delta_s(f, x),$$

$$\delta_0(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad \delta_s(f, x) = \sum_{2^{s-1} \leq |k| < 2^s} \widehat{f}(k) e^{ikx}, \quad s = 1, 2, \dots,$$

розглянемо величину

$$\|f(\cdot)\|_{QC(\mathbb{T})} \equiv \int_0^1 \left\| \sum_{s=0}^{\infty} r_s(\omega) \delta_s(f, x) \right\|_{L_\infty(\mathbb{T})} d\omega, \quad (12)$$

де  $\{r_s(\omega)\}_{s=0}^{\infty}$  — система Радемахера. Тоді простором квазінеперервних функцій (позначення  $QC(\mathbb{T})$ ) будемо називати замикання множини тригонометричних поліномів за нормою (12).

Простір квазінеперервних функцій у багатовимірному випадку ( $d \geq 2$ ) означимо таким чином:

$$\|f\|_{QC(\mathbb{T}^d)} \equiv \left\| \|f(\cdot, \mathbf{x}^1)\|_{QC(\mathbb{T})} \right\|_{L_\infty(\mathbb{T}^{d-1})}, \quad (13)$$

де для  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{T}^d$  покладаємо  $\mathbf{x}^1 = (x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{T}^{d-1}$ , тобто в (13) беремо  $QC(\mathbb{T})$ -норму за змінною  $x_1$  і суп-норму за рештою змінних.

Основний результат підрозділів 3.2 і 3.3 можна сформулювати у вигляді такої загальної теореми.

**Теорема 3.19.** *При  $d \geq 2$  і  $2 \leq p \leq \infty$ ,  $2 \leq \theta < \infty$ ,  $r_1 > \frac{1}{2}$  справедливі оцінки*

$$\begin{aligned} \varepsilon_M(S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)) &\asymp d_M(S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)) \asymp \\ &\asymp M^{-r_1} (\log^{d-1} M)^{r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}} \sqrt{\log M}. \end{aligned}$$

Зазначимо, що встановлені у теоремі 3.19 точні за порядком оцінка  $M$ -вимірного колмогоровського поперечника і ентропійних чисел у просторі  $QC(\mathbb{T}^d)$  поширюють на класи  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)$  відповідні результати для класів Соболева  $W_{p,\alpha}^r(\mathbb{T}^d)$  та Нікольського  $S_p^r H(\mathbb{T}^d)$ , які встановлені Б. С. Кашиним і В. М. Темляковим.

Відмітимо також, що у двовимірному випадку встановлені у теоремі 3.19 оцінки  $M$ -вимірного колмогоровського поперечника і ентропійних чисел класів  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}^2)$ , за відповідних значень параметрів, співпадають за порядком з оцінками у просторі  $L_\infty(\mathbb{T}^2)$ , які отримано А. С. Романюком (2019). Однак питання про порядок величин (10) і (11) класів  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)$  у метриці  $L_\infty(\mathbb{T}^d)$  для  $d > 2$  залишаються відкритими.

Підрозділи 3.4–3.6 присвячені дослідженню класів  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , у метриках просторів  $B_{q,1}(\mathbb{T}^d)$ ,  $q \in \{1, \infty\}$ .

Наведемо означення норми  $\|\cdot\|_{B_{q,1}(\mathbb{T}^d)}$  у підпросторах  $B_{q,1}(\mathbb{T}^d)$ ,  $q \in \{1, \infty\}$ , та відповідних апроксимаційних характеристик.

Для тригонометричних поліномів  $t$  за кратною тригонометричною системою  $\{e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d}$  норма  $\|t\|_{B_{q,1}(\mathbb{T}^d)}$ ,  $q \in \{1, \infty\}$ , визначається за формулою

$$\|t\|_{B_{q,1}(\mathbb{T}^d)} := \sum_{\mathbf{s}} \|A_{\mathbf{s}}(t)\|_{L_q(\mathbb{T}^d)}.$$

Аналогічно означається норма  $\|f\|_{B_{q,1}(\mathbb{T}^d)}$ ,  $q \in \{1, \infty\}$ , для будь-якої функції  $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$  такої, що ряд  $\sum_{\mathbf{s}} \|A_{\mathbf{s}}(f, \cdot)\|_{L_q(\mathbb{T}^d)}$  збігається.

Зазначимо, що для  $f \in B_{q,1}(\mathbb{T}^d)$  виконується співвідношення

$$\|f\|_{L_1(\mathbb{T}^d)} \ll \|f\|_{B_{1,1}(\mathbb{T}^d)}, \quad \|f\|_{L_\infty(\mathbb{T}^d)} \ll \|f\|_{B_{\infty,1}(\mathbb{T}^d)}. \quad (14)$$

Зауважимо, що мотивацією до розгляду питань апроксимації функціональних класів у просторах  $B_{q,1}(\mathbb{T}^d)$  (далі також пишемо  $B_{q,1}$ ) була та обставина, що деякі з відповідних питань у просторах  $L_1(\mathbb{T}^d)$  і  $L_\infty(\mathbb{T}^d)$  дотепер залишаються відкритими.

Далі, нехай  $\{u_i\}_{i=1}^M$  — ортонормована у просторі  $L_2(\mathbb{T}^d)$  система функцій  $u_i \in L_\infty(\mathbb{T}^d)$ ,  $i = \overline{1, M}$ . Кожній функції  $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$ ,  $1 \leq q \leq \infty$ , поставимо у відповідність апроксимаційний агрегат вигляду  $\sum_{i=1}^M (f, u_i) u_i$ , тобто ортогональну проєкцію функції  $f$  на підпростір, породжений системою функцій  $\{u_i\}_{i=1}^M$ . Тут  $(f, u_i) =$

$= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d}(\mathbf{x}) \bar{u}_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ . Якщо  $F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$ , то величина

$$d_M^\perp(F, L_q(\mathbb{T}^d)) := \inf_{\{u_i\}_{i=1}^M \subset L_\infty(\mathbb{T}^d)} \sup_{f \in F} \left\| f - \sum_{i=1}^M (f, u_i) u_i \right\|_{L_q(\mathbb{T}^d)} \quad (15)$$

називається ортопоперечником (Фур'є-поперечником) класу  $F$  у просторі  $L_q(\mathbb{T}^d)$ . Поперечник  $d_M^\perp(F, L_q(\mathbb{T}^d))$  увів В. М. Темляков (1982). Крім того В. М. Темляков розглянув близьку до Фур'є-поперечника величину  $d_M^B(F, L_q(\mathbb{T}^d))$ , яка визначається за формулою

$$d_M^B(F, L_q(\mathbb{T}^d)) := \inf_{G \in L_M(B)_q} \sup_{f \in F \cap \mathcal{D}(G)} \|f - Gf\|_{L_q(\mathbb{T}^d)}. \quad (16)$$

Тут  $L_M(B)_q$  позначає множину лінійних операторів, що підпорядковані таким умовам: а) область визначення  $\mathcal{D}(G)$  цих операторів містить усі тригонометричні поліноми, а область їхніх значень міститься у підпросторі розмірності  $M$  простору  $L_q(\mathbb{T}^d)$ ; б) існує таке число  $B \geq 1$ , що для всіх векторів  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d)$  виконується нерівність  $\|Ge^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}\|_{L_2(\mathbb{T}^d)} \leq B$ .

Зауважимо, що згідно з означенням величин (10), (15), (16), справджується співвідношення

$$d_M(F, \mathcal{X}) \leq d_M^B(F, \mathcal{X}) \leq d_M^\perp(F, \mathcal{X}),$$

де  $\mathcal{X}$  позначає  $L_q(\mathbb{T}^d)$  або  $B_{1,1}(\mathbb{T}^d)$ .

У підрозділі 3.4 отримано такі результати.

**Теорема 3.24.** *Нехай  $d \geq 2$ ,  $1 < p \leq \infty$ ,  $1 \leq \theta \leq \infty$ . Тоді при  $r_1 > 0$  виконуються співвідношення*

$$\begin{aligned} d_M^\perp(S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}^d), B_{1,1}) &\asymp d_M^B(S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}^d), B_{1,1}) \asymp \\ &\asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}. \end{aligned}$$

**Теорема 3.25.** *Нехай  $d \geq 2$ ,  $1 < p \leq \infty$ ,  $r_1 > 0$ . Тоді при  $\alpha \in \mathbb{R}^d$  справедливі співвідношення*

$$d_M^\perp(W_{p,\alpha}^r(\mathbb{T}^d), B_{1,1}) \asymp d_M^B(W_{p,\alpha}^r(\mathbb{T}^d), B_{1,1}) \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1+\frac{1}{2}}.$$

Зазначимо, що одержані в теоремах 3.24 і 3.25 оцінки не залежать від параметра  $p$  і вони є однакові за порядком при  $\theta = 2$  на класах  $W_{p,\alpha}^r(\mathbb{T}^d)$  і  $S_{p,2}^r B(\mathbb{T}^d)$ .

**Теорема 3.26.** *Нехай  $r_1 > 0$ ,  $1 \leq \theta \leq \infty$ . Тоді при  $d \geq 2$*

$$d_M^B(S_{1,\theta}^r B(\mathbb{T}^d), B_{1,1}) \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}.$$

Аналогічне твердження встановлено і для класів  $W_{1,\alpha}^r(\mathbb{T}^d)$ . Також зазначимо, що у цьому ж пункту відповідні твердження отримано і в одновимірному випадку.

Звернемо увагу, що на класах  $S_{1,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)$ ,  $W_{1,\alpha}^r(\mathbb{T}^d)$  і  $S_1^r H(\mathbb{T}^d)$ ,  $d \geq 1$ , оцінки величини (16) у просторах  $L_1(\mathbb{T}^d)$  і  $B_{1,1}$  відповідно мають однакові порядки. Що стосується цих характеристик, а також ортоперечників класів  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)$ ,  $W_{p,\alpha}^r(\mathbb{T}^d)$  і  $S_p^r H(\mathbb{T}^d)$ ,  $1 < p \leq \infty$ , у просторі  $B_{1,1}$ , то у більшості випадків вони відрізняються за порядком від відповідних апроксимаційних характеристик у просторі  $L_1(\mathbb{T}^d)$ .

Далі наведемо означення найкращого ортогонального тригонометричного наближення, яке у метриці простору  $B_{\infty,1}$  досліджується у підпункті 3.5.

Нехай, як і раніше,  $\mathcal{X}$  — деякий нормований функціональний простір з нормою  $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$  і  $\Theta_M$  — довільний набір із  $M$   $d$ -вимірних векторів  $\mathbf{k}^j = (k_1^j, \dots, k_d^j)$ ,  $j = \overline{1, M}$ , з цілочисловими координатами. Для функції  $f \in \mathcal{X}$  позначимо

$$S_{\Theta_M}(f, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^M \widehat{f}(\mathbf{k}^j) e^{i(\mathbf{k}^j, \mathbf{x})}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,$$

де  $\widehat{f}(\mathbf{k}^j)$  — коефіцієнти Фур'є функції  $f$ , які відповідають набору векторів із  $\Theta_M$ .

Для  $F \subset \mathcal{X}$  розглянемо апроксимаційну характеристику

$$e_M^\perp(F)_{\mathcal{X}} := \sup_{f \in F} e_M^\perp(f)_{\mathcal{X}} := \sup_{f \in F} \inf_{f \in F} \|f(\cdot) - S_{\Theta_M}(f, \cdot)\|_{\mathcal{X}}. \quad (17)$$

**Теорема 3.34.** *Нехай  $d \geq 2$ ,  $1 \leq \theta \leq \infty$ ,  $r_1 > 1$ . Тоді справедлива оцінка*

$$e_M^\perp(S_{1,\theta}^r B(\mathbb{T}^d))_{B_{\infty,1}} \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1-1} (\log^{\nu-1} M)^{1-\frac{1}{\theta}}.$$

В одновимірному випадку оцінки величини (17) отримано як для класів  $S_{1,\theta}^r B(\mathbb{T})$ , так і для  $W_{1,\alpha}^r(\mathbb{T})$ . Крім того при дослідженні апроксимаційних характеристик класів  $S_{1,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)$  виявлено, що в одновимірному випадку, на відміну від багатовимірного, одержані результати не залежать від значення параметра  $\theta$ .

З використанням теореми 3.34 також вдалося встановити точні за порядком оцінки наближень згаданих класів функцій їхніми східчасто-гіперболічними сумами Фур'є і порядки ортоперечників класів  $S_{1,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)$ ,  $d \geq 1$ , у просторі  $B_{\infty,1}$ .

У деяких випадках досліджено поведінку відповідних апроксимаційних характеристик класів Соболева  $W_{1,\alpha}^r(\mathbb{T}^d)$ .

**Наслідок 3.38.** *Нехай  $d = 2$ ,  $\mathbf{r} = (r_1, r_1)$ ,  $r_1 > 1$ . Тоді*

$$d_M^{\perp}(W_{1,0}^r(\mathbb{T}^2), B_{\infty,1}) \asymp M^{-r_1+1}(\log M)^{r_1}.$$

У підрозділі 3.6 встановлено, що у багатовимірному випадку, на противагу одновимірному, послідовність норм лінійних операторів, які реалізують порядкові значення найкращого наближення класів  $S_{1,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)$  у просторі  $B_{1,1}(\mathbb{T}^d)$  за допомогою тригонометричних поліномів з “номерами” гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів, є необмеженою.

**Четвертий розділ** присвячено дослідженню апроксимаційних характеристик функціональних класів з просторів  $S_{p,\theta}^{\Omega} B(\mathbb{R}^d)$ , які є узагальненням просторів з домінуючою мішаною похідною  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$ , що визначаються при явному заданні функції  $\Omega$ , а саме  $\Omega(\mathbf{t}) = \mathbf{t}^{\mathbf{r}} = t_1^{r_1} \cdot \dots \cdot t_d^{r_d}$ ,  $0 < r_j < l$ ,  $j = \overline{1, d}$ , у метриці простору Лебга  $L_q(\mathbb{R}^d)$ . Як і у випадку просторів  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$ , наведемо означення просторів  $S_{p,\theta}^{\Omega} B(\mathbb{R}^d)$  опосередковано через так зване декомпозиційне зображення елементів цих просторів.

Нехай, як і раніше,  $L_q(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 \leq q \leq \infty$ , — простір вимірних на  $\mathbb{R}^d$  функцій  $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_d)$  зі скінченною нормою, яка задається співвідношеннями (1) і (2).

Для функції  $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$  розглянемо різницю  $l$ -го порядку,  $l \in \mathbb{N}$ , за змінною  $x_j$  з кроком  $h_j$ , яка визначається таким чином:

$$\Delta_{h_j}^l f(\mathbf{x}) := \sum_{n=0}^l (-1)^{l-n} C_l^n f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, \dots, x_d).$$

Також означимо кратну різницю  $l$ -го порядку функції  $f$  з векторним кроком  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_d)$ :  $\Delta_{\mathbf{h}}^l f(\mathbf{x}) = \Delta_{h_d}^l (\Delta_{h_{d-1}}^l \dots (\Delta_{h_1}^l f(\mathbf{x})))$ .

Мішаний модуль неперервності порядку  $l$  функції  $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$  визначається згідно з формулою

$$\Omega_l(f, \mathbf{t})_{L_q(\mathbb{R}^d)} := \sup_{|\mathbf{h}| \leq \mathbf{t}} \|\Delta_{\mathbf{h}}^l f(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)},$$

де  $|\mathbf{h}| = (|h_1|, \dots, |h_d|)$ .

Нехай  $\Omega(\mathbf{t})$ ,  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_d)$ , — функція типу мішаного модуля неперервності порядку  $l$ , тобто функція, яка визначена і неперервна на  $\mathbb{R}_+^d$ , що задовольняє такі умови:

- 1)  $\Omega(\mathbf{t}) > 0$ ,  $\mathbf{t} > 0$  і  $\Omega(\mathbf{t}) = 0$ , якщо  $\prod_{j=1}^d t_j = 0$ ;
- 2)  $\Omega(\mathbf{t})$  неспадна за кожною змінною;
- 3)  $\Omega(m_1 t_1, \dots, m_d t_d) \leq \left( \prod_{j=1}^d m_j \right)^l \Omega(\mathbf{t})$ ,  $m_j \in \mathbb{N}$ ,  $j = \overline{1, d}$ .

Множину таких функцій  $\Omega$  позначимо через  $\Psi_l$ . Додатково будемо вимагати, щоб функція  $\Omega$  задовольняла також умови  $(S^\alpha)$  та  $(S_l)$ , які називають умовами Барі–Стечкаїна. Стверджуючи це (також і для функції  $\omega$  однієї змінної), використовуватимемо запис  $\Omega \in \Phi_{\alpha, l}$ , ( $\omega \in \Phi_{\alpha, l}$ ),  $l \in \mathbb{N}$ , де множина  $\Phi_{\alpha, l}$  визначається співвідношенням  $\Phi_{\alpha, l} := \Psi_l \cap S^\alpha \cap S_l$ .

**Твердження 1.30.** *Нехай  $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 < p < \infty$  і  $\Omega \in \Phi_{\alpha, l}$ . Функція  $f$  належить простору  $S_{p, \theta}^\Omega B(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 \leq \theta < \infty$ , тоді і тільки тоді, коли*

$$\left( \sum_{s \geq 0} (\Omega(2^{-s}))^{-\theta} \|\delta_s^*(f, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty,$$

до того ж

$$\|f\|_{S_{p, \theta}^\Omega B(\mathbb{R}^d)} \asymp \left( \sum_{s \geq 0} (\Omega(2^{-s}))^{-\theta} \|\delta_s^*(f, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}},$$

де  $\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, \dots, 2^{-s_d})$ .

Функція  $f$  належить простору  $S_{p, \infty}^\Omega B(\mathbb{R}^d)$  тоді і тільки тоді, коли

$$\sup_{s \geq 0} \frac{\|\delta_s^*(f, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}}{\Omega(2^{-s})} < \infty,$$

до того ж

$$\|f\|_{S_{p, \infty}^\Omega B(\mathbb{R}^d)} \asymp \sup_{s \geq 0} \frac{\|\delta_s^*(f, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}}{\Omega(2^{-s})}.$$

У підрозділі 4.2 встановлено точні за порядком оцінки наближення функцій із класів  $S_{p, \theta}^\Omega B(\mathbb{R}^d)$  у просторі  $L_q(\mathbb{R}^d)$  за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є на множинах, які породжуються поверхнями рівня функції

$\Omega(\mathbf{t})$  за умови  $1 < p \leq q < \infty$ . А саме, досліджуються величин (7) і (8) у випадку, коли множина  $\mathcal{L}$  певним чином пов'язана з функцією  $\Omega$ .

Для будь-якого  $N \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq p \leq q \leq \infty$ , покладемо

$$\kappa(N) := \kappa(\Omega, N) := \left\{ \mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{Z}_+^d : \Omega(2^{-\mathbf{s}}) 2^{\|\mathbf{s}\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \geq \frac{1}{N} \right\},$$

$$Q(\kappa(N)) := \bigcup_{\mathbf{s} \in \kappa(N)} Q_{2^{\mathbf{s}}}^*,$$

де  $\|\mathbf{s}\|_1 = s_1 + \dots + s_d$  і  $Q_{2^{\mathbf{s}}}^*$  визначається співвідношенням (3).

Значимо, що множини  $Q(\kappa(N))$  породжуються поверхнями рівня функції  $\Omega(\mathbf{t}) \mathbf{t}^{-\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)}$ ,  $\Omega(\mathbf{t}) \in \Phi_{\alpha, l}$ ,  $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ . Якщо  $\Omega(\mathbf{t}) = \Omega_1(\mathbf{t}) / \prod_{j=1}^d t_j^{-\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)}$  і  $\Omega_1(\mathbf{t}) = \prod_{j=1}^d t_j^{r_j}$ ,  $0 < r_j < l$ ,  $j = \overline{1, d}$ , то одержимо множини  $Q(\kappa(N))$ , які називаються східчастими гіперболічними хрестами.

Основними результатами даного підпункту є наступні теореми.

**Теорема 4.5.** *Нехай  $1 < p < \infty$ ,  $1 \leq \theta \leq \infty$ ,  $\Omega(\mathbf{t}) \in \Phi_{\alpha, l}$ ,  $\alpha > 0$ , тоді справедливі є порядкові оцінки*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{Q(\kappa(N))} (S_{p, \theta}^{\Omega} B(\mathbb{R}^d))_{L_p(\mathbb{R}^d)} &\asymp E_{Q(\kappa(N))} (S_{p, \theta}^{\Omega} B(\mathbb{R}^d))_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp \\ &\asymp \frac{1}{N} |\Theta(\kappa^{\perp}(N))|^{\left(\frac{1}{p^*} - \frac{1}{\theta}\right)_+}, \end{aligned}$$

де  $p^* = \min\{p, 2\}$ ,  $a_+ = \max\{0, a\}$ .

**Теорема 4.8.** *Нехай  $1 < p < q < \infty$ ,  $1 \leq \theta \leq \infty$ ,  $\Omega \in \Phi_{\alpha, l}$ , з деяким  $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ , тоді мають місце порядкові оцінки*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{Q(\kappa(N))} (S_{p, \theta}^{\Omega} B(\mathbb{R}^d))_{L_q(\mathbb{R}^d)} &\asymp E_{Q(\kappa(N))} (S_{p, \theta}^{\Omega} B(\mathbb{R}^d))_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp \\ &\asymp \frac{1}{N} |\Theta(\kappa^{\perp}(N))|^{(d-1)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)_+}. \end{aligned}$$

У теоремах 4.5 і 4.8 множина  $\Theta(\kappa^{\perp}(N))$  означається таким чином

$$\Theta(\kappa^{\perp}(N)) = \left\{ \mathbf{s} \in \mathbb{Z}_+^d : \frac{1}{2^l N} \leq \Omega(2^{-\mathbf{s}}) 2^{\|\mathbf{s}\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} < \frac{1}{N} \right\}.$$

Зауважимо, що множина  $\Theta(\kappa^{\perp}(N))$  не порожня ( $\Theta(\kappa^{\perp}(N)) \neq \emptyset$ ) та має місце співвідношення  $|\Theta(\kappa^{\perp}(N))| \asymp (\log_2 N)^{d-1}$ , де через  $|A|$  позначено кількість елементів скінченної множини  $A$ .

У підрозділі 4.3 одержано точні за порядком оцінки величини (9) —  $e_M^{\mathfrak{F}}(S_{p,\theta}^\Omega B(\mathbb{R}^d))_{L_q(\mathbb{R}^d)}$  при певних співвідношеннях між параметрами  $p$  і  $q$ . Показано, що у деяких випадках знайдені оцінки є кращими за порядком від відповідних оцінок наближення за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті.

**Теорема 4.11.** *Нехай  $1 < p < q < \infty$ ,  $1 \leq \theta \leq \infty$  і  $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot \dots \cdot t_d)$ , де  $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$  з  $\alpha > \max\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}; \frac{1}{p} - \frac{2}{q} + \frac{1}{\theta}\right\}$ . Тоді для будь-яких натуральних  $n$  та  $M = M(n)$  таких, що  $M \asymp 2^n n^{d-1}$ , справедливе порядкове співвідношення*

$$e_M^{\mathfrak{F}}(S_{p,\theta}^\Omega B(\mathbb{R}^d))_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta})}.$$

**Теорема 4.14.** *Нехай  $1 < p \leq 2$ ,  $1 \leq \theta \leq \infty$  і  $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot \dots \cdot t_d)$ , де  $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$  з  $\alpha > \max\left\{0; \frac{1}{\theta} - \frac{1}{p}\right\}$ . Тоді для будь-яких натуральних  $n$  та  $M = M(n)$ , таких що  $M \asymp 2^n n^{d-1}$ , справедливе порядкове співвідношення*

$$e_M^{\mathfrak{F}}(S_{p,\theta}^\Omega B(\mathbb{R}^d))_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta})}.$$

Порівнюючи оцінку  $e_M^{\mathfrak{F}}(S_{p,\theta}^\Omega B(\mathbb{R}^d))_{L_p(\mathbb{R}^d)}$  з теореми 4.14 із відповідною оцінкою величини  $\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n}^\Omega(S_{p,\theta}^\Omega B(\mathbb{R}^d))_{L_p(\mathbb{R}^d)}$  робимо висновок, що у випадку  $1 < p \leq 2$ ,  $p \leq \theta$ , і  $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$  з  $\alpha > 0$ ,  $M \asymp 2^n n^{d-1}$ , вони рівні за порядком. Якщо ж  $1 < p \leq 2$ ,  $1 \leq \theta < p$  і  $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$  з  $\alpha > \frac{1}{\theta} - \frac{1}{p}$ , то при  $M \asymp 2^n n^{d-1}$  має місце порядкове співвідношення

$$e_M^{\mathfrak{F}}(S_{p,\theta}^\Omega B(\mathbb{R}^d))_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp \mathcal{E}_{\tilde{Q}_n}^\Omega(S_{p,\theta}^\Omega B)_{L_p(\mathbb{R}^d)} n^{-(d-1)(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p})}.$$

Зауважимо, що подібний коментар можна дати і для теореми 4.11.

У підрозділі 4.4 одержано точні за порядком оцінки наближення функцій із класів  $S_{p,\theta}^\Omega B(\mathbb{R}^d)$  для трьох згаданих вище апроксимаційних характеристик, а саме: наближення за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті; наближення за допомогою цілих функцій експоненціального типу зі спектром спеціального вигляду; наближення на множинах, які породжуються поверхнями рівня функції  $\Omega(t)$  у випадку, коли похибка наближення оцінюється у метриці  $L_\infty(\mathbb{R}^d)$ .

**П'ятий розділ** дисертаційної роботи присвячено дослідженню апроксимаційних характеристик функцій багатьох змінних з ізотропних та анізотропних класів Нікольського–Бесова.

Означення для норми функцій з анізотропних просторів  $B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 < p < \infty$ ,  $\mathbf{r} > \mathbf{0}$ , можна подати у такій формі<sup>4</sup>:  $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$  і

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)} \asymp \left( \sum_{s=0}^{\infty} b^{s\theta} \|f_{\mathbf{a}^s}(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty,$$

при  $1 \leq \theta < \infty$ ,

$$\|f\|_{B_{p,\infty}^r(\mathbb{R}^d)} \asymp \sup_{s \geq 0} b^s \|f_{\mathbf{a}^s}(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} < \infty,$$

де,  $b = a_i^{r_i} > 1$ , а

$$f_{\mathbf{a}^s} = S_{\mathbf{a}^s}(f) - S_{\mathbf{a}^{s-1}}(f) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\Gamma_{\mathbf{a}^s}} \tilde{f}(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x})} d\boldsymbol{\lambda}, \quad s \geq 1,$$

$$f_{\mathbf{a}^0} = S_{\mathbf{a}^0}(f) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\Gamma_{\mathbf{a}^0}} \tilde{f}(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x})} d\boldsymbol{\lambda},$$

$\tilde{f}(\boldsymbol{\lambda})$  — перетворення Фур'є функції  $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ ,  $\Gamma_{\mathbf{a}^s} = D_{\mathbf{a}^s} - D_{\mathbf{a}^{s-1}}$  при  $s \geq 1$ ,  $\Gamma_{\mathbf{a}^0} = D_{\mathbf{a}^0}$  і  $D_{\mathbf{a}^s}$  позначає таку множину (паралелепіед):

$$D_{\mathbf{a}^s} = D_{a_1^s, \dots, a_d^s} = \left\{ \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) : |\lambda_j| < a_j^s, \lambda_j \in \mathbb{R}, j = \overline{1, d}, s \geq 0 \right\},$$

$$S_{\boldsymbol{\sigma}}(f) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \dots \int_{-\sigma_d}^{\sigma_d} \tilde{f}(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x})} d\boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{\pi^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{y}) \prod_{j=1}^d \frac{\sin \sigma_j(x_j - y_j)}{x_j - y_j} d\mathbf{y}.$$

Таким чином,  $S_{\boldsymbol{\sigma}}(f)$  — ціла функція степеня  $\boldsymbol{\sigma}$ .

Для означення норми функцій з ізотропних просторів  $B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)$ ,  $r = r_1 = r_2 = \dots = r_d$ , у випадку  $1 < p < \infty$  достатньо взяти  $a_1 = \dots = a_d = 2$ . Зауважимо, що у випадку  $1 \leq p \leq \infty$  означення норми функцій з ізотропних просторів  $B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)$  можна подати і на основі ядра Валле Пуссена<sup>5</sup>.

<sup>4</sup>Лизоркин П. И. Обобщенные гильбертовы пространства  $B_{p,\theta}^{(r)}$  и их соотношения с пространствами Соболева  $L_p^{(r)}$ . Сиб. мат. журн. 1968, **9** (5), 1127–1152.

<sup>5</sup>Никольский С. М. Теоремы вложения для классов обобщенных функций. Сиб. мат. журн. 1968, **9** (5), 1107–1126.

Так для анізотропних класів досліджується величини  $E_{D_{a^n}}(f)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$  і  $\mathcal{E}_{D_{a^n}}(f)_{L_p(\mathbb{R}^d)}$ , які означаються подібно до величин (6) і (8), з урахуванням, що  $G_q(D_{a^n})$  — множина функцій  $g$ , носій перетворення Фур'є яких зосереджений в множині  $D_{a^n}$  (з відповідною модифікацією в ізотропному випадку).

У підрозділі 5.2 для ізотропних класів функцій знайдено точні за порядком оцінки наближення сумами Валле Пуссена у рівномірній та інтегральній метриках. Також у підрозділі 5.3 знайдено точні по порядку оцінки величини (9), означення якої відповідним чином модифікується до специфіки ізотропних класів  $B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)$ .

**Теорема 5.4.** *Нехай  $1 \leq p \leq q \leq \infty$ ,  $(p, q) \notin \{(1, 1), (\infty, \infty)\}$ ,  $1 \leq \theta \leq \infty$ . Тоді, якщо  $r > d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ , то має місце рядкове співвідношення*

$$e_M^{\tilde{\delta}}(B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d))_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp M^{-\frac{r}{d} + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}}. \quad (18)$$

Порівнявши оцінку (18) з відповідними оцінками величини  $\mathcal{E}_{D_{2^n}}(B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d))_{L_q(\mathbb{R}^d)}$  бачимо, що у всіх досліджуваних випадках вони однакові за порядком, на відміну від класів функцій з домінуючою мішаною похідною  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$ .

Для анізотропних класів справедливою є теорема.

**Теорема 5.5.** *Нехай  $1 < p \leq q < \infty$ ,  $1 \leq \theta \leq \infty$ . Тоді для  $g(\mathbf{r}) > d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ , виконуються рядкові співвідношення*

$$\mathcal{E}_{D_{a^n}}(B_{p,\theta}^{\mathbf{r}}(\mathbb{R}^d))_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp E_{a^n}(B_{p,\theta}^{\mathbf{r}}(\mathbb{R}^d))_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{-n(g(\mathbf{r}) - d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}))}, \quad (19)$$

де  $a_j = 2^{g(\mathbf{r})/r_j}$ ,  $j = \overline{1, d}$ .

Тут для невід'ємного вектора  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d)$ ,  $r_j > 0$ ,  $j = \overline{1, d}$ , введено позначення  $g(\mathbf{r}) = \left(\frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \frac{1}{r_j}\right)^{-1}$ .

Як видно з оцінок (18) і (19), в анізотропному випадку, так само як і в ізотропному, вони не залежать від параметра  $\theta$  для усіх  $d \geq 1$ , на відміну від відповідних оцінок для класів функцій з домінуючою мішаною похідною, в яких при  $d \geq 2$  проявляється залежність від  $\theta$ .

Наприкінці дисертації наведено основні результати й висновки.

Список наукових праць, де опубліковано результати дисертації, й інформацію щодо їхньої апробації наведено у додатку А.

## ВИСНОВКИ

Основні результати дисертації можна сформулювати таким чином:

– Для класів функцій з домінуючою мішаною похідною  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , одержано точні за порядком оцінки наближення у просторі Лебега  $L_q(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 < q \leq \infty$ , за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті. Також встановлено точні за порядком оцінки наближення функцій з даних класів за допомогою цілих функцій експоненціального типу зі спектром спеціального вигляду (зосередженим на множинах лебегова міра яких є скінченною), похибка наближення оцінюється у рівномірній метриці.

– Встановлено точні за порядком оцінки наближення функцій з класів  $S_{2,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$  за допомогою цілих функцій експоненціального типу зі спектром спеціального вигляду у метриці простору  $L_2(\mathbb{R}^d)$  та показано, що у випадку  $1 \leq \theta < 2$  ці оцінки є кращими від відповідних оцінок наближення за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті.

– Одержано оцінки норми “блоків” Валле Пуссена, які є аналогами сум Валле Пуссена періодичних функцій багатьох змінних, у просторі Лебега.

– Для класів  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)$ ,  $d \geq 2$ , періодичних функцій з домінуючою мішаною гладкістю у метриці простору квазінеперервних функцій  $QC(\mathbb{T}^d)$  знайдено точні за порядком оцінки  $M$ -вимірною колмогоровського поперечника та ентропійних чисел у випадку  $2 \leq p \leq \infty$ ,  $2 \leq \theta < \infty$ ,  $r_1 > \frac{1}{2}$ .

– Встановлено точні за порядком оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів  $S_{1,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)$ ,  $1 \leq \theta \leq \infty$ , у просторі  $B_{\infty,1}(\mathbb{T}^d)$ ,  $d \geq 1$ . Крім того, у багатовимірному випадку,  $d \geq 2$ , встановлено точні за порядком оцінки наближень класів функцій  $S_{1,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)$  їхніми східчасто-гіперболічними сумами Фур'є у цьому ж просторі, а також знайдено порядки ортопоперечників досліджуваних класів функцій. У деяких випадках досліджено поведінку відповідних апроксимаційних характеристик класів Соболева  $W_{1,\alpha}^r(\mathbb{T}^d)$  при  $d \in \{1, 2\}$ .

– Одержано точні за порядком оцінки ортопоперечників і близьких до них апроксимаційних характеристик класів Соболева

ва  $W_{p,\alpha}^r(\mathbb{T}^d)$  та класів Нікольського–Бесова  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)$  періодичних функцій однієї та багатьох змінних з домінуючою мішаною похідною у просторі  $B_{1,1}(\mathbb{T}^d)$ .

– Встановлено, що у багатовимірному випадку, на протигагу одновимірному, послідовність норм лінійних операторів, які реалізують порядкові значення найкращого наближення класів  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)$  у просторі  $B_{1,1}(\mathbb{T}^d)$  за допомогою тригонометричних поліномів з “номерами” гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів, є необмеженою.

– Одержано точні за порядком оцінки наближення функцій з узагальнених класів з домінуючою мішаною похідною  $S_{p,\theta}^\Omega B(\mathbb{R}^d)$  за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур’є на множинах, які породжуються поверхнями рівня функції  $\Omega(\mathbf{t})$  і при цьому похибка наближення оцінюється у метриці простору  $L_q(\mathbb{R}^d)$ , а параметри  $p$  та  $q$  задовольняють таким співвідношенням:  $1 < p \leq q < \infty$ ;  $1 < p < \infty$ ,  $q = \infty$ .

– Знайдено точні за порядком оцінки наближення функцій із класів  $S_{p,\theta}^\Omega B(\mathbb{R}^d)$  у рівномірній метриці за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур’є у східчастому гіперболічному хресті.

– Одержано точні за порядком оцінки величини наближення функцій із класів  $S_{p,\theta}^\Omega B(\mathbb{R}^d)$  за допомогою цілих функцій спеціального вигляду у просторі  $L_q(\mathbb{R}^d)$  при деяких співвідношеннях між параметрами  $p$  і  $q$ , а саме:  $1 < p < q < \infty$ ;  $1 < p = q \leq 2$ ;  $1 < p < \infty$ ,  $q = \infty$ . При цьому виявлено, що існують ситуації, коли величина  $e_M^{\delta}(S_{p,\theta}^\Omega B(\mathbb{R}^d))_{L_q(\mathbb{R}^d)}$  і найкраще наближення функцій із даних класів за допомогою цілих функцій з носієм їхнього перетворення Фур’є у східчастому гіперболічному хресті —  $\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n}(S_{p,\theta}^\Omega B(\mathbb{R}^d))_{L_q(\mathbb{R}^d)}$  мають різні порядки.

– Для функцій багатьох змінних із ізотропних класів Нікольського–Бесова  $B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)$  одержано точні за порядком оцінки наближення сумами типу Валле Пуссена у рівномірній та інтегральній метриках. Крім того, знайдено точні за порядком оцінки наближення за допомогою цілих функцій спеціального вигляду.

– Для функцій багатьох змінних із анізотропних класів Нікольського–Бесова  $B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)$  встановлено точні за порядком оцінки найкращого наближення за допомогою цілих функцій з носіями їхнього перетворення Фур’є у  $d$ -вимірних “паралелепіпедах”, похибка наближення при цьому вимірюється у метриці просторів Лебега

$L_p(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 < p < \infty$ . Також для даних класів функцій одержано точні за порядком оцінки відхилення функцій від їхніх відрізків інтеграла Фур'є у рівномірній метриці.

## Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Romanyuk A. S., Yanchenko S. Ya. Estimates for the entropy numbers of the Nikol'skii–Besov classes of functions with mixed smoothness in the space of quasi-continuous functions. *Math. Nachr.* 2023, **296** (6), 2575–2587. <https://doi.org/10.1002/mana.202100202>. (SJR — **Q2**)
2. Romanyuk A. S., Yanchenko S. Ya. Approximation of the classes of periodic functions of one and many variables from the Nikol'skii–Besov and Sobolev spaces. *Ukrainian Math. J.* 2022, **74** (6), 967–980, <https://doi.org/10.1007/s11253-022-02110-5>; translation of *Ukrain. Mat. Zh.* 2022, **74** (6), 844–855, <https://doi.org/10.37863/umzh.v74i6.7141>. (SJR — **Q3**)
3. Romanyuk A. S., Yanchenko S. Ya. Kolmogorov widths of the Nikol'skii–Besov classes of periodic functions of many variables in the space of quasicontinuous functions. *Ukrainian Math. J.* 2022, **74** (2), 251–265, <https://doi.org/10.1007/s11253-022-02061-x>; translation of *Ukrain. Mat. Zh.* 2022, **74** (2), 220–232, <https://doi.org/10.37863/umzh.v74i2.6932>. (SJR — **Q3**)
4. Romanyuk A. S., Yanchenko S. Ya. Estimates of approximating characteristics and the properties of the operators of best approximation for the classes of periodic functions in the space  $B_{1,1}$ . *Ukrainian Math. J.* 2022, **73** (8), 1278–1298, <https://doi.org/10.1007/s11253-022-01990-x>; translation of *Ukrain. Mat. Zh.* 2021, **73** (8), 1102–1119, <https://doi.org/10.37863/umzh.v73i8.6755>. (SJR — **Q3**)
5. Yanchenko S. Ya., Radchenko O. Ya. Approximation characteristics of the isotropic Nikol'skii–Besov functional classes. *Carpathian Math. Publ.* 2021, **13** (3), 851–861, <https://doi.org/10.15330/cmp.13.3.851-861>. (SJR — **Q2**)
6. Yanchenko S. Ya., Radchenko O. Ya. Approximating characteristics of the Nikol'skii–Besov classes  $S_{1,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$ . *Ukrainian Math. J.* 2020, **71** (10), 1608–1626, <https://doi.org/10.1007/s11253-020-01734-9>; translation of *Ukrain. Mat. Zh.* 2019, **71** (10), 1405–1421. (SJR —

**Q3)**

7. Yanchenko S. Ya. Approximation of the Nikol'skii–Besov functional classes by entire functions of a special form. *Carpathian Math. Publ.* 2020, **12** (1), 148–156, <https://doi.org/10.15330/cmp.12.1.148-156>. (SJR — **Q2**)
8. Yanchenko S. Ya. Best approximation of the functions from anisotropic Nikol'skii–Besov classes defined in  $\mathbb{R}^d$ . *Ukrainian Math. J.* 2018, **70** (4), 661–670; translation of *Ukrain. Mat. Zh.* 2018, **70** (4), 574–582, <https://doi.org/10.1007/s11253-018-1523-y>. (SJR — **Q3**)
9. Yanchenko S. Ya., Stasyuk S. A. Approximative characteristics of functions from the classes  $S_{p,\theta}^\Omega B$  with a given majorant of mixed moduli of continuity. *J. Math. Sci. (N. Y.)* 2018, **235** (1), 103–115, <https://doi.org/10.1007/s10958-018-4062-z>; translated of *Ukr. Mat. Visn.* 2018, **15** (1), 132–148. (SJR — **Q3**)
10. Yanchenko S. Ya. Order estimates of approximation characteristics of functions from the anisotropic Nikol'skii–Besov classes. *J. of Math. Sci. (N. Y.)* 2018, **234** (1), 98–105, <https://doi.org/10.1007/s10958-018-3984-9>; translated of *Ukr. Mat. Visn.* 2017, **14** (4), 595–604. (SJR — **Q3**)
11. Yanchenko S. Ya. Order estimates for the approximative characteristics of functions from the classes  $S_{p,\theta}^\Omega B(\mathbb{R}^d)$  with a given majorant of generalized mixed modules of smoothness in the uniform metric. *Ukrainian Math. J.* 2017, **68** (12), 1975–1985, <https://doi.org/10.1007/s11253-017-1342-6>; translation of *Ukrain. Mat. Zh.* 2016, **68** (12), 1705–1714. (SJR — **Q3**)
12. Stasyuk S. A., Yachenko S. Ya. Approximation of functions from Nikolskii–Besov type classes of generalized mixed smoothness. *Anal. Math.* 2015, **41** (4), 311–334, <https://doi.org/10.1007/s10476-015-0305-0>. (SJR — **Q4**)
13. Yanchenko S. Ya. Approximation of functions from the isotropic Nikol'skii–Besov classes in the uniform and integral metrics. *Ukrainian Math. J.* 2016, **67** (10), 1599–1610, <https://doi.org/10.1007/s11253-016-1175-8>; translation of *Ukrain. Mat. Zh.* 2015, **67** (10), 1423–1433. (SJR — **Q3**)
14. Янченко С. Я. Порядкові оцінки апроксимативних характеристик функцій з узагальнених класів мішаної гладкості типу

- Нікольського–Бесова. Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України 2014, **11** (3), 330–343.
15. Yanchenko S. Ya. Approximation of functions from the classes  $S_{p,\theta}^r B$  in the uniform metric. Ukrainian Math. J. 2013, **65** (5), 771–779, <https://doi.org/10.1007/s11253-013-0813-7>; translation of Ukrain. Mat. Zh. 2013, **65** (5), 698–705. (SJR — **Q3**)
  16. Миронюк В. В., Янченко С. Я. Наближення функцій з узагальнених класів Нікольського–Бесова цілими функціями у просторах Лебега. Мат. Студії 2013, **39** (2), 190–202.
  17. Янченко С. Я. Оцінки апроксимативних характеристик класів функцій  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$  у рівномірній метриці. Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України 2013, **10** (1), 328–340.
  18. Romanyuk A.S., Yanchenko S.Ya. Estimates of approximating characteristics for the classes of periodic functions in the space  $B_{1,1}$ . International Workshop “Current Trends in Analysis and Approximation Theory”, July 18, 2023, the International Telematic University UNINETTUNO, Roma, Italy: Book of Proceedings. 2023, P. 30–31.
  19. Романюк А., Янченко С. Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів періодичних функцій з домінуючою мішаною похідною. Міжнародна конференція “Теорія наближення функцій та її застосування”, присвячена 80-річчю з дня народження члена–кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942–2007), 6–10 червня 2022 р., Луцьк, УКРАЇНА: Тези доповідей, Луцьк, 2022, С. 42–43.
  20. Янченко Сергій. Апроксимаційні характеристики ізотропних класів  $B_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$ . Конференція молодих учених “Підстригачівські читання — 2022”, 25–27 травня 2022 р., Львів; <http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2022/abstracts/Yanchenko.pdf>
  21. Romanyuk A.S., Yanchenko S.Ya. Kolmogorov widths of classes of periodic functions with mixed smoothness of many variables in the space of quasi-continuous functions. The International Online Conference “Current Trends in Abstract and Applied Analysis”, May 12–15, 2022, Ivano-Frankivsk, Ukraine: Book of Abstracts. 2022,

- P. 67.
22. Romanyuk Anatolii, Yanchenko Sergii. Entropy numbers of the Nikol'skii–Besov classes in the space of quasi-continuous functions. International Conference Mathematical Analysis, Differential Equation and Applications (MADEA–9), Kyrgyz–Turkish Manas University, Bishkek, Kyrgyz Republic, June 21–25. Abstracts — Bishkek: KTMU, 2021, P. 65–66.
  23. Romanyuk A. S., Yanchenko S. Ya. Estimates for the entropy numbers of the Nikol'skii–Besov classes in the space of quasi-continuous functions. International Online Workshop on Approximation Theory, March 19–21, 2021, Ivano-Frankivsk, Ukraine: ABSTRACTS. 2021, P. 29–30.
  24. Янченко С. Я. Наближення функцій з анізотропних класів Нікольського–Бесова. Міжнародна наукова конференція “Теорія наближень і її застосування” присвячена 100-річчю з дня народження Миколи Павловича Корнейчука. 16–19 жовтня 2020 р., Дніпро, Україна: Тези доповідей. — ПП “Ліра ЛТД”, 2020, С. 79.
  25. Янченко С. Я. Апроксимативні характеристики функцій з класів Нікольського–Бесова  $S_{1,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$ . Всеукраїнська наукова конференція “Теорія наближень і її застосування” з нагоди 70-річчя Владислава Федоровича Бабенка. 3–5 жовтня 2019 р., Дніпро, Україна: Тези доповідей. — ПП “Ліра ЛТД”, 2019, С. 47.
  26. Янченко С. Я. Апроксимативні характеристики класів функцій Нікольського–Бесова з домінуючою мішаною похідною. Міжнародна конференція “Функціональні методи в теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV” присвячена 100-річчю з дня народження В. К. Дзядика (1919–1998). 20–26 червня 2019 р., Світязь, Україна: Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2019, С. 65–66.
  27. Янченко С. Я. Апроксимативні характеристики класів функцій Нікольського–Бесова  $S_{1,\theta}^r B$ . Міжнародна конференція молодих математиків. 6–8 червня 2019 р., Київ, Україна: Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2019, С. 116.
  28. Янченко С. Я. Найкраще наближення функцій з анізотропних класів Нікольського–Бесова. Міжнародна конференція молодих математиків присвячена 100-річчю з дня народження академіка

- НАН України Ю. О. Митропольського (1917–2008). 7–10 червня 2017 р., Київ, Україна: Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2017, С. 50.
29. Янченко С. Я. Наближення функцій з класів Нікольського–Бесова цілими функціями. Міжнародна конференція “Теорія наближення функцій та її застосування” присвячена 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942–2007): Тези доповідей (Україна, Слов’янськ, 28 травня – 3 червня 2017 р.), С. 100.
  30. Янченко С. Я. Порядкові оцінки апроксимативних характеристик функцій з класів  $S_{p,\theta}^{\Omega} B(\mathbb{R}^d)$  із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності у рівномірній метриці. Конференція молодих учених “Підстригачівські читання — 2016”, 25–27 травня 2016 р., Львів; <http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Yanchenko.pdf>
  31. Yanchenko S. Ya. Approximation of functions from Nikol’skii–Besov type classes of generalized mixed smoothness. AMMODIT and final EUMLS Workshop “Mathematics for Life Sciences”. Hasenwinkel, March 7–11, 2016, P. 39.
  32. Янченко С. Я. Наближення функцій багатьох змінних з ізотропних класів Нікольського–Бесова. II Всеукраїнська наукова конференція “Теорія наближень і її застосування”. Дніпропетровськ (Україна) 8–11 жовтня 2015 р.: Тези доповідей. — Дніпропетровськ, 2015, С. 94.
  33. Yanchenko S. Ya. Approximation of functions from the isotropic Nikol’skii–Besov classes. Third conference “Mathematics for Life Sciences”. Rivne, September 15–19, 2015: Book of Abstracts. — Kyiv: Institute of Mathematics of NASU, 2015, P. 22.
  34. Янченко С. Я. Наближення функцій з ізотропних класів Нікольського–Бесова сумами типу Валле Пуссена. Міжнародна конференція молодих математиків. 3–6 червня 2015 р., Київ, Україна: Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2015, С. 92.
  35. Yanchenko Sergiy. Approximation of the Nikol’skii–Besov classes with dominating mixed smoothness by entire functions of a spacial form. Mecklenburg Workshop “Approximation Methods and Function Spaces”. Hasenwinkel, March 16–20, 2015, P. 18–19.

36. Янченко С. Я. Наближення класів  $B_{p,\theta}^r$  функцій багатьох змінних у просторі  $L_q(\mathbb{R}^d)$ . IV міжнародна ганська конференція присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана. 30 червня – 5 липня 2014 р., Чернівці, Україна: Тези доповідей. — Чернівецький національний університет, 2014, С. 219–220.
37. Янченко С. Я. Апроксимативні характеристики класів функцій типу Нікольського–Бесова. Міжнародна математична конференція “Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування” присвячена 60-річчю В. І. Рукасова (1953–2009), 21–24 травня 2014 р., Слов’янськ: Матеріали конференції. — Слов’янськ: ДДПУ, 2014, С. 87.
38. Стасюк С. А., Янченко С. Я. Наближення функцій з узагальнених класів мішаної гладкості типу Нікольського–Бесова. Міжнародна математична конференція “Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки” до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Георгія Миколайовича, 23–24 квітня 2014 р., Київ, Україна: Матеріали конференції. — Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2014, С. 285.
39. Янченко С. Я. Апроксимативні характеристики класів функцій типу Нікольського–Бесова. Міжнародна математична конференція “Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування” з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, 23–30 червня 2013 р., Севастополь, Україна: Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2013, С. 285.

## АНОТАЦІЇ

**Янченко С. Я. Екстремальні задачі теорії наближень класів гладких функцій однієї та багатьох змінних.** — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 “математичний аналіз” (111 — математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2024.

Дисертацію присвячено розв’язанню широкого кола екстремальних задач теорії функцій, що відносяться до апроксимації функціональних класів (класів Соболева, Нікольського–Бесова, а також їх

ніх різних узагальнень) різними методами і знаходженню серед них оптимальних у тому чи іншому сенсі. Напрямок досліджень, пов'язаний з наближенням класів функцій, які наділені деякими диференціальними властивостями, що описуються в термінах модулів гладкості або певним чином визначеної операції диференціювання, набуває популярності і активно розвивається починаючи з 30-х років ХХ століття і викликано це, на наш погляд, двома обставинами. З одного боку, встановлення оцінок апроксимаційних характеристик функціональних класів у недосліджених ситуаціях потребує створення нових методів і підходів, що відіграє важливу роль для розвитку самої теорії наближення, а з іншого — вони знаходять практичні застосування у деяких близьких галузях науки і техніки. Зокрема, в роботі розглядаються задачі про знаходження оцінок: точних верхніх меж величин найкращих ортогональних тригонометричних наближень функцій зі згаданих класів, найкращих наближень функцій за допомогою цілих функцій експоненціального типу, з носієм їхнього перетворення Фур'є у різних множинах скінченної міри Лебега (східчастому гіперболічному хресті,  $d$ -вимірних “паралелепіпедах”), наближень функцій з відповідних класів їхніми східчасто-гіперболічними сумами Фур'є,  $M$ -вимірного колмогоровського поперечника, ентропійних чисел та ін. Переважна більшість результатів дисертації подані у вигляді точних за порядком оцінок згаданих характеристик лінійної на нелінійної апроксимації.

Так при дослідженні наближення класів функцій з домінуючою мішаною похідною  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$  за допомогою цілих функцій експоненціального типу зі спектром спеціального вигляду встановлено, що є випадки, коли ці оцінки кращі за порядком від відповідних оцінок наближення за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті.

Для класів Нікольського–Бесова періодичних функцій з домінуючою мішаною похідною  $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)$ ,  $d \geq 2$ , у метриці простору квазінеперервних функцій  $QC(\mathbb{T}^d)$ , який за своїми властивостями близький до  $L_\infty(\mathbb{T}^d)$ , знайдено точні за порядком оцінки  $M$ -вимірний колмогоровський поперечник та ентропійних чисел. Зазначимо, що оцінки досліджуваних характеристик у метриці простору  $L_\infty(\mathbb{T}^d)$  у переважній більшості випадків відомі лише при  $d \in \{1, 2\}$ .

**Ключові слова:** анізотропні класи Нікольського–Бесова, ізотропні

класи Нікольського–Бесова, класи Соболева, класи функцій з домінуючою мішаною похідною, ентропійні числа,  $M$ -вимірний колмогоровський поперечник, ортопоперечник, найкраще ортогональне тригонометричне наближення, перетворення Фур'є, простір квазінеперервних функцій, східчастий гіперболічний хрест, функція типу мішаного модуля неперервності, ціла функція експоненціального типу.

**Yanchenko S. Ya. Extremal problems of approximation theory of classes of smooth functions of one and many variables.** — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.01 “Mathematical Analysis” (111 – Mathematics). — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2024.

The thesis is devoted to solving a wide range of extremal problems of the theory of functions related to the approximation of functional classes (Sobolev classes, Nikols'kii–Besov classes and their different generalizations) by various methods and finding optimal ones among them in one sense or another. The direction of research about the approximation of classes of functions, that are endowed with some differential properties, which are described in terms of smoothness modules or a certain differentiation operation, has been gaining popularity and powerful development since the 1930s years of the 20th century and this is caused, in our opinion, by two circumstances. On the one hand, establishing estimates of the approximation characteristics of functional classes in unexplored situations introducing requires the creation of new methods and approaches, which plays an important role for the development of the theory of approximation itself, and on the other hand, they have practical applications in some related fields of science and technology. The vast majority of the results of the dissertation are presented in the form of the exact-order estimates of the characteristics of linear and non-linear approximation.

**Key words:** anisotropic Nikol'skii–Besov classes, isotropic Nikols'kii–Besov classes, Sobolev classes, classes of functions with a dominating mixed derivative, entropy numbers,  $M$ -dimensional Kolmogorov width, orthoprojection widths, best orthogonal trigonometric approximation, Fourier transform, space of quasi-continuous functions, step hyperbolic cross, function of the type of mixed modulus of continuity, entire function of exponential type.