Національна академія наук України
Інститут математики

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ЯНЧЕНКО Сергій Якович

УДК 517.5

Екстремальні задачі теорії наближень класів гладких функцій однієї та багатьох змінних

01.01.01 — математичний аналіз
111 — математика

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень.
Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. ________________ С. Я. Янченко

Науковий консультант
доктор фіз.-мат. наук, професор
РОМАНЮК Анатолій Сергійович

Київ — 2024

Анотація

Янченко С. Я. Екстремальні задачі теорії наближень класів гладких функцій однієї та багатьох змінних. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — "математичний аналіз" (111 — математика). — Інститут математики Національної академії наук України, Київ, 2024.

Дисертацію присвячено розв'язанню широкого кола екстремальних задач теорії функцій, що відносяться до апроксимації функціональних класів різними методами і знаходженню серед них оптимальних у тому чи іншому сенсі. Напрямок досліджень, пов'язаний з наближенням класів функцій, які наділені деякими диференціальними властивостями, що описуються в термінах модулів гладкості або певним чином визначеної операції диференціювання, набуває популярності і активно розвивається починаючи з 30-х років XX століття і викликано це, на наш погляд, двома обставинами. З одного боку, встановлення оцінок апроксимаційних характеристик функціональних класів у недосліджених ситуаціях потребує створення нових методів і підходів, що відіграє важливу роль для розвитку самої теорії наближення, а з іншого — вони знаходять практичні застосування у деяких близьких галузях науки і техніки.

У першому розділі дисертації означено основні класи функцій, дослідженню яких присвячена робота, апроксимаційні характеристики, а також наведено коротку історичну довідку та огляд відомих результатів. Так підрозділ 1.1 присвячено класам неперіодичних функцій з домінуючою мішаною похідною $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$. У підпункті 1.1.1 наведено означення цих просторів і відповідно класів функцій (одиничних куль), які були введені у роботах С. М. Нікольського та Т. І. Аманова у 60-х роках XX століття. У класичній формі дані простори означалися у термінах умов на мішану різницю $\boldsymbol{k}$-го порядку функції з векторним кроком $\boldsymbol{h}$. Проте,

як з'ясувалося пізніше, при дослідженні апроксимаційних властивостей ключову роль відіграє означення норми функцій опосередковано через так зване "декомпозиційне" представлення елементів цих просторів, яке було отримане у роботі С. М. Нікольського та П. І. Лізоркіна у 1989 році як для класів неперіодичних функцій, так і у випадку класів періодичних функцій. Також наведено означення цілих функцій експоненціального типу, які є природним апаратом для наближення функцій заданих в $\mathbb{R}^d$ і перетворення Фур'є, як допоміжного апарату для означення самих класів функцій, так і апроксимаційних характеристик. Відповідно у підпункті 1.1.2 дані означення апроксимаційних характеристик, а саме: найкращого наближення функції — $E_{\tilde{Q}_n^\gamma}\big(f\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ цілими функціями експоненціального типу з носієм їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті, а також і класу функцій — $E_{\tilde{Q}_n^\gamma}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$, тобто, як і у всій дисертаційній роботі, точної верхньої межі вдповідної характеристики по всім елементам, які йому належать; наближення аналогом східчасто-гіперболічної суми Фур'є — $\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^\gamma}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$; величини наближення цілими функціями експоненціального типу з носієм їхнього перетворення Фур'є зосередженим на множинах іншої структури, лебегова міра яких є скінченною — $e^{\mathfrak{F}}_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ (яку також називаємо — наближення цілими функціями спеціального вигляду). Сформульовані відомі результати для даних класів функцій та згаданих апроксимаційних характеристик.

У підрозділ 1.2, а саме у підпункті 1.2.1 наведені означення просторів періодичних функцій з домінуючою мішаною похідною $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, $0 \leqslant x_j < 2\pi$, $j = \overline{1,d}$, як у класичній, так і в декомпозиційній формах, яке у випадку $\theta = \infty$ вперше було отримане Н. С. Нікольською у 1975 році та В. М. Темляковим у 1986 році. Також у даному підпункті означені і класи Соболєва $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$. У підпункті 1.2.2 введено основні апроксимаційні характеристики, що досліджуються для даних класів функцій: M-вимірний колмогоровський поперечник — $d_M\big(\Phi, \mathcal{X}\big)$; ортопоперечник

(Фур'є-поперечник) — $d_M^{\perp}\big(F, \mathcal{X}\big)$; найкраще ортогональне тригонометричне наближення — $e_M^{\perp}\big(F\big)_{\mathcal{X}}$; ε-ентропію — $H_\varepsilon(A, \mathcal{X})$ та ентропійні числа $\varepsilon_k(A, \mathcal{X})$. У даному підпункті також введено простори у метриці яких оцінюються перелічені вище величини, а саме простір квазінеперервних функцій $QC(\mathbb{T}^d)$ і простори $B_{1,1}(\mathbb{T}^d)$ та $B_{\infty,1}(\mathbb{T}^d)$. Підпункт 1.2.3 присвячено огляду відомих результатів у метриках згаданих просторів, а також у метриках просторів $L_1(\mathbb{T}^d)$ і $L_\infty(\mathbb{T}^d)$, що тісно пов'язані з ними. Наведені результати у подальшому також використовуються для порівняння та аналізу результатів одержаних у дисертаційній роботі.

Підрозділ 1.3 складається з двох підпунктів 1.3.1 і 1.3.2. У першому з них означені функція типу мішаного модуля неперервності й умови Барі–Стєчкіна, які є важливими для введення означених у цьому ж підпункті класів функцій $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, що є узагальненням класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$. У другому підпункті означено множини, що породжуються поверхнями рівня функції Ω і відповідні апроксимаційні характеристики.

У підрозділі 1.4 дано означення анізотропних (підпункт 1.4.1) та ізотропних (підпункт 1.4.2) класів Нікольського–Бєсова функцій багатьох змінних, що визначені в $\mathbb{R}^d$ — $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ ($B^{r}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ в ізотропному випадку), а також основних апроксимаційних характеристик, які розглядаються у дисертаційній роботі для цих класів функцій.

У розділі 2, першому із основних розділів дисертаційної робити, вивчаються наближення класів функцій з домінуючою мішаною похідною $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ у метриці простору Лебега $L_q(\mathbb{R}^d)$ за допомогою цілих функцій експоненціального типу. Зокрема, у підрозділі 2.1, як і у кожному з перших підрозділів усіх наступних розділів, наводяться деякі відомі співвідношення, нерівності, позначення і означення, твердження, які необхідні для встановлення результатів. У підрозділі 2.2 одержано точні за порядком оцінки наближення класів функцій $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті у метриці простору Лебега $L_q(\mathbb{R}^d)$,

$1 < q \leqslant \infty$. Основою для одержання цих оцінок слугували встановлені оцінки норми "блоків" сум Валле Пуссена, які є аналогами сум Валле Пуссена періодичних функцій багатьох змінних, які відіграли ключову роль при побудові екстремальних функцій, що реалізують оцінки знизу відповідних величин. Встановлені оцінки аналогів сум Валле Пуссена можуть мати самостійний інтерес та бути використані для розв'язання різних задач теорії наближення. У підрозділі 2.3 знайдено точні за порядком оцінки наближення функцій з класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті у рівномірній метриці.

У підрозділі 2.4 досліджується наближення функцій з класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ за допомогою цілих функцій експоненціального типу зі спектром спеціального вигляду — $e^{\mathfrak{F}}_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$. Встановлено точні за порядком оцінки даної величини у випадку $1 \leqslant p < \infty$ і $q = \infty$. Крім того для класів $S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ знайдено точні за порядком оцінки даної величини у метриці простору $L_2(\mathbb{R}^d)$ та показано, що у випадку $1 \leqslant \theta < 2$, $d \geqslant 2$, ці оцінки є кращими за порядком від відповідних оцінок наближення за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті — $\mathcal{E}_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_2(\mathbb{R}^d)}$, що встановлені Sun Yongsheng та Wang Heping.

Розділ 3 присвячено дослідженню апроксимаційних характеристик класів періодичних функцій з домінуючою мішаною похідною $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ у метриках просторів відмінних від простору Лебега $L_p(\mathbb{T}^d)$, $p \in \{1, \infty\}$, але які тісно пов'язані з ним. Так у підрозділах 3.2 і 3.3 знайдено оцінки для ентропійних чисел та M-вимірних колмогоровських поперечників класів функцій $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ у метриці $QC(\mathbb{T}^d)$-простору квазінеперервних функцій, який за своїми властивостями близький до $L_\infty(\mathbb{T}^d)$. Показано, що при $2 \leqslant p \leqslant \infty$, $2 \leqslant \theta < \infty$, $r_1 > \frac{1}{2}$, $d \geqslant 2$ одержані оцінки є точними за порядком і рівними між собою. Важливо зазначити, що оцінки досліджуваних характеристик у метриці простору $L_\infty(\mathbb{T}^d)$ у переважній більшості випадків є відомими лише при $d \in \{1, 2\}$.

Підрозділ 3.4 складається з двох підпунктів 3.4.1 і 3.4.2. У першому з них розглядається одновимірний випадок, а у другому — багатовимірний. Отримано точні за порядком оцінки ортопоперечників і близьких до них апроксимаційних характеристик класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ та класів Соболєва $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$ функцій однієї та багатьох змінних у метриці простору $B_{1,1}(\mathbb{T}^d)$. При цьому виявлено, що у багатовимірному випадку для більшості співвідношень між параметрами досліджені апроксимаційні характеристики відрізняються за порядком від відповідних апроксимаційних характеристик у просторі $L_1(\mathbb{T}^d)$.

Підрозділ 3.5, який присвячений дослідженню класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ й класів Соболєва $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$ у метриці простору $B_{\infty,1}(\mathbb{T}^d)$, також складається з двох підпунктів 3.5.1 і 3.5.2 у яких спочатку розглядається одновимірний випадок, а згодом багатовимірний. У підпункті 3.5.1 встановлено точні за порядком оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $S^r_{1,\theta}B(\mathbb{T})$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, та $W^r_{1,\alpha}(\mathbb{T})$ у просторі $B_{\infty,1}(\mathbb{T})$. У багатовимірному випадку, підпункт 3.5.2, встановлено точні за порядком оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, у просторі $B_{\infty,1}(\mathbb{T}^d)$. З використанням одержаних результатів вдалося встановити точні за порядком оцінки наближень згаданих класів функцій їхніми східчасто-гіперболічними сумами Фур'є у просторі $B_{\infty,1}(\mathbb{T}^d)$, а також порядки ортопоперечників класів $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, $d \geqslant 1$, у цьому ж просторі. У деяких випадках досліджено поведінку відповідних апроксимаційних характеристик класів Соболєва $W^{\boldsymbol{r}}_{1,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$.

У підрозділі 3.6 встановлено, що у багатовимірному випадку, на противагу одновимірному, послідовність норм лінійних операторів, які реалізують порядкові значення найкращого наближення класів $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ у просторі $B_{1,1}(\mathbb{T}^d)$ за допомогою тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів, є необмеженою.

Дослідженню апроксимаційних характеристик класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ у метриці простору Лебега $L_q(\mathbb{R}^d)$ присвячено розділ 4. У підрозділі 4.2 встановлено точні за порядком оцінки наближення функцій із даних класів за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є на множинах, які породжуються поверхнями рівня функції $\Omega(\boldsymbol{t})$ у випадках, коли параметри p і q пов'язані співвідношенням $1 < p \leqslant q < \infty$. За рахунок такого вибору наближаючих агрегатів вдалося відмовитися від деяких обмежень на функцію $\Omega(\boldsymbol{t})$, які виникали при розгляді наближення за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті.

У підрозділі 4.3 одержано точні за порядком оцінки наближення функцій з класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ за допомогою цілих функцій зі спектром спеціального вигляду — $e^{\mathfrak{F}}_M\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ при певних співвідношеннях між параметрами p і q. Показано, що у деяких випадках знайдені оцінки є кращими за порядком від відповідних оцінок наближення за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті.

Підрозділ 4.4 складається з двох підпунктів і в ньому одержано точні за порядку оцінки наближення функцій із класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ для усіх трьох згаданих вище апроксимаційних характеристик, а саме, наближення за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті, наближення за допомогою цілих функцій експоненціального типу зі спектром спеціального вигляду, а також наближення на множинах, які породжуються поверхнями рівня функції $\Omega(\boldsymbol{t})$ у випадку, коли похибка наближення оцінюється у рівномірній метриці — $L_\infty(\mathbb{R}^d)$.

Заключний 5 розділ дисертаційної роботи присвячено дослідженню апроксимаційних характеристик функцій багатьох змінних з ізотропних та анізотропних класів Нікольського–Бєсова. У підрозділі 5.2 для ізотропних класів функцій знайдено точні за порядком оцінки наближення сумами Валле Пуссена у рівномірній та інтегральній метриках. Також для розглянутих класів функцій у підрозділі 5.3 одержано точні за порядком оцінки наближення за допомогою цілих функцій спеціального вигляду.

Підрозділ 5.4 присвячено дослідженню анізотропних класів Нікольського–Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$. У підпункті 5.4.1 встановлено точні за порядком оцінки найкращого наближення за допомогою цілих функцій з носіями їхнього перетворення Фур'є у d-вимірних "паралелепіпедах", похибка наближення при цьому вимірюється у метриці просторів Лебега $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$. У випадку, коли похибка наближення оцінюється у рівномірній метриці у підпункті 5.4.2 одержано точні за порядком оцінки відхилення функцій з даних класів від їхніх відрізків інтеграла Фур'є. При цьому важливо, що одержані у цьому підрозділі результати записуються у термінах "усередненого" значення параметра $\boldsymbol{r}$, а саме у термінах $g(\boldsymbol{r})$.

Ключові слова: Анізотропні класи Нікольського–Бєсова, ізотропні класи Нікольського–Бєсова, класи Соболєва, класи функцій з домінуючою мішаною похідною, ентропійні числа, M-вимірний колмогоровський поперечник, ортопоперечник, найкраще ортогональне тригонометричне наближення, перетворення Фур'є, простір квазінеперервних функцій, східчастий гіперболічний хрест, функція типу мішаного модуля неперервності, ціла функція експоненціального типу.

Abstract

Yanchenko S. Ya. Extremal problems of approximation theory of classes of smooth functions of one and many variables. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.01 "Mathematical Analysis" (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2024.

The thesis is devoted to solving a wide range of extremal problems of the theory of functions related to the approximation of functional classes by various methods and finding optimal ones among them in one sense or another. The direction of research about the approximation of classes of functions, that are endowed with some differential properties, which are described in terms of smoothness modules or a certain differentiation operation, has been gaining popularity and actively developing since the 1930s years of the 20th century and this is caused, in our opinion, by two circumstances. On the one hand, establishing estimates of the approximation characteristics of functional classes in unexplored situations introducing requires the creation of new methods and approaches, which plays an important role for the development of the theory of approximation itself, and on the other hand, they have practical applications in some related fields of science and technology.

In the first chapter of the thesis, we define the main classes of functions, approximation characteristics to investigation of which is devoted this manuscript and also provide a brief historical background and a review of known results. So Subsection 1.1 is devoted to the classes of non-periodic functions with the dominating mixed smoothness $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$. In Subparagraph 1.1.1 we present the definitions of these spaces and, accordingly, classes of functions (unit spheres), which were introduced in the works of S. M. Nikol'skii and T. I. Amanov in the 1960s. In the classical form, these spaces were denoted in terms of conditions for the mixed difference of the

$\boldsymbol{k}$-th order of the function with the vector step $\boldsymbol{h}$. As it turned out later, in the study of approximation properties, the definition of the norm of functions plays a key role indirectly through the so-called "decomposition" representation of the elements of these spaces, which was obtained in the work of S. M. Nikol'skii and P. I. Lizorkin in 1989 both for classes of non-periodic functions and in the case of classes of periodic functions. Also we give the definitions of entire functions of the exponential type, which are a natural apparatus for approximating functions defined in $\mathbb{R}^d$ and the Fourier transform, as an auxiliary device for defining the classes of functions themselves, and approximation characteristics. Correspondingly, in Subparagraph 1.1.2 we define the approximation characteristics, namely: the best approximation of functions f — $E_{\tilde{Q}_n^{\gamma}}\big(f\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ by entire functions of the exponential type with the support of their Fourier transform in a step hyperbolic cross and also for the function class — $E_{\tilde{Q}_n^{\gamma}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$, i.e., as in the all dissertation work, the exact upper limit of the corresponding characteristic for all elements that belong to the investigated classes; approximation by an analogue of the step-hyperbolic Fourier sum — $\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^{\gamma}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$; approximation by entire functions of exponential type with the support of their Fourier transform concentrated on sets of a different structure whose Lebesgue measure is finite — $e^{\mathfrak{F}}_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ (which we also call as approximation by entire functions of a special form). Also we formulate the well-known results for the given classes of functions and the mentioned above approximation characteristics.

In Subsection 1.2, namely in Subparagraph 1.2.1 we give the definitions of the spaces of periodic functions with a dominating mixed derivative $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, $0 \leqslant x_j < 2\pi$, $j = \overline{1,d}$, both in classical and decomposition forms, which in the case $\theta = \infty$ was obtained by N. S. Nikol'ska in 1975 and V. M. Temlyakov in 1986. Also in this subparagraph we defined the Sobolev classes $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$. In Subparagraph 1.2.2 we introduce the main approximation characteristics that we study for these classes of functions: M-dimensional

Kolmogorov widths — $d_M\big(\Phi, \mathcal{X}\big)$; orthoprojection widths (Fourier width) — $d_M^\perp\big(F, \mathcal{X}\big)$; the best orthogonal trigonometric approximation —$e_M^\perp\big(F\big)_{\mathcal{X}}$; ε-entropy — $H_\varepsilon(A, \mathcal{X})$ and entropy numbers $\varepsilon_k(A, \mathcal{X})$. In this subsection, we also introduce the spaces in the metric of which the above quantities are estimated, namely, the space of quasi-continuous functions $QC(\mathbb{T}^d)$ and the spaces $B_{1,1}(\mathbb{T}^d)$ and $B_{\infty,1}(\mathbb{T}^d)$. Subparagraph 1.2.3 is devoted to a review of well-known results in the metrics of the mentioned spaces, and in the metrics of the spaces $L_1(\mathbb{T}^d)$ and $L_\infty(\mathbb{T}^d)$, which are closely related to them. In the future, the given results are also used to compare and analyze the results obtained in the thesis.

Subsection 1.3 consists of two Subparagraphs 1.3.1 and 1.3.2. In the first one, we give the definition of a function of the type of mixed modulus of continuity and the Bari–Stechkin condition, which are important for introducing here classes of functions $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$. These classes of functions are generalization of the classes $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$. In the second subsection, the sets generated by the level surfaces of the function Ω and the corresponding approximation characteristics are defined.

In Subsection 1.4 we give the definition of anisotropic (Subparagraph 1.4.1) and isotropic (Subparagraph 1.4.2) Nikol'skii–Besov classes of functions of many variables defined in $\mathbb{R}^d$ — $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ ($B^{r}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ in the isotropic case), and also define the main approximation characteristics, which are studied in the thesis for these classes of functions.

Chapter 2 is the first of the main sections of the dissertation. In this chapter we study the approximations of classes of functions with dominating mixed derivative $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ in the metric of the Lebesgue space $L_q(\mathbb{R}^d)$ by entire functions of the exponential type. In particular, in Subsection 2.1, as in each of the first subsection of all subsequent chapters, we present some well-known relations, inequalities, notations and definitions, and statements that are necessary for establishing the results. In Subsection 2.2 we obtain the exact-order estimates for the approximation of classes of functions $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)$

by entire functions of the exponential type with the supports of their Fourier transform in the step hyperbolic cross in the metric of the Lebesgue space $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 < q \leqslant \infty$. As the basis for obtaining these estimates we use the estimates of the norm of "blocks" of the de la Vallée Poussin sums which are analogs of the de la Vallée Poussin sums of periodic functions of many variables. The established estimates have played a key role in the construction of extremal functions that realize the lower estimates of the corresponding quantities. Estimates of analogs of the de la Vallée Poussin sums also can be of independent interest and can be used to solve various problems of approximation theory. In Subsection 2.3, in the uniform metric we found the exact-order estimates for the approximation of functions from classes $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, by entire functions of the exponential type with the supports of their Fourier transform in the step hyperbolic cross.

In Subsection 2.4 we study the approximation of functions from the classes $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ by entire functions of the exponential type with a spectrum of a special form — $e^{\mathfrak{F}}_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$. We have established the exact-order estimates of this quantity in the case $1 \leqslant p < \infty$ and $q = \infty$. In addition, for classes $S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ we found the exact-order estimates of this quantity in the metric of the space $L_2(\mathbb{R}^d)$ and showed that in the case of $1 \leqslant \theta < 2$, $d \geqslant 2$, these estimates have better order than the corresponding estimates for approximation by entire functions of the exponential type with the support of their Fourier transform in the step hyperbolic cross — $\mathcal{E}_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_2(\mathbb{R}^d)}$. The last estimates established by Sun Yongsheng and Wang Heping.

Chapter 3 is devoted to the study of approximation characteristics of classes of periodic functions with a dominating mixed derivative $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ in the metrics of spaces different from the Lebesgue space $L_p(\mathbb{T}^d)$, $p \in \{1, \infty\}$, but closely related. So in Subsection 3.2 and 3.3 we have found estimates for the entropy numbers and M-dimensional Kolmogorov widths of classes of functions $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ in the metric $QC(\mathbb{T}^d)$-space, which by its properties is close to $L_\infty(\mathbb{T}^d)$. We have shown that for $2 \leqslant p \leqslant \infty$, $2 \leqslant \theta < \infty$, $r_1 > \frac{1}{2}$,

$d \geqslant 2$ the obtained estimates are exact in order and equal to each other. It is important to note that the estimates of the studied characteristics in the space metric $L_\infty(\mathbb{T}^d)$ in the vast majority of cases are known only when $d \in \{1, 2\}$.

Subsection 3.4 consists of two Subparagraphs 3.4.1 and 3.4.2. In the first of them we consider a one-dimensional case, and in the second a multidimensional case. We obtained the exact-order estimates of the orthoprojection widths and approximation characteristics close to them for the classes $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ and Sobolev classes $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$ of functions of one and many variables in the metric of the space $B_{1,1}(\mathbb{T}^d)$. At the same time, we found that in the multidimensional case, for most ratios between parameters, the studied approximation characteristics differ in order from the corresponding approximation characteristics in the space $L_1(\mathbb{T}^d)$.

Subsection 3.5 is devoted to the study of the classes $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ and Sobolev classes $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$ in the metric of the space $B_{\infty,1}(\mathbb{T}^d)$. It also consists of two subparagraph 3.5.1 and 3.5.2. In first one we consider a one-dimensional case, and later a multidimensional case. In Subparagraph 3.5.1 the order-exact estimates for the best orthogonal trigonometric approximations of classes $S^{r}_{1,\theta}B(\mathbb{T})$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, and $W^{r}_{1,\alpha}(\mathbb{T})$ in the space $B_{\infty,1}(\mathbb{T})$ are established. In the multidimensional case, in Subparagraph 3.5.2 we established the exact-order estimates for the best orthogonal trigonometric approximations of the classes $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, in the space $B_{\infty,1}(\mathbb{T}^d)$. Using the obtained results, we were able to establish the exact-order estimates for the approximations of the mentioned classes of functions by their step-hyperbolic Fourier sums in the space $B_{\infty,1}(\mathbb{T}^d)$, as well as the orders of the orthoprojection widths of the classes $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, $d \geqslant 1$, in the same space. In some cases, the behavior of the corresponding approximation characteristics of the Sobolev classes $W^{\boldsymbol{r}}_{1,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$ was studied.

In Subsection 3.6 we established that in the multidimensional case, as opposed to the one-dimensional case, the sequence of norms of linear operators realizing the orders of the best approximation for the classes $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ in the space $B_{1,1}(\mathbb{T}^d)$ using trigonometric polynomials with "numbers" of harmonics from step hyperbolic crosses, is unbounded.

Chapter 4 is devoted to the study of approximation characteristics of classes $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ in the metric of the Lebesgue space $L_q(\mathbb{R}^d)$. In Subsection 4.2 we obtained the exact-order estimates for approximation of the functions from the given classes by entire functions of the exponential type with the supports of their Fourier transform on the sets generated by the level surfaces of the function $\Omega(\boldsymbol{t})$ in cases where the parameters p and q are related by the relation $1 < p \leqslant q < \infty$. Due to such choice of approximating aggregates, it was possible to waive some restrictions on the function $\Omega(\boldsymbol{t})$, which arose when considering approximation be entire functions of the exponential type with the supports of their Fourier transform in a step hyperbolic cross.

In Subsection 4.3 we obtained the exact-order estimates of the approximation of functions from the classes $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ by entire functions with a spectrum of a special form — $e^{\mathfrak{F}}_M\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ for certain ratios between the parameters p and q. We also shown that in some cases the found estimates have a better order compared to the corresponding estimates of approximation by entire functions of exponential type with the supports of their Fourier transform in a step hyperbolic cross.

Subsection 4.4 consists of two subsections. In this subsection we obtained the exact-order estimates of functions from the classes $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ for all three approximation characteristics mentioned above, namely, approximation by entire functions of the exponential type with supports of their Fourier transforms in a step hyperbolic cross, approximation by entire functions of the exponential type with a spectrum of a special form, and approximations on the sets generated by the level surfaces of a function $\Omega(\boldsymbol{t})$, when the error of approximation is estimated in the uniform metric — $L_\infty(\mathbb{R}^d)$.

The final Chapter 5 of the thesis is devoted to the study of the approximation characteristics of the functions of many variables from the isotropic and anisotropic Nikol'skii–Besov classes. In Subsection 5.2 for isotropic classes of functions we obtain the exact-order estimates for the approximation of the de la Vallée Poussin sums in uniform and integral metrics. Also for the considered classes of functions in Subsection 5.3 we establish the exact-order estimates for the approximation by entire functions of a special form.

Subsection 5.4 is devoted to the investigation of anisotropic Nikol'skii–Besov classes $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$. In Subparagraph 5.4.1 we established the exact-order estimates for the best approximations of functions from these classes by entire functions of exponential type with supports of their Fourier transforms in d-dimensional "parallelepipeds" and the error of approximation is measured in the metric of Lebesgue spaces $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$. In the case when the approximation error is estimated in the uniform metric in Subparagraph 5.4.2 we obtained the exact-order estimates of deviations of functions from these classes from their sections of the Fourier integral. At the same time, it is important that the results obtained in this subsection are written in terms of the "averaged" value of the parameter $\boldsymbol{r}$, namely in terms of $g(\boldsymbol{r})$.

Key words: Anisotropic Nikol'skii–Besov classes, isotropic Nikols'kii–Besov classes, Sobolev classes, classes of functions with a dominating mixed derivative, entropy numbers, M-dimensional Kolmogorov width, orthoprojection widths, best orthogonal trigonometric approximation, Fourier transform, space of quasi-continuous functions, step hyperbolic cross, function of the type of mixed modulus of continuity, entire function of exponential type.

Список публікацій

1. Romanyuk A. S., Yanchenko S. Ya. Estimates for the entropy numbers of the Nikol'skii–Besov classes of functions with mixed smoothness in the space of quasi-continuous functions. Math. Nachr. 2023, **296** (6), 2575–2587. https://doi.org/10.1002/mana.202100202. (SJR — **Q2**)
2. Romanyuk A. S., Yanchenko S. Ya. Approximation of the classes of periodic functions of one and many variables from the Nikol'skii–Besov and Sobolev spaces. Ukrainian Math. J. 2022, **74** (6), 967 – 980, https://doi.org/10.1007/s11253-022-02110-5; translation of Ukrain. Mat. Zh. 2022, **74** (6), 844 – 855, https://doi.org/10.37863/umzh.v74i6.7141. (SJR — **Q3**)
3. Romanyuk A. S., Yanchenko S. Ya. Kolmogorov widths of the Nikol'skii–Besov classes of periodic functions of many variables in the space of quasicontinuous functions. Ukrainian Math. J. 2022, **74** (2), 251 – 265, https://doi.org/10.1007/s11253-022-02061-x; translation of Ukrain. Mat. Zh. 2022, **74** (2), 220 – 232, https://doi.org/10.37863/umzh.v74i2.6932. (SJR — **Q3**)
4. Romanyuk A. S., Yanchenko S. Ya. Estimates of approximating characteristics and the properties of the operators of best approximation for the classes of periodic functions in the space $B_{1,1}$. Ukrainian Math. J. 2022, **73** (8), 1278 – 1298, https://doi.org/10.1007/s11253-022-01990-x; translation of Ukrain. Mat. Zh. 2021, **73** (8), 1102 – 1119, https://doi.org/10.37863/ umzh.v73i8.6755. (SJR — **Q3**)
5. Yanchenko S. Ya., Radchenko O. Ya. Approximation characteristics of the isotropic Nikol'skii–Besov functional classes. Carpathian Math. Publ. 2021, **13** (3), 851 – 861, https://doi.org/10.15330/cmp.13.3.851-861. (SJR — **Q2**)
6. Yanchenko S. Ya., Radchenko O. Ya. Approximating characteristics of the Nikol'skii–Besov classes $S^{r}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)$. Ukrainian Math. J.

2020, **71** (10), 1608 – 1626, https://doi.org/10.1007/s11253-020-01734-9; translation of Ukrain. Mat. Zh. 2019, **71** (10), 1405 – 1421. (SJR — **Q3**)

7. Yanchenko S. Ya. Approximation of the Nikol'skii–Besov functional classes by entire functions of a special form. Carpathian Math. Publ. 2020, **12** (1), 148 – 156, https://doi.org/10.15330/cmp.12.1.148-156. (SJR — **Q2**)
8. Yanchenko S. Ya. Best approximation of the functions from anisotropic Nikol'skii–Besov classes defined in $\mathbb{R}^d$. Ukrainian Math. J. 2018, **70** (4), 661 – 670; translation of Ukrain. Mat. Zh. 2018, **70** (4), 574 – 582, https://doi.org/10.1007/s11253-018-1523-y. (SJR — **Q3**)
9. Yanchenko S. Ya., Stasyuk S. A. Approximative characteristics of functions from the classes $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ with a given majorant of mixed moduli of continuity. J. Math. Sci. (N. Y.) 2018, **235** (1), 103 – 115, https://doi.org/10.1007/s10958-018-4062-z; translated of Ukr. Mat. Visn. 2018, **15** (1), 132 – 148. (SJR — **Q3**)
10. Yanchenko S. Ya. Order estimates of approximation characteristics of functions from the anisotropic Nikol'skii–Besov classes. J. of Math. Sci. (N. Y.) 2018, **234** (1), 98 – 105, https://doi.org/10.1007/s10958-018-3984-9; translated of Ukr. Mat. Visn. 2017, **14** (4), 595 – 604. (SJR — **Q3**)
11. Yanchenko S. Ya. Order estimates for the approximative characteristics of functions from the classes $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ with a given majorant of generalized mixed modules of smoothness in the uniform metric. Ukrainian Math. J. 2017, **68** (12), 1975 – 985, https://doi.org/10.1007/s11253-017-1342-6; translation of Ukrain. Mat. Zh. 2016, **68** (12), 1705 – 1714. (SJR — **Q3**)
12. Stasyuk S. A., Yachenko S. Ya. Approximation of functions from Nikolskii–Besov type classes of generalized mixed smoothness. Anal.

Math. 2015, **41** (4), 311 – 334, https://doi.org/10.1007/s10476-015-0305-0. (SJR — **Q4**)

13. Yanchenko S.Ya. Approximation of functions from the isotropic Nikol'skii–Besov classes in the uniform and integral metrics. Ukrainian Math. J. 2016, **67** (10), 1599 – 1610, https://doi.org/10.1007/s11253-016-1175-8; translation of Ukrain. Mat. Zh. 2015, **67** (10), 1423 – 1433. (SJR — **Q3**)

14. Янченко С. Я. Порядкові оцінки апроксимативних характеристик функцій з узагальнених класів мішаної гладкості типу Нікольського–Бєсова. Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України 2014, **11** (3), 330 – 343.

15. Yanchenko S. Ya. Approximation of functions from the classes $S^r_{p,\theta}B$ in the uniform metric. Ukrainian Math. J. 2013, **65** (5), 771 – 779, https://doi.org/10.1007/s11253-013-0813-7; translation of Ukrain. Mat. Zh. 2013, **65** (5), 698 – 705. (SJR — **Q3**)

16. Миронюк В. В., Янченко С. Я. Наближення функцій з узагальнених класів Нікольського–Бєсова цілими функціями у просторах Лебега. Мат. Студії 2013, **39** (2), 190 – 202.

17. Янченко С. Я. Оцінки апроксимативних характеристик класів функцій $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ у рівномірній метриці. Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України 2013, **10** (1), 328 – 340.

18. Romanyuk A.S., Yanchenko S.Ya. Estimates of approximating characteristics for the classes of periodic functions in the space $B_{1,1}$. International Workshop "Current Trends in Analysis and Approximation Theory", July 18, 2023, the International Telematic University UNINETTUNO, Roma, Italy: Book of Proceedings. 2023, P. 30 – 31.

19. Романюк А., Янченко С. Найкращі ортогональні тригонометричні

наближення класів періодичних функцій з домінуючою мішаною похідною. Міжнародна конференція "Теорія наближення функцій та її застосування", присвячена 80-річчю з дня народження члена–кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942–2007), 6 – 10 червня 2022 р., Луцьк, УКРАЇНА: Тези доповідей, Луцьк, 2022, С. 42 – 43.

20. Янченко Сергій. Апроксимаційні характеристики ізотропних класів $B^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$. Конференція молодих учених "Підстригачівські читання — 2022", 25–27 травня 2022 р., Львів; http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2022/abstracts/Yanchenko.pdf

21. Romanyuk A. S., Yanchenko S. Ya. Kolmogorov widths of classes of periodic functions with mixed smoothness of many variables in the space of quasi-continuous functions. The International Online Conference "Current Trends in Abstract and Applied Analysis", May 12–15, 2022, Ivano-Frankivsk, Ukraine: Book of Abstracts. 2022, P. 67.

22. Romanyuk Anatolii, Yanchenko Sergii. Entropy numbers of the Nikol'skii–Besov classes in the space of quasi-continuous functions. International Conference Mathematical Analysis, Differential Equation and Applications (MADEA–9), Kyrgyz–Turkish Manas University, Bishkek, Kyrgyz Republic, June 21–25. Abstracts — Bishkek: KTMU, 2021, P. 65 – 66.

23. Romanyuk A. S., Yanchenko S. Ya. Estimates for the entropy numbers of the Nikol'skii–Besov classes in the space of quasi-continuous functions. International Online Workshop on Approximation Theory, March 19–21, 2021, Ivano-Frankivsk, Ukraine: ABSTRACTS. 2021, P. 29 – 30.

24. Янченко С. Я. Наближення функцій з анізотропних класів Нікольського–Бєсова. Міжнародна наукова конференція "Теорія наближень і її застосування" присвячена 100-річчю з дня народження Миколи Павловича Корнєйчука. 16 – 19 жовтня 2020 р., Дніпро,

Україна: Тези доповідей. — ПП “Ліра ЛТД”, 2020, С. 79.

25. Янченко С. Я. Апроксимативні характеристики функцій з класів Нікольського-Бєсова $S^{r}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)$. Всеукраїнська наукова конференція “Теорія наближень і її застосування” з нагоди 70-річчя Владислава Федоровича Бабенка. 3 – 5 жовтня 2019 р., Дніпро, Україна: Тези доповідей. — ПП “Ліра ЛТД”, 2019, С. 47.

26. Янченко С. Я. Апроксимативні характеристики класів функцій Нікольського-Бєсова з домінуючою мішаною похідною. Міжнародна конференція “Функціональні методи в теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV” присвячена 100-річчю з дня народження В. К. Дзядика (1919–1998). 20 – 26 червня 2019 р., Світязь, Україна: Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2019, С. 65 – 66.

27. Янченко С. Я. Апроксимативні характеристики класів функцій Нікольського–Бєсова $S^{r}_{1,\theta}B$. Міжнародна конференція молодих математиків. 6 – 8 червня 2019 р., Київ, Україна: Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2019, С. 116.

28. Янченко С. Я. Найкраще наближення функцій з анізотропних класів Нікольського–Бєсова. Міжнародна конференція молодих математиків присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського (1917–2008). 7 – 10 червня 2017 р., Київ, Україна: Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2017, С. 50.

29. Янченко С. Я. Наближення функцій з класів Нікольського–Бєсова цілими функціями. Міжнародна конференція “Теорія наближення функцій та її застосування” присвячена 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942–2007): Тези доповідей (Україна, Слов’янськ, 28 травня – 3 червня 2017 р.), С. 100.

30. Янченко С. Я. Порядкові оцінки апроксимативних характеристик функцій з класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності у рівномірній метриці. Конференція молодих учених "Підстригачівські читання — 2016", 25–27 травня 2016 р., Львів; http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Yanchenko.pdf

31. Yanchenko S. Ya. Approximation of functions from Nikol'skii–Besov type classes of generalized mixed smoothness. AMMODIT and final EUMLS Workshop "Mathematics for Life Sciences". Hasenwinkel, March 7–11, 2016, P. 39.

32. Янченко С. Я. Наближення функцій багатьох змінних з ізотропних класів Нікольського–Бєсова. II Всеукраїнська наукова конференція "Теорія наближень і її застосування". Дніпропетровськ (Україна) 8 – 11 жовтня 2015 р.: Тези доповідей. — Дніпропетровськ, 2015, С. 94.

33. Yanchenko S. Ya. Approximation of functions from the isotropic Nikol'skii–Besov classes. Third conference "Mathematics for Life Sciences". Rivne, September 15–19, 2015: Book of Abstracts. — Kyiv: Institute of Mathematics of NASU, 2015, P. 22.

34. Янченко С. Я. Наближення функцій з ізотропних класів Нікольського–Бєсова сумами типу Валле Пуссена. Міжнародна конференція молодих математиків. 3 – 6 червня 2015 р., Київ, Україна: Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2015, С. 92.

35. Yanchenko Sergiy. Approximation of the Nikol'skii–Besov classes with dominating mixed smoothness by entire functions of a spacial form. Mecklenburg Workshop "Approximation Methods and Function Spaces". Hasenwinkel, March 16 – 20, 2015, P. 18 – 19.

36. Янченко С. Я. Наближення класів $B^r_{p,\theta}$ функцій багатьох змінних у просторі $L_q(\mathbb{R}^d)$. IV міжнародна ганська конференція присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана. 30 червня – 5 липня 2014 р., Чернівці, Україна: Тези доповідей. — Чернівецький націо-

нальний університет, 2014, С. 219 – 220.

37. Янченко С. Я. Апроксимативні характеристики класів функцій типу Нікольського–Бєсова. Міжнародна математична конференція "Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування" присвячена 60-річчю В. І. Рукасова (1953 – 2009), 21–24 травня 2014 р., Слов'янськ: Матеріали конференції. — Слов'янськ: ДДПУ, 2014, С. 87.

38. Стасюк С. А., Янченко С. Я. Наближення функцій з узагальнених класів мішаної гладкості типу Нікольського–Бєсова. Міжнародна математична конференція "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки" до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Георгія Миколайовича, 23–24 квітня 2014 р., Київ, Україна: Матеріали конференції. — Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2014, С. 285.

39. Янченко С. Я. Апроксимативні характеристики класів функцій типу Нікольського–Бєсова. Міжнародна математична конференція "Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, 23–30 червня 2013 р., Севастополь, Україна: Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2013, С. 285.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

Зальновживані позначення

$\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел . . . 47
$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел . . . 48
$\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел . . . 66
$\mathbb{Z}_+$ — множина цілих невід'ємних чисел . . . 48
$\|f\|_{\mathcal{X}}$ — норма функції f у просторі $\mathcal{X}$ . . . 47
$\mathfrak{F}f$ — перетворення Фур'є функції f . . . 53
$\mathfrak{F}^{-1}f$ — обернене перетворення Фур'є функції f . . . 53
$\operatorname{supp} f$ — носій функції f . . . 54
χ_A — характеристична функція множини A . . . 54
$\asymp$ — відношення слабкої еквівалентості . . . 55
$\ll$, $\gg$ — порядкові нерівності . . . 55
$g_1 * g_2$ — згортка функцій g_1 і g_2 . . . 56, 150
$\operatorname{mes} A$ — лебегова міра множини A . . . 58
$x \in A$ — елемент x належить до множини A . . . 47
$x \notin A$ — елемент x не належить до множини A . . . 188
$\varnothing$ — порожня множина . . . 48
$A \subset B$ — множина A є підмножиною множини B . . . 48
$A \cup B$ — об'єднання множин A і B . . . 57
$A \cap B$ — перетин множин A і B . . . 113
$[a]$ — ціла частина числа a . . . 153

Деякі множини

$\mathbb{R}^d$ . . . 47
$\mathbb{R}^d_+$ . . . 48
$\mathbb{Z}^d_+$ . . . 50
$Q^*_{2^s}$ . . . 54
$\tilde{Q}^{\gamma}_n$ . . . 58
$\mathbb{T}^d$ . . . 64

Функції та множини функцій

Апроксимаційні характеристики

Вступ

Дана дисертаційна робота присвячена розв'язанню важливих екстремальних задач теорії наближень у нормованих просторах на класах функцій однієї та багатьох змінних (класах Соболєва, Нікольського–Бєсова, а також їхніх різних узагальненнях). Зокрема, в роботі розглядаються задачі про знаходження оцінок: точних верхніх меж величин найкращих ортогональних тригонометричних наближень функцій зі згаданих класів, найкращих наближень функцій за допомогою цілих функцій експоненціального типу, з носієм їхнього перетворення Фур'є на множинах скінченної міри Лебега (східчастому гіперболічному хресті, d-вимірних "паралелепіпедах"), наближень функцій з відповідних класів їхніми східчасто-гіперболічними сумами Фур'є, M-вимірного колмогоровського поперечника, ентропійних чисел та ін.

Обґрунтування вибору теми дослідження. Теорія наближення — важливий і фундаментальний розділ математичного аналізу, виникнення якого пов'язане з роботами таких всесвітньо відомих математиків як Жан Б. Фур'є, К. Вейєрштрасса, П. Л. Чебишова, А. Лебега, Д. Джексона, Ш. Валле Пуссена, С. Н. Бернштейна. Актуальними проблемами теорії наближення є розв'язання широкого кола екстремальних задач, зокрема, дослідження питань апроксимації класів функцій, як однієї так і багатьох змінних, різними методами, а також знаходження серед них оптимальних у тому чи іншому сенсі. Особливе місце серед екстремальних проблем теорії наближення функцій займають задачі пов'язані з лінійною та нелінійною апроксимацією функціональних класів. Поглиблений інтерес в останні десятиліття до нелінійної апроксимації (зокрема, найкращих ортогональних тригонометричних наближень і найкращих M-членних тригонометричних наближень) зумовлений, насамперед, тим, що у багатьох випадках нелінійні методи наближення виявились більш ефективними у порівнянні з лінійними методами. Цей напрямок досліджень пов'язаний з роботами R. A. DeVore, D. Dung, T. Kühn, T. Ullrich, Е. С. Белінського, Р. С. Ісмагілова, С. Б. Кашина, В. Є. Майорова, А. С. Романюка, А. С. Сердюка, О. І. Степанця, В. М. Темлякова, Х. Трібеля.

З середини 30-х років минулого століття одним із важливих напрямків теорії апроксимації функцій став напрямок, пов'язаний з дослідженням класів функцій, зокрема, класів Соболєва [214]. Проте, як з'ясувалося у процесі досліджень, шкала просторів Соболєва не могла повністю охопити і вичерпно описати диференціальні властивості функцій. Як наслідок, для більш "тонкої" класифікації функцій почали з'являтися і досліджуватися нові простори як періодичних так і не періодичних функцій, зокрема, спочатку ізотропні та анізотропні простори Нікольського, а пізніше відповідні ізотропні та анізотропні простори Бєсова. Згодом були введені простори Нікольського–Бєсова з домінуючою мішаною похідною, а далі різні аналоги і узагальнення усіх вище згаданих просторів функцій. Крім самостійного інтересу з точки зору теорії функцій, дослідження таких просторів знаходять застосування у теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, до розв'язання крайових задач регулярних еліптичних диференціальних рівнянь, обчислювальній математиці, фінансовій математиці, передачі сигналів, відтворенні зображень та ін.

З початку 60-х років XX століття важливе місце в теорії наближення посідає напрям пов'язаний з дослідженням апроксимаційних характеристик класів функцій багатьох змінних, який почав активно розвиватися завдяки роботі К. І. Бабенка [4] (див. також [5]). Йому вдалося розв'язати задачу А. М. Колмогорова по відшуканню відхилення фіксованого класу функцій від довільного підпростору заданої розмірності, а далі мінімізувати це відхилення по усіх таких підпросторах. К. І. Бабенком було встановлено, що при наближенні класів Соболєва $W^{\boldsymbol{r}}_{2,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$ у метриці простору $L_2(\mathbb{T}^d)$ екстремальним підпростором (оптимальним у певному сенсі) є підпростір тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік з множини, яка згодом отримала назву "гіперболічного хреста", а відповідна характеристика відома як колмогоровський поперечник (M-вимірний колмогоровський поперечник). Згодом наближення функцій багатьох змінних з класів Соболєва $W^{\boldsymbol{r}}_{2,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$, а також класів Нікольського–Бєсова функцій з домінуючою мішаною похідною $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ за допомогою тригонометричних поліномів зі спектром у гіперболічних хрестах проводилося в роботах Е. С. Белінського [10, 11], Е. М. Галєєва [26, 172], Н. С. Нікольської [73, 74], А. С. Романюка [96, 197], В. М. Темлякова [119, 120, 123, 124] та багатьох інших. Тому, на сьогоднішній день, є підстави стверджувати, що у багатьох важливих напрямках теорія наближення відомих класів періодичних функцій як однієї, так і багатьох змінних вже носить практично завершений характер, хоча, безумовно, тут ще залишаються принципові задачі, які потребують свого розв'язання. Зокрема, у деяких випадках це відноситься до відшукання точних за порядком оцінок таких важливих апроксимаційних характеристик як ентропійні числа і колмогоровські поперечники у так званих "граничних" випадках (для крайніх значень параметрів 1 і ∞ в означенні класів функцій або метрики, в якій здійснюється оцінка похибки наближення), а саме для класів Нікольського–Бєсова у рівномірній метриці.

Для наближення неперіодичних функцій, заданих на $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$, на відміну від періодичних, де у якості наближаючого апарату використовуються тригонометричні поліноми різного вигляду, природним апаратом наближення є цілі функції експоненціального типу. Основи сучасної теорії наближення цілими функціями експоненціального типу закладено в роботах С. Н. Бернштейна (див., наприклад, [13]) і було розвинено Н. І. Ахієзером, Н. Вінером, М. В. Келдишем, Н. Пелі та С. М. Нікольським. Результати досліджень, пов'язаних з наближенням функцій, заданих на дійсній осі, відображені у відомих працях Н. І. Ахієзера [3], І. І. Ібрагімова [38], О. І. Степанця [116], О. П. Тімана [125], Paul L. Butzer і Rolf J. Nessel [163] та інших. Паралельно, однак менш інтенсивно, розвивалася теорія наближення функцій і у просторі $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$. Відповідні результати у цьому напрямі наведено, зокрема, в книгах С. М. Нікольського [78] та Х. Трібеля [130]. Окрім цього, дослідженню наближень функцій однієї та багатьох змінних за допомогою цілих функцій з спектром на різних множинах, в тому числі і східчастому гіперболічному хресті, присвячена велика кількість статей, серед яких варто відзначити роботи наступних авторів: О. В. Бєсова, Л. Д. Кудрявцева, П. І. Лізоркіна, С. М. Нікольського [16], С. Б. Вакарчука, В. Г. Дороніна [22], І. І. Ібрагімова, Ф. Г. Насібова [39], П. І. Лізоркіна [52, 53], Г. Г. Магаріл-Ільяєва [57, 58], Г. Г. Магаріл-Ільяєва і В. М. Тіхомірова [59], Ф. Г. Насібова [72], О. І. Степанця і А. Л. Шидліча [219, 220], В. М. Тіхомірова [128], H.-J. Schmeisser і W. Sickel [211], W. Sickel і T. Ullrich [212], Wang Heping і Sun Yongsheng [237], Wang Heping [234]. У наведених працях також можна ознайомитися з більш детальною бібліографією.

В останні 20–30 років досягнуто суттєвого прогресу у дослідженні питань апроксимації періодичних функцій багатьох змінних із анізотропних і відповідно ізотропних класів Нікольського–Бєсова та Соболєва. Основні результати щодо анізотропних класів Нікольського і Соболєва відображені в монографії В. М. Темлякова [227]. Дослідженню ж ізотропних класів Бєсова, зокрема, присвячені роботи Р. Де Вора і В. М. Темлякова [167], А. С. Романюка [85, 87, 95], А. С. Романюка та В. С. Романюка [101], В. В. Миронюка [65]. У випадку анізотропних класів Бєсова періодичних функцій багатьох змінних в останні роки ряд результатів було отримано у роботах В. В. Миронюка [64, 68, 69]. Проте, як і у випадку ізотропних, так і анізотропних класів Нікольського–Бєсова неперіодичних функцій $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ [14, 77] питання апроксимації досліджені значно менше і на даний час у цьому напрямку залишається ціла низка задач, які потребують свого розв'язання, а тому результати дисертаційної роботи у цьому напрямку мають безумовний науковий інтерес.

Подальший розвиток у вивченні просторів Нікольського–Бєсова пов'язаний з дослідженням їхніх узагальнень. Так, одним з важливих напрямів є узагальнення гладкості, коли замість степеневої функції гладкості спочатку розглядалася функція, яка задовольняє умови Барі–Стєчкіна — М. Л. Гольдман [32], А. С. Джафаров [36], а згодом довільна і не монотонна функція — М. Л. Гольдман [34], Г. А. Калябін [41]. Проте дослідження у значній мірі були пов'язані з доведенням теорем вкладення, теорем продовження, відшукання слідів функцій з даних просторів. Інтенсивні дослідження різних апроксимаційних характеристик з точки зору знаходження їхніх порядків для узагальнених класів типу Нікольського–Бєсова ($S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$) у періодичному випадку беруть свій початок з робіт М. М. Пустовойтова [84] і Sun Yongsheng та Wang Heping [222] та розвинуті у роботах великої кількості математиків. Так, зокрема, було запропоновано розглядати наближення на множинах, які породжуються поверхнями рівня функцій Ω. Дані множини є узагальненням гіперболічних хрестів на випадок довільної функції Ω. Зауважимо, що пристосування вибору наближаючого агрегату до функцій Ω дало можливість відмовитися від низки умов на саму функцію Ω, які необхідні при наближенні у східчастому гіперболічному хресті. Однак у випадку класів функцій $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ такі питання не були досліджені.

Аналіз літератури свідчить про те, що в останнє десятиліття ведуться досить інтенсивні дослідження згаданих класів функцій та їхніх узагальнень в роботах китайських, німецьких, в'єтнамських, казахських і українських математиків. Констатуючи значний внесок цих науковців у розвиток досліджуваної проблематики і незважаючи на значну кількість опублікованих робіт у даних напрямках, варто зазначити, що залишилися ціла низка принципових нез'ясованих питань важливих для розвитку теорії наближення, які потребують свого вирішення.

Таким чином, з огляду на сказане вище, актуальним є дослідження різних апроксимаційних характеристик, особливо для "граничних" значень деяких параметрів або у близьких ситуаціях, класів Нікольського–Бєсова періодичних та неперіодичних функцій з домінуючою мішаною похідною $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ та їхніх узагальнень у неперіодичному випадку — $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, ізотропних та анізотропних класів Нікольського–Бєсова неперіодичних функцій — $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, а також класів Соболєва періодичних функцій — $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами. Дисертацію виконано у відділі теорії функцій Інституту математики НАН України згідно з науково-дослідними темами "Апроксимативні та структурні характеристики функціональних множин", номер державної реєстрації 0111U002079; "Розробка методів математичного моделювання та теорії наближень для розв'язання актуальних проблем сучасного природознавства", номер державної реєстрації 0112U002322; "Еволюційні крайові задачі й апроксимативні властивості функціональних множин та їх застосування", номер державної реєстрації 0118U005389; "Апроксимаційні характеристики та структурні властивості функціональних множин", номер державної реєстрації 0118U005389; "Інноваційні методи у теорії диференціальних рівнянь, обчислювальній математиці та математичному моделюванні", номер державної реєстрації 0122U000670; "Дослідження структурних та апроксимаційних властивостей функціональних множин", номер державної реєстрації 0121U100477.

Мета і завдання дослідження. Основною метою роботи є створення нових і вдосконалення відомих методів розв'язання екстремальних задач теорії апроксимації, а саме методів для знаходження точних за порядком оцінок лінійної та нелінійної апроксимації важливих функціональних класів у нормованих просторах.

Об'єктом дослідження є класи функцій однієї та багатьох дійсних змінних, що належать відповідним нормованим просторам: класи періодичних та неперіодичних функцій з домінуючою мішаною похідною;

класи Соболєва періодичних функцій; ізотропні та анізотропні класи Нікольського–Бєсова неперіодичних функцій; класи неперіодичних функцій, що є узагальненням класів з домінуючою мішаною похідною. Також у дисертаційній роботі досліджуються аналоги періодичних сум Валле Пуссена та лінійні оператори, які реалізують порядкові значення найкращих наближень.

Предметом дослідження даної роботи є апроксимаційні характеристики класів функцій однієї та багатьох змінних у нормованих просторах функцій, що визначені в $\mathbb{R}^d$ і $\mathbb{T}^d$, оцінки норм аналогів періодичних сум Валле Пуссена. Досліджуються точні верхні межі величин, а саме, величини найкращого наближення класів функцій за допомогою цілих функцій експоненціального типу, з носієм їхнього перетворення Фур'є у різних множинах скінченної міри Лебега, зокрема, у східчастому гіперболічному хресті, M-вимірний колмогоровський поперечник, ентропійні числа, найкращі ортогональні тригонометричні наближення, наближення східчасто-гіперболічними сумами Фур'є, ортопоперечники.

Завдання дослідження:

- Знайти точні за порядком оцінки наближення класів функцій з домінуючою мішаною похідною $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p < \infty$, за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті в метриці простору Лебега $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 < q \leqslant \infty$.

- Для функцій з класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ знайти точні за порядком оцінки наближення за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є зосередженим на множинах лебегова міра яких є скінченною при деяких значеннях параметрів.

- Отримати порядкові оцінки ентропійних чисел та M-вимірного колмогоровського поперечника класів періодичних функцій з домінуючою мішаною гладкістю $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, $d \geqslant 2$, у метриці простору квазінеперервних функцій $QC(\mathbb{T}^d)$.

- Встановити точні за порядком оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, у просторі $B_{\infty,1}(\mathbb{T}^d)$, $d \geqslant 1$. У багатовимірному випадку, $d \geqslant 2$, встановити точні за порядком оцінки наближень класів функцій $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ їхніми східчасто-гіперболічними сумами Фур'є у цьому ж просторі, а також знайти порядки ортопоперечників.

- Одержати точні за порядком оцінки ортопоперечників і близьких до них апроксимаційних характеристик класів Соболєва $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$ та класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ періодичних функцій однієї та багатьох змінних у просторі $B_{1,1}(\mathbb{T}^d)$.

- Дослідити норми лінійних операторів, які реалізують порядкові значення найкращого наближення класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ у просторі $B_{1,1}$ за допомогою тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів.

- Встановити точні за порядком оцінки наближення функцій з узагальнених класів із домінуючою мішаною похідною $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є на множинах, які породжуються поверхнями рівня функції $\Omega(\boldsymbol{t})$ у метриці просторів Лебега.

- Знайти точні за порядком оцінки наближення функцій із класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ у рівномірній метриці за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті.

- Одержати точні за порядком оцінки величини наближення функцій із класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ у просторі $L_q(\mathbb{R}^d)$ за допомогою цілих функцій спеціального вигляду при деяких співвідношеннях між параметрами p і q.

- Встановити точні за порядком оцінки наближення функцій багатьох змінних із ізотропних класів Нікольського–Бєсова сумами типу Валле Пуссена у рівномірній та інтегральній метриках.

- Знайти точні за порядком оцінки наближення функцій багатьох змінних із ізотропних класів Нікольського–Бєсова $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ у метриці простору Лебега $L_q(\mathbb{R}^d)$ за допомогою цілих функцій експоненціального типу з певними обмеженнями на їхній спектр.

- Для функцій багатьох змінних із анізотропних класів Нікольського–Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ встановити точні за порядком оцінки найкращого наближення за допомогою цілих функцій з носіями їхнього перетворення Фур'є у d-вимірних "паралелепіпедах" у метриці просторів Лебега та одержати точні за порядком оцінки відхилення функцій з даних класів від їхніх відрізків інтеграла Фур'є у рівномірній метриці.

Методи дослідження. У роботі використано сучасні методи математичного та функціонального аналізу, теорії функцій багатьох змінних, теорії наближень, загальні методи розв'язування екстремальних задач теорії функцій, зокрема, методи дискретизації та декомпозиції, відповідним чином розвинуті, модифіковані або вдосконалені у залежності від поставлених завдань.

Наукова новизна отриманих результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, є новими і полягають у такому.

- Встановлено нові оцінки норми "блоків" Валле Пуссена, які є аналогами сум Валле Пуссена періодичних функцій багатьох змінних, у просторі Лебега.

- Одержано точні за порядком оцінки наближення класів функцій з домінуючою мішаною похідною $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p < \infty$, у просторі Лебега $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 < q \leqslant \infty$, за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті.

- Одержано точні за порядком оцінки наближення функцій з класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p < \infty$, за допомогою цілих функцій експоненціального типу зі спектром зосередженим на множинах лебегова міра яких є скінченною і похибка наближення оцінюється у рівномірній метриці.

- Для функцій з класів $S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ знайдено точні за порядком оцінки наближення у просторі $L_2(\mathbb{R}^d)$ за допомогою цілих функцій експоненціального типу зі спектром зосередженим на множинах лебегова міра яких є скінченною. Встановлено, що у деяких випадках такого роду наближення мають переваги у порівнянні з наближенням цих класів за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті.

- Отримано порядкові оцінки ентропійних чисел класів функцій $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, $d \geqslant 2$, з домінуючою мішаною гладкістю у просторі квазінеперервних функцій $QC(\mathbb{T}^d)$. Показано, що при $2 \leqslant p \leqslant \infty$, $2 \leqslant \theta < \infty$, $r_1 > \frac{1}{2}$ оцінка відповідної асимптотичної характеристики є точною за порядком.

- Для класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, $d \geqslant 2$, у метриці простору квазінеперервних функцій $QC(\mathbb{T}^d)$ за рахунок модифікації та вдосконалення методу дискретизації знайдено точну за порядком оцінку для M-вимірного колмогоровського поперечника у випадку $2 \leqslant p \leqslant \infty$, $2 \leqslant \theta < \infty$, $r_1 > \frac{1}{2}$ та встановлено оцінку зверху для деяких інших співвідношень між параметрами p та θ.

- Встановлено точні за порядком оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, у просторі $B_{\infty,1}(\mathbb{T}^d)$, $d \geqslant 1$. У випадку $d \geqslant 2$ встановлено точні за порядком оцінки наближень класів функцій $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ їхніми східчасто-гіперболічними сумами Фур'є у просторі $B_{\infty,1}(\mathbb{T}^d)$, а також порядки ортопоперечників у цьому ж просторі. У деяких випадках досліджено поведінку відповідних апроксимаційних характеристик класів Соболєва $W^{\boldsymbol{r}}_{1,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$ при $d \in \{1, 2\}$.

- Одержано точні за порядком оцінки ортопоперечників і близьких до них апроксимаційних характеристик класів Соболєва $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$ та класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ періодичних функцій однієї та багатьох змінних у просторі $B_{1,1}(\mathbb{T}^d)$.

- Встановлено, що у багатовимірному випадку, на противагу одновимірному, послідовність норм лінійних операторів, які реалізують порядкові значення найкращого наближення класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ у просторі $B_{1,1}(\mathbb{T}^d)$ за допомогою тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів, є необмеженою.

- Встановлено точні за порядком оцінки наближення функцій з узагальнених класів з домінуючою мішаною похідною $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є на множинах, які породжуються поверхнями рівня функції $\Omega(\boldsymbol{t})$ у випадку, коли похибка наближення оцінюється у просторі $L_q(\mathbb{R}^d)$, а параметри p та q задовольняють співвідношенням $1 < p \leqslant q < \infty$ і $1 < p < \infty$, $q = \infty$.

- Знайдено точні за порядком оцінки наближення функцій із класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ у рівномірній метриці за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті.

- Одержано точні за порядком оцінки величини наближення функцій із класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ за допомогою цілих функцій зі спектром на множинах скінченної міри у просторі $L_q(\mathbb{R}^d)$ при деяких співвідношеннях між параметрами p і q, а саме: $1 < p < q < \infty$; $1 < p = q \leqslant 2$; $1 < p < \infty$, $q = \infty$. При цьому встановлено, що у деяких ситуаціях величина $e^{\mathfrak{F}}_M\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ і величина найкращого наближення функцій із даних класів за допомогою цілих функцій з носієм їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті — $\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ мають різні порядки.

- Одержано точні за порядком оцінки наближення функцій багатьох змінних із ізотропних класів Нікольського–Бєсова сумами типу Валле Пуссена у рівномірній та інтегральній метриках.

- Знайдено точні за порядком оцінки наближення функцій багатьох змінних із ізотропних класів Нікольського–Бєсова $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ у просторі Лебега $L_q(\mathbb{R}^d)$ за допомогою цілих функцій експоненціального типу з певними обмеженнями на їхній спектр.

- Для функцій багатьох змінних із анізотропних класів Нікольського–Бєсова встановлено точні за порядком оцінки найкращого наближення за допомогою цілих функцій з носіями їхнього перетворення Фур'є у d-вимірних "паралелепіпедах", похибка наближення при цьому вимірюється у просторі Лебега $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$. Також для даних класів функцій одержано точні за порядком оцінки відхилення функцій від їхніх відрізків інтеграла Фур'є у рівномірній метриці.

Практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати і розвинені в ній методи можуть знайти практичне застосування у подальших дослідженнях екстремальних задач теорії наближення функцій дійсної і комплексної змінних та функціональному аналізі, а також вони можуть бути використані в теоретичних дослідженнях і у деяких інших галузях науки і техніки, зокрема, математичній фізиці, обчислювальній математиці, фінансовій математиці.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, що виносяться на захист, одержано здобувачем самостійно. У статтях, які опубліковано разом із іншими авторами, розподіл особистих внесків такий.

У роботах [1 – 4] — визначення напрямку досліджень, обговорення результатів, контроль якості викладення результатів належить науковому консультанту А. С. Романюку, перевірка основних гіпотез і детальне доведення тверджень належить здобувачеві.

У статті [6] співавторка О. Я. Радченко незалежно виконувала комп'ютерні обчислення для перевірки лем 1 та 2, а у роботі [5] співавторці належить перевірка результатів теореми 4. Постановка задач у цих роботах, вибір методів їхнього розв'язання й доведення результатів належать здобувачеві.

У спільних з С. А. Стасюком роботах [9, 12] внесок авторів рівноцінний. Результати робіт включені С. А. Стасюком у дисертацію на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук "Апроксимаційні характеристики класів гладких функцій однієї та багатьох змінних" (https://www.imath.kiev.ua/zahyst/?n=anons&id=173).

У спільній з В. В. Миронюком роботі [16] внесок авторів рівноцінний. Результати роботи включені В. В. Миронюком у дисертацію на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук "Апроксимативні характеристики класів функцій багатьох змінних".

Апробація результатів дисертації. Результати роботи були представлені, доповідалися і обговорювалися на:

— Міжнародній математичній конференції "Боголюбовські читання DIF–2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75–річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, Севастополь, 23 – 30 червня 2013 року;

— Міжнародній математичній конференції "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки" до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Георгія Миколайовича, 23 – 24 квітня 2014 р., Київ;

— Міжнародній математичній конференції "Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування" присвяченій 60-річчю В. І. Рукасова (1953 – 2009), 21 – 24 травня 2014 р., Слов'янськ;

— IV міжнародній ганській конференції присвяченій 135 річниці від дня народження Ганса Гана. 30 червня – 5 липня 2014 р., Чернівці;

— Mecklenburg Workshop "Approximation Methods and Function Spaces", Hasenwinkel, Germany, March 16 – 20, 2015;

— Міжнародній конференції молодих математиків. 3 – 6 червня 2015 р., Київ, Україна;

— Third conference "Mathematics for Life Sciences". Rivne, September 15 – 19, 2015;

— II Всеукраїнській науковій конференції "Теорія наближень і її застосування". Дніпропетровськ (Україна) 8 – 11 жовтня 2015 р.;

— AMMODIT and final EUMLS Workshop "Mathematics for Life Sciences", Hasenwinkel, Germany, March 07 – 11, 2016;

— Конференції молодих учених "Підстригачівські читання — 2016", Львів, 25 – 27 травня 2016 року;

— Міжнародній конференції "Теорія наближення функцій та її застосування", присвяченій 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця, Слов'янськ, 28 травня – 3 червня 2017 року;

— Міжнародній конференції молодих математиків, присвяченій 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського, Київ, 7 – 10 червня 2017 року;

— Міжнародній конференції молодих математиків, Київ, 6 – 8 червня 2019 року;

— Міжнародній конференція “Функціональні методи в теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV”, присвяченій 100-річчю з дня народження В. К. Дзядика (1919–1998), Світязь (Волинська обл.), 20 – 26 червня 2019 року;

— Всеукраїнській науковій конференції “Теорія наближень і її застосування” з нагоди 70-річчя Владислава Федоровича Бабенка, Дніпро, Україна, 3 – 5 жовтня 2019 р.;

— Міжнародній науковій конференції “Теорія наближень і її застосування” присвяченій 100-річчю з дня народження Миколи Павловича Корнєйчука, Дніпро, Україна, 16 – 19 жовтня 2020 р.;

— International Online Workshop on Approximation Theory, March 19 – 21, 2021, Ivano-Frankivsk;

— International Conference Mathematical Analysis, Differential Equation and Applications (MADEA–9), Kyrgyz–Turkish Manas University, Bishkek, Kyrgyz Republic, June 21 – 25, 2021;

— The International Online Conference “Current Trends in Abstract and Applied Analysis”, May 12 – 15, 2022, Ivano-Frankivsk, Ukraine;

— Конференції молодих учених “Підстригачівські читання — 2022”, 25 – 27 травня 2022 р., Львів;

— Міжнародній конференції “Теорія наближення функцій та її застосування”, присвяченій 80-річчю з дня народження члена–кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942–2007), 6 – 10 червня 2022 р., Луцьк, Україна;

— International Workshop “Current Trends in Analysis and Approximation Theory”, July 18, 2023, the International Telematic University UNINETTUNO, Roma, Italy;

— Workshop “From Modeling and Analysis to Approximation and Fast Algorithms”, Hasenwinkel, Germany, September 02 – 06, 2023;

— засіданнях Вченої ради Інституту математики НАН України;

— семінарах відділу теорії функцій Інституту математики НАН України, керівник семінару – доктор фіз.-мат. наук, проф. А. С. Романюк;

— семінарі Інституту математики НАН України, керівники семінару – чл.-кор. НАН України С. І. Максименко, доктор фіз.-мат. наук, проф. А. Ю. Пилипенко;

— семінарі Інституту математики Університету м. Любек, Німеччина, керівник семінару – проф. Ю. Престін;

— семінарі кафедри математичного аналізу та оптимізації Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, керівник семінару – доктор фіз.-мат. наук, проф. Н. В. Парфінович;

— семінарі "Сучасний аналіз" в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, керівники семінару – чл.-кор. НАН України І. О. Шевчук, доктор фіз.-мат. наук, проф. О. О. Курченко, доктор фіз.-мат. наук, проф. В. М. Радченко;

— семінарі з теорії аналітичних функцій Львівського національного університету імені Івана Франка, керівник семінару – доктор фіз.-мат. наук, проф. О. Б. Скасків;

— семінарах молодих вчених Інституту математики НАН України.

Публікації. Результати дисертації висвітлено у 39 наукових публікаціях (див. список публікацій здобувача на с. 16 – 22), з них 17 — статті у наукових виданнях, внесених до переліку наукових фахових видань України та закордонних виданнях, а також 22 публікації у тезах доповідей і матеріалах міжнародних та вітчизняних конференцій. Статті [1 –13, 15] проіндексовані у міжнародних наукометричних базах Scopus або Web of Science, стаття [16] проіндексована у наукометричній базі MathSciNet. Статті [1, 5, 7] опубліковані у виданнях з квартиля Q2 відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, статті [2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 15] у виданнях з квартиля Q3, стаття [12] у виданні з квартиля Q4. Відповідно до п. 2 Наказу № 1220 МОН України від 23.09.2019 вказані 17 статей зараховуються як 33 наукові публікації. Публікації [7, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 17] одноосібні.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 249 найменувань та додатку зі списком публікацій і апробацією результатів. Повний обсяг роботи становить 312 сторінок друкованого тексту із них список використаних джерел міститься на 28 сторінках, а додаток — на 11 сторінках.

Державні нагороди (премії) України або інших держав. За роботу "Екстремальні проблеми наближення класів функцій однієї та багатьох змінних", у складі колективу Янченко С.Я., Пожарська К.В., Степанюк Т.А. присуджено премію Президента України для молодих вчених за 2021 рік (УКАЗ ПРЕЗИДЕНТА УКРАЇНИ №659/2021). До зазначеної роботи увійшли 11 статей, а саме статті [6, 8 – 17] зі списку публікацій.

Подяки. Висловлюю щиру вдячність науковому консультанту завідувачу відділу теорії функцій, доктору фізико-математичних наук, професору Анатолію Сергійовичу РОМАНЮКУ за підтримку, постійну увагу, допомогу в роботі та корисні обговорення одержаних результатів, а також іншим своїм співавторам та усім співробітникам відділу теорії функцій за плідну співпрацю.

Розділ 1

Огляд літератури, основні означення та попередні відомості

Усі твердження, які увійшли в дану роботу і не належать автору, наведено із зазначенням авторства і/або відповідним посиланням на джерело.

1.1. Простори функцій з домінуючою мішаною похідною визначені в $\mathbb{R}^{\boldsymbol{d}}$

У даному підрозділі наведено означення просторів функцій з домінуючою мішаною похідною $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, означення основних апроксимаційних характеристик, які розглядаються у дисертаційній роботі для цих просторів функцій, дана коротка історія їхнього дослідження та огляд відомих результатів.

1.1.1. Означення класів функцій

Нехай $\mathbb{R}^d$ — d-вимірний евклідів простір з елементами $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_d)$, $x_i \in \mathbb{R}$, і $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d$. Нехай $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, — простір вимірних на $\mathbb{R}^d$ функцій $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \dots, x_d)$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{x})|^q d\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{q}}, \ 1 \leqslant q < \infty, \tag{1.1}$$

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} := \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{x})|. \tag{1.2}$$

Для функції $f(\boldsymbol{x}) \in L_q(\mathbb{R}^d)$ визначимо різницю 1-го порядку з кроком h за змінною x_j таким чином:

$$\Delta_{h,j} f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_d) - f(\boldsymbol{x})$$

і, відповідно, l-го порядку, $l \in \mathbb{N}$,

$$\Delta^l_{h,j} f(\boldsymbol{x}) = \overbrace{\Delta_{h,j} \dots \Delta_{h,j}}^{l} f(\boldsymbol{x}).$$

Нехай задано вектори $\boldsymbol{h} = (h_1, \dots, h_d)$, $h_j \in \mathbb{R}$, і $\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1, d}$. Тоді мішана різниця $\boldsymbol{k}$-го порядку з векторним кроком $\boldsymbol{h}$ визначається рівністю

$$\Delta^{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) = \Delta^{k_1}_{h_1,1} \Delta^{k_2}_{h_2,2} \dots \Delta^{k_d}_{h_d,d} f(\boldsymbol{x}). \tag{1.3}$$

Крім цього розглянемо множину індексів $e_d = \{1, 2, \dots, d\}$, $d \in \mathbb{N}$, $e \subset e_d$, і для заданого вектора $\boldsymbol{r} = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j \geqslant 0$, $j = \overline{1, d}$ ($\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^d_+$), позначимо вектор $\boldsymbol{r}^e = (r^e_1, \dots, r^e_d)$, де

$$r^e_i = \begin{cases} r_i, & i \in e_d; \\ 0, & i \in e_d \backslash e. \end{cases}$$

Таким чином, порожній множині $\varnothing$ відповідає нуль-вектор $\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{0}} = (0, \dots, 0)$.

Нерівності типу $\boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$) для векторів $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_d)$ та $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_d)$ будемо розуміти покоординатно, тобто $a_j \leqslant b_j$ ($a_j > b_j$), $j = \overline{1, d}$. Також будемо використовувати записи $\boldsymbol{t} \geqslant \boldsymbol{0}$ ($\boldsymbol{t} > \boldsymbol{0}$), якщо $t_j \geqslant 0$ ($t_j > 0$), $j = \overline{1, d}$, і $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$, якщо $a_i \neq b_i$ хоча б для одного i, $i = \overline{1, d}$.

Простори $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} B(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$, де $\boldsymbol{r}$ — заданий вектор із невід'ємними координатами означаються таким чином [2] (див. також [55]):

1) якщо $1 \leqslant \theta < \infty$, то

$$S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} B(\mathbb{R}^d) := \Big\{ f \in L_p(\mathbb{R}^d) \colon \|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} B(\mathbb{R}^d)} < \infty \Big\},$$

де норма задається рівністю

$$\|f\|_{S^{\boldsymbol r}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} + \sum_{\substack{e\subset e_d\\ e\neq\varnothing}} \left(\int\limits_0^2 \cdots \int\limits_0^2 \prod_{j\in e} h_j^{-\theta r_j - 1} \|\Delta_{\boldsymbol h^e}^{\boldsymbol k^e} f(\cdot)\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)} \prod_{j\in e} dh_j \right)^{\frac{1}{\theta}}; \tag{1.4}$$

2) якщо $\theta = \infty$, то

$$S^{\boldsymbol r}_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d) \equiv S^{\boldsymbol r}_{p}H(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in L_p(\mathbb{R}^d) \colon \|f\|_{S^{\boldsymbol r}_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)} < \infty \right\}$$

і

$$\|f\|_{S^{\boldsymbol r}_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} + \sum_{\substack{e\subset e_d\\ e\neq\varnothing}} \sup_{\boldsymbol h > 0} \prod_{j\in e} h_j^{-r_j} \|\Delta_{\boldsymbol h^e}^{\boldsymbol k^e} f(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}, \tag{1.5}$$

де $k_j > r_j \geqslant 0$, $j = \overline{1, d}$. Зазначимо, що простори функцій $S^{\boldsymbol r}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ при значенні параметра $\theta = \infty$ збігаються з просторами $S^{\boldsymbol r}_{p}H(\mathbb{R}^d)$, які вперше розглянув С. М. Нікольський [80], а у випадку $1 \leqslant \theta < \infty$ вони були введені Т. І. Амановим [2]. Дані простори функцій називають просторами функцій з домінуючою мішаною гладкістю (похідною), крім цього зазначимо, що в літературі їх також прийнято називати просторами Нікольського–Бєсова функцій з домінуючою мішаною гладкістю (похідною) або скорочено простори функцій з мішаною гладкістю.

У подальшому будемо вважати, що координати вектора $\boldsymbol r = (r_1, \ldots, r_d)$, що входить в означення просторів $S^{\boldsymbol r}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, впорядковані таким чином: $0 < r_1 = r_2 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \leqslant \ldots \leqslant r_d$. Також вектору $\boldsymbol r = (r_1, \ldots, r_d)$ поставимо у відповідність вектор $\boldsymbol\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$, $\gamma_j = \frac{r_j}{r_1}$, $j = \overline{1, d}$, а вектору $\boldsymbol\gamma$, в свою чергу, — вектор $\boldsymbol\gamma'$, де $\gamma'_j = \gamma_j$ при $j = \overline{1, \nu}$ і $1 < \gamma'_j < \gamma_j$ при $j = \overline{\nu + 1, d}$.

С. М. Нікольським і Т. І. Амановим для просторів функцій $S^{\boldsymbol r}_{p}H(\mathbb{R}^d)$ та $S^{\boldsymbol r}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ було отримано пряму і обернену теореми зображення функцій з цих просторів за допомогою цілих функцій експоненціального типу. Ці теореми є основним апаратом для одержання теорем вкладення для даних просторів функцій. Основні результати щодо досліджень просторів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ представлено у монографії Т. І. Аманова [1], де ним розглядалися також і відповідні класи періодичних функцій. У монографії наводяться теореми представлення і вкладення, крім цього розглянуто питання компактності даних просторів та їхньої інтерполяції, також вказано застосування теорії просторів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ до розв'язання крайових задач.

Зазначимо, що фундаментальне значення для одержання прямих і обернених теорем представлення функцій з просторів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ за допомогою цілих функцій експоненціального типу і, відповідно, теорем вкладення відіграють нерівності для цілих функцій скінченного степеня, отримані С. М. Нікольським у 1951 р. [77] та викладені у його монографії [78, гл. 3]. Нагадаємо означення цілої функції експоненціального типу.

Функцію

$$g = g_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{z}) = g_{\nu_1,\ldots,\nu_d}(z_1,\ldots,z_d),$$

де $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1,\ldots,\nu_d) \geqslant \mathbf{0}$ — невід'ємний вектор, називають цілою функцією експоненціального типу $\boldsymbol{\nu}$, якщо вона володіє такими властивостями:

1. Вона є цілою функцією за всіма змінними, тобто розкладається в кратний степеневий ряд

$$g(\boldsymbol{z}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d_+} a_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{k}} = \sum_{\substack{k_l \geqslant \mathbb{Z}_+ \\ l=\overline{1,d}}} a_{k_1,\ldots,k_d} z_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot z_d^{k_d}$$

зі сталими коефіцієнтами $a_{\boldsymbol{k}} = a_{k_1,\ldots,k_d}$, який збігається для всіх комплексних $\boldsymbol{z} = (z_1,\ldots,z_d)$.

2. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке додатне число A_ε, що для всіх комплексних $z_j = x_j + iy_j$, $j = \overline{1,d}$, виконується нерівність

$$|g(\boldsymbol{z})| \leqslant A_\varepsilon \exp\sum_{j=1}^{d}(\nu_j+\varepsilon)|z_j|.$$

Тепер сформулюємо твердження, яке буде нами істотно використовуватися при встановленні результатів.

Твердження 1.1 ([78], § 3.3.4)**.** *Якщо* $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, *то для цілої функції експоненціального типу* $g_{\boldsymbol{\nu}} \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_d)$, $\nu_j \geqslant 0$, $j = \overline{1, d}$, *має місце нерівність*

$$\|g_{\boldsymbol{\nu}}\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2^d \left(\prod_{j=1}^{d} \nu_j \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|g_{\boldsymbol{\nu}}\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}.$$

Дану нерівність прийнято називати “нерівність різних метрик Нікольського” для цілих функцій експоненціального типу.

Наведемо теорему про представлення функцій з простору $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ рядами цілих функцій скінченного степеня, яку сформулюємо у такій формі:

Твердження 1.2. *Для того, щоб функція* f *належала простору* $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, $\boldsymbol{r} = (r_1, \dots, r_d) > \mathbf{0}$, $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$ *необхідно і достатньо, щоб вона зображалася збіжним у метриці простору* $L_p(\mathbb{R}^d)$ *рядом*

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{m} \geqslant \mathbf{0}} Q_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x}), \tag{1.6}$$

де $Q_{\boldsymbol{m}}$ — *цілі функції степеня* 2^{m_j} *по змінних* x_j, $j = \overline{1, d}$, *для якого величина*

$$\left(\sum_{\boldsymbol{m} \geqslant \mathbf{0}} 2^{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{m})\theta} \|Q_{\boldsymbol{m}}(\cdot)\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty.$$

Крім того, нижня границя цієї величини по всеможливих розкладах (1.6) *еквівалентна нормі* $\|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)}$.

Твердження 1.2 для просторів $S^{\boldsymbol{r}}_{p}H(\mathbb{R}^d)$ ($\theta = \infty$) отримано С. М. Нікольським [80, теорема 1, теорема 2], а для просторів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ — Т. І. Амановим [2, теорема 2.1, теорема 2.2], у більш загальному випадку воно встановлено в [55, теорема 2.1]. Зазначимо також, що саме твердження 1.2 дало можливість означити дані простори функцій у декомпозиційній формі.

Також сформулюємо одну з теорем вкладення для просторів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, яка має важливе значення при дослідженні апроксимаційних властивостей цих просторів і одержана Т. І. Амановим [1, теорема 3.1], [2, теорема 3.2].

Твердження 1.3. *Нехай* $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ *і вектор* $\boldsymbol{\rho}$ *такий, що* $\rho_j = r_j - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) > 0$, $j = \overline{1,d}$. *Тоді, якщо* $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, *то* $f \in S^{\boldsymbol{\rho}}_{q,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ *і*

$$\|f\|_{S^{\boldsymbol{\rho}}_{q,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \leqslant C^* \|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)}, \quad C^* > 0.$$

Зазначимо, що для просторів $S^{\boldsymbol{r}}_{p}H(\mathbb{R}^d)$ $(\theta = \infty)$ твердження 1.3 встановлено С. М. Нікольським [80, теорема 5].

Результат твердження 1.3 визначає умови на координати вектора $\boldsymbol{r}$, за яких для функції $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ ми можемо стверджувати, що f також буде належати і до простору $L_q(\mathbb{R}^d)$.

Тепер дамо означення просторів Нікольського–Бєсова функцій мішаної гладкості $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ опосередковано через так зване декомпозиційне представлення елементів цих просторів. Уперше декомпозиційне представлення та відповідне йому нормування з'явилося у роботі С. М. Нікольського та П. І. Лізоркіна [55] і, як з'ясувалося пізніше, відіграло ключову роль у дослідженнях, які пов'язані з апроксимацією класів функцій. Це представлення істотно використовується при доведенні одержаних результатів і базується на понятті перетворення Фур'є, яке можна означити, використавши узагальнені функції (див., наприклад, [12, гл. 11], [23, гл. 2], [51], [78, гл. 1, §5]). Також з відомостями про узагальнені функції та їхні властивості можна ознайомитися у роботах І. М. Гельфанда та Г. Є. Шилова [27–29].

Зазначимо, що теорія перетворення Фур'є є потужним інструментом для дослідження функціональних просторів, зокрема, і просторів Нікольського–Бєсова. Дана теорія була суттєво використана і відповідно удосконалена П. І. Лізоркіним [51, 54]. Згодом перетворення Фур'є широко використовувалося при вивченні різних класів функцій В. І. Буренковим [21], М. Л. Гольдманом [33], Г. А. Калябіним [42], П. І. Лізоркіним [52, 53], Г. Г. Магаріл-Ільяєвим [58] та іншими.

Наведемо спочатку необхідні позначення і означення.

Нехай $S = S(\mathbb{R}^d)$ — простір Л. Шварца основних нескінченно диференційованих на $\mathbb{R}^d$ комплекснозначних функцій φ, які спадають на нескінченності разом зі своїми похідними швидше за будь-який степінь функції $\left(x_1^2 + \ldots + x_d^2\right)^{-\frac{1}{2}}$, що розглядається з відповідною топологією. Через S' позначимо простір лінійних неперервних функціоналів над S. Зазначимо, що елементами простору S' є узагальнені функції. Якщо $f \in S'$, $\varphi \in S$, то $\langle f, \varphi\rangle$ позначає значення f на φ.

Перетворення Фур'є $\mathfrak{F}\varphi\colon S \to S$ визначається за формулою

$$(\mathfrak{F}\varphi)(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(\boldsymbol{t}) e^{-i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{t})} d\boldsymbol{t} \equiv \widetilde{\varphi}(\boldsymbol{\lambda}),$$

де $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d$ і $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{t}) = \sum\limits_{i=1}^{d} \lambda_i t_i$ — скалярний добуток в $\mathbb{R}^d$ векторів $\boldsymbol{\lambda}$ і $\boldsymbol{t}$.

Обернене перетворення Фур'є задається таким чином:

$$(\mathfrak{F}^{-1}\varphi)(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{t})} d\boldsymbol{\lambda} \equiv \widehat{\varphi}(\boldsymbol{t}).$$

Перетворення Фур'є узагальнених функцій (для нього ми зберігаємо те ж позначення) визначається згідно з формулою

$$\langle \mathfrak{F} f, \varphi\rangle = \langle f, \mathfrak{F}\varphi\rangle, \quad \langle \widetilde{f}, \varphi\rangle = \langle f, \widetilde{\varphi}\rangle,$$

де $f \in S'$, а $\varphi \in S$.

Обернене перетворення узагальнених функцій також позначимо $\mathfrak{F}^{-1} f$, і визначається воно аналогічно до прямого перетворення Фур'є за правилом

$$\langle \mathfrak{F}^{-1} f, \varphi\rangle = \langle f, \mathfrak{F}^{-1}\varphi\rangle, \quad \langle \widehat{f}, \varphi\rangle = \langle f, \widehat{\varphi}\rangle.$$

Носієм неперервної на $\mathbb{R}^d$ функції φ називається замикання множини точок $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, де $\varphi(\boldsymbol{x}) \neq 0$, і позначається $\operatorname{supp} \varphi$.

Узагальнена функція f перетворюється в нуль на відкритій множині G, якщо $\langle f, \varphi \rangle = 0$ для всіх $\varphi \in S$ і $\operatorname{supp} \varphi \subset G$. Об'єднання всіх околів, у яких f перетворюється в нуль є відкритою множиною, яку називають нульовою множиною узагальненої функції f і позначають G_f. Носієм узагальненої функції називають доповнення множини G_f до $\mathbb{R}^d$, тобто замкнену множину $\operatorname{supp} f = \bar{G}_f$.

Зазначимо, що кожна функція $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, визначає лінійний неперервний функціонал на S згідно з формулою

$$\langle f, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x}) \varphi(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}, \quad \varphi \in S,$$

і, як наслідок, у цьому сенсі вона є елементом S'. Тому перетворення Фур'є функції $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, можна розглядати, як перетворення Фур'є узагальненої функції $\langle f, \varphi \rangle$.

Для $\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}_+^d$ розглянемо множину

$$Q_{2^{\boldsymbol{s}}}^* = \Big\{ \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \colon \ \eta(s_j) 2^{s_j - 1} \leqslant |\lambda_j| < 2^{s_j}, \lambda_j \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1, d} \Big\}, \tag{1.7}$$

де $\eta(0) = 0$ і $\eta(t) = 1$, $t > 0$.

Нехай $A \subset \mathbb{R}^d$ — деяка вимірна множина. Позначимо через $\chi_{{}_A}$ характеристичну функцію множини A, і для $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, коректно визначена і належить до $L_p(\mathbb{R}^d)$ функція

$$\delta_{\boldsymbol{s}}^*(f, \boldsymbol{x}) = \mathfrak{F}^{-1}(\chi_{Q_{2^{\boldsymbol{s}}}^*} \cdot \mathfrak{F} f). \tag{1.8}$$

Тоді простори $S_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $\boldsymbol{r} > \boldsymbol{0}$, можна означити таким чином [55]:

$$S_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{R}^d) := \Big\{ f \in L_p(\mathbb{R}^d) \colon \|f\|_{S_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{R}^d)} < \infty \Big\},$$

де

$$\|f\|_{S_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{R}^d)} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0}} 2^{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{r})\theta} \|\delta_{\boldsymbol{s}}^*(f, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \tag{1.9}$$

при $1 \leqslant \theta < \infty$ і

$$\|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)} \equiv \|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p}H(\mathbb{R}^d)} \asymp \sup_{\boldsymbol{s}\geqslant\boldsymbol{0}} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})}\|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.10}$$

Тут і далі по тексту для додатних величин A і B використовуємо запис $A \asymp B$, який означає, що існують такі додатні сталі C_1 і C_2, які не залежать від одного істотного параметра у величинах A і B (наприклад, у співвідношеннях (1.9) і (1.10) — від функції f), що $C_1A \leqslant B \leqslant C_2A$. Якщо тільки $B \leqslant C_2A$ $\big(B \geqslant C_1A\big)$, то пишемо $B \ll A$ $\big(B \gg A\big)$. Всі сталі C_i, $i = 1, 2, \ldots$, які зустрічаються у роботі, можуть залежати лише від параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій оцінюється похибка наближення, та розмірності простору $\mathbb{R}^d$. У деяких випадках цю залежність будемо вказувати у явному вигляді. Крім того, з метою уникнення нагромадження індексів, розрізняти сталі і відповідно проводити їхню нумерацію будемо в межах кожного розділу дисертаційної роботи окремо. Це не повинно викликати жодних непорозумінь, оскільки у дисертаційній роботі основна увага зосереджена на відшуканні порядкових оцінок. Аналогічне зауваження відноситься також і до індексації позначень деяких величин та функцій.

У випадку $1 \leqslant p \leqslant \infty$, видозмінивши $\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x})$, наприклад, по типу Валле Пуссена, норму функцій з просторів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ можна означити в дещо іншій формі.

Далі, нехай

$$K_m(t) = \int_{\mathbb{R}} k_m(\lambda)e^{-2\pi i\lambda t}d\lambda,\ m \in \mathbb{Z}_+, K_{-1} \equiv 0,$$

де

$$k_m(\lambda) = \begin{cases} 1, & |\lambda| < 2^{m-1}, \\ 2(1 - \frac{|\lambda|}{2^m}), & 2^{m-1} \leqslant |\lambda| \leqslant 2^m, \\ 0, & |\lambda| > 2^m, \end{cases}$$

$$k_0(\lambda) = \begin{cases} 1-|\lambda|, & 0 \leqslant |\lambda| \leqslant 1, \\ 0, & |\lambda| > 1. \end{cases}$$

Для кожного вектора $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1,d}$, покладемо

$$A^*_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} \big(K_{s_j}(x_j) - K_{s_j-1}(x_j)\big), \tag{1.11}$$

$$A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) * A^*_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{y}) A^*_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}.$$

Зауважимо, що $A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x})$ — “блоки” Валле Пуссена функції f і є аналогами “блоків” сум Валле Пуссена періодичних функцій багатьох змінних (див., наприклад, [123]).

Справедливим є таке твердження.

Лема 1.4 ([236]). *Нехай $1 \leqslant p \leqslant \infty$, тоді для будь-якої функції $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ маємо*

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{s}} A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x})$$

і, крім того, $\operatorname{supp} \mathfrak{F} A_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x}) \subseteq Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}}$.

У прийнятих позначеннях простори $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p,\theta \leqslant \infty$, $\boldsymbol{r} > 0$, можна означити таким чином (див., наприклад, [235, 236]):

$$S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d) := \Big\{ f \in L_p(\mathbb{R}^d) \colon \|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} < \infty \Big\},$$

де

$$\|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0}} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \tag{1.12}$$

при $1 \leqslant \theta < \infty$ і

$$\|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p}H(\mathbb{R}^d)} \asymp \sup_{\boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0}} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \tag{1.13}$$

при $\theta = \infty$.

Як видно з (1.9), (1.10), (1.12), (1.13), для $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, має місце співвідношення

$$\|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp \|A^*_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.14}$$

Під класом $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ будемо розуміти множину функцій $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ для яких $\|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1$, і при цьому збережемо для класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ ті ж позначення, що і для просторів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$.

1.1.2. Означення апроксимаційних характеристик та відомі результати

Перейдемо до означення апроксимаційних характеристик, які досліджуються у дисертаційній роботі.

Нехай $\mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^d_+$ — деяка скінченна множина. Покладемо

$$Q(\mathcal{L}) = \bigcup_{\boldsymbol{s} \in \mathcal{L}} Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}} \tag{1.15}$$

і позначимо

$$G\big(Q(\mathcal{L})\big) := \Big\{ f \in L_q(\mathbb{R}^d) \colon \mathrm{supp}\mathfrak{F}f \subseteq Q(\mathcal{L}) \Big\}. \tag{1.16}$$

Відомо, що елементами множини $G\big(Q(\mathcal{L})\big)$ є цілі функції експоненціального типу, носій перетворення Фур'є яких міститься на множині $Q(\mathcal{L})$ (див., наприклад, [78, §. 3.1]).

Для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, означимо величину

$$\begin{aligned} E\big(f, G\big(Q(\mathcal{L})\big)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} &:= E_{Q(\mathcal{L})}\big(f\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} := \\ &:= \inf_{g \in G(Q(\mathcal{L}))} \|f(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}, \end{aligned} \tag{1.17}$$

яка називається найкращим наближенням функції f цілими функціями експоненціального типу з множини $G\big(Q(\mathcal{L})\big)$.

Якщо $F \subset L_q(\mathbb{R}^d)$ — деякий функціональний клас, то покладемо

$$E_{Q(\mathcal{L})}\big(F\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} := \sup_{f \in F} E_{Q(\mathcal{L})}\big(f\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \tag{1.18}$$

і відповідно величина $E_{Q(\mathcal{L})}\big(F\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ називається найкращим наближенням класу F цілими функціями експоненціального типу з множини $G\big(Q(\mathcal{L})\big)$.

Далі для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, розглянемо функцію вигляду

$$S_{Q(\mathcal{L})}(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{s} \in \mathcal{L}} \delta_{\boldsymbol{s}}^*(f, \boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \tag{1.19}$$

і означимо

$$\mathcal{E}_{Q(\mathcal{L})}\big(f\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} := \|f(\cdot) - S_{Q(\mathcal{L})}(f, \cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \tag{1.20}$$

та

$$\mathcal{E}_{Q(\mathcal{L})}\big(F\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} := \sup_{f \in F} \mathcal{E}_{Q(\mathcal{L})}\big(f\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.21}$$

У залежності від вибору елементів множини $\mathcal{L}$ і відповідно побудови множини $Q(\mathcal{L})$ у дисертаційній роботі розглядається декілька апроксимаційних характеристик вигляду (1.18) і (1.21). Позначення і означення яких будемо конкретизувати у залежності від такого вибору.

Однією з таких множин, яка відіграє важливе значення у теорії наближення класів функцій $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, як уже зазначалося, є східчастий гіперболічний хрест. Нехай множина $\mathcal{L}$ містить вектори $\boldsymbol{s}$ для яких виконується умова $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{\gamma}) \leqslant n$, де $n \in \mathbb{N}$, тобто $\mathcal{L} = \{\boldsymbol{s} \colon (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{\gamma}) \leqslant n\}$. У цьому випадку в якості множини $Q(\mathcal{L})$ будемо розглядати множину $\tilde{Q}_n^{\gamma}$, яка означається таким чином:

$$\tilde{Q}_n^{\gamma} = \bigcup_{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{\gamma}) \leqslant n} Q_{2^{\boldsymbol{s}}}^*. \tag{1.22}$$

Множина $\tilde{Q}_n^{\gamma}$ називається східчастим гіперболічним хрестом в $\mathbb{R}^d$ і при цьому $\operatorname{mes} \tilde{Q}_n^{\gamma} \asymp 2^n n^{d-1}$ (див., наприклад, [55]), де $\operatorname{mes} \tilde{Q}_n^{\gamma}$ позначає лебегову міру множини $\tilde{Q}_n^{\gamma}$.

Для величини (1.17) будемо використовувати позначення

$$E_{\tilde{Q}_n^{\gamma}}\big(f\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} := \inf_{g \in G(\tilde{Q}_n^{\gamma})} \|f(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}.$$

Дана величина називається найкращим наближенням функції f цілими функціями експоненціального типу з носієм їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті.

Якщо $F = S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, то відповідно до (1.18) покладемо

$$E_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} := \sup_{f\in S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} E_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}\big(f\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.23}$$

Для (1.21) у цьому випадку будемо використовувати такі позначення:

$$\mathcal{E}_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} := \sup_{f\in S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \mathcal{E}_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}\big(f\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}, \tag{1.24}$$

де

$$\mathcal{E}_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}\big(f\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} := \|f(\cdot) - S_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}(f,\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}$$

і

$$S_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}(f,\boldsymbol{x}) = \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\leqslant n} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d. \tag{1.25}$$

Зазначимо, що $S_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}(f,\boldsymbol{x})$ — ціла функція зі спектром у східчастому гіперболічному хресті, тобто на множині $\tilde{Q}^{\gamma}_n$.

Зауважимо, що при $1<q<\infty$ і $f\in L_q(\mathbb{R}^d)$ має місце співвідношення (див., наприклад, [55])

$$E_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}(f)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{E}_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}\big(f\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_3 E_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}\big(f\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}, \tag{1.26}$$

де $C_3 \geqslant 1$ — деяка стала.

Серед робіт, у яких досліджувалися питання наближення класів функцій однієї та багатьох змінних, що визначені на $\mathbb{R}^d$, за допомогою цілих функцій зі спектром у східчастому гіперболічному хресті відзначимо, зокрема, роботи Я. С. Бугрова [20], Дінь Зунга [37], Г. Г. Магаріл-Ільяєва [57], В. М. Тіхомірова [128], H.-J. Schmeisser і W. Sickel [211], W. Sickel і T. Ullrich [212], Sun Yongsheng, Liu Yongping, Chen Dirong [221], Wang Heping [234], Wang Heping і Sun Yongsheng [237].

Величини (1.23) та (1.24), як уже зазначалося, на класах $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ досліджувалися Sun Yongsheng та Wang Heping і ними встановлено такі твердження.

Твердження 1.5 ([237]). *Якщо* $1 < p < q < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ *і* $r_1 > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, *то*

$$\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^{\gamma}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp E_{\tilde{Q}_n^{\gamma}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{-n\left(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+},$$

де $a_+ = \max\{a;\ 0\}$.

Твердження 1.6 ([237]). *Нехай* $1 < p < \infty$, $\boldsymbol{r} > \mathbf{0}$. *Тоді для* $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ *мають місце співвідношення*

$$\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^{\gamma}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp E_{\tilde{Q}_n^{\gamma}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp$$

$$\asymp \begin{cases} 2^{-nr_1} n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+}, \text{ коли } 1 < p \leqslant 2, \\ 2^{-nr_1} n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}, \text{ коли } 2 < p < \infty. \end{cases}$$

Твердження 1.7 ([237]). *Нехай* $\boldsymbol{\gamma}$ *і* $\boldsymbol{\gamma}'$ *вектори, які задаються таким чином:* $1 = \gamma_1 = \gamma_1' = \ldots = \gamma_\nu = \gamma_\nu'$ *і* $1 < \gamma_j' < \gamma_j$, $j = \overline{\nu+1, d}$ $(1 \leqslant \nu \leqslant d)$, $\boldsymbol{r} = r_1 \cdot \boldsymbol{\gamma}$. *Тоді для* $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ *мають місце співвідношення:*

$$a)\ \mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^{\gamma'}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp E_{\tilde{Q}_n^{\gamma'}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp$$

$$\asymp \begin{cases} 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+}, & \text{коли} \quad 1 < p \leqslant 2, \\ 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}, & \text{коли} \quad 2 < p < \infty, \end{cases}$$

де $r_1 > 0$;

$$б)\ \mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^{\gamma'}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R})^d\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp E_{\tilde{Q}_n^{\gamma'}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp$$

$$\asymp 2^{-n\left(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+},$$

$$\text{при} \quad 1 < p < q < \infty \quad і \quad r_1 > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$$

Множина $\tilde{Q}_n^{\gamma'}$ називається розширеним східчастим гіперболічним хрестом.

Твердження 1.8 ([236]). *Справедливі оцінки*

$$E_{\tilde{Q}_n^{\gamma}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_1 H(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp \begin{cases} 2^{-n\left(r_1-1+\frac{1}{q}\right)} n^{\frac{\nu-1}{q}}, & 1 < q < \infty, \quad r_1 > 1 - \frac{1}{q} \\ 2^{-nr_1} n^{d-1}, & q = 1, \quad r_1 > 0. \end{cases}$$

Наведемо ще один з перших результатів, який одержаний Я. С. Бугровим [20] в 1964 році, стосовно наближення класів $S^{\boldsymbol{r}}_p H(\mathbb{R}^d)$, де встановлена оцінка зверху наближення функції $f \in S^{\boldsymbol{r}}_p H(\mathbb{R}^d)$ за допомогою частинної суми вигляду (1.6), а саме

$$S_n(f, \boldsymbol{\rho}) = \sum_{2^{(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\rho})} \leqslant n} Q_{\boldsymbol{m}},$$

де $n \in \mathbb{N}$, вектор $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \ldots, \rho_d)$ задається таким чином

$$r_{d-1} < \rho_d < r_d, \quad \frac{\rho_d}{r_d} < \frac{\rho_{d-1}}{r_{d-1}} < \ldots < \frac{\rho_{\nu+1}}{r_{\nu+1}} < 1,$$
$$\rho_\nu = \rho_{\nu-1} = \ldots = \rho_1 = r_1.$$

Справедливим є таке твердження.

Твердження 1.9 ([20])**.** *Якщо функція $f \in S^{\boldsymbol{r}}_p H(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то*

$$\|f(\cdot) - S_n(f, \boldsymbol{\rho})\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_4 n^{-1} \big(\ln n \big)^{\nu - 1},$$

де C_4 — константа, яка залежить від d і $\boldsymbol{r}$.

Дамо означення ще однієї апроксимаційної характеристики, яка досліджується у роботі.

Для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, покладемо

$$e^{\mathfrak{F}}_M \big(f \big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} := \inf_{\mathcal{L}\colon \operatorname{mes} \mathfrak{M} \leqslant M} \|f(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f, \cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}, \tag{1.27}$$

де у цьому випадку

$$S_{\mathfrak{M}}(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{s} \in \mathcal{L}} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}). \tag{1.28}$$

Тобто у якості множини $Q(\mathcal{L})$ візьмемо множину, яку будемо позначати $\mathfrak{M}$, а саме $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathcal{L}) = \bigcup\limits_{\boldsymbol{s} \in \mathcal{L}} Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}}$, і дана множина вибирається таким чином, щоб її міра була скінченною, mes $\mathfrak{M} \leqslant M$, де $M \in \mathbb{N}$.

Зауважимо, що $S_{\mathfrak{M}}(f, \boldsymbol{x})$ є цілою функцією, яка належить простору $L_q(\mathbb{R}^d)$ і $\operatorname{supp} S_{\mathfrak{M}}(f, x) \subseteq \mathfrak{M}$.

Для $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\subset L_q(\mathbb{R}^d)$ позначимо

$$e^{\mathfrak{F}}_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} := \sup_{f\in S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} e^{\mathfrak{F}}_M\big(f\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.29}$$

Безпосередньо з означення апроксимаційних характеристик (1.24) і (1.29) випливає, що у випадку $\mathrm{mes}\ \tilde{Q}^{\gamma}_n \asymp \mathrm{mes}\ \mathfrak{M}$ виконується співвідношення

$$e^{\mathfrak{F}}_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \ll \mathcal{E}_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.30}$$

Зауважимо, що величину (1.29) у певному сенсі можна вважати неперіодичним аналогом величини (1.49) — найкращого ортогонального наближення і, відповідно, величину (1.24) — аналогом наближення східчасто-гіперболічною сумою Фур'є (3.5).

Мають місце такі твердження.

Твердження 1.10 ([145]). *Нехай $1<p<q<\infty$, $r_1>\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$. Тоді для $1\leqslant\theta\leqslant\infty$ справедливе порядкове співвідношення*

$$e^{\mathfrak{F}}_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp M^{-\left(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}\big(\log^{\nu-1}M\big)^{\left(r_1-\frac{1}{p}+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+}, \tag{1.31}$$

де $a_+=\max\{a;\ 0\}$.

Твердження 1.11 ([145]). *Нехай $1<p<2$, $r_1>0$. Тоді для $1\leqslant\theta\leqslant\infty$ має місце порядкове співвідношення*

$$e^{\mathfrak{F}}_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp M^{-r_1}\big(\log^{\nu-1}M\big)^{\left(r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \tag{1.32}$$

Як уже відзначалося, мотивацією для дослідження величини (1.29) є той факт, що у деяких випадках її порядкові оцінки та порядкові оцінки величини (1.24) є різними. Якщо порівняти результат твердження 1.10 з відповідним результатом наближення функцій з класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ — твердження 1.5, робимо такий висновок:

- у випадку $1<p<q<\infty$, $q\leqslant\theta\leqslant\infty$ і $r_1>\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$ оцінки величин $e^{\mathfrak{F}}_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ і $\mathcal{E}_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ співпадають за порядком при $M\asymp 2^n n^{\nu-1}$;

- у випадку $1 \leqslant \theta < q < \infty$ оцінки величин $e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ і $\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^{\gamma}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ відрізняються за порядком, а саме:
  - якщо $\frac{1}{p}-\frac{1}{q} < r_1 < \frac{1}{p}-\frac{2}{q}+\frac{1}{\theta}$, то виконується співвідношення
$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp \mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^{\gamma}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} n^{-(\nu-1)\left(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)},$$
$$M \asymp 2^n n^{\nu-1};$$
  - якщо $r_1 \geqslant \frac{1}{p}-\frac{2}{q}+\frac{1}{\theta}$, то виконується співвідношення
$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp \mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^{\gamma}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} n^{-(\nu-1)\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q}\right)},$$
$$M \asymp 2^n n^{\nu-1}.$$

Порівнюючи результат твердження 1.11 з відповідним результатом наближення функцій з класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ — твердження 1.7, робимо висновок:

- у випадку $p \leqslant \theta < 2$ величини $e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)}$ і $\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^{\gamma'}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)}$ співпадають за порядком при $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$;
- у випадку $1 \leqslant \theta < p < 2$ оцінки величин $e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ і $\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^{\gamma'}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ відрізняються за порядком, а саме:
  - якщо $0 < r_1 < \frac{1}{\theta}-\frac{1}{p}$, то виконується співвідношення
$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp \mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^{\gamma'}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} n^{-(\nu-1)r_1},$$
$$M \asymp 2^n n^{\nu-1};$$
  - якщо $r_1 \geqslant \frac{1}{\theta}-\frac{1}{p}$, то виконується співвідношення
$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp \mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^{\gamma'}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} n^{-(\nu-1)\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p}\right)},$$
$$M \asymp 2^n n^{\nu-1}.$$

Зауважимо, що в одновимірному випадку, оцінки величин (1.24) і (1.29) на класах $S^{r}_{p,\theta}B(\mathbb{R})$ співпадають за порядком при всіх значеннях параметра θ, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$.

1.2. Простори періодичних функцій з домінуючою мішаною похідною

У даному підрозділі розглянуто простори періодичних функцій з домінуючою мішаною похідною $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, $0 \leqslant x_j < 2\pi$, $j = \overline{1,d}$, дано означення основних апроксимаційних характеристик, що досліджуються у дисертаційній роботі, наведено огляд відомих результатів та історія їхнього дослідження. Одразу зауважимо, що дані простори функцій означаються аналогічно до того як означалися простори $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, але з тією відмінністю, що замість норм (1.1), (1.2) розглядається норма функцій не в $\mathbb{R}^d$, а на періоді $0 \leqslant x_j < 2\pi$, $j = \overline{1,d}$, тобто у просторі $L_p(\mathbb{T}^d)$.

1.2.1. Означення класів функцій

Нехай, як і раніше, $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$, — евклідів простір з елементами $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ і $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + \ldots + x_dy_d$. Через $L_p(\mathbb{T}^d)$, $\mathbb{T}^d = \prod\limits_{j=1}^{d}[0, 2\pi)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, позначимо простір вимірних функцій f, які є 2π-періодичними за кожною змінною зі скінченною нормою

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} = \left((2\pi)^{-d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}|f(\boldsymbol{x})|^p\,d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leqslant p < \infty, \tag{1.33}$$

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{T}^d)} = \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{T}^d}|f(\boldsymbol{x})|. \tag{1.34}$$

У подальших міркуваннях будемо розглядати лише ті функції $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$, для яких виконано умова

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\boldsymbol{x})dx_j = 0, j = \overline{1,d}, \text{ майже скрізь.} \tag{1.35}$$

Множину таких функцій будемо позначати $L^0_p(\mathbb{T}^d)$.

Для функції $f \in L_p^0(\mathbb{T}^d)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, мішана різниця порядку $\boldsymbol{k}$ з векторним кроком $\boldsymbol{h} = (h_1, \dots, h_d)$, $h_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, d}$, також визначається рівністю (1.3), а саме:

$$\Delta_{\boldsymbol{h}}^{\boldsymbol{k}} f(\boldsymbol{x}) = \Delta_{h_1,1}^{k_1} \Delta_{h_2,2}^{k_2} \dots \Delta_{h_d,d}^{k_d} f(\boldsymbol{x}).$$

Нехай задано вектор $\boldsymbol{r} = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, і параметри $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$. Тоді простори $S_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{T}^d)$ можна означити таким чином:

$$S_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{T}^d) = \Big\{ f \in L_p^0(\mathbb{T}^d) \colon \|f\|_{S_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{T}^d)} < \infty \Big\},$$

де норма задається рівностями

$$\|f\|_{S_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{T}^d)} = \left(\int\limits_{\mathbb{T}^d} \|\Delta_{\boldsymbol{h}}^{\boldsymbol{k}} f(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{T}^d)}^{\theta} \prod_{j=1}^{d} \frac{dh_j}{h_j^{1+r_j\theta}} \right)^{1/\theta} \tag{1.36}$$

якщо $1 \leqslant \theta < \infty$, й

$$\|f\|_{S_{p,\infty}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{T}^d)} \equiv \|f\|_{S_p^{\boldsymbol{r}} H(\mathbb{T}^d)} = \sup_{\boldsymbol{h}} \|\Delta_{\boldsymbol{h}}^{\boldsymbol{k}} f(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} \prod_{j=1}^{d} h_j^{-r_j}. \tag{1.37}$$

Також вважаємо, що для векторів $\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_d)$ і $\boldsymbol{r} = (r_1, \dots, r_d)$ виконана умова $k_j > r_j$, $j = \overline{1, d}$.

У такій формі, з використанням умови (1.35), простори $S_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{T}^d)$ були означені в роботах В. М. Темлякова [123] і С. М. Нікольського та П. І. Лізоркіна [55] відповідно для $S_p^{\boldsymbol{r}} H(\mathbb{T}^d)$ і $S_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{T}^d)$. Дані простори також називають однорідними просторами функцій $S_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{T}^d)$ і, як показано в [55, теорема 5.1], на функціях з множини $L_p^0(\mathbb{T}^d)$ вони збігаються з точністю до еквівалентності норм з просторами мішаної гладкості, що введені С. М. Нікольським [80] і Т. І. Амановим [2].

При проведенні подальших міркувань, як і у випадку просторів $S_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{R}^d)$, нам також буде зручно користуватися означенням норми функцій із просторів $S_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{T}^d)$ в дещо іншій еквівалентній до (1.36) і (1.37) формі, а саме, опосередковано через так зване декомпозиційне зображення елементів цих просторів. Як уже відмічалося, уперше декомпозиційне зображення функцій із класів з домінуючою мішаною похідною та відповідне йому нормування з'явилося у роботі С. М. Нікольського та П. І. Лізоркіна [55], а при $\theta = \infty$ у роботі В. М. Темлякова [123, гл. 2, п. 1], а також Н. С. Нікольської [74]. Дане декомпозиційне зображення, як і у випадку класів неперіодичних функцій, базується на твердженні, яке є періодичним аналогом твердження 1.2 (див., наприклад, [55]):

Твердження 1.12. *Для того щоб функція f належала простору $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_d) > \boldsymbol{0}$, $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$ необхідно і достатньо, щоб вона зображалася збіжним у метриці простору $L_p(\mathbb{T}^d)$ рядом*

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{m} \geqslant \boldsymbol{0}} P_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x}), \tag{1.38}$$

де $P_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x})$ — тригонометричний многочлен степеня не вище 2^{m_j} по змінним x_j, $j = \overline{1,d}$, для якого величина

$$\left(\sum_{\boldsymbol{m} \geqslant \boldsymbol{0}} 2^{(\boldsymbol{r},\boldsymbol{m})} \|P_{\boldsymbol{m}}(\cdot)\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{T}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty.$$

Крім того, нижня границя цієї величини по всеможливих розкладах (1.38) еквівалентна нормі $\|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)}$.

Зауваження 1.13. Для просторів періодичних функцій з домінуючою мішаною похідною $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ справедливе також твердження, яке є аналогом твердження 1.3.

Далі для векторів $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$ $(\boldsymbol{s} \in \mathbb{N}^d)$, $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1,d}$, покладемо

$$\rho(\boldsymbol{s}) = \left\{ \boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d) \colon 2^{s_j - 1} \leqslant |k_j| < 2^{s_j}, j = \overline{1,d} \right\} \tag{1.39}$$

і для $f \in L^0_p(\mathbb{T}^d)$ позначимо

$$\delta_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \rho(\boldsymbol{s})} \widehat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})},$$

де $\widehat{f}(\boldsymbol{k}) = \int\limits_{\mathbb{T}^d} f(\boldsymbol{t}) e^{-i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{t})} d\boldsymbol{t}$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Тоді простори $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, $1 < p < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1,d}$, можна означити таким чином [55]:

$$S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d) := \Big\{ f \in L^0_p(\mathbb{T}^d) \colon \ \|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)} < \infty \Big\},$$

де

$$\|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \mathbb{N}^d} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{T}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \tag{1.40}$$

при $1 \leqslant \theta < \infty$ і

$$\|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}B(\mathbb{T}^d)} \equiv \|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p}H(\mathbb{T}^d)} \asymp \sup_{\boldsymbol{s} \in \mathbb{N}^d} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{T}^d)}. \tag{1.41}$$

Зазначимо, що видозмінивши “блоки” $\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x})$, наведене означення просторів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ можна поширити і на крайні значення $p = 1$ і $p = \infty$ (див., наприклад, [55, зауваження 2.1]).

Нехай $V_l(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{N}$, позначає ядро Валле Пуссена вигляду

$$V_l(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{l} \cos kt + 2 \sum_{k=l+1}^{2l-1} \left(1 - \frac{k-l}{l}\right) \cos kt,$$

де при $l = 1$ третій доданок вважаємо рівним нулеві. Поставимо у відповідність кожному вектору $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, поліном

$$A_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} \big(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j) \big)$$

і для $f \in L^0_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, покладемо

$$A_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x}) = (f * A_{\boldsymbol{s}})(\boldsymbol{x}),$$

де “$*$” означає операцію згортки. Тоді при $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1,d}$, простори $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ можна означити таким чином:

$$S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d) := \Big\{ f \in L^0_p(\mathbb{T}^d) \colon \|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)} < \infty \Big\},$$

де

$$\|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{T}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \tag{1.42}$$

при $1 \leqslant \theta < \infty$ і

$$\|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}B(\mathbb{T}^d)} \equiv \|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p}H(\mathbb{T}^d)} \asymp \sup_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \|A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{T}^d)}. \tag{1.43}$$

Під класом $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, аналогічно як і у підрозділі 1.1, будемо розуміти множину функцій $f \in L^0_p(\mathbb{T}^d)$, для яких $\|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)} \leqslant 1$, і при цьому збережемо для класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ ті ж позначення, що і для просторів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$. Надалі для класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ у процесі досліджень ми будемо використовувати норми (1.40) і (1.41) та (1.42) і (1.43), які, як уже зазначалося, еквівалентні до (1.36) і (1.37), у залежності від значення параметрів p і θ.

Нагадаємо означення класів Соболєва $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$, які також досліджуються у роботі.

Нехай $F_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha})$ — багатовимірні аналоги ядер Бернуллі, тобто

$$F_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}) = 2^d \sum_{\boldsymbol{k}} \prod_{j=1}^{d} k_j^{-r_j} \cos\left(k_j x_j - \frac{\alpha_j \pi}{2}\right), r_j > 0, \alpha_j \in \mathbb{R},$$

і підсумовування проводиться за векторами $\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_d)$, для яких $k_j > 0$, $j = \overline{1,d}$. Тоді через $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$ позначимо клас функцій f вигляду

$$f(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}) * F_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(\boldsymbol{y}) F_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{y},$$

$$\varphi \in L_p(\mathbb{T}^d), \|\varphi\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} \leqslant 1.$$

Нагадаємо, що для введених класів справджуються такі вкладення:

$$S^{\boldsymbol{r}}_{p,p}B(\mathbb{T}^d) \subset W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d) \subset S^{\boldsymbol{r}}_{p,2}B(\mathbb{T}^d), 1 < p \leqslant 2;$$

$$S^{\boldsymbol{r}}_{p,2}B(\mathbb{T}^d) \subset W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d) \subset S^{\boldsymbol{r}}_{p,p}B(\mathbb{T}^d), 2 \leqslant p < \infty;$$

$$W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d) \subset S^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}B(\mathbb{T}^d) \equiv S^{\boldsymbol{r}}_{p}H(\mathbb{T}^d), 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Зокрема при $\theta = p = 2$

$$W^{\boldsymbol{r}}_{2,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d) \subset S^{\boldsymbol{r}}_{2,2}B(\mathbb{T}^d) \subset W^{\boldsymbol{r}}_{2,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d).$$

Зауважимо, що зі зростанням параметра θ класи $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ розширюються, тобто

$$S^{\boldsymbol{r}}_{p,1}B(\mathbb{T}^d) \subset S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta_1}B(\mathbb{T}^d) \subset S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta_2}B(\mathbb{T}^d) \subset S^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}B(\mathbb{T}^d) \equiv S^{\boldsymbol{r}}_{p}H(\mathbb{T}^d),$$

$$1 \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant \infty.$$

З історією дослідження *апроксимаційних характеристик* класів $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$, $S^{\boldsymbol{r}}_{p}H(\mathbb{T}^d)$ і $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ у просторах $L_q(\mathbb{T}^d)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, можна ознайомитися у монографіях [86, 123, 169, 227].

1.2.2. Означення апроксимаційних характеристик та метрик

Тепер означимо основні апроксимаційні характеристики, які будемо досліджувати для введених класів періодичних функцій, зокрема, M-вимірний колмогоровський поперечник, ортопоперечник (Фур'є-поперечник), найкраще ортогональне тригонометричне наближенням, ε-ентропію та ентропійні числа.

Нехай $\mathcal{X}$ — нормований простір з нормою $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$, $\mathfrak{L}_M(\mathcal{X})$ — сукупність підпросторів у просторі $\mathcal{X}$ розмірності, що не перевищує M і Φ — центрально-симетрична множина в $\mathcal{X}$. Тоді величина

$$d_M\big(\Phi, \mathcal{X}\big) := \inf_{L_M \in \mathfrak{L}_M(\mathcal{X})} \sup_{f \in \Phi} \inf_{u \in L_M} \|f - u\|_{\mathcal{X}}, \tag{1.44}$$

називається M-вимірним колмогоровським поперечником множини Φ у просторі $\mathcal{X}$. Поперечник $d_M\big(\Phi, \mathcal{X}\big)$ увів у 1936 р. А. М. Колмогоров [183], і він характеризує апроксимаційні властивості M-вимірних підпросторів.

Величина $d_M\big(\Phi, \mathcal{X}\big)$ показує теоретично найкращу точність, з якою можна наблизити множину Φ лінійними підпросторами L_M розмірності

M у метриці простору $\mathcal{X}$. Якщо існує підпростір L_M^*, на якому досягається точна нижня межа (або принаймні її порядок), то його називають екстремальним підпростором. Таким чином, задача про відшукання оптимального агрегату для наближення функціональних класів рівносильна відшуканню екстремального підпростору для даних класів.

Дослідженню M-вимірних колмогоровських поперечників класів періодичних функцій з домінуючою мішаною похідною $S_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}}B(\mathbb{T}^d)$ у просторах $\mathcal{X}$ присвячено, зокрема, роботи Е. М. Галеєва [24], А. С. Романюка [88–91, 93, 202], А. С. Романюка та В. С. Романюка [98–100].

Задачі, які пов'язані з відшукання оцінок колмогоровських поперечників різних класів функцій, як однієї так і багатьох змінних, знаходяться у полі зору значної кількості математиків у різних країнах світу. На даний час відомі не лише порядкові оцінки колмогоровських поперечників, але й в деяких важливих випадках їхні точні значення. У цьому напрямі варто згадати роботи К. І. Бабенка [4, 5], В. Ф. Бабенка [6], В. Ф. Бабенка та Н. В. Парфінович [157], С. Б. Вакарчука [232], М. П. Корнєйчука [46], А. О. Лигуна [49], В. Є. Майорова [61] Ю. І. Маковоза [62, 63], В. П. Моторного та В. І. Рубана [71], А. Пінкуса [189], А. С. Сердюка та В. В. Боденчука [18, 19, 213], А. С. Сердюка [104, 105], О. І. Степанця та А. С. Сердюка [117], С. А. Стасюка [108], В. М. Тихомирова [127], Sun Yongsheng та Wang Heping [222] та ін. З більш детальною інформацією, що стосується дослідження колмогоровських поперечників функціональних класів також можна ознайомитися в широко відомих книгах [47, 48, 126, 128, 190].

Далі, нехай $\{u_i\}_{i=1}^M$ — ортонормована у просторі $L_2(\mathbb{T}^d)$ система функцій $u_i \in L_\infty(\mathbb{T}^d)$, $i = \overline{1, M}$. Кожній функції $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, поставимо у відповідність апроксимаційний агрегат вигляду $\sum\limits_{i=1}^{M}(f, u_i)u_i$, тобто ортогональну проекцію функції f на підпростір, породжений системою функцій $\{u_i\}_{i=1}^M$. Тут і надалі

$$(f, u_i) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} f(\boldsymbol{x}) \overline{u}_i(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}.$$

Якщо $F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$, то величина

$$d_M^{\perp}\big(F, L_q(\mathbb{T}^d)\big) := \inf_{\{u_i\}_{i=1}^M \subset L_\infty(\mathbb{T}^d)} \sup_{f \in F} \left\| f - \sum_{i=1}^{M} (f, u_i) u_i \right\|_{L_q(\mathbb{T}^d)} \tag{1.45}$$

називається ортопоперечником (Фур'є-поперечником) класу F у просторі $L_q(\mathbb{T}^d)$. Поперечник $d_M^{\perp}\big(F, L_q(\mathbb{T}^d)\big)$ увів В. М. Темляков [121]. Крім того В. М. Темляков [123, Гл. 3, §3] розглянув близьку до Фур'є-поперечника величину $d_M^B\big(F, L_q(\mathbb{T}^d)\big)$, яка визначається за формулою

$$d_M^B\big(F, L_q(\mathbb{T}^d)\big) := \inf_{G \in L_M(B)_q} \sup_{f \in F \cap \mathcal{D}(G)} \|f - Gf\|_{L_q(\mathbb{T}^d)}. \tag{1.46}$$

Тут $L_M(B)_q$ позначає множину лінійних операторів, що підпорядковані таким умовам:

а) область визначення $\mathcal{D}(G)$ цих операторів містить усі тригонометричні поліноми, а область їхніх значень міститься у підпросторі розмірності M простору $L_q(\mathbb{T}^d)$;

б) існує таке число $B \geqslant 1$, що для всіх векторів $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d)$ виконується нерівність
$$\|G e^{i(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x})}\|_{L_2(\mathbb{T}^d)} \leqslant B.$$

Зазначимо, що до $L_M(1)_2$ належать оператори ортогонального проєктування на підпростори простору $L_2(\mathbb{T}^d)$ розмірності M, а також оператори, які задаються на ортонормованій системі функцій за допомогою мультиплікатора, який визначається такою послідовністю $\{\lambda_l\}$, що $|\lambda_l| \leqslant 1$ для всіх l. Бачимо, що згідно з означенням (1.45), (1.46) справджується співвідношення

$$d_M^B\big(F, L_q(\mathbb{T}^d)\big) \leqslant d_M^{\perp}\big(F, L_q(\mathbb{T}^d)\big). \tag{1.47}$$

Величини (1.45) і (1.46) для різноманітних функціональних класів F, як у просторах Лебега $L_q(\mathbb{T}^d)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, так і в інших функціональних просторах досліджувалися у роботах А. В. Андріанова та В. М. Темлякова [156], Д. Б. Базарханова [7, 158], Ш. А. Балгімбаєвої та Т. І. Смірнова [159], Е. М. Галеєва [25, 26], Д. Зунга [37], М. М. Пуствойтова [83], А. С. Романюка [94, 200], А. С. Романюка та В. С. Романюка [99], С. А. Стасюка та О. В. Федуник [112], В. М. Темлякова [119–121], О. В. Федуник-Яремчук та С. Б. Гембарської [171], K. A. Bekmaganbetov та Je. Toleugazy [160].

Зауважимо, що означені вище апроксимаційні характеристики у просторах $\mathcal{X} = L_q(\mathbb{T}^d)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$ пов'язані між собою співвідношеннями

$$d_M\big(F, L_q(\mathbb{T}^d)\big) \leqslant d_M^B\big(F, L_q(\mathbb{T}^d)\big) \leqslant d_M^{\perp}\big(F, L_q(\mathbb{T}^d)\big). \tag{1.48}$$

Співвідношення (1.48) дає можливість при встановленні оцінок знизу величин $d_M^B\big(F, \mathcal{X}\big)$ використовувати оцінки колмогоровських поперечників класів F і, відповідно, для оцінки зверху колмогоровських поперечників можна використовувати оцінки для ортопоперечника.

Далі наведемо означення найкращого ортогонального тригонометричного наближення.

Нехай, як і раніше, $\mathcal{X}$ — деякий нормований функціональний простір з нормою $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ і Θ_M — довільний набір із M d-вимірних векторів $\boldsymbol{k}^j = (k_1^j, \ldots, k_d^j)$, $j = \overline{1, M}$, з цілочисловими координатами. Для функції $f \in \mathcal{X}$ позначимо

$$S_{\Theta_M}(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{M} \widehat{f}(\boldsymbol{k}^j) e^{i(\boldsymbol{k}^j, \boldsymbol{x})}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,$$

де

$$\widehat{f}(\boldsymbol{k}^j) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} f(\boldsymbol{t}) e^{-i(\boldsymbol{k}^j, \boldsymbol{t})} d\boldsymbol{t}$$

— коефіцієнти Фур'є функції f, які відповідають набору векторів із Θ_M.

Розглянемо апроксимаційну характеристику

$$e_M^{\perp}(f)_{\mathcal{X}} := \inf_{\Theta_M} \|f(\cdot) - S_{\Theta_M}(f, \cdot)\|_{\mathcal{X}}$$

і для функціонального класу $F \subset \mathcal{X}$ покладемо

$$e_M^{\perp}(F)_{\mathcal{X}} := \sup_{f \in F} e_M^{\perp}(f)_{\mathcal{X}}. \tag{1.49}$$

Величину $e_M^{\perp}(F)_{\mathcal{X}}$ називають найкращим ортогональним тригонометричним наближенням класу F у просторі $\mathcal{X}$.

Величини $e_M^{\perp}(F)_{\mathcal{X}}$ на класах $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$, $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ і $S^{\boldsymbol{r}}_{p}H(\mathbb{T}^d)$ у просторах $L_q(\mathbb{T}^d)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, досліджувалися, зокрема, у роботах Е. С. Белінського [11], А. С. Романюка [97, 197, 201] (див. також [86]). Зазначимо, що останнім часом дослідження найкращого ортогонального тригонометричного наближенням на тих або інших функціональних класах проводилися також у роботах А. Ф. Конограя та С. А. Стасюка [45], А. С. Сердюка та Т. А. Степанюк [106], С. А. Стасюка [110], В. М. Темлякова [122], О. С. Федоренка [131], А. Л. Шидліча [133–135], В. В. Шкапи [136] та інших. У згаданих роботах можна ознайомитися з детальною бібліографією.

Нехай $\mathcal{X}$ — банахів простір і

$$B_{\mathcal{X}}(\boldsymbol{y}, R) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \colon \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_{\mathcal{X}} \leqslant R\right\}$$

— куля радіуса R з центром у точці $\boldsymbol{y}$.

Для компактної множини $A \subset \mathcal{X}$ і $\varepsilon > 0$ позначимо

$$N_\varepsilon(A, \mathcal{X}) := \min\left\{n \colon \exists \boldsymbol{y}^1, \ldots, \boldsymbol{y}^n \in \mathcal{X} \colon A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B_{\mathcal{X}}(\boldsymbol{y}^j, \varepsilon)\right\}.$$

Тоді величина

$$H_\varepsilon(A, \mathcal{X}) = \log N_\varepsilon(A, \mathcal{X})$$

називається ε-ентропією множини A відносно банахового простору $\mathcal{X}$ [43, §1] (тут і далі під записом $\log a$, $a > 0$, будемо розуміти $\log_2 a$).

З ε-ентропією множини A тісно пов'язано поняття її ентропійних чисел $\varepsilon_k(A, \mathfrak{X})$ (див., наприклад, [176]):

$$\varepsilon_k(A, \mathfrak{X}) := \inf \Big\{ \varepsilon \colon \exists \boldsymbol{y}^1, \ldots, \boldsymbol{y}^{2^k} \in \mathfrak{X} \colon A \subseteq \bigcup_{j=1}^{2^k} B_{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{y}^j, \varepsilon) \Big\}. \qquad (1.50)$$

Безпосередньо з означень величин $H_\varepsilon(A, \mathfrak{X})$ і $\varepsilon_k(A, \mathfrak{X})$ можемо записати: якщо $H_\varepsilon(A, \mathfrak{X}) \leqslant k$, то $\varepsilon_k(A, \mathfrak{X}) \leqslant \varepsilon$ і навпаки — з оцінки $\varepsilon_k(A, \mathfrak{X}) \leqslant \varepsilon$ отримуємо $H_\varepsilon(A, \mathfrak{X}) \leqslant k$, а саме, якщо $k < H_\varepsilon(A, \mathfrak{X}) \leqslant k+1$, то $\varepsilon_{k+1}(A, \mathfrak{X}) \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_k(A, \mathfrak{X})$. Ці співвідношення дають можливість із оцінок для ентропійних чисел деякої множини A отримувати відповідні оцінки її ε-ентропії. Із властивостями ентропійних чисел можна ознайомитися в монографіях [81, гл. 3, §12], [231, §10.1].

Дослідження ε-ентропії і близьких до неї асимптотичних характеристик (ε-ємність, ентропійні числа і т.п.) мають багату історію. Ентропійні числа для класів функцій однієї та багатьох змінних $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\alpha}(\mathbb{T}^d)$, $S^{\boldsymbol{r}}_p H(\mathbb{T}^d)$, $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} B(\mathbb{T}^d)$, їхніх аналогів, а також деяких інших важливих функціональних класів досліджувалися у роботах Н. С. Бахвалова [9], Є. С. Белінського [10, 161, 162], М. Ш. Бірмана та М. З. Солом'яка [17], С. Б. Кашина та В. М. Темлякова [179–182], В. Є. Майорова [60], К. В. Пожарської [82, 192], А. С. Романюка [88, 93, 202], А. С. Романюка та В. С. Романюка [99], В. С. Романюка [103], С. А. Смоляка [107], В. М. Темлякова [120, 224–226, 229], В. М. Темлякова та Т. Ульріха [230], Х. Трібеля [129], F. Dai, A. Prymak, A. Shadrin, V. Temlyakov, S. Tikhonov [166], D. Dung [168], T. Dunker, W. Linde, T. Kühn та M. Lifshits [170], D. Haroske i H. Triebel [174, 175], S. Mayer i T. Ullrich [188], J. Vybiral [233] та інших. Ентропійні числа знаходять також застосування у теорії ймовірностей, де їхні дослідження тісно пов'язані з проблемами "малої кульки" [184, 185, 223] (див. також [169, §6.3]). З більш детальною бібліографією та можливими застосуваннями можна ознайомитися у монографіях [169, 228, 231].

З дослідженням різних апроксимаційних характеристик, в тому числі означених вище M-вимірних колмогоровських поперечників, ортопоперечників, найкращого ортогонального тригонометричного наближенням класів $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$, $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ і $S^{\boldsymbol{r}}_{p}H(\mathbb{T}^d)$ можна ознайомитися у монографіях [86, 123, 169, 227], де наведена детальна бібліографія.

Означимо простори у метриці яких будемо оцінювати величини (1.44), (1.45), (1.46), (1.49), (1.50) для класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, $S^{\boldsymbol{r}}_{p}H(\mathbb{T}^d)$ та $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$.

Для функції $f \in L_1(\mathbb{T})$ з рядом Фур'є

$$f \sim \sum_{s=0}^{\infty} \delta_s(f,x),$$

$$\delta_0(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx, \quad \delta_s(f,x) = \sum_{2^{s-1}\leqslant |k| < 2^s} \widehat{f}(k)e^{ikx}, \; s = 1,2,\ldots,$$

розглянемо величину

$$\|f(\cdot)\|_{QC(\mathbb{T})} \equiv \int_0^1 \left\| \sum_{s=0}^{\infty} r_s(\omega)\delta_s(f,x) \right\|_{L_\infty(\mathbb{T})} d\omega, \tag{1.51}$$

де $\{r_s(\omega)\}_{s=0}^{\infty}$ — система Радемахера (див., [40, Гл. 2, § 1]). Тоді простором квазінеперервних функцій (позначення $QC(\mathbb{T})$) будемо називати замикання множини тригонометричних поліномів за нормою (1.51).

Як зазначалося вище, простір квазінеперервних функцій $QC(\mathbb{T})$ введено у роботі [180] (див. також [179]). Для зручності нагадаємо деякі його властивості.

Якщо $f \in L_1(\mathbb{T})$ і

$$F(x,\omega) = \sum_{s=0}^{\infty} r_s(\omega)\delta_s(f,x),$$

то

$$\inf_{\omega} \|F(\cdot,\omega)\|_{L_\infty(\mathbb{T})} \leqslant \|f(\cdot)\|_{QC(\mathbb{T})} \leqslant \sup_{\omega} \|F(\cdot,\omega)\|_{L_\infty(\mathbb{T})}; \tag{1.52}$$

$$\|f(\cdot)\|_{QC(\mathbb{T})} \geqslant \left\| \int\limits_0^1 |F(x,\omega)d\omega| \right\|_{L_\infty(\mathbb{T})} \gg \left\| \left(\sum_{s=0}^{\infty} |\delta_s(f,x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_\infty(\mathbb{T})};$$

$$\|f(\cdot)\|_{QC(\mathbb{T})} \leqslant \sum_{s=0}^{\infty} \|\delta_s(f,\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{T})}.$$

Простір квазінеперервних функцій у багатовимірному випадку ($d \geqslant 2$) означимо таким чином:

$$\|f\|_{QC(\mathbb{T}^d)} \equiv \Big\| \|f(\cdot,\boldsymbol{x}^1)\|_{QC(\mathbb{T})} \Big\|_{L_\infty(\mathbb{T}^{d-1})}, \tag{1.53}$$

де для $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_d) \in \mathbb{T}^d$ покладаємо $\boldsymbol{x}^1 = (x_2,\ldots,x_d) \in \mathbb{T}^{d-1}$, тобто в (1.53) беремо $QC(\mathbb{T})$-норму за змінною x_1 і $\sup$-норму за рештою змінних.

З дослідженнями питань, пов'язаних із використанням QC-норми, можна ознайомитися у роботах [195, 196]. Зазначимо, що у даних роботах доведено, що $C(\mathbb{T})$- та $QC(\mathbb{T})$-норми є нееквівалентними у просторі тригонометричних поліномів.

Інтерес до відшукання порядкових оцінок апроксимаційних характеристик у метриці $QC(\mathbb{T}^d)$-простору, який за своїми властивостями близький до $L_\infty(\mathbb{T}^d)$, зумовлений тим, що у деяких випадках вдається одержати нові результати, які досі не встановлені у рівномірній метриці.

Тепер наведемо означення норми $\|\cdot\|_{B_{p,1}(\mathbb{T}^d)}$ у підпросторах $B_{p,1}(\mathbb{T}^d)$, $p \in \{1,\infty\}$, функцій $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$. Такі простори і відповідно норми у більш загальному випадку, а саме $B_{p,q}(\mathbb{T}^d)$, $1 \leqslant p,q \leqslant \infty$, розглянуто у роботі [120] (див. також [181]).

Для тригонометричних поліномів t за кратною тригонометричною системою $\{e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\}_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ норма $\|t\|_{B_{p,1}(\mathbb{T}^d)}$, $p \in \{1,\infty\}$, визначається за формулою

$$\|t\|_{B_{p,1}(\mathbb{T}^d)} := \sum_{\boldsymbol{s}} \|A_{\boldsymbol{s}}(t)\|_{L_p(\mathbb{T}^d)}.$$

Аналогічно означається норма $\|f\|_{B_{p,1}(\mathbb{T}^d)}$, $p \in \{1,\infty\}$, для будь-якої функції $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ такої, що ряд

$$\sum_{\boldsymbol{s}} \|A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{T}^d)}$$

збігається.

Зазначимо, що для $f \in B_{1,1}(\mathbb{T}^d)$ виконується співвідношення

$$\|f\|_{L_1(\mathbb{T}^d)} \ll \|f\|_{B_{1,1}(\mathbb{T}^d)}, \tag{1.54}$$

і відповідно для $f \in B_{\infty,1}(\mathbb{T}^d)$ виконується співвідношення

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{T}^d)} \ll \|f\|_{B_{\infty,1}(\mathbb{T}^d)}. \tag{1.55}$$

Зауважимо, як зазначено у роботах [30] і [88] мотивацією до розгляду питань апроксимації функціональних класів у просторі $B_{1,1}(\mathbb{T}^d)$ була та обставина, що деякі з відповідних питань у просторі $L_1(\mathbb{T}^d)$ дотепер залишаються відкритими (див., наприклад, [86, 169]).

Деякі апроксимаційні характеристики різних функціональних класів у просторі $B_{\infty,1}(\mathbb{T}^d)$ вивчалися у роботах [31, 98–100, 162]. У згаданих роботах зазначалося, що мотивацією до дослідження відповідних характеристик саме у просторі $B_{\infty,1}(\mathbb{T}^d)$ була та обставина, що питання про їхні порядкові значення у просторі $L_\infty(\mathbb{T}^d)$ при $d \geqslant 3$ на даний час залишаються відкритими.

Надалі замість $B_{1,1}(\mathbb{T}^d)$ та $B_{\infty,1}(\mathbb{T}^d)$ також будемо писати $B_{1,1}$ та $B_{\infty,1}$ опускаючи $\mathbb{T}^d$, це не повинно створювати непорозумінь, оскільки в дисертаційній роботі розглядаються лише такі підпростори.

1.2.3. Відомі та допоміжні результати

Наведемо декілька відомих тверджень стосовно точних за порядком оцінок досліджуваних нами апроксимаційних характеристик, які сформулюємо відповідно до наших позначень.

Твердження 1.14 ([90]). *Нехай $d = 1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant \theta < \infty$. Тоді для $r_1 > \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{p}\right\}$ справедлива оцінка*

$$d_M\big(S^{r_1}_{p,\theta}B(\mathbb{T}), L_\infty(\mathbb{T})\big) \asymp M^{-r_1+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)_+}. \tag{1.56}$$

Відповідно, для оцінки ентропійних чисел і M-вимірних колмогоровських поперечників у випадку $d = 1$ в [202] відомий такий результат.

Твердження 1.15 ([202]). *Нехай* $d=1$, $2\leqslant p\leqslant\infty$, $2\leqslant\theta<\infty$. *Тоді для* $r_1>\frac{1}{2}$ *справедлива оцінка*

$$\varepsilon_M\big(S^{r_1}_{p,\theta}B(\mathbb{T}),L_\infty(\mathbb{T})\big)\asymp d_M\big(S^{r_1}_{p,\theta}B(\mathbb{T}),L_\infty(\mathbb{T})\big)\asymp M^{-r_1}. \tag{1.57}$$

Зауважимо, що оцінка величини $\varepsilon_M\big(S^{r_1}_{p,\theta}B(\mathbb{T}),L_\infty(\mathbb{T})\big)$ у співвідношенні (1.57) була встановлена раніше в [93].

Твердження 1.16 ([202]). *Нехай* $d=2$, $2\leqslant p<\infty$, $\boldsymbol{r}=(r_1,r_1)$, $r_1>\frac{1}{2}$. *Тоді для* $2\leqslant\theta<\infty$ *справедлива оцінка*

$$\varepsilon_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^2),L_\infty(\mathbb{T}^2)\big)\asymp d_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^2),L_\infty(\mathbb{T}^2)\big)\asymp$$
$$\asymp M^{-r_1}(\log M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}. \tag{1.58}$$

Твердження 1.17 ([202]). *Нехай* $d=2$, $\boldsymbol{r}=(r_1,r_1)$, $r_1>0$. *Тоді для* $1\leqslant\theta\leqslant\infty$ *справедлива оцінка*

$$\varepsilon_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}B(\mathbb{T}^2),L_\infty(\mathbb{T}^2)\big)\asymp d_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}B(\mathbb{T}^2),L_\infty(\mathbb{T}^2)\big)\asymp$$
$$\asymp M^{-r_1}\big(\log M\big)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}. \tag{1.59}$$

Оцінку величини $\varepsilon_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_\infty H(\mathbb{T}^2),L_\infty(\mathbb{T}^2)\big)$, тобто для $\theta=\infty$, з (1.59) одержано В. М. Темляковим [226].

Твердження 1.18 ([93]). *Нехай* $2\leqslant p\leqslant\infty$, $1\leqslant q<p$, $2\leqslant\theta<\infty$, $r_1>0$. *Тоді для* $d\geqslant 2$ *справедлива оцінка*

$$\varepsilon_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d),L_q(\mathbb{T}^d)\big)\asymp d_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d),L_q(\mathbb{T}^d)\big)\asymp$$
$$\asymp M^{-r_1}\big(\log^{\nu-1}M\big)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}. \tag{1.60}$$

Варто відзначити, що в (1.60) було одержано нову оцінку для колмогоровського поперечника $d_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d),L_1(\mathbb{T}^d)\big)$.

Точні за порядком оцінки ентропійних чисел класів $S^{\boldsymbol{r}}_pH(\mathbb{T}^d)$ $(\theta=\infty)$ та $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$ у метриці просторів $L_q(\mathbb{T}^d)$, $1<q<\infty$, одержано Е. С. Белінським [10, 162] і В. М. Темляковим [120].

Наведемо також результат, де встановлено точну за порядком оцінку для колмогоровського поперечника при $\theta=1$ і $p=\infty$.

Твердження 1.19 ([86], §4.4., теорема 4.4.2.). *Нехай $d \geqslant 1$ і $r_1 > 0$. Тоді справедлива оцінка*

$$d_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{\infty,1}B(\mathbb{T}^d), L_\infty(\mathbb{T}^d)\big) \asymp \big(M^{-1}\log^{\nu-1} M\big)^{r_1}. \tag{1.61}$$

У метриці простору $QC(\mathbb{T}^d)$ для величин (1.44) та (1.50) мають місце такі результати.

Твердження 1.20 ([179], див. також [180]). *Для $d \geqslant 2$, $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_1) \in \mathbb{R}^d_+$, при $r_1 > \max\left\{\frac{1}{p}, \frac{1}{2}\right\}$ і $1 < p \leqslant \infty$ справедливі оцінки*

$$\varepsilon_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_p H(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\big) \asymp M^{-r_1}\big(\log M\big)^{r_1(d-1)+\frac{d}{2}},$$

$$\varepsilon_M\big(W^{\boldsymbol{r}}_{p,\alpha}(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\big) \asymp M^{-r_1}\big(\log M\big)^{r_1(d-1)+\frac{1}{2}}.$$

Твердження 1.21 ([179], див. також [180]). *Для $d \geqslant 2$, $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_1) \in \mathbb{R}^d_+$, при $r_1 > \frac{1}{2}$ і $2 \leqslant p \leqslant \infty$ для $d \geqslant 2$ справедливі оцінки*

$$d_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_p H(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\big) \asymp M^{-r_1}\big(\log M\big)^{r_1(d-1)+\frac{d}{2}},$$

$$d_M\big(W^{\boldsymbol{r}}_{p,\alpha}(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\big) \asymp M^{-r_1}\big(\log M\big)^{r_1(d-1)+\frac{1}{2}}.$$

У метриках просторів $L_1(\mathbb{T}^d)$ і $B_{1,1}$ для досліджуваних нами величин мають місце такі результати.

Твердження 1.22. *Нехай $d \geqslant 1$, $1 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $r_1 > 0$. Тоді*

$$d^{\perp}_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), L_1(\mathbb{T}^d)\big) \asymp d^{B}_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), L_1(\mathbb{T}^d)\big) \asymp$$
$$\asymp M^{-r_1}\big(\log^{\nu-1} M\big)^{r_1+\left(\frac{1}{p^*}-\frac{1}{\theta}\right)_+}, \tag{1.62}$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$, $p^* = \min\{2, p\}$.

Твердження 1.23. *Нехай $d \geqslant 1$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $r_1 > 0$. Тоді*

$$d^{B}_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d), L_1(\mathbb{T}^d)\big) \asymp M^{-r_1}\big(\log^{\nu-1} M\big)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}. \tag{1.63}$$

Оцінки (1.62) і (1.63) при $1 \leqslant \theta < \infty$ одержано в [200], а при $\theta = \infty$ — у [120].

Твердження 1.24 ([88]). *Нехай $d \geqslant 1$, $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$, $r_1 > 0$. Тоді*

$$d_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), B_{1,1}\big) \asymp \varepsilon_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), B_{1,1}\big) \asymp M^{-r_1}\big(\log^{\nu-1} M\big)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}.$$

Наступні твердження є аналогами тверджень 1.23 і 1.24 для класів $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$.

Твердження 1.25 ([88]). *Нехай $d \geqslant 1$, $1 < p < \infty$, $r_1 > 0$. Тоді при $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$ справедлива оцінка*

$$d_M\big(W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d), B_{1,1}\big) \asymp \varepsilon_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), B_{1,1}\big) \asymp M^{-r_1}\big(\log^{\nu-1} M\big)^{r_1+\frac{1}{2}}.$$

Зауважимо, що оцінку зверху для $d_M\big(W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d), B_{1,1}\big)$ встановлено в [120]

Твердження 1.26 ([120]). *Нехай $d \geqslant 1$, $r_1 > 0$. Тоді при $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$*

$$d^B_M\big(W^{\boldsymbol{r}}_{1,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d), L_1(\mathbb{T}^d)\big) \asymp M^{-r_1}\big(\log^{\nu-1} M\big)^{r_1+1}.$$

Оцінки величини $d^B_M\big(W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d), L_q(\mathbb{T}^d)\big)$ В. М. Темляковим [120, теорема 4.1′] отримано для більш широкого діапазону значень параметрів p і q, а саме для всіх можливих значень окрім $(p, q) = (1, \infty)$. Нами відповідна оцінка у твердженні 1.26 наведена у випадку $p = q = 1$.

На завершення пункту 1.2.3 сформулюємо декілька відомих тверджень для величини найкращого ортогонального тригонометричного наближення та ортопоперечника, які будемо використовувати при доведенні.

Твердження 1.27 ([201]). *Нехай $d \geqslant 1$, $1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $r_1 > \frac{1}{p}$. Тоді справедливою є оцінка*

$$e^{\perp}_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{T}^d)} \asymp \big(M^{-1}\log^{\nu-1} M\big)^{r_1-\frac{1}{p}}\big(\log^{\nu-1} M\big)^{1-\frac{1}{\theta}}.$$

Твердження 1.28. *Нехай $d \geqslant 1$, $1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. Тоді при $r_1 > \frac{1}{p}$ справедливе порядкове співвідношення*

$$d^{\perp}_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), L_\infty(\mathbb{T}^d)\big) \asymp \big(M^{-1}\log^{\nu-1} M\big)^{r_1-\frac{1}{p}}\big(\log^{\nu-1} M\big)^{1-\frac{1}{\theta}}.$$

Зауважимо, що при $\theta = \infty$, тобто для класів $S^{\boldsymbol{r}}_p H(\mathbb{T}^d)$, відповідну оцінку встановлено в [120], а при $1 \leqslant \theta < \infty$ — в [94].

Твердження 1.29 ([120]). *Нехай $d = 2$, $\boldsymbol{r} = (r_1, r_1)$, $r_1 > 1$. Тоді справедливою є оцінка*

$$d^{\perp}_M\big(W^{\boldsymbol{r}}_{1,\boldsymbol{0}}(\mathbb{T}^d), L_\infty(\mathbb{T}^d)\big) \asymp M^{-r_1+1}\big(\log M\big)^{r_1}.$$

1.3. Узагальнені простори функцій з домінуючою мішаною гладкістю в $\mathbb{R}^d$

У даному підрозділі наведено означення класів функцій $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, що є узагальненням класів функцій з домінуючою мішаною похідною $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, а також основних апроксимаційних характеристик, які розглядаються у дисертаційній роботі для цих класів функцій.

1.3.1. Означення класів функцій

Нехай, як і раніше, $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, — простір вимірних на $\mathbb{R}^d$ функцій $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_d)$ зі скінченною нормою, яка задається співвідношеннями (1.1) і (1.2).

Для функції $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$ розглянемо різницю l-го порядку, $l \in \mathbb{N}$, за змінною x_j з кроком h_j, яка визначається таким чином:

$$\Delta^l_{h_j} f(\boldsymbol{x}) := \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} C^n_l f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, \ldots, x_d).$$

Також означимо кратну різницю l-го порядку функції f з векторним кроком $\boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_d)$:

$$\Delta^l_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) = \Delta^l_{h_d}\big(\Delta^l_{h_{d-1}} \ldots (\Delta^l_{h_1} f(\boldsymbol{x}))\big).$$

Мішаний модуль неперервності порядку l функції $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$ визначається згідно з формулою

$$\Omega_l(f, \boldsymbol{t})_{L_q(\mathbb{R}^d)} := \sup_{|\boldsymbol{h}| \leqslant \boldsymbol{t}} \|\Delta^l_{\boldsymbol{h}} f(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)},$$

де $|\boldsymbol{h}| = (|h_1|, ..., |h_d|)$.

Нехай $\Omega(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_d)$, — функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, тобто функція, яка визначена і неперервна на $\mathbb{R}^d_+$, що задовольняє такі умови:

1) $\Omega(\boldsymbol{t}) > 0$, $\boldsymbol{t} > 0$ і $\Omega(\boldsymbol{t}) = 0$, якщо $\prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(\boldsymbol{t})$ неспадна за кожною змінною;

3) $\Omega(m_1 t_1, \ldots, m_d t_d) \leqslant \left(\prod\limits_{j=1}^{d} m_j\right)^l \Omega(\boldsymbol{t})$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$.

Множину таких функцій Ω позначимо через Ψ_l.

Нехай, далі, $e_d := \{1, 2, \ldots, d\}$, $d \in \mathbb{N}$, і $e := \{j_1, \ldots, j_m\}$, $m \leqslant d$, $m \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_m \leqslant d$, $\boldsymbol{t}^e = (t_{j_1}, \ldots, t_{j_m})$, $\bar{\boldsymbol{t}}^e := (\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_d)$, де

$$\bar{t}_i = \begin{cases} t_i, & i \in e, \\ 1, & i \in e_d \backslash e. \end{cases}$$

Простори $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ для $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$ і $\Omega \in \Psi_l$ означаються таким чином [113] (див. також [70, 218]):

$$S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d) := \Big\{ f \in L_p(\mathbb{R}^d) \colon \ \|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} < \infty \Big\},$$

де

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} := \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} + \sum_{\substack{e \subset e_d \\ e \neq \varnothing}} \left(\int\limits_0^2 \cdots \int\limits_0^2 \left(\frac{\Omega_{l^e}(f, \boldsymbol{t}^e)_{L_p(\mathbb{R}^d)}}{\Omega(\bar{\boldsymbol{t}}^e)} \right)^{\theta} \prod_{j \in e} \frac{dt_j}{t_j} \right)^{\frac{1}{\theta}}, \tag{1.64}$$

якщо $1 \leqslant \theta < \infty$, та

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)} := \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} + \sum_{\substack{e \subset e_d \\ e \neq \varnothing}} \sup_{\boldsymbol{t}^e > \boldsymbol{0}} \frac{\Omega_{l^e}(f, \boldsymbol{t}^e)_{L_p(\mathbb{R}^d)}}{\Omega(\bar{\boldsymbol{t}}^e)}, \tag{1.65}$$

де

$$\Omega_{\boldsymbol{l}^e}(f, \boldsymbol{t}^e)_{L_p(\mathbb{R}^d)} := \sup_{|\boldsymbol{h}^e| \leqslant \boldsymbol{t}^e} \|\Delta^{\boldsymbol{l}^e}_{\boldsymbol{h}^e} f(\boldsymbol{x})\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}, \qquad \boldsymbol{h}^e := (h_{j_1}, \ldots, h_{j_m}),$$

$$\Delta_{\boldsymbol{h}^e}^{\boldsymbol{l}^e} f(\boldsymbol{x}) = \Delta_{h_{j_m}}^{l}\big(\Delta_{h_{j_{m-1}}}^{l} \ldots (\Delta_{h_{j_1}}^{l} f(\ldots, x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}, \ldots))\big).$$

Зауважимо, що простори функцій $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ є узагальненням просторів з домінуючою мішаною похідною $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, що визначаються при явному заданні функції Ω, а саме $\Omega(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{r}} = t_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot t_d^{r_d}$, $0 < r_j < l$, $j = \overline{1, d}$, і які означені у підпункті 1.1.1.

Як і у випадку просторів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, нам буде зручно користуватися еквівалентним до (1.64) та (1.65) нормуванням даних просторів опосередковано через так зване декомпозиційне зображення елементів цих просторів.

Додатково будемо вимагати, щоб функція Ω задовольняла умови (S^α) та (S_l), які називають умовами Барі–Стєчкіна [8, §2]. Сформулюємо їх:

а) функція однієї змінної $\varphi(\tau) \geqslant 0$ задовольняє умову (S^α), якщо існує таке $\alpha > 0$, що $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_5 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \leqslant C_5 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}, \qquad 0 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant 1;$$

б) функція однієї змінної $\varphi(\tau) \geqslant 0$ задовольняє умову (S_l), якщо існує таке γ, $0 < \gamma < l$, що $\varphi(\tau)/\tau^{l-\gamma}$ майже спадає, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_6 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{l-\gamma}} \geqslant C_6 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{l-\gamma}}, \qquad 0 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant 1.$$

Будемо вважати, що функція Ω задовольняє умови (S^α) та (S_l), якщо вона задовольняє ці умови за кожною змінною t_j при всіх фіксованих значеннях змінних t_i, $\ i \neq j$. У випадку, коли для функції Ω виконана умова (S^α), будемо говорити, що вона належить множині S^α, а якщо умова (S_l), то — множині S_l. Стверджуючи це (також і для функції ω однієї змінної), використовуватимемо запис $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $(\omega \in \Phi_{\alpha,l})$, $l \in \mathbb{N}$, де множина $\Phi_{\alpha,l}$ визначається співвідношенням $\Phi_{\alpha,l} := \Psi_l \cap S^\alpha \cap S_l$.

Зауважимо, що умова (S_l), була вперше введена С. Б. Стєчкіним [118]. Подібні умови розглядав також С. М. Лозинський [56], тому у деяких роботах умови (S^α) і (S_l) називаються умовами Лозинського–Стєчкіна. Крім цього варто зазначити, що дані умови формулюються у термінах майже зростання (майже спадання), які введені С. Н. Бернштейном [13, §97, §108].

Зазначимо, що до множини $\Phi_{\alpha,l}$ належать, наприклад, функції

$$\Omega(\mathbf{t}) = \Omega(t_1,\dots,t_d) = \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{d} \dfrac{t_j^{r_j}}{\left\{\log \frac{1}{t_j}\right\}_+^{b_j}}, & \text{при} \quad t_j > 0,\ j = \overline{1,d}; \\ 0, & \text{при} \quad \prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0, \end{cases}$$

де $\{\log \tau\}_+ = \max\{1;\ \log_2 \tau\}$, $r_j, b_j \in \mathbb{R}$, $0 < r_j < l$, $j = \overline{1,d}$.

Виконується наступне твердження [113] (див. також [218]).

Твердження 1.30. *Нехай $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$ і $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$. Функція f належить простору $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant \theta < \infty$, тоді і тільки тоді, коли*

$$\left\{\sum_{\boldsymbol{s}\geqslant 0} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\right)^{-\theta} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)}\right\}^{\frac{1}{\theta}} < \infty,$$

до того ж

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s}\geqslant 0} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\right)^{-\theta} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)}\right)^{\frac{1}{\theta}}, \tag{1.66}$$

де $\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) = \Omega(2^{-s_1},\dots,2^{-s_d})$.

Функція f належить простору $S^{\Omega}_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)$ тоді і тільки тоді, коли

$$\sup_{\boldsymbol{s}\geqslant 0} \frac{\|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}}{\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})} < \infty,$$

до того ж

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)} \asymp \sup_{\boldsymbol{s}\geqslant 0} \frac{\|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}}{\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})}. \tag{1.67}$$

Нагадаємо, що $\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x})$ означаються формулою (1.8), а саме

$$\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x}) = \mathfrak{F}^{-1}(\chi_{Q^*_{2\boldsymbol{s}}} \cdot \mathfrak{F} f).$$

Для просторів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ також має місце теорема вкладення [145], яка одержується з твердження 1.30 та нерівності Нікольського для цілих функцій експоненціального типу (твердження 1.1).

Твердження 1.31. *Нехай* $1 < p < q < \infty$, $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$ *з деяким* $\alpha > \beta$, *де* $\beta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. *Тоді якщо* $f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, *то* $f \in S^{\Omega_1}_{q,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, $\Omega_1(\boldsymbol{t}) = \Omega(\boldsymbol{t})\boldsymbol{t}^{-\beta}$ *і*

$$\|f\|_{S^{\Omega_1}_{q,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \ll \|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)}.$$

Зазначимо, що з даного твердження отримуємо додаткові умови на параметр α, щоб функція f також належала і до $L_q(\mathbb{R}^d)$.

Під класом $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ також будемо розуміти множину функцій $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, для яких $\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1$, і при цьому збережемо для класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ ті самі позначення, що і для просторів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$.

Зауважимо, що простори періодичних функцій, які є узагальненням за гладкісним параметром просторів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ з відповідною функцією Ω введені у роботах М. М. Пустовойтова [84] для $\theta = \infty$, та Sun Yongsheng і Wang Heping [222], $1 \leqslant \theta < \infty$. Дослідженню даних класів функцій протягом останніх трьох десятиліть присвячена низка робіт різних авторів, зокрема, Н. В. Дерев'янко [35], А. Ф. Конограя [44], А. Ф. Конограя і С. А. Стасюка [45], М. М. Пустовойтова [83, 193, 194], С. А. Стасюка [110, 111], С. А. Стасюка і О. В. Федуник [112], Liqin Duan [186].

1.3.2. Означення апроксимаційних характеристик

Для класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ наші дослідження величин (1.18) і (1.21) будемо проводити у випадку, коли множина $\mathcal{L}$ певним чином пов'язана з функцією Ω.

Для будь-якого $N \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, покладемо

$$\kappa(N) := \kappa(\Omega, N) := \left\{ \boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{Z}_+^d \colon \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \geqslant \frac{1}{N} \right\}, \tag{1.68}$$

$$Q(\kappa(N)) := \bigcup_{\boldsymbol{s} \in \kappa(N)} Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}},$$

де $\|\boldsymbol{s}\|_1 = s_1 + \ldots + s_d$ і $Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}}$ визначається співвідношенням (1.7), саме

$$Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}} = \left\{ \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \colon \ \eta(s_j) 2^{s_j - 1} \leqslant |\lambda_j| < 2^{s_j}, \lambda_j \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1, d} \right\}.$$

Зазначимо, що множини $Q(\kappa(N))$ породжуються поверхнями рівня функції $\Omega(\boldsymbol{t})\boldsymbol{t}^{-\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)}$, $\Omega(\boldsymbol{t}) \in \Phi_{\alpha, l}$, $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Якщо

$$\Omega(\boldsymbol{t}) = \Omega_1(\boldsymbol{t}) / \prod_{j=1}^{d} t_j^{-\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)}$$

і $\Omega_1(\boldsymbol{t}) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$, $0 < r_j < l$, $j = \overline{1, d}$, то одержимо множини $Q(\kappa(N))$, які називаються східчастими гіперболічними хрестами.

Наша мета полягає у встановленні порядкових по параметру N оцінок величини (1.18) і (1.21) для класів $S^{\Omega}_{p,\theta} B(\mathbb{R}^d)$ у випадку, коли $\mathcal{L} = \kappa(N)$, тобто розглядається наближення на множині $Q(\kappa(N))$. У цьому випадку для згаданих величин будемо використовувати наступні позначення.

Для величини (1.18) маємо

$$E_{Q(\kappa(N))} \big(S^{\Omega}_{p,\theta} B(\mathbb{R}^d) \big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} := \sup_{f \in S^{\Omega}_{p,\theta} B(\mathbb{R}^d)} E_{Q(\kappa(N))} \big(f \big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}, \tag{1.69}$$

а для (1.21) запишемо

$$\mathcal{E}_{Q(\kappa(N))} \big(S^{\Omega}_{p,\theta} B(\mathbb{R}^d) \big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} := \sup_{f \in S^{\Omega}_{p,\theta} B(\mathbb{R}^d)} \mathcal{E}_{Q(\kappa(N))} \big(f \big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}, \tag{1.70}$$

де

$$\mathcal{E}_{Q(\kappa(N))} \big(f \big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} := \| f(\cdot) - S_{Q(\kappa(N))}(f, \cdot) \|_{L_q(\mathbb{R}^d)}$$

і

$$S_{Q(\kappa(N))}(f,\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa(N)} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d. \tag{1.71}$$

Зазначимо, що у цьому випадку $S_{Q(\kappa(N))}(f,\boldsymbol{x})$ — ціла функція зі спектром на множині $Q(\kappa(N))$.

Наближення класів функцій, що є узагальненням класів періодичних функцій мішаної гладкості $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ тригонометричними поліномами зі спектром на множинах подібних до $Q(\kappa(N))$ розглядалися, зокрема, у роботах [155, 194, 215, 216].

Варто зауважити, що ідея розгляду множин аналогічних до $Q(\kappa(N))$ для побудови тригонометричних поліномів вперше зустрічається у роботі А. С. Романюка [92]. У цій роботі, зокрема, розв'язувалася задача про знаходження точних за порядком оцінок наближення класів $L^{\psi}_{\beta,p}(\mathbb{T}^d)$ (див., наприклад, [115]), які є узагальненням за гладкісним параметром класів Вейля–Надя $W^{r}_{\beta,p}(\mathbb{T}^d)$.

1.4. Ізотропні та анізотропні простори функцій багатьох змінних Нікольського–Бєсова в $\mathbb{R}^{\boldsymbol{d}}$

У цьому підрозділі дано означення анізотропних та ізотропних класів Нікольського–Бєсова функцій багатьох змінних, що визначені в $\mathbb{R}^d$, а також основних апроксимаційних характеристик, які розглядаються у дисертаційній роботі для цих класів функцій.

1.4.1. Означення анізотропних класів функцій Нікольського–Бєсова.

Означення анізотропних просторів, як Нікольського $H^{\boldsymbol{r}}_p(\mathbb{R}^d)$ так і Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ у класичній формі даються в термінах певних обмежень на модулі гладкості функцій з цих просторів. Наведемо необхідні позначення.

Для $k \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^d$ означимо модуль гладкості k-го порядку функції $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ за змінною x_i, який будемо позначати $\omega_k(f, te_i)_p$, такою формулою

$$\omega_k(f, te_i)_p = \sup_{|\boldsymbol{h}|\leqslant t} \|\Delta^k(f, \boldsymbol{h}e_i)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \sup_{|\boldsymbol{h}|\leqslant t} \left\| \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} C_k^l f(\boldsymbol{x} + l\boldsymbol{h}e_i) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)},$$

де $|\boldsymbol{h}| = \sqrt{h_1^2 + \ldots + h_d^2}$ — евклідова норма вектора $\boldsymbol{h}$, а e_i — одиничний вектор, який направлений уздовж осі x_i.

Нехай $r_i > 0$, $r_i = \bar{r_i} + \alpha_i$, де $\bar{r_i}$ — ціле, $0 < \alpha_i \leqslant 1$, $i = \overline{1, d}$.

Будемо говорити, що функція $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ належить простору $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p,\ \theta \leqslant \infty$, $\boldsymbol{r} > 0$, якщо вона має інтегровані в степені p на $\mathbb{R}^d$ часткові, узагальнені в сенсі Соболєва, незмішані похідні вигляду

$$D_i^k f = \frac{\partial^k f}{\partial x_i^k},\ k = \overline{0, \bar{r_i}},\ i = \overline{1, d},$$

і при цьому

$$\|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} + \sum_{i=1}^{d} \left(\int_0^\infty t^{-\theta\alpha_i - 1} \omega^\theta_{1+[\alpha_i]}(D_i^{\bar{r_i}} f, te_i)_p dt \right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty, \tag{1.72}$$

якщо $1 \leqslant \theta < \infty$ і

$$\|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^d)} \equiv \|f\|_{H^{\boldsymbol{r}}_p(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} + \sum_{i=1}^{d} \sup_{t>0} t^{-\alpha_i} \omega_{1+[\alpha_i]}(D_i^{\bar{r_i}} f, te_i)_p < \infty, \tag{1.73}$$

якщо $\theta = \infty$.

Зазначимо, що з так введеною нормою простори $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ будуть банаховими, тобто лінійними нормованими просторами (див. теорему 1.2 [14]).

Простори $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ були введені О. В. Бєсовим [14], $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^d) \equiv$ $\equiv H^{\boldsymbol{r}}_p(\mathbb{R}^d)$, де $H^{\boldsymbol{r}}_p(\mathbb{R}^d)$ — простори, які ввів С. М. Нікольський [77].

Дані простори функцій прийнято називати анізотропними просторами Нікольського–Бєсова. У випадку, коли у вектора $\boldsymbol{r}$ усі координати рівні між собою, тобто $r_1 = r_2 = \ldots = r_d = r$, то відповідні простори називаються ізотропними просторами Нікольського–Бєсова, і будемо їх позначати $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ і $H^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$. О. В. Бєсовим [14] та С. М. Нікольським [76] була отримана низка результатів стосовно вкладення відповідно просторів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ і $H^{\boldsymbol{r}}_p(\mathbb{R}^d)$ за параметрами p, θ і $\boldsymbol{r}$, а також теореми про продовження функцій з цих просторів. Основні результати досліджень даних просторів, зокрема, повна теорія вкладення, відображені у монографії С. М. Нікольського [78] та подальших її перевиданнях.

Важливе значення при дослідженні просторів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ відіграє теорема встановлена О. В. Бєсовим [14, теорема 2.1], яку сформулюємо у такій формі.

Твердження 1.32. *Нехай* $1 \leqslant p \leqslant p' \leqslant \infty$, $\theta' \geqslant \theta$,

$$\kappa = 1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}\right) \sum_{j=1}^{d} \frac{1}{r_j} > 0.$$

Тоді, якщо $f \in B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, *то* $f \in B^{\boldsymbol{\rho}}_{p',\theta'}(\mathbb{R}^d)$, *де* $\rho_j = r_j \kappa$, $j = \overline{1,d}$, *і при цьому має місце нерівність*

$$\|f(\cdot)\|_{B^{\boldsymbol{\rho}}_{p',\theta'}(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_7 \|f(\cdot)\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)},$$

де $C_7 > 0$ *— деяка константа, яка не залежить від* f.

Зазначимо також, що важливим для встановлення результатів є той факт, що простори $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ зі зростанням параметра θ розширюються (див., наприклад, [78, с. 278]), що, зокрема, випливає і з даного твердження при $p = p'$, тобто

$$B^{\boldsymbol{r}}_{p,1}(\mathbb{R}^d) \subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d) \subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta'}(\mathbb{R}^d) \subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^d) \equiv H^{\boldsymbol{r}}_p(\mathbb{R}^d), \tag{1.74}$$
$$1 \leqslant \theta < \theta' \leqslant \infty.$$

Далі наведемо один результат П. І. Лізоркіна (див. теорема 2 [50]), який дає можливість означити норму функцій із просторів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ в іншій формі, яка в подальшому також зумовлює використання перетворення Фур'є в теорії даних просторів. Для цього попередньо наведемо необхідні означення.

Назвемо найкращим наближенням функції $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ за допомогою цілих функцій степенів $\nu_1, \ldots, \nu_d$ величину

$$E_{\nu_1,\ldots,\nu_d}\big(f\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} = \inf_{g_{\nu_1,\ldots,\nu_d}} \|f(\cdot) - g_{\nu_1,\ldots,\nu_d}(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}, \tag{1.75}$$

де інфінум береться по всіх цілих функціях $g_{\nu_1,\ldots,\nu_d}(x_1, \ldots, x_d) \in L_p(\mathbb{R}^d)$ степенів $\nu_1, \ldots, \nu_d$ відповідно за змінними $x_1, \ldots, x_d$.

Твердження 1.33 ([50]). *Функція f належить простору $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, $\boldsymbol{r} > 0$, $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$, тоді і тільки тоді, коли вона зображується збіжним у метриці простору $L_p(\mathbb{R}^d)$ рядом*

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{s=0}^{\infty} P_{\boldsymbol{a}^s}(\boldsymbol{x}), \quad P_{\boldsymbol{a}^s}(\boldsymbol{x}) = P_{a_1^s,\ldots,a_d^s}(\boldsymbol{x}), \tag{1.76}$$

де $P_{\nu_1,\ldots,\nu_d}(\boldsymbol{x})$ — цілі функції степеня не вищого за $\nu_1, \ldots, \nu_d$ по кожній змінній $x_1, \ldots, x_d$ відповідно, і виконується умова

$$\left(\sum_{s=0}^{\infty} b^{s\theta} \|P_{\boldsymbol{a}^s}(\cdot)\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty, \quad \text{де} \;\; b = a_i^{r_i} > 1, \;\; i = \overline{1, d}. \tag{1.77}$$

Окрім цього, має місце оцінка

$$\|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_8 \left(\sum_{s=0}^{\infty} b^{s\theta} \|P_{\boldsymbol{a}^s}(\cdot)\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}}, \quad C_8 > 0. \tag{1.78}$$

Якщо, крім того, частинні суми n-го порядку ряду (1.76) реалізують найкраще наближення або дають порядок найкращого наближення, то вираз у лівій частині (1.77) і $\|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)}$ еквівалентні, тобто разом із (1.78) має місце оцінка

$$\left(\sum_{s=0}^{\infty} b^{s\theta} \|P_{\boldsymbol{a}^s}(\cdot)\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \leqslant C_9 \|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)}, \quad C_9 > 0.$$

На основі твердження 1.33 дамо еквівалентні означення норми функцій з анізотропних просторів Нікольського–Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, яким будемо користуватися при доведенні відповідних результатів.

У подальшому будемо користуватися такими позначеннями. Нехай функція $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, зображена інтегралом Фур'є

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{x})} d\boldsymbol{\lambda}.$$

Тоді відрізком інтегралу Фур'є функції f назвемо вираз

$$S_{\boldsymbol{\sigma}}(f) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int\limits_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \dots \int\limits_{-\sigma_d}^{\sigma_d} \tilde{f}(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{x})} d\boldsymbol{\lambda},$$

де $\tilde{f}(\boldsymbol{\lambda})$ — перетворення Фур'є функції $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$.

Крім того, для $S_{\boldsymbol{\sigma}}(f)$ можемо записати (див. [51])

$$S_{\boldsymbol{\sigma}}(f) = \frac{1}{\pi^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{y}) \prod_{j=1}^{d} \frac{\sin \sigma_j (x_j - y_j)}{x_j - y_j} d\boldsymbol{y}.$$

Таким чином, $S_{\boldsymbol{\sigma}}(f)$ — ціла функція степеня $\boldsymbol{\sigma}$.

Нехай $D_{\boldsymbol{a}^s}$ позначає таку множину (паралелепіпед):

$$D_{\boldsymbol{a}^s} = D_{a_1^s,\dots,a_d^s} = \Big\{ \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \colon |\lambda_j| < a_j^s,\ \lambda_j \in \mathbb{R}, j = \overline{1,d}, \quad s \geqslant 0 \Big\},$$

а $\Gamma_{\boldsymbol{a}^s} = D_{\boldsymbol{a}^s} - D_{\boldsymbol{a}^{s-1}}$ при $s \geqslant 1$ і $\Gamma_{\boldsymbol{a}^0} = D_{\boldsymbol{a}^0}$. Покладемо

$$f_{\boldsymbol{a}^s} = S_{\boldsymbol{a}^s}(f) - S_{\boldsymbol{a}^{s-1}}(f) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int\limits_{\Gamma_{\boldsymbol{a}^s}} \tilde{f}(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{x})} d\boldsymbol{\lambda},\ s \geqslant 1,$$

і

$$f_{\boldsymbol{a}^0} = S_{\boldsymbol{a}^0}(f) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int\limits_{\Gamma_{\boldsymbol{a}^0}} \tilde{f}(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{x})} d\boldsymbol{\lambda}.$$

Зображення функції f рядом

$$f(\boldsymbol{x}) = f_{\boldsymbol{a}^0}(\boldsymbol{x}) + \sum_{s=1}^{\infty} f_{\boldsymbol{a}^s}(\boldsymbol{x}) = \sum_{s=0}^{\infty} f_{\boldsymbol{a}^s}(\boldsymbol{x}) \qquad (1.79)$$

будемо називати розшаруванням f ($\boldsymbol{a}$-розшаруванням f). У випадку, коли $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $p > 2$, $S_{\boldsymbol{a}^s}(f)$ розуміють, взагалі кажучи, як результат дії на f деякого оператора, який в образах Фур'є зводиться до множення на характеристичну функцію області $D_{\boldsymbol{a}^s}$ (див. [51, §3, гл.1]). Зауважимо, що ряд (1.79) для функції $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, є збіжним у метриці простору $L_p(\mathbb{R}^d)$.

Окрім того відмітимо, що для $S_{\boldsymbol{a}^n}(f)$, $n \in \mathbb{N}$, у прийнятих позначеннях також можемо записати

$$S_{\boldsymbol{a}^n}(f) = \sum_{s=0}^{n} f_{\boldsymbol{a}^s}(\boldsymbol{x}). \tag{1.80}$$

Тоді для норми функцій $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, $\boldsymbol{r} > \boldsymbol{0}$ з анізотропних просторів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, згідно з твердженням 1.33, можна записати співвідношення

$$\|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)} \asymp \left(\sum_{s=0}^{\infty} b^{s\theta} \|f_{\boldsymbol{a}^s}(\cdot)\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty, \tag{1.81}$$

при $1 \leqslant \theta < \infty$,

$$\|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^d)} \asymp \sup_{s \geqslant 0} b^s \|f_{\boldsymbol{a}^s}(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} < \infty, \tag{1.82}$$

де, як і раніше, $b = a_i^{r_i} > 1$.

Далі, зберігаючи ті самі позначення, будемо розглядати класи $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, тобто одиничні кулі у просторах $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ (як в анізотропному, так і в ізотропному випадку):

$$B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in L_p(\mathbb{R}^d) \colon \|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1 \right\}.$$

Означимо апроксимаційні характеристики, які досліджуються у дисертаційній роботі для анізотропних класів Нікольського–Бєсова.

Для функції $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ розглянемо величину

$$\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(f)_{L_p(\mathbb{R}^d)} := \|f(\cdot) - S_{\boldsymbol{a}^{n-1}}(f, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.83}$$

яка називається наближенням функції f $\boldsymbol{a}^n$-відрізками інтеграла Фур'є. Відповідно для функціонального класу $F \subset L_p(\mathbb{R}^d)$ позначимо

$$\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(F)_{L_p(\mathbb{R}^d)} := \sup_{f\in F} \mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(f)_{L_p(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.84}$$

Далі введемо таке позначення:

$$G_q\big(D_{\boldsymbol{a}^n}\big) := \Big\{ g \in L_q(\mathbb{R}^d) \colon \operatorname{supp} \mathfrak{F}g(\boldsymbol{x}) \subseteq D_{\boldsymbol{a}^n} \Big\}.$$

Оскільки носій перетворення Фур'є функцій g зосереджений в множині $D_{\boldsymbol{a}^n}$, то можемо стверджувати (див., наприклад, [3, § 82], [78, § 3.1]), що $G_q\big(D_{\boldsymbol{a}^n}\big)$ — множина цілих функцій експоненціального типу $\boldsymbol{a}^n$, тобто цілих функцій степенів не вище $a_1^n, \ldots, a_d^n$ по кожній змінній. У цьому випадку для (1.75) будемо використовувати позначення

$$\begin{aligned} E_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(f)_{L_q(\mathbb{R}^d)} &:= E\big(f, G_q(D_{\boldsymbol{a}^n})\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} := \\ &:= \inf_{g\in G_q(D_{\boldsymbol{a}^n})} \|f(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \tag{1.85}$$

Відповідно, для функціонального класу F покладемо

$$E_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(F)_{L_q(\mathbb{R}^d)} := \sup_{f\in F} E_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(f)_{L_q(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.86}$$

У випадку $1 < q < \infty$ величини (1.83) і (1.85) мають один і той же порядок (див., наприклад, [50]), тобто для функції $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$

$$\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(f)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp E_{D_{\boldsymbol{a}^n}}(f)_{L_q(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.87}$$

1.4.2. Означення норми функцій з ізотропних класів Нікольського–Бєсова

На основі твердження 1.33 наведемо еквівалентні означення норми функцій з ізотропних просторів $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, $r = r_1 = r_2 = \ldots = r_d$, у залежності від значення параметра p, а саме у випадках $1 < p < \infty$ і $1 \leqslant p \leqslant \infty$, якими будемо користуватися у подальших міркуваннях. Для ізотропних просторів Нікольського–Бєсова візьмемо $a_1 = \ldots = a_d = 2$.

У випадку $1 < p < \infty$ конкретизуємо відповідні позначення пункту 1.4.1.

Відрізок інтегралу Фур'є функції $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ будемо позначати $S_{2^s}(f)$ і

$$S_{2^s}(f) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int\limits_{-2^s}^{2^s} \dots \int\limits_{-2^s}^{2^s} \tilde{f}(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x})} d\boldsymbol{\lambda}.$$

У цьому випадку через $D_{2^s} = D_{2^s,\dots,2^s}$ будемо позначати $D_{\boldsymbol{a}^s}$:

$$D_{2^s} = D_{2^s,\dots,2^s} = \Big\{\boldsymbol{\lambda}\colon |\lambda_j| < 2^s, \quad j = \overline{1,d}, \quad s \geqslant 0\Big\},$$

а $\Gamma_{2^s} = D_{2^s} - D_{2^{s-1}}$ при $s \geqslant 1$ і $\Gamma_{2^0} = D_{2^0}$. Покладемо

$$f_{(s)} = f_{2^s} = S_{2^s}(f) - S_{2^{s-1}}(f) = \int\limits_{\Gamma_{2^s}} \tilde{f}(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x})} d\boldsymbol{\lambda}, s \geqslant 1,$$

і

$$f_{(0)} = f_{2^0} = S_{2^0}(f) = \int\limits_{\Gamma_{2^0}} \tilde{f}(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x})} d\boldsymbol{\lambda},$$

де $f_{(s)}(\boldsymbol{x})$, $s \geqslant 0$, — цілі функції, які належать $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$ (див., наприклад, [51]), а перетворення Фур'є $f_{(s)}$ зосереджене в області

$$\Gamma_{2^s} = \left\{ 2^{s-1} \leqslant \max_{j=\overline{1,d}} |\lambda_j| \leqslant 2^s \right\}$$

і співпадає там з $\widetilde{f}$.

Крім того для функції f маємо

$$f(\boldsymbol{x}) \overset{L_p(\mathbb{R}^d)}{=} \sum_{s=0}^{\infty} f_{(s)}(\boldsymbol{x}).$$

Тоді, відповідним чином модифікувавши (1.81) і (1.82), простори $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ можна означити наступним чином.

Функція f належить простору $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, $r > 0$, $1 < p < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, тоді і лише тоді, коли

$$\left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sr\theta} \| f_{(s)}(\cdot) \|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty,$$

якщо $1 \leqslant \theta < \infty$ і

$$\sup_{s\geqslant 0} 2^{sr}\|f_{(s)}(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} < \infty, \quad \text{якщо} \quad \theta = \infty.$$

При цьому норма $\|f(\cdot)\|_{B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)}$ задовольняє співвідношення

$$\|f(\cdot)\|_{B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)} \asymp \left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sr\theta}\|f_{(s)}(\cdot)\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)}\right)^{\frac{1}{\theta}}, \tag{1.88}$$

якщо $1 \leqslant \theta < \infty$ і

$$\|f(\cdot)\|_{B^r_{p,\infty}(\mathbb{R}^d)} \asymp \sup_{s\geqslant 0} 2^{sr}\|f_{(s)}(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.89}$$

Для того, щоб означити простори $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ у випадку $1 \leqslant p \leqslant \infty$ розглянемо неперіодичний аналог ядра Валле Пуссена [78, Гл. 8, §8.6] (див. також [75, 79])

$$V_{2^s}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2^{sd}}\prod_{j=1}^{d}\frac{\cos 2^s x_j - \cos 2^{s+1}x_j}{x_j^2}, \quad j = \overline{1,d}, \quad s \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.90}$$

Дане ядро має такі властивості:

1) $V_{2^s}(\boldsymbol{z}) = V_{2^s}(z_1, \ldots, z_d)$ — ціла функція експоненціального типу степеня 2^{s+1} за кожною змінною z_j, $j = \overline{1,d}$, обмежена і сумовна на $\mathbb{R}^d$;

2) $\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}}\tilde{V}_{2^s} = \frac{1}{\pi^d}\int_{\square_{2^s}} V_{2^s}(\boldsymbol{t})e^{-i(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})}d\boldsymbol{t}$, де $\square_{2^s} = \left\{|x_j| \leqslant 2^s,\ j = \overline{1,d}\right\}$;

3) $\frac{1}{\pi^d}\int_{\mathbb{R}^d} V_{2^s}(\boldsymbol{t})d\boldsymbol{t} = 1$;

4) $\frac{1}{\pi^d}\int_{\mathbb{R}^d} |V_{2^s}(\boldsymbol{t})|d\boldsymbol{t} \leqslant C_{10} < \infty$.

Зазначимо, що для $\tilde{V}_{2^s}$ має місце рівність

$$\tilde{V}_{2^s} = \mu_{2^s}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d}\mu_{2^s}(x_j),$$

де

$$\mu_{2^s}(x_j)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\begin{cases}1, & |x_j|<2^s;\\ \frac{1}{2^s}(2^{s+1}-x_j), & 2^s<|x_j|<2^{s+1};\\ 0, & 2^{s+1}<|x_j|.\end{cases}$$

Нехай $f\in L_p(\mathbb{R}^d)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. У такому випадку покладемо

$$\sigma_{2^s}(f,\boldsymbol{x})=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{d/2}\big(V_{2^s}*f\big)(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\pi^d}\int V_{2^s}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u})f(\boldsymbol{u})d\boldsymbol{u}, \qquad (1.91)$$

де “$*$” — операція згортки. Дана функція є аналогом суми Валле Пуссена періодичної функції порядку 2^s, крім цього $\sigma_{2^s}(f,\boldsymbol{x})\in L_p(\mathbb{R}^d)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, є цілою функцією експоненціального типу 2^{s+1} по кожній змінній x_j, $j=\overline{1,d}$. У термінах перетворення Фур'є $\sigma_{2^s}(f,\boldsymbol{x})$ можна подати у такому вигляді

$$\sigma_{2^s}(f,\boldsymbol{x})=\sigma_{2^s}(f)=\mathfrak{F}^{-1}(\mu_{2^s}\cdot\mathfrak{F}f).$$

Далі, кожній функції $f\in L_p(\mathbb{R}^d)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, поставимо у відповідність ряд

$$f=\sigma_{2^0}(f)+\sum_{s=1}^{\infty}\big(\sigma_{2^s}(f)-\sigma_{2^{s-1}}(f)\big), \qquad (1.92)$$

який збігається до f у метриці простору $L_p(\mathbb{R}^d)$ [79]. Даний ряд будемо називати розкладом функції f за сумами типу Валле Пуссена.

Введемо позначення

$$q_0(f)=\sigma_{2^0}(f),\quad q_s(f)=\sigma_{2^s}(f)-\sigma_{2^{s-1}}(f), s\in\mathbb{N}. \qquad (1.93)$$

Тоді згідно з співвідношенням (1.93) рівність (1.92) для f можемо записати у вигляді

$$f\overset{L_p(\mathbb{R}^d)}{=}\sum_{s=0}^{\infty}q_s(f).$$

При цьому звернемо увагу, що носій перетворення Фур'є функції $q_s(f)$ зосереджено на множині

$$\Big\{\boldsymbol{\lambda}\colon 2^{s-1} \leqslant \max_{j=\overline{1,d}} |\lambda_j| \leqslant 2^{s+1}\Big\}.$$

Зауважимо, що наближення функції $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, за допомогою $\sigma_{2^s}(f)$ має такий же порядок, як і найкраще наближення цієї функції за допомогою функцій експоненціального типу 2^s.

Таким чином на основі теореми 1.33 можна дати наступне означення просторів $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ [79].

Функція f належить простору $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$, $r > 0$, якщо для неї скінченними є величини

$$\left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sr\theta} \|q_s(\cdot)\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)}\right)^{\frac{1}{\theta}},$$

при $1 \leqslant \theta < \infty$ та

$$\sup_{s \geqslant 0} 2^{sr} \|q_s(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}$$

при $\theta = \infty$.

При цьому норма $\|f(\cdot)\|_{B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)}$ функцій f задовольняє співвідношенням

$$\|f(\cdot)\|_{B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)} \asymp \left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sr\theta} \|q_s(\cdot)\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)}\right)^{\frac{1}{\theta}}, \tag{1.94}$$

якщо $1 \leqslant \theta < \infty$, і

$$\|f(\cdot)\|_{B^r_{p,\infty}(\mathbb{R}^d)} \asymp \sup_{s \geqslant 0} 2^{sr} \|q_s(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.95}$$

Тепер дамо означення апроксимаційної характеристики, яка буде досліджуватися.

Для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, розглянемо частинну суму типу Валле Пуссена

$$\mathbf{V}_n(f) = \sum_{s=0}^{n} q_s(f) \tag{1.96}$$

і покладемо

$$\mathcal{E}_n\big(f\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} := \big\|f(\cdot) - \mathbf{V}_{n-1}(f,\cdot)\big\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.97}$$

Величина $\mathcal{E}_n\big(f\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ називається величиною наближенням функції f частинними сумами типу Валле Пуссена. Якщо $F \subset L_q(\mathbb{R}^d)$, то покладемо

$$\mathcal{E}_n\big(F\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} := \sup_{f\in F} \mathcal{E}_n\big(f\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.98}$$

Розділ 2

Наближення класів функцій з домінуючою мішаною похідною, що визначені в $\mathbb{R}^{d}$

Даний розділ присвячено вивченню апроксимаційних характеристик класів функцій з домінуючою мішаною похідною $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ у метриці простору Лебега $L_q(\mathbb{R}^d)$. Встановлено точні за порядком оцінки наближення функцій з цих класів цілими функціями зі спектром, який зосереджений у східчастому гіперболічному хресті, а також у деяких інших множинах, лебегова міра яких є скінченною.

2.1. Допоміжні твердження

Наведемо декілька допоміжних тверджень, які будемо використовувати у процесі доведення.

Твердження 2.1 ([78], с. 81). *Нехай задано* $1<p<\infty$. *Існують такі додатні числа* C_1, C_2, *що для кожної функції* $f\in L_p(\mathbb{R}^d)$ *виконуються співвідношення*

$$C_1\|f(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}\leqslant \left\|\left(\sum_{\boldsymbol{s}\geqslant\boldsymbol{0}}|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}\leqslant C_2\|f(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}.$$

У літературі теореми типу твердження 2.1 прийнято називати теоремами Літтлвуда–Пелі.

Лема 2.2 ([237]). *Нехай задано* $1<p<q<\infty$ *і* $f\in L_p(\mathbb{R}^d)$. *Тоді*

$$\|f(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}\ll\left(\sum_{\boldsymbol{s}\geqslant\boldsymbol{0}}\|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^q_{L_p(\mathbb{R}^d)}2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)q}\right)^{\frac{1}{q}},$$

де $\|\boldsymbol{s}\|_1 = s_1 + \ldots + s_d$, $s_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1,d}$.

Лема 2.3. *Нехай задано* $1 < q < p < \infty$ *i* $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$. *Тоді*

$$\|f(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \gg \left(\sum_{\boldsymbol{s} \geqslant \boldsymbol{0}} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot)\|^q_{L_p(\mathbb{R}^d)} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) q} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Леми 2.2, 2.3 є аналогом лем, які вперше були доведені для періодичного випадку В. М. Темляковим (див., наприклад, [123, с. 25 – 28]).

Лема 2.4 ([123], с. 11)**.** *Мають місце оцінки:*

$$\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}) \geqslant n} 2^{-\alpha(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})} \asymp 2^{-\alpha n} n^{d-1}, \quad \alpha > 0;$$

$$\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}') \geqslant n} 2^{-\alpha(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})} \asymp 2^{-\alpha n} n^{\nu-1}, \quad \alpha > 0.$$

Окрім цього, у дисертаційній роботі будемо використовувати деякі відомі нерівності. Для зручності наведемо їх (див., наприклад, [78, §1.3.]).

Нехай $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f_1 \in L_p(\mathcal{E})$, $f_2 \in L_q(\mathcal{E})$ і $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тоді виконується нерівність Гельдера

$$\int\limits_{\mathcal{E}} |f_1(\boldsymbol{x}) f_2(\boldsymbol{x})| d\boldsymbol{x} \leqslant \|f_1(\cdot)\|_{L_p(\mathcal{E})} \|f_2(\cdot)\|_{L_q(\mathcal{E})}, \qquad (2.1)$$

де $\mathcal{E}$ позначає $\mathbb{R}^d$ або $\mathbb{T}^d$, $d \geqslant 1$, у залежності від розглядуваного простору.

Методом індукції нерівність (2.1) можна поширити і на випадок k функцій $f_i \in L_{p_i}(\mathcal{E})$, $i = \overline{1,k}$, $\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_k} = 1$.

Нехай $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f_1, f_2 \in L_p(\mathcal{E})$. Тоді виконується нерівність Мінковського

$$\|f_1(\cdot) + f_2(\cdot)\|_{L_p(\mathcal{E})} \leqslant \|f_1(\cdot)\|_{L_p(\mathcal{E})} + \|f_2(\cdot)\|_{L_p(\mathcal{E})}.$$

Також нерівність Мінковського справедлива і у випадку l функцій та має вигляд

$$\left\| \sum_{i=1}^{l} f_i(\cdot) \right\|_{L_p(\mathcal{E})} \leqslant \sum_{i=1}^{l} \|f_i(\cdot)\|_{L_p(\mathcal{E})}, \qquad (2.2)$$

де $f_i \in L_p(\mathcal{E})$. Нерівність (2.2) за належного її трактування виконується і при $l = \infty$, а саме, якщо при $l = \infty$ ряд у правій частині (2.2) збігається, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{l} f_i(\boldsymbol{x})$ збігається у просторі $L_p(\mathcal{E})$ і нерівність (2.2) виконується з $l = \infty$.

Також для $1 \leqslant p \leqslant \infty$ мають місце такі співвідношення:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \text{якщо} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

де a_k, b_k — довільні числа. Дані нерівності називаються відповідно нерівністю Мінковського та нерівністю Гельдера для сум.

2.2. Наближення функцій із класів $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\boldsymbol{\theta}}B(\mathbb{R}^d)$ цілими функціями з носіями їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті

У даному підрозділі викладені результати стосовно оцінок наближення функцій із класів $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ цілими функціями, зі спектром зосередженим на множині, яка називається східчастим гіперболічним хрестом у метриці простору $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p \leqslant \infty$.

Перш ніж перейти до формулювання та доведення основних результатів даного підрозділу, встановимо декілька допоміжних тверджень, що стосуються оцінки норм $A^*_{\boldsymbol{s}}(\cdot)$ у метриці простору $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Розглянемо спочатку випадок $p = \infty$.

Лема 2.5. *Справедливою є оцінки*

$$\|A^*_{\boldsymbol{s}}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1}, \tag{2.3}$$

де $\|\boldsymbol{s}\|_1 = s_1 + \ldots + s_d$, $s_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1,d}$.

Доведення. Врахувавши, що $A_{\boldsymbol{s}}^*(\boldsymbol{x})$ визначається згідно з формулою (1.11) і провівши деякі перетворення для $K_{s_j}(x_j)$, отримаємо

$$A_{\boldsymbol{s}}^*(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} \frac{2^{2-s_j}\sin^2\pi 2^{s_j-2}x_j\big(2\cos\pi 2^{s_j-1}x_j+1\big)}{\pi^2 x_j^2}\times$$

$$\times\big(\cos\pi 2^{s_j-1}x_j+\cos\pi 2^{s_j}x_j-1\big)=\prod_{j=1}^{d}\mathfrak{I}_j(x_j).$$

Тоді для норми $A_{\boldsymbol{s}}^*(\boldsymbol{x})$ у просторі $L_\infty(\mathbb{R}^d)$ можемо записати

$$\|A_{\boldsymbol{s}}^*(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d}\left|\prod_{j=1}^{d}\mathfrak{I}_j(x_j)\right| = \prod_{j=1}^{d}\sup_{x_j\in\mathbb{R}}|\mathfrak{I}_j(x_j)|. \tag{2.4}$$

Таким чином, для оцінки норми $A_{\boldsymbol{s}}^*(\boldsymbol{x})$ достатньо належним чином оцінити величини $\sup\limits_{x_j\in\mathbb{R}}|\mathfrak{I}_j(x_j)|$, $j=\overline{1,d}$.

Встановимо спочатку оцінку зверху. Поклавши $\pi 2^{s_j-2}x_j = t_j$, отримаємо

$$\sup_{x_j\in\mathbb{R}}|\mathfrak{I}_j(x_j)| = \sup_{t_j\in\mathbb{R}}\left|\frac{2^{s_j-2}\sin^2 t_j\big(2\cos 2t_j+1\big)\big(\cos 2t_j+\cos 4t_j-1\big)}{t_j^2}\right| \ll$$

$$\ll 2^{s_j}\sup_{t_j\in\mathbb{R}}\left|9\,\frac{\sin^2 t_j}{t_j^2}\right| \ll 2^{s_j}.$$

Використовуючи цю оцінку, на підставі (2.4), одержуємо

$$\|A_{\boldsymbol{s}}^*(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \ll \prod_{j=1}^{d}2^{s_j} = 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1}.$$

Для оцінки знизу маємо

$$\sup_{x_j\in\mathbb{R}}|\mathfrak{I}_j(x_j)| = \sup_{t_j\in\mathbb{R}}\left|\frac{2^{s_j-2}\sin^2 t_j\big(2\cos 2t_j+1\big)\big(\cos 2t_j+\cos 4t_j-1\big)}{t_j^2}\right| \gg$$

$$\gg 2^{s_j}\left|\frac{\sin^2\frac{\pi}{12}\big(2\cos\frac{\pi}{6}+1\big)\big(\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}-1\big)}{\big(\frac{\pi}{12}\big)^2}\right| \gg 2^{s_j}. \tag{2.5}$$

Підставляючи (2.5) в (2.4), одержуємо

$$\|A_{\boldsymbol{s}}^*(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \gg \prod_{j=1}^{d} 2^{s_j} = 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1}.$$

Отже, оцінку (2.3) встановлено.

Лему 2.5 доведено.

Лема 2.6. *Нехай* $1 \leqslant p < \infty$ *і* $\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}_+^d$, *тоді має місце оцінка*

$$\|A_{\boldsymbol{s}}^*(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)}. \tag{2.6}$$

Доведення. Згідно з позначеннями леми 2.5 можемо записати

$$\|A_{\boldsymbol{s}}^*(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} = \left\|\prod_{j=1}^{d} \mathfrak{I}_j(\cdot)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left|\prod_{j=1}^{d} \mathfrak{I}_j(x_j)\right|^p d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^{d} |\mathfrak{I}_j(x_j)|^p d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\prod_{j=1}^{d} \int\limits_{\mathbb{R}} |\mathfrak{I}_j(x_j)|^p dx_j\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{d} \int\limits_{\mathbb{R}} \left|\frac{2^{2-s_j} \sin^2 \pi 2^{s_j-2} x_j \left(2\cos \pi 2^{s_j-1} x_j + 1\right)}{\pi^2 x_j^2} \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times \left(\cos \pi 2^{s_j-1} x_j + \cos \pi 2^{s_j} x_j - 1\right)\right|^p dx_j\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.7}$$

Оцінимо зверху інтеграл у співвідношенні (2.7). Покладаючи $\pi 2^{s_j-2} x_j = t_j$, отримаємо

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left|\frac{2^{2-s_j} \sin^2 \pi 2^{s_j-2} x_j \left(2\cos \pi 2^{s_j-1} x_j + 1\right)}{\pi^2 x_j^2} \times\right.$$

$$\left.\times \left(\cos \pi 2^{s_j-1} x_j + \cos \pi 2^{s_j} x_j - 1\right)\right|^p dx_j \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \left|\frac{2^{2-s_j} \sin^2 \pi 2^{s_j-2} x_j}{\pi^2 x_j^2}\right|^p dx_j = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{2^{(s_j-2)(p-1)}}{\pi} \left|\frac{\sin^2 t_j}{t_j^2}\right|^p dt_j$$

$$\ll 2^{s_j(p-1)}. \tag{2.8}$$

Підставляючи (2.8) в (2.7), маємо

$$\|A_{\boldsymbol{s}}^*(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \ll \left(\prod_{j=1}^{d} 2^{s_j(p-1)}\right)^{\frac{1}{p}} = 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)}.$$

Тепер оцінимо знизу інтеграл у співвідношенні (2.7). Виконуючи знову заміну $\pi 2^{s_j-2}x_j = t_j$, отримаємо

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left|\frac{2^{2-s_j}\sin^2\pi 2^{s_j-2}x_j\big(2\cos\pi 2^{s_j-1}x_j+1\big)}{\pi^2 x_j^2}\times\right.$$

$$\left.\times\big(\cos\pi 2^{s_j-1}x_j+\cos\pi 2^{s_j}x_j-1\big)\right|^p dx_j =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} 2^{(s_j-2)(p-1)}\left|\frac{\sin^2 t_j\big(2\cos 2t_j+1\big)\big(\cos 2t_j+\cos 4t_j-1\big)}{t_j^2}\right|^p dt_j \gg$$

$$\gg 2^{(s_j-2)(p-1)}\int\limits_{\frac{5\pi}{12}}^{\frac{7\pi}{12}}\left|\frac{\sin^2 t_j\big(2\cos 2t_j+1\big)\big(\cos 2t_j+\cos 4t_j-1\big)}{t_j^2}\right|^p dt_j = J_1.$$

Враховуючи, що підінтегральна функція неперервна на проміжку $\left[\frac{5\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$ і досягає на ньому свого найменшого значення, яке позначимо через m_j, одержуємо

$$J_1 \gg 2^{s_j(p-1)}\int\limits_{\frac{5\pi}{12}}^{\frac{7\pi}{12}} m_j dt_j \asymp 2^{s_j(p-1)}. \tag{2.9}$$

Використовуючи (2.9), маємо

$$\|A_{\boldsymbol{s}}^*(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \gg \left(\prod_{j=1}^{d} 2^{s_j(p-1)}\right)^{\frac{1}{p}} = 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)}.$$

Отже, оцінку (2.6) встановлено.

Лему 2.6 доведено.

Лема 2.7. *Справедливою є така оцінка*

$$\Big\| \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} A^*_{\boldsymbol{s}}(\cdot) \Big\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^n n^{d-1}. \tag{2.10}$$

Доведення. Оцінка зверху в (2.10) безпосередньо випливає з (2.3) і нерівності Мінковського. Дійсно,

$$\Big\| \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} A^*_{\boldsymbol{s}}(\cdot) \Big\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \ll \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} \|A^*_{\boldsymbol{s}}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \ll$$

$$\ll \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1} \asymp 2^n n^{d-1}.$$

Для оцінки знизу маємо

$$\Big\| \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} A^*_{\boldsymbol{s}}(\cdot) \Big\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d} \Big| \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} A^*_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x}) \Big| =$$

$$= \sup_{\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^d} \left| \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} \prod_{j=1}^{d} \frac{2^{s_j-2}\sin^2 t_j \big(2\cos 2t_j + 1\big)\big(\cos 2t_j + \cos 4t_j - 1\big)}{t_j^2} \right| \gg$$

$$\gg \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} \prod_{j=1}^{d} 2^{s_j} \left| \frac{\sin^2 \frac{\pi}{12}\big(2\cos\frac{\pi}{6} + 1\big)\big(\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3} - 1\big)}{\big(\frac{\pi}{12}\big)^2} \right| \gg$$

$$\gg \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1} \asymp 2^n n^{d-1}.$$

Оцінку (2.10) встановлено.

Лему 2.7 доведено.

Оцінки лем 2.5, 2.6, 2.7, як випливає з їхнього доведення, з відповідною модифікацію виконуються і при $d = 1$.

Зауважимо, що саме на основі сум Валле Пуссена побудовано екстремальні функції, які реалізують оцінки знизу в сформульованих нижче теоремах, а одержані в лемах оцінки для їх норми дали змогу показати їхню належність до відповідних класів функцій з домінуючою мішаною похідною — $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)$.

Далі встановимо оцінки для величин (1.23) та (1.24) у метриці простору $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p \leqslant \infty$.

Теорема 2.8. *Нехай $r_1 > 1$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. Тоді має місце порядкове співвідношення*

$$\mathcal{E}_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{-n(r_1-1)}n^{(\nu-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{2.11}$$

Перш ніж безпосередньо перейти до доведення теореми 2.8 зробимо зауваження.

Зауваження 2.9. Оскільки $r_1 > 1$, то на підставі твердження 1.3 існує такий вектор $\boldsymbol{\rho}$, $\rho_j = r_j - 1 > 0$, $j = \overline{1,d}$, що для $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ маємо $f \in S^{\boldsymbol{\rho}}_{\infty,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, тобто $f \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$. Окрім того, можемо стверджувати, що при деякому $1 < q_0 < \infty$, $f \in S^{\boldsymbol{\rho}}_{q_0,\theta}B$, де $\rho_j = r_j - \left(1 - \frac{1}{q_0}\right) > 0$, $j = \overline{1,d}$.

Доведення теореми 2.8. Встановимо спочатку оцінку зверху у співвідношенні (2.11). Нехай $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)$. Тоді, беручи до уваги зауваження 2.9, використовуючи нерівність Мінковського і різних метрик (твердження 1.1), а також співвідношення (1.14), можемо записати

$$\mathcal{E}_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}(f)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} = \|f(\cdot) - S_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}(f,\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \Bigg\| f(\cdot) - \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\leqslant n} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot) \Bigg\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \ll$$

$$\ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{\frac{\|\boldsymbol{s}\|_1}{q_0}} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_{q_0}(\mathbb{R}^d)} \asymp \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{\frac{\|\boldsymbol{s}\|_1}{q_0}} \|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_{q_0}(\mathbb{R}^d)} \ll$$

$$\ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{\frac{\|\boldsymbol{s}\|_1}{q_0}} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{q_0}\right)} \|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1} \|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.12}$$

Щоб продовжити оцінку (2.12), розглянемо спочатку випадок, коли $1 \leqslant \theta < \infty$. Тоді, застосовуючи нерівність Гельдера, маємо

$$\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1} \|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} = \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^{\theta}_{L_1(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r}-\boldsymbol{1})\frac{\theta}{\theta-1}} \right)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \|f(\cdot)\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r}-\boldsymbol{1})\frac{\theta}{\theta-1}} \right)^{1-\frac{1}{\theta}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{-(\boldsymbol{s},\bar{\boldsymbol{\gamma}})(r_1-1)\frac{\theta}{\theta-1}} \right)^{1-\frac{1}{\theta}} = J_2, \tag{2.13}$$

де $\bar{\boldsymbol{\gamma}} = (\bar{\gamma}_1, \ldots, \bar{\gamma}_d)$ — вектор із координатами $\bar{\gamma}_j = \dfrac{r_j - 1}{r_1 - 1}$, $j = \overline{1,d}$, а $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{1}$ позначає вектор з координатами $r_j - 1$, $j = \overline{1,d}$. Якщо $j = \overline{1,\nu}$, то $\bar{\gamma}_j = \gamma_j$, і $1 < \gamma_j \leqslant \bar{\gamma}_j$, якщо $j = \overline{\nu+1,d}$. Тому, використовуючи лему 2.4, отримаємо

$$J_2 \ll 2^{-n(r_1-1)} n^{(\nu-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \tag{2.14}$$

Отже, зіставляючи (2.12)–(2.14), одержуємо

$$\sup_{f \in S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \|f(\cdot) - S_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}(f,\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \ll 2^{-n(r_1-1)} n^{(\nu-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Нехай тепер $\theta = \infty$. Тоді згідно з означенням класів $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ маємо $\|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \ll 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})}$, а використовуючи лему 2.4, для (2.12) можемо записати

$$\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1} \|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} \ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r}-\boldsymbol{1})} =$$

$$= \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{-(\boldsymbol{s},\bar{\boldsymbol{\gamma}})(r_1-1)} \ll 2^{-n(r_1-1)} n^{\nu-1}. \tag{2.15}$$

Об'єднуючи (2.14) та (2.15), одержуємо оцінку зверху в (2.11).

Перейдемо до встановлення оцінки знизу, яку достатньо отримати для випадку $\nu = d$. Розглянемо функції

$$f_1(\boldsymbol{x}) = C_3 2^{-nr_1} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} A^*_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x}), \qquad C_3 > 0,$$

якщо $1 \leqslant \theta < \infty$, і

$$f_2(\boldsymbol{x}) = C_4 2^{-nr_1} \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} A^*_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x}), \quad C_4 > 0,$$

якщо $\theta = \infty$.

Переконаємося, що дані функції належать класам $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ і $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\infty}B(\mathbb{R}^d)$ відповідно. Оскільки має місце оцінка $\left\|A^*_{\boldsymbol{s}}(\cdot)\right\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} \asymp C_5$, $C_5 > 0$, то

$$\|f_1(\cdot)\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \asymp \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|A^*_{\boldsymbol{s}}(f_1,\cdot)\|^{\theta}_{L_1(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp 2^{-nr_1} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|A^*_{\boldsymbol{s}}(\cdot)\|^{\theta}_{L_1(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp 2^{-nr_1} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} 2^{r_1(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 1.$$

Для f_2 будемо мати

$$\|f_2(\cdot)\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{1,\infty}(\mathbb{R}^d)} \asymp \sup_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \|A^*_{\boldsymbol{s}}(f_2,\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} \asymp$$

$$\asymp 2^{-nr_1} \sup_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \|A^*_{\boldsymbol{s}}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{-nr_1} \sup_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \ll 1.$$

Далі, враховуючи вибір функцій f_1 і f_2, отримуємо $S_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}(f_1,\boldsymbol{x}) = 0$ і $S_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}(f_2,\boldsymbol{x}) = 0$.

Таким чином, беручи до уваги оцінку (2.10), одержуємо

$$\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^\gamma}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \gg \mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^\gamma}\big(f_1\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} = \|f_1(\cdot) - S_{\tilde{Q}_n^\gamma}(f_1,\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \|f_1(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{-nr_1} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \Bigg\| \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n+1} A^*_{\boldsymbol{s}}(\cdot)\Bigg\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp$$

$$\asymp 2^{-nr_1} n^{-\frac{d-1}{\theta}}\, 2^n n^{d-1} = 2^{-n(r_1-1)} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)},$$

і

$$\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^\gamma}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\infty}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \gg \mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^\gamma}\big(f_2\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} = \|f_2(\cdot) - S_{\tilde{Q}_n^\gamma}(f_2,\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \|f_2(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{-nr_1} \Bigg\| \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n+1} A^*_{\boldsymbol{s}}(\cdot)\Bigg\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp$$

$$\asymp 2^{-nr_1}\, 2^n n^{d-1} = 2^{-n(r_1-1)} n^{d-1}.$$

Оцінки знизу встановлено.

Теорему 2.8 доведено.

Теорема 2.10. *Нехай* $1 < q < \infty$ *і* $r_1 > 1 - \frac{1}{q}$. *Тоді для* $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ *мають місце порядкові співвідношення*

$$E_{\tilde{Q}_n^\gamma}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp \mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^\gamma}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp$$

$$\asymp 2^{-n\left(r_1-1+\frac{1}{q}\right)} n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+}, \tag{2.16}$$

де $a_+ = \max\{a;\ 0\}$.

Зауваження 2.11. Оскільки $r_1 > 1 - \frac{1}{q}$, то на підставі твердження 1.3 існує такий вектор $\boldsymbol{\rho}$, $\rho_j = r_j - \left(1 - \frac{1}{q}\right) > 0$, $j = \overline{1,d}$, що для $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ маємо $f \in S^{\boldsymbol{\rho}}_{q,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, тобто $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$. Крім того, аналогічно як і у зауваженні 2.9 можемо стверджувати, що при деякому $1 < q_0 < q$, $f \in S^{\boldsymbol{\rho}}_{q_0,\theta}B$, де $\rho_j = r_j - \left(1 - \frac{1}{q_0}\right) > 0$, $j = \overline{1,d}$, оскільки $r_1 > 1 - \frac{1}{q} > 1 - \frac{1}{q_0}$.

Доведення теореми 2.10. Встановимо спочатку оцінку зверху. Нехай $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)$. Тоді для $1 < q_0 < q$, використовуючи лему 2.2, а потім застосовуючи нерівність різних метрик (твердження 1.1), отримуємо

$$\mathcal{E}_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}(f)_{L_q(\mathbb{R}^d)} = \|f(\cdot) - S_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}(f,\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} = \Bigg\| \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot) \Bigg\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^q_{L_{q_0}(\mathbb{R}^d)} 2^{\|s\|_1\left(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{1}{q}} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} \|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^q_{L_{q_0}(\mathbb{R}^d)} 2^{\|s\|_1\left(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} \|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^q_{L_1(\mathbb{R}^d)} 2^{\|s\|_1\left(1-\frac{1}{q_0}\right)q} 2^{\|s\|_1\left(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} \|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^q_{L_1(\mathbb{R}^d)} 2^{\|s\|_1\left(1-\frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{1}{q}} = J_3.$$

Для того щоб продовжити оцінку J_3, розглянемо декілька випадків.

Нехай $1 < q < \theta < \infty$. Тоді, застосовуючи до J_3 нерівність Гельдера з показником $\frac{\theta}{q}$ і враховуючи, що $r_1 > 1 - \frac{1}{q}$, одержуємо

$$J_3 = \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} \|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^q_{L_1(\mathbb{R}^d)} \, 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})q} \, 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})q} \, 2^{\|s\|_1\left(1-\frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} \|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^\theta_{L_1(\mathbb{R}^d)} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} \left(2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})q} \, 2^{\|s\|_1\left(1-\frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{\theta}{\theta-q}} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \leqslant$$

$$\leqslant \|f(\cdot)\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} \left(2^{-\left((\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})-\left(1-\frac{1}{q}\right)\|s\|_1\right)} \right)^{\frac{q\theta}{\theta-q}} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} \left(2^{-\left(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r}-\left(1-\frac{1}{q}\right)\right)} \right)^{\frac{q\theta}{\theta-q}} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} = \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{-(\boldsymbol{s},\bar{\boldsymbol{\gamma}})\left(r_1-1+\frac{1}{q}\right)\frac{q\theta}{\theta-q}} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}},$$

де $\bar{\boldsymbol{\gamma}}$ вектор з координатами $\bar{\gamma}_j = \dfrac{r_j - 1 + \frac{1}{q}}{r_1 - 1 + \frac{1}{q}}$, $j = \overline{1, d}$. Легко переконатися, що $\bar{\gamma}_j = \gamma_j$ при $j = \overline{1, \nu}$ і $\bar{\gamma}_j \geqslant \gamma_j$ при $j = \overline{\nu + 1, d}$. Застосовуючи до останньої суми лему 2.4, отримуємо

$$J_3 \ll 2^{-n\left(r_1-1+\frac{1}{q}\right)} n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

У випадку $1 \leqslant \theta \leqslant q < \infty$, $q \neq 1$, використавши нерівність

$$\left(\sum_k |a_k|^{v_2} \right)^{\frac{1}{v_2}} \leqslant \left(\sum_k |a_k|^{v_1} \right)^{\frac{1}{v_1}}, \ 0 < v_1 \leqslant v_2 < \infty \ , \tag{2.17}$$

(див., [132, с. 43]), а також нерівність Гельдера і взявши до уваги, що $r_1 > 1 - \frac{1}{q}$, оцінку J_3 можемо продовжити таким чином:

$$J_3 \leqslant \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} \|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^{\theta}_{L_1(\mathbb{R}^d)} 2^{\|s\|_1\left(1-\frac{1}{q}\right)\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} \|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^{\theta}_{L_1(\mathbb{R}^d)} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} 2^{-(\boldsymbol{s},\bar{\boldsymbol{\gamma}})\left(r_1-1+\frac{1}{q}\right)\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^{\theta}_{L_1(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \sup_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{-(\boldsymbol{s},\bar{\boldsymbol{\gamma}})\left(r_1-1+\frac{1}{q}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \|f(\cdot)\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \ 2^{-n\left(r_1-1+\frac{1}{q}\right)} \leqslant 2^{-n\left(r_1-1+\frac{1}{q}\right)},$$

де, як і в попередньому випадку, вектор $\bar{\boldsymbol{\gamma}}$ визначається аналогічно і $\bar{\boldsymbol{\gamma}} \geqslant \boldsymbol{\gamma}$.

Нехай тепер $\theta = \infty$. Тоді для $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{1,\infty}B(\mathbb{R}^d)$ згідно з означенням норми функції (1.13) маємо

$$\|A^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} \ll 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})}$$

і, використовуючи лему 2.4, отримуємо

$$J_3 \ll \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})q} 2^{\|s\|_1\left(1-\frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{-(\boldsymbol{s},\bar{\boldsymbol{\gamma}})\left(r_1-1+\frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{1}{q}} \asymp$$

$$\asymp 2^{-n\left(r_1-1+\frac{1}{q}\right)} n^{\frac{\nu-1}{q}}.$$

Оцінки зверху в теоремі встановлено.

Перейдемо до встановлення оцінок знизу. Для цього при певних значеннях параметрів q і θ достатньо вказати функції $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, для яких оцінки знизу величин $\mathcal{E}_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}\big(f\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ збігаються за порядком з оцінками знизу величин $\mathcal{E}_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ в (2.16). Зауважимо, що достатньо розглянути випадок $\nu = d$, тобто будемо вважати $\gamma_j = 1$, $j = \overline{1,d}$.

Нехай $1 \leqslant \theta \leqslant q$, $q \neq 1$. Розглянемо функцію

$$f_3(\boldsymbol{x}) = 2^{-r_1 n} A^*_{\tilde{\boldsymbol{s}}}(\boldsymbol{x}),$$

де $\|\tilde{\boldsymbol{s}}\|_1 = n + 1$.

Покажемо, що $f_3 \in S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)$. Маємо

$$\|f_3(\cdot)\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s}\geqslant\boldsymbol{0}} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|A^*_{\boldsymbol{s}}(f_3,\cdot)\|^{\theta}_{L_1(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp 2^{-r_1 n} \left(2^{(\tilde{\boldsymbol{s}},\boldsymbol{r})\theta} \|A^*_{\tilde{\boldsymbol{s}}}(\cdot)\|^{\theta}_{L_1(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 2^{-r_1 n}\, 2^{r_1 n} = 1.$$

Оскільки для функцій $f_3(\boldsymbol{x})$ виконується співвідношення $S_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}(f_3, \boldsymbol{x}) = 0$, то згідно з лемою 2.6, отримуємо

$$\mathcal{E}_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \gg \mathcal{E}_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}\big(f_3\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} = \|f_3(\cdot) - S_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}(f_3,\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \|f_3(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{-nr_1} \|A^*_{\tilde{\boldsymbol{s}}}(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{-nr_1} 2^{n\left(1-\frac{1}{q}\right)} = 2^{-n\left(r_1-1+\frac{1}{q}\right)}.$$

У випадку $1 < q < \theta < \infty$ розглянемо функцію

$$f_4(\boldsymbol{x}) = 2^{-nr_1} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1=n+1} A^*_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x}).$$

Покажемо, що $f_4 \in S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)$. Маємо

$$\|f_4(\cdot)\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s}\geqslant \boldsymbol{0}} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|A^*_{\boldsymbol{s}}(f_4,\cdot)\|^\theta_{L_1(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= 2^{-nr_1} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 = n+1} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|A^*_{\boldsymbol{s}}(\cdot)\|^\theta_{L_1(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll 2^{-nr_1} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 = n+1} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 1.$$

Врахувавши, що відповідно до вибору функцій f_4 виконується співвідношення $S_{\tilde{Q}^\gamma_n}(f_4,\boldsymbol{x}) = 0$, будемо мати

$$\mathcal{E}_{Q^\gamma_n}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \gg \mathcal{E}_{Q^\gamma_n}\big(f_4\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} = \|f_4(\cdot) - S_{\tilde{Q}^\gamma_n}(f_4,\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \|f_4(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}.$$

Оскільки, як було показано вище, $f_4 \in S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, а за умовами теореми $r_1 > 1 - \frac{1}{q}$, то згідно з твердженням 1.3, $f_4 \in L_q(\mathbb{R}^d)$. Для $\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^d_+$ покладемо

$$\Delta(\boldsymbol{s}) = \Big\{ \boldsymbol{x} : 2^{-s_j-1} \leqslant x_j < 2^{-s_j},\ j = \overline{1,d} \Big\},$$

$\Delta(\boldsymbol{s}) \cap \Delta(\boldsymbol{s}') = \varnothing$, якщо $\boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{s}'$, тоді за твердженням 2.1 (теорема Літлвуда–Пелі)

$$\|f_4(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \gg \left\| \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 = n+1} |\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_4,\cdot)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 = n+1} \int\limits_{\Delta(\boldsymbol{s})} |\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_4,\boldsymbol{x})|^q d\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Використавши оцінку (2.8), останню оцінку можемо продовжити таким чином:

$$\|f_4(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \gg 2^{-nr_1} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1=n+1} \int\limits_{\Delta(\boldsymbol{s})} |A^*_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x})|^q d\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{q}} \gg$$

$$\gg 2^{-nr_1} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1=n+1} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1(q-1)} \right)^{\frac{1}{q}} \asymp$$

$$\asymp 2^{-nr_1} n^{-\frac{d-1}{\theta}} 2^{n\frac{q-1}{q}} n^{\frac{d-1}{q}} = 2^{-n\left(r_1-\left(1-\frac{1}{q}\right)\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Насамкінець розглянемо випадок $\theta=\infty$ і, відповідно, функцію

$$f_5(\boldsymbol{x}) = 2^{-nr_1} \sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1=n+1} A^*_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x}).$$

Покажемо, що $f_5 \in S^{\boldsymbol{r}}_{1,\infty}B(\mathbb{R}^d)$. Маємо

$$\|f_5(\cdot)\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{1,\infty}B(\mathbb{R}^d)} \asymp \sup_{\boldsymbol{s}\geqslant\boldsymbol{0}} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \|A^*_{\boldsymbol{s}}(f_5,\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= 2^{-nr_1} \sup_{\|\boldsymbol{s}\|_1=n+1} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \|A^*_{\boldsymbol{s}}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} \ll 1.$$

Враховуючи, що для функцій f_5 виконується співвідношення $S_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}(f_5,\boldsymbol{x})=0$, як і в попередньому випадку, отримаємо

$$\mathcal{E}_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \gg \mathcal{E}_{Q^{\gamma}_n}\big(f_5\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} = \|f_5(\cdot) - S_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}(f_5,\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \|f_5(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \gg \left\| \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1=n+1} |\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_5,\cdot)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1=n+1} \int\limits_{\Delta(\boldsymbol{s})} |\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_5,\boldsymbol{x})|^q d\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{q}} \asymp$$

$$\asymp 2^{-nr_1}\left(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1=n+1}\int\limits_{\Delta(\boldsymbol{s})}|A^*_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x})|^q d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{q}} \gg 2^{-nr_1}\left(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1=n+1}2^{\|\boldsymbol{s}\|_1(q-1)}\right)^{\frac{1}{q}} \asymp$$
$$\asymp 2^{-nr_1}2^{n\frac{q-1}{q}}n^{\frac{d-1}{q}} = 2^{-n\left(r_1-1+\frac{1}{q}\right)}n^{\frac{d-1}{q}}.$$

Оцінки знизу встановлено.

Теорему 2.10 доведено.

На завершення даного підрозділу прокоментуємо одержані результати.

Точні за порядком оцінки величини (1.23) для класів Нікольського $S^{\boldsymbol{r}}_1 H(\mathbb{R}^d)$ у метриці простору $L_q(\mathbb{R}^d)$ при $1 \leqslant q < \infty$ встановлено Wang Heping та Sun Youngsheng [236] та наведені у твердженні 1.8. Зауважимо, що методи, які використовувалися для встановлення оцінок у теоремі 2.10 при $\theta = \infty$, відрізняються від методів, які застосовували Wang Heping та Sun Youngsheng.

Теорема 2.8 є новою і для класів Нікольського $S^{\boldsymbol{r}}_1 H(\mathbb{R}^d)$, тобто у випадку $\theta = \infty$, має місце такий наслідок.

Наслідок 2.12. *Нехай $r_1 > 1$. Тоді вірним є порядкове співвідношення*

$$\mathcal{E}_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}\big(S^{\boldsymbol{r}}_1 H(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{-n(r_1-1)}n^{\nu-1}.$$

Наведемо також результати теорем 2.8 і 2.10 в одновимірному випадку. Для цього конкретизуємо означення величин (1.23) і (1.24).

При $d = 1$ кожна з множин $Q^*_{2^s}$ є об'єднанням напівінтервалів $(-2^s, -2^{s-1}]$ та $[2^{s-1}, 2^s)$, $s \in \mathbb{Z}_+$, з відповідною модифікацією при $s = 0$. Тоді східчастий гіперболічний хрест $\tilde{Q}^{\gamma}_n$, який означається згідно з (1.22), вироджується в інтервал $(-2^n, 2^n)$, як об'єднання множин $Q^*_{2^s}$ для усіх $s \leqslant n$, $s \in \mathbb{Z}_+$, а саме

$$\tilde{Q}^1_n = \bigcup_{s\leqslant n} Q^*_{2^s}. \tag{2.18}$$

Крім того маємо $|\tilde{Q}^1_n| \asymp 2^n$, де у цьому випадку $|\tilde{Q}^1_n|$ позначає довжину інтервалу.

Означення величини (1.24) для $f \in L_q(\mathbb{R})$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, можна переписати таким чином:

$$\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^1}(f)_{L_q(\mathbb{R})} := \|f(\cdot) - S_{\tilde{Q}_n^1}(f, \cdot)\|_{L_q(\mathbb{R})},$$

і

$$\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^1}\big(S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R})\big)_{L_q(\mathbb{R})} := \sup_{f \in S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R})} \mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^1}\big(f\big)_{L_q(\mathbb{R})}, \tag{2.19}$$

де

$$S_{\tilde{Q}_n^1}(f, x) = \sum_{s \leqslant n} \delta_s^*(f, x),$$

$$\delta_s^*(f, x) = \mathfrak{F}^{-1}(\chi_{Q^*_{2^s}} \cdot \mathfrak{F} f).$$

Зауважимо, що $S_{\tilde{Q}_n^1}(f, x)$ — ціла функція з носієм перетворення Фур'є на інтервалі $(-2^n; 2^n)$.

Відповідно для (1.23) в одновимірному випадку будемо використовувати позначення:

$$E_{\tilde{Q}_n^1}\big(S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R})\big)_{L_q(\mathbb{R})} := \sup_{f \in S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R})} E_{\tilde{Q}_n^1}\big(f\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}, \tag{2.20}$$

де

$$E_{\tilde{Q}_n^1}\big(f\big)_{L_q(\mathbb{R})} := E\big(f, G\big(\tilde{Q}_n^1\big)\big)_{L_q(\mathbb{R})} := \inf_{g \in G(\tilde{Q}_n^1)} \|f(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R})},$$

і

$$G\big(\tilde{Q}_n^1\big) = \Big\{f \in L_q(\mathbb{R})\colon \operatorname{supp} \mathfrak{F} f \subseteq \tilde{Q}_n^1\Big\}.$$

Справедливими є такі твердження.

Наслідок 2.13. *Нехай $r > 1$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. Тоді має місце порядкове співвідношення*

$$\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^1}\big(S^r_{1,\theta}B(\mathbb{R})\big)_{L_\infty(\mathbb{R})} \asymp 2^{-n(r-1)}. \tag{2.21}$$

Наслідок 2.14. *Нехай $1 < q < \infty$ і $r > 1 - \frac{1}{q}$. Тоді для $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ мають місце порядкові співвідношення*

$$E_{\tilde{Q}_n^1}\big(S^r_{1,\theta}B(\mathbb{R})\big)_{L_q(\mathbb{R})} \asymp \mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^1}\big(S^r_{1,\theta}B(\mathbb{R})\big)_{L_q(\mathbb{R})} \asymp 2^{-n\left(r-1+\frac{1}{q}\right)}. \tag{2.22}$$

Як видно, в одновимірному випадку оцінки (2.21) і (2.22) не залежать від параметра θ, на відміну від відповідних оцінок у багатовимірному випадку ($d \geqslant 2$), та є однаковими як для класів $S_1^r H(\mathbb{R})$, так і для класів $S_{1,\theta}^r B(\mathbb{R})$, $1 \leqslant \theta < \infty$.

2.3. Наближення класів $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R}^d)$ у рівномірній метриці

У цьому підрозділі встановимо оцінки наближення функцій із класів $S_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{R}^d)$ цілими функціями, носій перетворення Фур'є яких зосереджений у східчастому гіперболічному хресті і при цьому похибка наближення оцінюється у рівномірній метриці. Зазначимо, що у процесі доведення одержаних результатів будемо використовувати деякі міркування, запропоновані А. С. Романюком [198], з відповідною модифікацією до наближення цілими функціями.

Для встановлення оцінок знизу досліджуваних у дисертаційній роботі апроксимаційних характеристик, зокрема, і у даному пункті, будемо розглядати екстремальні функції, які побудовані на основі деякої стандартної функції. Перейдемо до розгляду однієї з таких.

Покладемо

$$D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} D_{k_j}(x_j), \quad \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}_+^d, \tag{2.23}$$

де

$$D_{k_j}(x_j) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(2 \sin \frac{x_j}{2} \cos \frac{2k_j + 1}{2} x_j \right) \cdot x_j^{-1} \tag{2.24}$$

і відповідно

$$D_{\frac{1}{2}}(x_j) = D_0(x_j) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \frac{\sin x_j}{x_j}.$$

У подальших міркуваннях суттєве значення має той факт, що, як зазначено в роботі [237], для перетворення Фур'є функції $D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$ справедлива рівність

$$\mathfrak{F}D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \chi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} \chi_{k_j}(x_j),$$

де

$$\chi_{k_j}(x_j)=\begin{cases} 1, & k_j < |x_j| < k_j+1; \\ \frac{1}{2}, & |x_j| = k_j \text{ або } |x_j| = k_j+1; \\ 0 & - \text{ в інших випадках;} \end{cases}$$

$$\chi_0(x_j) = \begin{cases} 1, & |x_j| < 1; \\ \frac{1}{2}, & |x_j| = 1; \\ 0, & |x_j| > 1. \end{cases}$$

Покажемо, справедливість цих рівностей для $\chi_{k_j}(x_j)$ і $\chi_0(x_j)$. З метою спрощення викладок розглянемо одновимірний випадок, тобто $d = 1$.

Спочатку знайдемо перетворення Фур'є для функції

$$D_0(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin x}{x}.$$

Оскільки дана функція парна, то для знаходження її перетворення Фур'є будемо застосовувати формулу косинус-перетворення Фур'є і враховуємо такі співвідношення

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \mathrm{sign}\alpha \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \text{а} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Отримаємо

$$\mathfrak{F}D_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty D_0(x) \cos tx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \cos tx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{2} \frac{\sin(1+t)x + \sin\,(1-t)x}{x} dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_0^\infty \frac{\sin(1+t)x}{x} + \int\limits_0^\infty \frac{\sin\,(1-t)x}{x} dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\text{sign(1+t)}\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} + \text{sign(1-t)}\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\big(\text{sign(1+t)} + \text{sign(1-t)}\big) =$$

$$= \begin{cases} 1, & |t| < 1; \\ \frac{1}{2}, & |t| = 1; \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

Таким чином рівність

$$\mathfrak{F} D_0(x) = \prod_{j=1}^{d} \chi_0(x_j)$$

встановлено.

Знайдемо тепер перетворення Фур'є функції

$$D_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{2k+1}{2}x}{x}.$$

Дана функція теж парна, тому для знаходження її перетворення Фур'є проведемо такі ж міркування, як і для $D_0(x)$.

$$\mathfrak{F} D_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty D_k(x)\cos txdx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{2k+1}{2}x}{x}\cos txdx =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\left(\cos\left(\frac{2k+1}{2}+t\right)x + \cos\left(\frac{2k+1}{2}-t\right)x\right)dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{1}{2}+\frac{2k+1}{2}+t\right)x + \sin\left(\frac{1}{2}-\frac{2k+1}{2}-t\right)x+\right.$$

$$+\sin\left(\frac{1}{2}+\frac{2k+1}{2}-t\right)x+\sin\left(\frac{1}{2}-\frac{2k+1}{2}+t\right)x\right)\frac{1}{x}dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin(k+1+t)x-\sin(k+t)x+\sin(k+1-t)x-\sin(k-t)x}{x}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\big(\operatorname{sign}(k+1+t)-\operatorname{sign}(k+t)+\operatorname{sign}(k+1-t)-\operatorname{sign}(k-t)\big)=$$

$$=\begin{cases}1, & k_j<|x_j|<k_j+1;\\ \frac{1}{2}, & |x_j|=k_j \text{ або } |x_j|=k_j+1;\\ 0 & \text{— в інших випадках;}\end{cases}$$

Відповідно для оберненого перетворення будемо мати

$$\mathfrak{F}^{-1}\chi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{t})=D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}),\quad \mathfrak{F}^{-1}\chi_0(\boldsymbol{t})=D_0(\boldsymbol{x}). \tag{2.25}$$

Покажемо справедливість (2.25). Для спрощення знову розглянемо випадок $d=1$, у випадку $d\geqslant 2$ дане співвідношення встановлюється аналогічно.

Для $\chi_0(t)$ будемо мати

$$\mathfrak{F}^{-1}\chi_0(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\chi_0(t)e^{itx}dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-1}^{1}e^{itx}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{itx}}{ix}\bigg|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{ix}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin x}{x}.$$

Тобто, $\mathfrak{F}^{-1}\chi_0(t)=D_0(x)$.

Тепер знайдемо обернене перетворення Фур'є для функції $\chi_k(t)$

$$\mathfrak{F}^{-1}\chi_0(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\chi_k(t)e^{itx}dt=$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-(k+1)}^{-k} e^{itx} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{k}^{k+1} e^{itx} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{itx}}{ix} \Bigg|_{-(k+1)}^{-k} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{itx}}{ix} \Bigg|_{k}^{k+1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-ikx} - e^{-i(k+1)x}}{ix} + \frac{e^{e^{i(k+1)x} - e^{ikx}}}{ix} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Bigg(\frac{\cos kx - i \sin kx - \cos(k+1)x + i \sin(k+1)x}{ix} +$$

$$+ \frac{\cos(k+1)x + i \sin(k+1)x - \cos kx - i \sin kx}{ix} \Bigg) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\big(\sin(k+1)x - \sin kx\big)}{x} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{2k+1}{2} x}{x} = D_k(x).$$

Зауважимо, що при $1 < p < \infty$ має місце оцінка [237]

$$\Bigg\| \sum_{\boldsymbol{k} \in \rho_+^*(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot) \Bigg\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(1 - \frac{1}{p}\right)}, \tag{2.26}$$

де

$$\rho_+^*(\boldsymbol{s}) := \Big\{ \boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d) \colon \eta(s_j) 2^{s_j - 1} \leqslant k_j < 2^{s_j}, k_j \in \mathbb{Z}_+, j = \overline{1, d} \Big\},$$

$\eta(0) = 0$ і $\eta(t) = 1$, $t > 0$, тобто $\rho_+^*(\boldsymbol{s}) = Q_{2^{\boldsymbol{s}}}^* \cap \mathbb{Z}_+^d$.

Має місце така теорема.

Теорема 2.15. *Нехай* $1 < p < \infty$, $r_1 > \frac{1}{p}$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. *Тоді справедливе порядкове співвідношення*

$$\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^{\boldsymbol{\gamma}}} \big(S_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{R}^d) \big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{-n\left(r_1 - \frac{1}{p}\right)} n^{(\nu - 1)\left(1 - \frac{1}{\theta}\right)}. \tag{2.27}$$

Зауваження 2.16. Оскільки $r_1 > \frac{1}{p}$, то на підставі твердження 1.3 існує такий вектор $\boldsymbol{\rho}$, $\rho_j = r_j - \frac{1}{p} > 0$, $j = \overline{1,d}$, що для $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ маємо $f \in S^{\boldsymbol{\rho}}_{\infty,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, тобто $f \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$.

Доведення теореми 2.15. Встановимо спочатку оцінку зверху в (2.27). Нехай $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$. Тоді, використавши нерівність Мінковського та твердження 1.1, можемо записати

$$\|f(\cdot) - S_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}(f,\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} = \Bigg\| f(\cdot) - \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\leqslant n} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\Bigg\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{\frac{\|\boldsymbol{s}\|_1}{p}} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}. \qquad (2.28)$$

Щоб продовжити оцінку (2.28), розглянемо спочатку випадок, коли $1 \leqslant \theta < \infty$. Тоді, застосувавши до останньої суми нерівність Гельдера, будемо мати

$$\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{\frac{\|\boldsymbol{s}\|_1}{p}} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} = \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} 2^{\frac{\|\boldsymbol{s}\|_1}{p}} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^\theta_{L_p(\mathbb{R}^d)}\right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{-\left(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r}-\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{p}}\right)\frac{\theta}{\theta-1}}\right)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \|f(\cdot)\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{-\left(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r}-\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{p}}\right)\frac{\theta}{\theta-1}}\right)^{1-\frac{1}{\theta}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{-(\boldsymbol{s},\bar{\boldsymbol{\gamma}})\left(r_1-\frac{1}{p}\right)\frac{\theta}{\theta-1}}\right)^{1-\frac{1}{\theta}} = J_4, \qquad (2.29)$$

де $\bar{\boldsymbol{\gamma}} = (\bar{\gamma}_1, \ldots, \bar{\gamma}_d)$ — вектор з координатами $\bar{\gamma}_j = \dfrac{r_j - \frac{1}{p}}{r_1 - \frac{1}{p}}$, $j = \overline{1,d}$, а $\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{p}}$ позначає вектор з координатами $r_j - \frac{1}{p}$, $j = \overline{1,d}$. Якщо $j = \overline{1,\nu}$, то

$\bar{\gamma}_j = \gamma_j$ і $1 < \gamma_j \leqslant \gamma_j$, якщо $j = \overline{\nu+1, d}$. Тоді, використавши лему 2.4, отримаємо оцінку величини J_4

$$J_4 \ll 2^{-n\left(r_1-\frac{1}{p}\right)} n^{(\nu-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{2.30}$$

Отже, згідно (2.28)–(2.30) будемо мати

$$\sup_{f \in S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \|f(\cdot) - S_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}(f,\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \ll 2^{-n\left(r_1-\frac{1}{p}\right)} n^{(\nu-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Нехай тепер $\theta = \infty$. Тоді, беручи до уваги, що згідно з означенням норми функцій з класу $S^{\boldsymbol{r}}_p H(\mathbb{R}^d)$ (1.10), маємо

$$\|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \ll 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})},$$

для останньої суми у (2.28) можемо записати

$$\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{\frac{\|\boldsymbol{s}\|_1}{p}} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{-\left(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r}-\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{p}}\right)} =$$

$$= \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})>n} 2^{-(\boldsymbol{s},\bar{\boldsymbol{\gamma}})\left(r_1-\frac{1}{p}\right)} \ll 2^{-n\left(r_1-\frac{1}{p}\right)} n^{\nu-1}. \tag{2.31}$$

Таким чином, співставляючи (2.28) і (2.31), отримаємо оцінку

$$\sup_{f \in S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \|f(\cdot) - S_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}(f,\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \ll 2^{-n\left(r_1-\frac{1}{p}\right)} n^{\nu-1}.$$

Оцінку зверху в теоремі встановлено.

Для встановлення відповідної оцінки знизу побудуємо екстремальні функції, для яких буде мати місце співвідношення

$$\mathcal{E}_{\tilde{Q}^{\gamma}_n}(f)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \gg 2^{-n\left(r_1-\frac{1}{p}\right)} n^{(\nu-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Спочатку ми розглянемо одновимірний випадок, тобто побудуємо екстремальну функцію для якої буде мати місце співвідношення

$$\mathcal{E}_{\tilde{Q}^{1}_n}(f)_{L_\infty(\mathbb{R})} \gg 2^{-n\left(r_1-\frac{1}{p}\right)}.$$

Запишемо функцію (2.23) при $d = 1$, маємо

$$D_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{2k+1}{2}x\right)\cdot x^{-1}$$

і відповідно

$$D_{\frac{1}{2}}(x) = D_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin x}{x}.$$

Розглянемо функцію

$$f_6(x) = C_6 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{p}\right)} \sum_{k\in\rho^*(n+1)} D_k(x), \quad C_6 > 0,$$

де $\rho^*(n+1) = \left\{k\colon 2^n \leqslant k < 2^{n+1},\ k \in \mathbb{Z}_+\right\}$.

Покажемо, що дана функція належить класу $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R})$. Попередньо зазначимо, що співвідношення (2.26) можемо записати таким чином

$$\left\| \sum_{k\in\rho^*(n)} D_k(\cdot)\right\|_{L_p(\mathbb{R})} \asymp 2^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)}, \quad 1 < p < \infty. \tag{2.32}$$

У випадку $1 \leqslant \theta < \infty$, скориставшись (1.9) та (2.32) отримаємо

$$\|f_6(\cdot)\|_{S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R})} \asymp \left(2^{(n+1)r\theta}\|\delta^*_{n+1}(f_6,\cdot)\|^\theta_{L_p(\mathbb{R})}\right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp 2^{nr}\ 2^{-n\left(r+1-\frac{1}{p}\right)}\left\| \sum_{k\in\rho^*(n+1)} D_k(\cdot)\right\|_{L_p(\mathbb{R})} \ll 1.$$

Аналогічно встановлюємо, що $\|f_6(\cdot)\|_{S^r_{p,\infty}B(\mathbb{R})} \ll 1$.

Отже, f_6 належить класу $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R})$.

За рахунок вибору функцій f_6 маємо $S_{\tilde{Q}^1_n}(f_6,\cdot) = 0$. Таким чином, отримаємо

$$\mathcal{E}_{\tilde{Q}^1_n}(f_6)_{L_\infty(\mathbb{R})} = \|f_6(\cdot) - S_{\tilde{Q}^1_n}(f_6,\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = \|f_6(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \asymp$$

$$\asymp 2^{-n\left(r+1-\frac{1}{p}\right)}\left\| \sum_{k\in\rho^*(n+1)} D_k(\cdot)\right\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = 2^{-n\left(r+1-\frac{1}{p}\right)} J_5. \tag{2.33}$$

Щоб продовжити (2.33), оцінимо величину J_5. Маємо

$$J_5 = \left\| \sum_{k \in \rho^*(n+1)} D_k(\cdot) \right\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = \left\| \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} D_k(\cdot) \right\|_{L_\infty(\mathbb{R})} =$$

$$= \left\| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin 2^{n+1}x - \sin 2^n x}{x} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \asymp 2^n.$$

Отже,

$$\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^1}(f_6)_{L_\infty(\mathbb{R})} = \|f_6(\cdot) - S_{\tilde{Q}_n^1}(f_6, \cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \asymp 2^{-n\left(r+1-\frac{1}{p}\right)} 2^n = 2^{-n\left(r-\frac{1}{p}\right)}.$$

Оцінки знизу у цьому випадку встановлено.

Перейдемо до встановлення оцінки знизу при $d \geqslant 2$. Також зауважимо, що її достатньо отримати у випадку $\nu = d$. На основі функції (2.23) побудуємо екстремальні функції $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, які її реалізують.

Розглянемо функції

$$f_7(\boldsymbol{x}) = C_7 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{p}\right)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n+1} \sum_{\boldsymbol{k} \in \rho^*_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}), \quad C_7 > 0,$$

якщо $1 \leqslant \theta < \infty$, і

$$f_8(\boldsymbol{x}) = C_8 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{p}\right)} \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n+1} \sum_{\boldsymbol{k} \in \rho^*_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}), \quad C_8 > 0,$$

якщо $\theta = \infty$.

Переконаємося, що дані функції належать класам $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ і $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)$ відповідно. Використовуючи (2.26), для f_7 отримуємо

$$\|f_7(\cdot)\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \asymp \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n+1} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_7,\cdot)\|^\theta_{L_p(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n+1} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{p}\right)\theta} n^{-(d-1)} \left\| \sum_{\boldsymbol{k} \in \rho^*_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot) \right\|^\theta_{L_p(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{p}\right)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{p}\right)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} 2^{n\left(r_1+1-\frac{1}{p}\right)} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 1.$$

Для f_8 маємо

$$\|f_8(\cdot)\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)} \asymp \sup_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_8,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp$$

$$\asymp \sup_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{p}\right)} \left\| \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho^*_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp$$

$$\asymp 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{p}\right)} \sup_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)} \ll 1.$$

Далі, враховуючи вибір функцій f_7 і f_8, отримуємо $S_{\tilde{Q}^\gamma_n}(f_7,\cdot) = 0$ і $S_{\tilde{Q}^\gamma_n}(f_8,\cdot) = 0$. І відповідно одержуємо

$$\mathcal{E}_{\tilde{Q}^\gamma_n}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \gg \mathcal{E}_{\tilde{Q}^\gamma_n}\big(f_7\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \|f_7(\cdot) - S_{\tilde{Q}^\gamma_n}(f_7,\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} = \|f_7(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.34}$$

Для того щоб продовжити (2.34) оцінимо $\left\| \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho^*_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot) \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}$. Маємо

$$\left\| \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho^*_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot) \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} = \left\| \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho^*_+(\boldsymbol{s})} \prod_{j=1}^{d} D_{k_j}(\cdot) \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \left\| \prod_{j=1}^{d} \sum_{k_j=\eta(s_j)2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1} D_{k_j}(\cdot) \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \left\| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin 2^{s_j}x_j - \sin \eta(s_j) 2^{s_j-1} x_j}{x_j} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} = J_6 \tag{2.35}$$

Встановимо спочатку для величини J_6 оцінку зверху:

$$J_6 = \left\| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \frac{2^{s_j} - \eta(s_j) 2^{s_j - 1}}{2} x_j \cos \frac{2^{s_j} + \eta(s_j) 2^{s_j - 1}}{2} x_j}{x_j} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \ll$$

$$\ll \prod_{j=1}^{d} \left\| \frac{\sin(2^{s_j - 1} - \eta(s_j) 2^{s_j - 2}) x_j}{x_j} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} = \prod_{j=1}^{d} \left(2^{s_j - 1} - \eta(s_j) 2^{s_j - 2} \right) \ll 2^{\|s\|_1}.$$

Далі проведемо в (2.35) оцінку знизу. Використовуючи нерівність $\bigl|a - b\bigr| \geqslant \bigl||a| - |b|\bigr|$, одержуємо

$$J_6 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \prod_{j=1}^{d} \operatorname*{ess\,sup}_{x_j \in \mathbb{R}} \left| \frac{\sin 2^{s_j} x_j - \sin \eta(s_j) 2^{s_j - 1} x_j}{x_j} \right| \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} \prod_{j=1}^{d} \operatorname*{ess\,sup}_{x_j \in \mathbb{R}} \left| \left| \frac{\sin 2^{s_j} x_j}{x_j} \right| - \left| \frac{\sin \eta(s_j) 2^{s_j - 1} x_j}{x_j} \right| \right| \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} \prod_{j=1}^{d} \left(\operatorname*{ess\,sup}_{x_j \in \mathbb{R}} \left| \frac{\sin 2^{s_j} x_j}{x_j} \right| - \operatorname*{ess\,sup}_{x_j \in \mathbb{R}} \left| \frac{\sin \eta(s_j) 2^{s_j - 1} x_j}{x_j} \right| \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \prod_{j=1}^{d} \left(2^{s_j} - \eta(s_j) 2^{s_j - 1} \right) \gg 2^{\|s\|_1}.$$

Отже, маємо

$$\left\| \sum_{\boldsymbol{k} \in \rho_+^*(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot) \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1}. \tag{2.36}$$

Тепер покажемо, що

$$\left\| \sum_{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{1}) = n+1} \sum_{\boldsymbol{k} \in \rho_+^*(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot) \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^n n^{d-1}. \tag{2.37}$$

Встановимо спочатку оцінку зверху. Згідно з нерівністю Мінковського і (2.36) одержуємо

$$\left\| \sum_{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{1}) = n+1} \sum_{\boldsymbol{k} \in \rho_+^*(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot) \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \sum_{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{1}) = n+1} \left\| \sum_{\boldsymbol{k} \in \rho_+^*(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot) \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \ll$$

$$\ll \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1} \ll 2^n \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} 1 \asymp 2^n n^{d-1}.$$

Відповідно для оцінки знизу можемо записати

$$\left\| \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+^*(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot) \right\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d} \left| \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+^*(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot) \right| =$$

$$= \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d} \left| \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} \prod_{j=1}^d \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin 2^{s_j} x_j - \sin \eta(s_j) 2^{s_j-1} x_j}{x_j} \right| \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} \prod_{j=1}^d \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin 1 - \sin \eta(s_j)\frac{1}{2}}{2^{-s_j}} \gg \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1} \asymp 2^n n^{d-1}.$$

Використовуючи оцінку (2.37) для (2.34) одержуємо

$$\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^\gamma}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \gg \|f_7(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp$$

$$\asymp 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{p}\right)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left\| \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+^*(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot) \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp$$

$$\asymp 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{p}\right)} n^{-\frac{d-1}{\theta}}\, 2^n n^{d-1} 2^{-n(r_1-\frac{1}{p})} n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})},$$

і для f_8 маємо

$$\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^\gamma}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty} B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \gg \mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^\gamma}\big(f_8\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} = \|f_8(\cdot) - S_{\tilde{Q}_n^\gamma}(f_8,\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \|f_8(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{p}\right)} \left\| \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n+1} \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+^*(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot) \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp$$

$$\asymp 2^{-n(r_1-\frac{1}{p})} n^{(d-1)}.$$

Оцінки знизу при $d \geqslant 2$ встановлено.

Теорему 2.15 доведено.

Зазначимо, що при $\theta = \infty$, тобто для класів Нікольського $S^{\boldsymbol{r}}_p H(\mathbb{R}^d)$, теорема 2.15 також є новою. Має місце такий наслідок.

Наслідок 2.17. *Нехай* $1 < p < \infty$, $r_1 > \frac{1}{p}$. *Тоді має місце порядкове співвідношення*

$$\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^\gamma}\big(S_p^{\boldsymbol{r}} H(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{-n\left(r_1-\frac{1}{p}\right)} n^{\nu-1}.$$

В одновимірному випадку ($d = 1$) справедливим є таке твердження.

Наслідок 2.18. *Нехай* $1 < p < \infty$, $r > \frac{1}{p}$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. *Тоді має місце порядкове співвідношення*

$$\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^1}\big(S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R})\big)_{L_\infty(\mathbb{R})} \asymp 2^{-n\left(r-\frac{1}{p}\right)}. \tag{2.38}$$

Як бачимо, оцінка (2.38) не залежить від значення параметра θ і є однаковою для всіх допустимих його значень ($1 \leqslant \theta \leqslant \infty$).

На завершення зазначимо, що результати даного підрозділу доповнюють дослідження величини (1.24) для класів $S_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{R}^d)$, що проводилися Sun Yongsheng та Wang Heping [237] та наведені у твердженнях 1.5, 1.6, 1.7.

2.4. Наближення функцій із класів $S_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{R}^d)$ цілими функціями спеціального вигляду

У даному підрозділі досліджується наближення функцій з класів $S_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{R}^d)$ за допомогою цілих функцій експоненціального типу з певними обмеженнями на їхній спектр, а саме зі спектром зосередженим на множинах лебегова міра яких є скінченною і не перевищує M. Одержано точні за порядком оцінки величини $e_M^{\mathfrak{F}}\big(S_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ (1.29) у випадках $1 \leqslant p < \infty$, $q = \infty$ і $p = q = 2$.

Розглянемо спочатку випадок $p = 1$ і $d = 1$. Справедливим є таке твердження.

Теорема 2.19. *Нехай* $r > 1$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. *Тоді при* $d = 1$ *виконується порядкова оцінка*

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S_{1,\theta}^r B(\mathbb{R})\big)_{L_\infty(\mathbb{R})} \asymp M^{-r+1}. \tag{2.39}$$

Доведення. Встановимо оцінку зверху в (2.39). Нехай $f \in S^r_{1,\theta}B(\mathbb{R})$, тоді з умови $r > 1$, відповідно до зауваження 2.9, отримаємо, що $f \in L_\infty(\mathbb{R})$.

Далі підберемо для M число $n \in \mathbb{N}$ із співвідношення $|\tilde{Q}^1_n| \leqslant M < |\tilde{Q}^1_{n+1}|$, тобто $M \asymp 2^n$. Тоді з оцінки (2.21), врахувавши (1.30), будемо мати

$$e^{\mathfrak{F}}_M\big(S^r_{1,\theta}B(\mathbb{R})\big)_{L_\infty(\mathbb{R})} \ll \mathcal{E}_{\tilde{Q}^1_n}\big(S^r_{1,\theta}B(\mathbb{R})\big)_{L_\infty(\mathbb{R})} \asymp 2^{-n(r-1)} \asymp M^{-r+1}.$$

Встановимо в (2.39) оцінку знизу.

Далі розглянемо функцію

$$f_9(x) = C_9 2^{-nr} A^*_n(x), \quad C_9 > 0,$$

тобто функція f_9 складається з одного "блоку" $A^*_s(x)$, який вибирається при $s = n$.

Покажемо, що f_9 належить класу $S^r_{1,\theta}B(\mathbb{R})$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. Оскільки, згідно з лемою 2.6, при $p = 1$ маємо $\big\|A^*_s(\cdot)\big\|_{L_1(\mathbb{R})} \asymp C_{10}$, то

$$\|f_9(\cdot)\|_{S^r_{1,\theta}B(\mathbb{R})} \asymp \left(\sum_s 2^{sr\theta}\|A^*_s(f_9,\cdot)\|^\theta_{L_1(\mathbb{R})}\right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp \big(2^{nr\theta}2^{-nr\theta}\big)^{\frac{1}{\theta}} = 1$$

при $1 \leqslant \theta < \infty$, і

$$\|f_9(\cdot)\|_{S^r_{1,\infty}(\mathbb{R})} \asymp \sup_s 2^{sr}\|A^*_s(f_9,\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R})} \asymp 2^{nr}2^{-nr} = 1.$$

Далі підібравши M так, щоб $|\tilde{Q}^1_n| \leqslant 4M < |\tilde{Q}^1_{n+1}|$, де $\tilde{Q}^1_n = Q^*_{2^n}$, $|\tilde{Q}^1_n| \asymp 2^n$, і скориставшись лемою 2.5 можемо записати

$$\begin{aligned} e^{\mathfrak{F}}_M\big(S^r_{1,\theta}B(\mathbb{R})\big)_{L_\infty(\mathbb{R})} \gg e^{\mathfrak{F}}_M\big(f_9\big)_{L_\infty(\mathbb{R})} = \|f_9(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f_9,\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \geqslant \\ \geqslant \big|\|f_9(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} - \|S_{\mathfrak{M}}(f_9,\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})}\big| \gg \\ \gg 2^{-nr}(2^n - M) \gg 2^{-nr}\, 2^n \asymp M^{-r+1}. \end{aligned}$$

Оцінку знизу встановлено.

Теорему 2.19 доведено.

У випадку $d \geqslant 2$ справедливою є така теорема.

Теорема 2.20. *Нехай* $r_1 > 1$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. *Тоді при* $d \geqslant 2$ *виконується порядкова оцінка*

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S_{1,\theta}^{\boldsymbol{r}}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp \big(M^{-1}\log^{\nu-1} M\big)^{r_1-1}\big(\log^{\nu-1} M\big)^{1-\frac{1}{\theta}}. \qquad (2.40)$$

Доведення. Оцінка зверху в (2.40), отримується з теореми 2.8. Оскільки $\operatorname{mes} \tilde{Q}_n^{\gamma} \ll 2^n n^{\nu-1}$, то підібравши для M число $n \in \mathbb{N}$ із співвідношення $\operatorname{mes} \tilde{Q}_n^{\gamma} \leqslant M < \operatorname{mes} \tilde{Q}_{n+1}^{\gamma}$, тобто $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$, з оцінки (2.11) та (1.30), будемо мати

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S_{1,\theta}^{\boldsymbol{r}}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \ll \mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^{\gamma}}\big(S_{1,\theta}^{\boldsymbol{r}}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{-n(r_1-1)} n^{(\nu-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} \asymp$$

$$\asymp \big(M^{-1}\log^{\nu-1} M\big)^{r_1-1}\big(\log^{\nu-1} M\big)^{\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Перейдемо до встановлення оцінки знизу в (2.40). Попередньо зауважимо, що її достатньо отримати у випадку $\nu = d$.

Нехай

$$\Theta(n) = \big\{\boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{Z}^d \colon\ s_1 + \ldots + s_d = n\big\}$$

і

$$\tilde{Q}_n' = \bigcup_{\boldsymbol{s} \in \Theta(n)} Q_{2^{\boldsymbol{s}}}^*,$$

тоді $\operatorname{mes} \tilde{Q}_n' \asymp 2^n n^{\nu-1}$.

На відміну від одновимірного випадку, у залежності від значення параметра θ розглянемо функції

$$f_{10}(\boldsymbol{x}) = C_{11} 2^{-nr_1} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(n)} A_{\boldsymbol{s}}^*(\boldsymbol{x}), \quad C_{11} > 0,$$

при $1 \leqslant \theta < \infty$, і

$$f_{11}(\boldsymbol{x}) = C_{12} 2^{-nr_1} \sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(n)} A_{\boldsymbol{s}}^*(\boldsymbol{x}), \quad C_{12} > 0,$$

якщо $\theta = \infty$.

Покажемо, що функції f_{10} і f_{11} належать класам $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ та $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\infty}B(\mathbb{R}^d)$ відповідно. Оскільки, згідно з лемою 2.6, має місце оцінка $\left\|A^*_{\boldsymbol{s}}(\cdot)\right\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} \asymp C_{13}$, то

$$\|f_{10}(\cdot)\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(n)} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta}\|A^*_{\boldsymbol{s}}(f_{10},\cdot)\|^{\theta}_{L_1(\mathbb{R}^d)}\right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp 2^{-nr_1}n^{-\frac{d-1}{\theta}}\left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(n)} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta}\|A^*_{\boldsymbol{s}}(\cdot)\|^{\theta}_{L_1(\mathbb{R}^d)}\right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp 2^{-nr_1}n^{-\frac{d-1}{\theta}}\left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(n)} 2^{r_1(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll n^{-\frac{d-1}{\theta}}\left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(n)} 1\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 1.$$

Для f_{11} будемо мати

$$\|f_{11}(\cdot)\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{1,\infty}B(\mathbb{R}^d)} \asymp \sup_{\boldsymbol{s}\in\Theta(n)} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})}\|A^*_{\boldsymbol{s}}(f_{11},\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} \asymp$$

$$\asymp 2^{-nr_1}\sup_{\boldsymbol{s}\in\Theta(n)} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})}\|A^*_{\boldsymbol{s}}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{-nr_1}\sup_{\boldsymbol{s}\in\Theta(n)} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \ll 1.$$

Далі, через $\mathcal{L}'$ позначимо множину векторів $\boldsymbol{s}$, таких що $\boldsymbol{s}\in\Theta(n)$, і щоб для множини $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathcal{L}') = \bigcup\limits_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{L}'} Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}}$ виконувалося співвідношення

$$\text{mes}\,\tilde{Q}'_n \leqslant 4M < \text{mes}\,\tilde{Q}'_{n+1}, \tag{2.41}$$

де $M = M(n) = \text{mes}\,\mathfrak{M}$.

Скориставшись лемами 2.5, 2.7 та співвідношенням (2.41), враховуючи, що $\text{mes}\,\tilde{Q}_n \asymp 2^n n^{\nu-1}$, записуємо

$$e^{\mathfrak{F}}_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \geqslant e^{\mathfrak{F}}_M\big(f_{10}\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \inf_{\mathcal{L}\colon\,\text{mes}\,\mathfrak{M}\leqslant M} \|f_{10}(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f_{10},\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \geqslant$$

$$\geqslant \left|\|f_{10}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} - \|S_{\mathfrak{M}}(f_{10},\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}\right| \gg 2^{-nr_1}n^{\frac{d-1}{\theta}}(2^n n^{d-1} - M) \gg$$

$$\gg 2^{-nr_1}n^{\frac{d-1}{\theta}}2^n n^{d-1} = 2^{-n(r_1-1)}n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} \asymp$$

$$\asymp \big(M^{-1}\log^{d-1}M\big)^{r_1-1}\big(\log^{d-1}M\big)^{\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Аналогічно у випадку $\theta=\infty$ отримаємо

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\infty}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \geqslant e_M^{\mathfrak{F}}\big(f_{11}\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \inf_{\mathcal{L}:\ \mathrm{mes}\,\mathfrak{M}\leqslant M} \|f_{11}(\cdot)-S_{\mathfrak{M}}(f_{11},\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \geqslant$$

$$\geqslant \Big|\|f_{11}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} - \|S_{\mathfrak{M}}(f_{11},\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}\Big| \gg 2^{-nr_1}(2^n n^{d-1}-M) \gg$$

$$\gg \big(M^{-1}\log^{d-1}M\big)^{r_1-1}\log^{d-1}M.$$

Оцінки знизу встановлено.

Теорему 2.20 доведено.

У випадку $1<p<\infty$ справедливою є теорема.

Теорема 2.21. *Нехай* $1<p<\infty$, $r_1>\frac{1}{p}$, $1\leqslant\theta\leqslant\infty$, $d\geqslant 1$. *Тоді має місце оцінка*

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp \big(M^{-1}\log^{\nu-1}M\big)^{r_1-\frac{1}{p}}\big(\log^{\nu-1}M\big)^{1-\frac{1}{\theta}}. \tag{2.42}$$

Доведення. Оцінка зверху в (2.42), отримується з теореми 2.15. Оскільки $\mathrm{mes}\,\tilde{Q}_n^{\gamma} \ll 2^n n^{\nu-1}$, то підібравши для M число $n\in\mathbb{N}$ із співвідношення $\mathrm{mes}\,\tilde{Q}_n^{\gamma}\leqslant M<\mathrm{mes}\,\tilde{Q}_{n+1}^{\gamma}$, тобто $M\asymp 2^n n^{\nu-1}$, з оцінки (2.27), будемо мати

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \ll 2^{-n\left(r_1-\frac{1}{p}\right)} n^{(\nu-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} \asymp$$

$$\asymp \big(M^{-1}\log^{\nu-1}M\big)^{r_1-\frac{1}{p}}\big(\log^{\nu-1}M\big)^{\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Перейдемо до встановлення оцінки знизу в (2.42). Попередньо зауважимо, що її достатньо отримати у випадку $\nu=d$.

Нехай, як і в теоремі 2.20

$$\Theta(n)=\Big\{\boldsymbol{s}=(s_1,\ldots,s_d)\in\mathbb{Z}^d:\ \ s_1+\ldots+s_d=n\Big\}$$

і

$$\tilde{Q}'_n = \bigcup_{\boldsymbol{s}\in\Theta(n)} Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}},$$

тоді mes $\tilde{Q}'_n \asymp 2^n n^{\nu-1}$. Далі знову будемо вважати, що числа M і n пов'язані співвідношенням (2.41), тобто

$$\text{mes } \tilde{Q}'_n \leqslant 4M < \text{mes } \tilde{Q}'_{n+1}.$$

Розглянемо функції, які побудовані на основі функції (2.23),

$$f_{12}(\boldsymbol{x}) = C_{14} 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{p}\right)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(n)} \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho^*_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}), \quad C_{14} > 0,$$

якщо $1 \leqslant \theta < \infty$, і

$$f_{13}(\boldsymbol{x}) = C_{15} 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{p}\right)} \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(n)} \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho^*_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}), \quad C_{15} > 0,$$

якщо $\theta = \infty$.

Аналогічно до того, як це було показано для функцій f_7 і f_8 в теоремі 2.15 можемо переконатися, що f_{12} та f_{13} належать класам $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ та $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)$ відповідно.

Оскільки mes $\tilde{Q}'_n \asymp 2^n n^{\nu-1}$, то виберемо в якості множини $\mathfrak{M}$ множину $\tilde{Q}'_n$, тобто $\mathfrak{M} = \tilde{Q}'_n$.

Тоді, використавши (2.37) та (2.41), можемо записати

$$e^{\mathfrak{F}}_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \geqslant e^{\mathfrak{F}}_M\big(f_{12}\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \inf_{\mathcal{L}:\ \text{mes}\,\mathfrak{M}\leqslant M} \|f_{12}(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f_{12},\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \geqslant$$

$$\geqslant \Big|\|f_{12}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} - \|S_{\mathfrak{M}}(f_{12},\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}\Big| \gg 2^{-n(r_1+1-\frac{1}{p})} n^{\frac{d-1}{\theta}} \big(2^n n^{d-1} - M\big) \gg$$

$$\gg 2^{-n\left(r_1+1-\frac{1}{p}\right)} n^{\frac{d-1}{\theta}} 2^n n^{d-1} = 2^{-n\left(r_1-\frac{1}{p}\right)} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} \asymp$$

$$\asymp \big(M^{-1}\log^{d-1} M\big)^{r_1-\frac{1}{p}} \big(\log^{d-1} M\big)^{\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Аналогічно у випадку $\theta = \infty$, отримаємо

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \geqslant e_M^{\mathfrak{F}}\big(f_{13}\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \inf_{\mathcal{L}\colon \operatorname{mes}\mathfrak{M}\leqslant M} \|f_{13}(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f_{13},\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \gg$$

$$\gg \big(M^{-1}\log^{d-1} M\big)^{r_1-\frac{1}{p}} \log^{d-1} M.$$

Оцінки знизу встановлено.

Теорему 2.21 доведено.

Далі зробимо деякі коментарі щодо одержаних результатів.

Результати теореми 2.19, 2.20, 2.21 є новими і для для класів Нікольського $S^{\boldsymbol{r}}_1 H(\mathbb{R}^d)$, $d \geqslant 1$. Мають місце твердження.

Наслідок 2.22. *Нехай $r_1 > 1$. Тоді при $d \geqslant 1$ виконується порядкова оцінка*

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_1 H(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp \big(M^{-1}\log^{\nu-1} M\big)^{r_1-1}\big(\log^{\nu-1} M\big).$$

Наслідок 2.23. *Нехай $1 < p < \infty$, $r_1 > \frac{1}{p}$, $d \geqslant 1$. Тоді має місце оцінка*

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_p H(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp \big(M^{-1}\log^{\nu-1} M\big)^{r_1-\frac{1}{p}}\big(\log^{\nu-1} M\big).$$

В одновимірному випадку результати теореми 2.21 можемо записати таким чином.

Наслідок 2.24. *Нехай $1 < p < \infty$, $r > \frac{1}{p}$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $d = 1$. Тоді вірна оцінка*

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{r}_{p,\theta} B(\mathbb{R})\big)_{L_\infty(\mathbb{R})} \asymp M^{-r+\frac{1}{p}}.$$

Як видно з одержаних результатів, оцінка величини $e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{r}_{p,\theta} B(\mathbb{R})\big)_{L_\infty(\mathbb{R})}$, $1 \leqslant p < \infty$, теорема 2.19 та наслідок 2.24, не залежить від параметра θ на відміну від випадку $d \geqslant 2$, теореми 2.20, 2.21.

Зауваження 2.25. Порівнюючи порядкові оцінки величини $\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^\gamma}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}$, $1 \leqslant p < \infty$, $d \geqslant 1$, які одержано в теоремах 2.8

і 2.15, з оцінками величини $e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}$ з теорем 2.20, 2.21, за відповідних умов на параметри для всіх їхніх значень, робимо висновок, що

$$\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^{\gamma}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}, \quad M \asymp 2^n n^{\nu-1}.$$

На завершення даного підпункту наведемо отримані оцінки величини (1.29) для класів $S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ у метриці простору $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Теорема 2.26. *Нехай* $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $r_1 > 0$. *Тоді має місце оцінка*

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_2(\mathbb{R}^d)} \asymp M^{-r_1}\big(\log^{\nu-1} M\big)^{\left(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \tag{2.43}$$

Доведення. Зауважимо, що оцінка зверху при $\theta \geqslant 2$ випливає з відповідної оцінки величини $\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^{\gamma'}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_2(\mathbb{R}^d)}$, яка наведена у твердженні 1.7. Тому достатньо отримати оцінку (2.43) для випадку $1 \leqslant \theta < 2$. Метод встановлення оцінок подібний до доведення відповідних оцінок зверху, а також методів, які запропоновані у роботах [145, 197].

Нехай $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant \theta < 2$. За числом M підберемо n із співвідношення $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$ і покладемо $n_0 = [n + (\nu-1)\log n]$, де $[a]$ — ціла частина числа a.

Побудуємо множину $\mathcal{L}'$ і відповідно цілу функцію $S_{\mathfrak{M}}(f, \boldsymbol{x})$, за допомогою якої будемо здійснювати наближення функції $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{R}^d)$. Спочатку включимо в $\mathcal{L}'$ множину векторів $\boldsymbol{s}$ для яких $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{\gamma}') < n$. Відповідно до множини $\mathfrak{M}$ включимо множину $\tilde{Q}_n^{\gamma'} = \bigcup_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')<n} \tilde{Q}^*_{2^{\boldsymbol{s}}}$, а далі будемо розширювати її за рахунок включення допустимої кількості множин $\tilde{Q}^*_{2^{\boldsymbol{s}}}$, $l \leqslant (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{\gamma}') < l+1$ і $n \leqslant l < n_0$.

Кожному $l \in \mathbb{N}$, $n \leqslant l < n_0$ поставимо у відповідність величину

$$B_l' = \left(\sum_{l \leqslant (\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}') < l+1} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^{\theta}_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right)^{\frac{1}{\theta}} \tag{2.44}$$

і покладемо

$$m_l' = [2^n n^{\nu-1} 2^{-l} (B_l')^{\theta}] + 1.$$

Нехай, далі, $a_i'(f,l)$, $i=1,2,\ldots$, позначають числа $\|\delta_{\boldsymbol{s}}^*(f,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$, які входять в (2.44) у порядку спадання. Зазначимо, що з (2.44) випливає співвідношення

$$a_i'(f,l) \ll i^{-\frac{1}{\theta}} 2^{-lr_1} B_l'.$$

Тепер із суми $\sum_{l\leqslant(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')<l+1} \delta_{\boldsymbol{s}}^*(f,\boldsymbol{x})$ виберемо ті блоки $\delta_{\boldsymbol{s}}^*(f,\boldsymbol{x})$, в кількості m_l' штук, які відповідають першим m_l' числам $a_i'(f,l)$. Цим самим ми задамо також m_l' множин $\tilde{Q}_{2^{\boldsymbol{s}}}^*$. Дані множини породжуються m_l' векторами $\boldsymbol{s}$, які відповідають вибраним $\delta_{\boldsymbol{s}}^*(f,\boldsymbol{x})$. Проробивши цю процедуру для кожного $l\in[n,n_0)$, $l\in\mathbb{N}$, отримуємо набір множин $\tilde{Q}_{2^{\boldsymbol{s}}}^*$, а разом з тим і множину векторів $\boldsymbol{s}$, яку позначимо через $\mathcal{L}_l'$. Відповідно позначимо $\tilde{Q}_l' = \bigcup_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{L}_l'} \tilde{Q}_{2^{\boldsymbol{s}}}^*$. Отже, $\mathfrak{M} = \tilde{Q}_n^{\gamma'} \cup \tilde{Q}_l'$ і функцію $S_{\mathfrak{M}}(f,\boldsymbol{x})$ вибираємо таким чином:

$$S_{\mathfrak{M}}(f,\boldsymbol{x}) = \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')<n} \delta_{\boldsymbol{s}}^*(f,\boldsymbol{x}) + R_1(\boldsymbol{x}),$$

де $R_1(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{L}_l'} \delta_{\boldsymbol{s}}^*(f,\boldsymbol{x})$, тобто $\operatorname{supp} R_1(\boldsymbol{x}) \subseteq \tilde{Q}_l'$.

Покажемо, що $\operatorname{mes}\mathfrak{M} \ll M$. Скориставшись лемою **??**, а також врахувавши вибір чисел m_l, будемо мати

$$\operatorname{mes}\mathfrak{M} \ll 2^n n^{\nu-1} + \sum_{l=n}^{n_0} 2^l m_l' \ll$$

$$\ll 2^n n^{\nu-1} + 2^n n^{\nu-1} \sum_{l=n}^{n_0} \sum_{l\leqslant(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')<l+1} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|\delta_{\boldsymbol{s}}^*(f,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{\theta} \leqslant$$

$$\leqslant 2^n n^{\nu-1} + 2^n n^{\nu-1} \|f(\cdot)\|_{S_{2,\theta}^{\boldsymbol{r}}B(\mathbb{R}^d)}^{\theta} \ll 2^n n^{\nu-1} \asymp M.$$

Припустимо, що функція $S_{\mathfrak{M}}(f,\boldsymbol{x})$ побудована. Отримаємо оцінку зверху величини $\|f(\cdot)-S_{\mathfrak{M}}(f,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$, $f\in S_{2,\theta}^{\boldsymbol{r}}B(\mathbb{R}^d)$.

Нехай $\tilde{\mathcal{L}}_l'$ позначає множину тих векторів $\boldsymbol{s}$: $n\leqslant(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')<n_0$, для яких $\delta_{\boldsymbol{s}}^*(f,\boldsymbol{x})$ не потрапили в $R_1(\boldsymbol{x})$. Тоді

$$\|f(\cdot)-S_{\mathfrak{M}}(f,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \left\| f(\cdot) - \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')<n_0} \delta_{\boldsymbol{s}}^*(f,\cdot) + \sum_{\boldsymbol{s}\in\tilde{\mathcal{L}}_l'} \delta_{\boldsymbol{s}}^*(f,\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| f(\cdot) - \sum_{(\boldsymbol{s},\gamma')<n_0} \delta_{\boldsymbol{s}}^*(f,\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \left\| \sum_{\boldsymbol{s}\in\tilde{\mathcal{L}}_l'} \delta_{\boldsymbol{s}}^*(f,\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = J_7 + J_8. \quad (2.45)$$

Для оцінки J_7, використовуючи твердження 1.7, одержуємо

$$J_7 \ll 2^{-n_0 r_1} = 2^{-nr_1} n^{-(\nu-1)r_1} \asymp M^{-r_1}. \quad (2.46)$$

Для оцінки J_8 спочатку застосуємо твердження 2.1 (Літтлвуда–Пелі), а потім — нерівність $|a+b|^c \leqslant |a|^c + |b|^c$, $0 \leqslant c \leqslant 1$, будемо мати

$$J_8 = \left\| \sum_{\boldsymbol{s}\in\tilde{\mathcal{L}}_l'} \delta_{\boldsymbol{s}}^*(f,\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \ll \left\| \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\tilde{\mathcal{L}}_l'} |\delta_{\boldsymbol{s}}^*(f,\cdot)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\tilde{\mathcal{L}}_l'} \|\delta_{\boldsymbol{s}}^*(f,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.47)$$

Для продовження оцінки (2.47) підставимо значення чисел $a_i'(f,l)$:

$$J_8 \ll \left(\sum_{l=n}^{n_0} \sum_{i>m_l'} \left(a_i'(f,l)\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{l=n}^{n_0} \sum_{i>m_l'} (a_i'(f,l))^\theta (a_i'(f,l))^{2-\theta} \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l=n}^{n_0} \sum_{i>m_l'} (a_i'(f,l))^\theta i^{-\frac{2-\theta}{\theta}} 2^{-l(2-\theta)r_1} (B_l')^{2-\theta} \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{l=n}^{n_0} (m_l')^{-\frac{2-\theta}{\theta}} 2^{-l(2-\theta)r_1} (B_l')^{2-\theta} \sum_{i>m_l'} (a_i'(f,l))^\theta \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l=n}^{n_0} (m_l')^{-\frac{2-\theta}{\theta}} 2^{-l(2-\theta)r_1} (B_l')^{2-\theta} \sum_{l\leqslant(\boldsymbol{s},\gamma')<l+1} \|\delta_{\boldsymbol{s}}^*(f,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^\theta \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l=n}^{n_0} (m_l')^{-\frac{2-\theta}{\theta}} 2^{-l(2-\theta)r_1} (B_l')^{2-\theta} 2^{-l\theta r_1} \sum_{l\leqslant(\boldsymbol{s},\gamma')<l+1} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|\delta_{\boldsymbol{s}}^*(f,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^\theta \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l=n}^{n_0}(m_l')^{-\frac{2-\theta}{\theta}}2^{-lr_1(2-\theta)}(B_l')^{2-\theta}2^{-lr_1\theta}(B_l')^{\theta}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_{l=n}^{n_0}(m_l')^{-\frac{2-\theta}{\theta}}2^{-2lr_1}(B_l')^{2}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.48)$$

Далі, підставивши в останню суму (2.48) замість m_l' їхні значення, отримуємо

$$J_8 \ll (2^n n^{\nu-1})^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}\left(\sum_{l=n}^{n_0}2^{-2l\left(r_1-\frac{1}{\theta}+\frac{1}{2}\right)}(B_l')^{\theta}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.49)$$

Тепер, щоб продовжити оцінку J_8, розглянемо два випадки:

а) $r_1 \geqslant \frac{1}{\theta}-\frac{1}{2}$;

б) $0 < r_1 < \frac{1}{\theta}-\frac{1}{2}$.

Якщо $r_1 \geqslant \frac{1}{\theta}-\frac{1}{2}$, то з (2.49) будемо мати

$$J_8 \ll (2^n n^{\nu-1})^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}2^{-n\left(r_1-\frac{1}{\theta}+\frac{1}{2}\right)}\left(\sum_{l=n}^{n_0}(B_l')^{\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll (2^n n^{\nu-1})^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}2^{-n\left(r_1-\frac{1}{\theta}+\frac{1}{2}\right)}\|f(\cdot)\|^{\theta/2}_{S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}(\mathbb{R}^d)} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-nr_1}n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)} \asymp M^{-r_1}\left(\log^{\nu-1}M\right)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}. \qquad (2.50)$$

Підставляючи (2.46) і (2.50) в (2.45), для $r_1 \geqslant \frac{1}{\theta}-\frac{1}{2}$ отримуємо

$$\|f(\cdot)-S_{\mathfrak{M}}(f,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \ll M^{-r_1}\left(\log^{\nu-1}M\right)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}.$$

Нехай тепер $0 < r_1 < \frac{1}{\theta}-\frac{1}{2}$. Тоді оцінку (2.49) можемо продовжити у такий спосіб

$$J_8 \ll (2^n n^{\nu-1})^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}2^{-n_0\left(r_1-\frac{1}{\theta}+\frac{1}{2}\right)}\left(\sum_{l=n}^{n_0}(B_l')^{\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll (2^n n^{\nu-1})^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)} 2^{-n\left(r_1-\frac{1}{\theta}+\frac{1}{2}\right)} n^{-(\nu-1)\left(r_1-\frac{1}{\theta}+\frac{1}{2}\right)} \|f(\cdot)\|^{\theta/2}_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)} \asymp$$

$$\asymp 2^{-nr_1} n^{-(\nu-1)r_1} \asymp M^{-r_1}. \tag{2.51}$$

Тепер підставляючи в (2.45) оцінки (2.46) і (2.51), отримуємо

$$\|f(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \ll M^{-r_1}.$$

Отже, оцінки зверху в теоремі 2.26 встановлено.

Перейдемо до встановлення оцінки знизу, яку достатньо отримати у випадку $\nu = d$. Для цього будемо використовувати міркування, аналогічні до тих, які були запропоновані В. М. Темляковим [123, с. 94]. За числом M підберемо n так, щоб $M \asymp 2^n n^{d-1}$ і кількість точок з цілочисловими координатами у множині $F_n = \bigcup_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} \rho^*_+(\boldsymbol{s})$ була б більшою ніж $4M$.

У залежності від значення параметра θ будемо розглядати функції, побудовані на основі функції (2.23), а саме

$$f_{14}(\boldsymbol{x}) = C_{16} 2^{-n\left(r_1+\frac{1}{2}\right)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{\boldsymbol{k}\in F_n} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}), \quad C_{16} > 0,$$

якщо $1 \leqslant \theta < \infty$ та

$$f_{15}(x) = C_{17} 2^{-n\left(r_1+\frac{1}{2}\right)} \sum_{\boldsymbol{k}\in F_n} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}), \quad C_{17} > 0,$$

якщо $\theta = \infty$.

Покажемо, що дані функції належать відповідно класам $S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ і $S^{\boldsymbol{r}}_{2,\infty}B(\mathbb{R}^d)$.

Для f_{14} отримуємо

$$\|f_{14}(\cdot)\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{R}^d)} = \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_{14},\cdot)\|^{\theta}_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll 2^{nr_1} 2^{-n\left(r_1+\frac{1}{2}\right)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(F,\cdot)\|^{\theta}_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right)^{\frac{1}{\theta}} = J_9,$$

де

$$F(\boldsymbol{x}) = \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho^*(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}),$$

і зазначимо, що $\operatorname{mes} \bigcup_{\boldsymbol{s}\colon (\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} \tilde{Q}^*_{2^{\boldsymbol{s}}} \asymp 2^n n^{d-1}$.

Для J_9 з використання (2.26) оцінку можемо продовжити таким чином:

$$J_9 \asymp 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} 2^{\frac{\theta\|\boldsymbol{s}\|_1}{2}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} 2^{\frac{n}{2}} n^{\frac{d-1}{\theta}} = 1.$$

Отже, $f_{14} \in S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ з деякою сталою $C_{16} > 0$.

Для f_{15} будемо мати:

$$\|f_{15}(\cdot)\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{2,\infty}B(\mathbb{R}^d)} = \sup_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_2,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \ll$$

$$\ll 2^{-n\left(r_1+\frac{1}{2}\right)} \sup_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(F,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{nr_1} 2^{-n\left(r_1+\frac{1}{2}\right)} 2^{\frac{n}{2}} = 1.$$

Тому $f_{15} \in S^{\boldsymbol{r}}_{2,\infty}B(\mathbb{R}^d)$ з деякою сталою $C_{17} > 0$.

Далі, нехай $\mathcal{L}$ — така довільна множина векторів $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d)$, що для множини $\mathfrak{M} = \bigcup_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{L}} \tilde{Q}^*_{2^{\boldsymbol{s}}}$ має місце співвідношення $\operatorname{mes} \mathfrak{M} \leqslant M$. Розглянемо множину

$$\mathcal{L}' = \left\{ \boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^d_+ \colon \boldsymbol{k} \in F_n,\ (\boldsymbol{s},\boldsymbol{1}) = n \right\}.$$

Згідно з вибором числа n для кількості елементів множини $\mathcal{L}' \setminus \mathcal{L}$ буде мати місце співвідношення $|\mathcal{L}' \setminus \mathcal{L}| \asymp n^{d-1}$.

Нехай

$$S_{\mathfrak{M}}(f_{14}, x) = \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{L}} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_{14}, \boldsymbol{x}).$$

Тоді згідно з твердженням 2.1 для f_{14}, у випадку $r_1 > \max\left\{0, \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}\right\}$, одержуємо

$$e^{\mathfrak{F}}_M\left(S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{R}^d)\right)_{L_2(\mathbb{R}^d)} \geqslant e^{\mathfrak{F}}_M\left(f_{14}\right)_{L_2(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \inf_{\mathcal{L}\colon \operatorname{mes}\mathfrak{M}\leqslant M} \|f_{14}(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f_{14},\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\sum_{\boldsymbol{s}} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}\big(f_{14}(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f_{14}, \cdot), \cdot\big)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2^{-n\left(r_1+\frac{1}{2}\right)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{L}'\setminus\mathcal{L}} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_{14}, \cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right)^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp 2^{-n(r_1+\frac{1}{2})} n^{-\frac{d-1}{\theta}} 2^{\frac{n}{2}} \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{L}'\setminus\mathcal{L}} 1\right)^{\frac{1}{2}} \asymp 2^{-nr_1} n^{-\frac{d-1}{\theta}} n^{\frac{d-1}{2}} \asymp$$

$$\asymp M^{-r_1}\big(\log^{d-1} M\big)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}.$$

Коли ж $0 < r_1 < \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}$, оцінка знизу в (2.43), при відповідних значеннях параметрів, випливає з теореми 5.4 при $d = 1$.

Аналогічно, для f_{15} одержуємо

$$e^{\mathfrak{F}}_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_2(\mathbb{R}^d)} \geqslant e^{\mathfrak{F}}_M\big(f_{15}\big)_{L_2(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \inf_{\mathcal{L}:\ \mathrm{mes}\,\mathfrak{M}\leqslant M} \|f_{15}(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f_{15}, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\sum_{\boldsymbol{s}} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}\big(f_{14}(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f_{14}, \cdot), \cdot\big)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2^{-n\left(r_1+\frac{1}{2}\right)} \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{L}'\setminus\mathcal{L}} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_{14}, \cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right)^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp 2^{-n(r_1+\frac{1}{2})}\, 2^{\frac{n}{2}} \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{L}'\setminus\mathcal{L}} 1\right)^{\frac{1}{2}} \asymp 2^{-nr_1}\, n^{\frac{d-1}{2}} \asymp$$

$$\asymp M^{-r_1}\big(\log^{d-1} M\big)^{r_1+\frac{1}{2}}.$$

Оцінки знизу в (2.43) встановлено.

Теорему 2.26 доведено.

Результат теореми 2.26 є новим також і для класів Нікольського $S^{\boldsymbol{r}}_2 H(\mathbb{R}^d)$, $d \geqslant 1$. Має місце таке твердження.

Наслідок 2.27. *Нехай* $r_1 > 0$. *Тоді при* $d \geqslant 1$ *виконується порядкова оцінка*

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S_2^{\boldsymbol{r}}H(\mathbb{R}^d)\big)_{L_2(\mathbb{R}^d)} \asymp M^{-r_1}\big(\log^{\nu-1} M\big)^{r_1+\frac{1}{2}}.$$

Проаналізувавши та порівнявши результат теореми 2.26 з відповідним результатом наближення функцій з класів $S_{2,\theta}^{\boldsymbol{r}}B(\mathbb{R}^d)$ — твердження 1.7, робимо висновок:

- у випадку $p = 2 \leqslant \theta \leqslant \infty$ величини $e_M^{\mathfrak{F}}\big(S_{2,\theta}^{\boldsymbol{r}}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ (1.29) і $\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^{\gamma'}}\big(S_{2,\theta}^{\boldsymbol{r}}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ (1.24) співпадають за порядком при $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$;

- у випадку $1 \leqslant \theta < 2 = p$ оцінки величин $e_M^{\mathfrak{F}}\big(S_{2,\theta}^{\boldsymbol{r}}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ і $\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^{\gamma'}}\big(S_{2,\theta}^{\boldsymbol{r}}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ відрізняються за порядком, а саме:

  – якщо $0 < r_1 < \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}$, то має місце співвідношення

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S_{2,\theta}^{\boldsymbol{r}}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_2(\mathbb{R}^d)} \asymp \mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^{\gamma'}}\big(S_{2,\theta}^{\boldsymbol{r}}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_2(\mathbb{R}^d)} n^{-(\nu-1)r_1},$$

$$M \asymp 2^n n^{\nu-1};$$

  – якщо $r_1 \geqslant \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}$, то має місце співвідношення

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S_{2,\theta}^{\boldsymbol{r}}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_2(\mathbb{R}^d)} \asymp \mathcal{E}_{\tilde{Q}_n^{\gamma'}}\big(S_{2,\theta}^{\boldsymbol{r}}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_2(\mathbb{R}^d)} n^{-(\nu-1)\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2}\right)},$$

$$M \asymp 2^n n^{\nu-1}.$$

Як видно з наведеного порівняння оцінки величин (1.24) і (1.29) на класах $S_2^{\boldsymbol{r}}H(\mathbb{R}^d)$ у метриці простору $L_2(\mathbb{R}^d)$ збігаються за порядком при всіх значеннях параметра $\boldsymbol{r}$.

Крім того в одновимірному випадку результати теореми 2.21 можемо записати таким чином.

Наслідок 2.28. *Нехай* $r > 0$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $d = 1$. *Тоді має місце оцінка*

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S_{2,\theta}^{r}B(\mathbb{R})\big)_{L_2(\mathbb{R})} \asymp M^{-r}.$$

Зауважимо, що в одновимірному випадку, на противагу багатовимірному ($d \geqslant 2$), оцінки величин (1.24) і (1.29) як на класах $S^r_{2,\theta}B(\mathbb{R})$, $1 \leqslant \theta < \infty$, так і на класах $S^r_2 H(\mathbb{R})$ збігаються за порядком у метриці простору $L_2(\mathbb{R})$.

Висновки до розділу 2

У даному розділі:

1. Одержано точні за порядком оцінки наближення класів функцій з домінуючою мішаною похідною $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті. Похибка наближення оцінюється в метриці простору Лебега $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 < q \leqslant \infty$.

2. Знайдено точні за порядком оцінки наближення функцій з класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, у рівномірній метриці за допомогою цілих функцій носій перетворення Фур'є яких міститься у східчастому гіперболічному хресті, що є аналогами східчасто-гіперболічних сум Фур'є.

3. Одержано точні за порядком оцінки наближення функцій з класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p < \infty$, за допомогою цілих функцій експоненціального типу зі спектром зосередженим на множинах лебегова міра яких є скінченною, похибка наближення оцінюється у метриці простору Лебега.

4. Для класів $S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ у метриці простору $L_2(\mathbb{R}^d)$ знайдено точні за порядком оцінки наближення за допомогою цілих функцій експоненціального типу зі спектром зосередженим на множинах лебегова міра яких є скінченною і показано, що у деяких випадках таке наближення дає оцінки кращі у порівнянні з наближенням за до-

помогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті.

5. Встановлено оцінки норми "блоків" Валле Пуссена, які є аналогами сум Валле Пуссена періодичних функцій багатьох змінних, у просторі Лебега.

Основні результати даного розділу опубліковано у працях [6, 7, 15, 17] зі списку публікацій і, відповідно, [152, 241, 242, 247] зі списку використаних джерел, а також опубліковані у тезах конференцій [25, 26, 27, 29, 35, 37, 39] і, відповідно, [138–142, 150, 243].

Розділ 3

Наближення класів періодичних функцій з домінуючою мішаною похідною

У даному розділі викладено результати стосовно наближення класів періодичних функцій з домінуючою мішаною похідною $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$. Знайдено оцінки ентропійних чисел та M-вимірних колмогоровських поперечників цих класів функцій у метриці $QC(\mathbb{T}^d)$-простору квазінеперервних функцій і показано, що у деяких випадках ці оцінки є точними за порядком. У метриці простору $B_{1,1}(\mathbb{T}^d)$ одержано точні за порядком оцінки ортопоперечників і близьких до них апроксимаційних характеристик класів Соболєва $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$ та класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ функцій однієї та багатьох змінних. Крім того, встановлено, що у багатовимірному випадку послідовність норм лінійних операторів, які реалізують порядкові значення найкращого наближення класів $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ у просторі $B_{1,1}(\mathbb{T}^d)$ за допомогою тригонометричних поліномів з “номерами” гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів, є необмеженою. Також встановлено точні за порядком оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, у просторі $B_{\infty,1}(\mathbb{T}^d)$, $d \geqslant 1$. Крім цього, при $d \geqslant 2$ з використанням одержаних результатів вдалося встановити точні за порядком оцінки наближень даних класів функцій їх східчасто-гіперболічними сумами Фур’є у просторі $B_{\infty,1}(\mathbb{T}^d)$, а також порядки ортопоперечників класів $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, $d \geqslant 1$, у цьому ж просторі. У деяких випадках досліджено поведінку відповідних апроксимаційних характеристик класів Соболєва $W^{\boldsymbol{r}}_{1,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$ при $d \in \{1, 2\}$.

3.1. Допоміжні твердження

Наведемо декілька допоміжних тверджень, які будемо використовувати у процесі одержання результатів даного розділу.

Лема 3.1 ([227], Вступ §3). *Нехай* $f \in L_p^0(\mathbb{T}^d)$, $1 < p < \infty$. *Тоді*

$$\Big\| \sum_{\boldsymbol{s}} \delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot) \Big\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} \ll \Big(\sum_{\boldsymbol{s}} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{T}^d)}^{p^*} \Big)^{\frac{1}{p^*}},$$

де $p^* = \min\{p, 2\}$.

Для формулювання наступного твердження нам знадобляться деякі позначення.

Нехай

$$Q_n^{\gamma} = \bigcup_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})<n} \rho(\boldsymbol{s}), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.1}$$

де множина $\rho(\boldsymbol{s})$ визначається співвідношенням (1.39), яке для зручності нагадаємо

$$\rho(\boldsymbol{s}) = \Big\{ \boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d) \colon 2^{s_j - 1} \leqslant |k_j| < 2^{s_j}, j = \overline{1,d} \Big\},$$

$\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1,d}$. Множину Q_n^{γ} називають східчастим гіперболічним хрестом у $\mathbb{Z}^d$ і для кількості елементів множини маємо $|Q_n^{\gamma}| \asymp 2^n n^{d-1}$.

Розглянемо множину поліномів вигляду

$$T(Q_n^{\gamma}) := \Big\{ t \colon t(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in Q_n^{\gamma}} c_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}, c_{\boldsymbol{k}} \in \mathbb{C}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \Big\}.$$

Для нормованого функціонального простору $\mathcal{Y}$ з нормою $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}}$ і $f \in \mathcal{Y}$ позначимо через

$$E_{Q_n^{\gamma}}(f)_{\mathcal{Y}} := \inf_{t \in T(Q_n^{\gamma})} \|f(\cdot) - t(\cdot)\|_{\mathcal{Y}}$$

— величину найкращого наближення функції f у просторі $\mathcal{Y}$ за допомогою поліномів, що належать множині $T(Q_n^{\gamma})$. Якщо $F \subset \mathcal{Y}$ — деякий функціональний клас, то покладемо

$$E_{Q_n^\gamma}\big(F\big)_{\mathcal{Y}} := \sup_{f\in F} E_{Q_n^\gamma}\big(f\big)_{\mathcal{Y}}. \tag{3.2}$$

З історією дослідження величини (3.2) для класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, $S^{\boldsymbol{r}}_p H(\mathbb{T}^d)$ та $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$, зокрема, у просторах Лебега можна ознайомитися в книгах [86, 123].

У випадку $\boldsymbol{\gamma} = (1,\ldots,1) \in \mathbb{N}^d$ будемо писати $T(Q_n)$ замість $T(Q_n^\gamma)$ і відповідно $E_{Q_n}\big(F\big)_{\mathcal{Y}}$ замість $E_{Q_n^\gamma}\big(F\big)_{\mathcal{Y}}$.

Для величин $E_{Q_n}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)\big)_{B_{1,1}}$, $\boldsymbol{r} = (r_1,\ldots,r_1) \in \mathbb{R}^d_+$, як наслідок оцінки колмогоровського поперечника $d_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), B_{1,1}\big)$, $M \asymp 2^n n^{d-1}$, яка наведена у твердженні 1.24, можна сформулювати таке твердження.

Твердження 3.2. *Нехай* $d \geqslant 1$, $1 \leqslant p,\theta \leqslant \infty$, $r_1 > 0$. *Тоді*

$$E_{Q_n}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)\big)_{B_{1,1}} \asymp 2^{-nr_1} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Відповідно для класів $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$ маємо такий аналог твердження 3.2.

Твердження 3.3. *Нехай* $d \geqslant 1$, $1 < p < \infty$, $\boldsymbol{r} = (r_1,\ldots,r_1) \in \mathbb{R}^d_+$. *Тоді при* $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$

$$E_{Q_n}\big(W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)\big)_{B_{1,1}} \asymp 2^{-nr_1} n^{\frac{d-1}{2}}. \tag{3.3}$$

Оцінка зверху в (3.3) є наслідком твердження 3.2 при $\theta = 2$, а відповідна оцінка знизу випливає з твердження 1.25 при $M \asymp 2^n n^{d-1}$ і $\nu = d$.

Далі для функції $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, через $S_{Q_n^\gamma}(f,\boldsymbol{x})$ будемо позначати її східчасто-гіперболічну суму Фур'є, тобто

$$S_{Q_n^\gamma}(f,\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in Q_n^\gamma} \widehat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})} = \sum_{(\boldsymbol{s},\gamma)<n} \delta_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x}). \tag{3.4}$$

Нехай, як і раніше, $\mathcal{X}$ — деякий нормований функціональний простір із нормою $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$, $\mathcal{X} \subset L_q(\mathbb{T}^d)$ і $F \subset \mathcal{X}$ — деякий функціональний клас. Тоді через $\mathcal{E}_{Q_n^\gamma}\big(F\big)_{\mathcal{X}}$ позначимо величину

$$\mathcal{E}_{Q_n^\gamma}\big(F\big)_{\mathcal{X}} = \sup_{f\in F} \|f(\cdot) - S_{Q_n^\gamma}(f,\cdot)\|_{\mathcal{X}}. \tag{3.5}$$

Нагадаємо, що величини $\mathcal{E}_{Q_n^\gamma}\big(F\big)_{\mathcal{X}}$ для класів $F = S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ у просторах $\mathcal{X} = L_q$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, або $\mathcal{X} = B_{\infty,1}$ досліджувалися у роботах [37, 96, 100, 198], а також більш детально з відповідними дослідженнями можна ознайомитися у книгах [86, 123, 227]. Зокрема має місце таке твердження.

Твердження 3.4 ([198])**.** *Нехай* $1 \leqslant p < \infty$, $r_1 > \frac{1}{p}$ *і* $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. *Тоді справедливою є оцінка*

$$\mathcal{E}_{Q_n^\gamma}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{T}^d)} \asymp 2^{-n\left(r_1-\frac{1}{p}\right)} n^{(\nu-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Оцінка величини $\mathcal{E}_{Q_n^\gamma}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p}H(\mathbb{T}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{T}^d)}$, тобто для $\theta = \infty$, встановлена В. М. Темляковим [120].

Відповідно в одновимірному випадку ($d = 1$) для (3.4) і (3.5) будемо використовувати позначення

$$S_{2^n}(f,x) = \sum_{s=1}^{n} \delta_s(f,x), \tag{3.6}$$

якщо $F \subset \mathcal{X} \subset L_q(\mathbb{T})$ — деякий функціональний клас, то покладемо

$$\mathcal{E}_{2^n}\big(F\big)_{\mathcal{X}} := \sup_{f\in F} \|f(\cdot) - S_{2^n}(f,\cdot)\|_{\mathcal{X}}. \tag{3.7}$$

Справедливим є таке твердження.

Твердження 3.5 ([227], гл.1, §3)**.** *Нехай* $d = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *і* $r > 1$. *Тоді справедливою є оцінка*

$$\mathcal{E}_{2^n}\big(W^r_{1,\alpha}(\mathbb{T})\big)_{L_\infty(\mathbb{T})} \asymp 2^{-n(r-1)}.$$

На завершення даного підрозділу наведемо ще декілька нерівностей, які будемо використовувати у процесі доведення.

Лема 3.6 ([123], гл. 1, §2)**.** *Для будь-якого* $\eta > 0$ *знайдеться така стала* $C(\eta) > 0$, *що для довільного полінома* $t \in T(Q_n)$ *виконується нерівність*

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in Q_n} |\widehat{t}(\boldsymbol{k})| \leqslant C(\eta) n^\eta 2^n \|t(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T}^d)}.$$

Для функцій $g_1 \in L_1(\mathcal{E})$ та $g_2 \in L_p(\mathcal{E})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, означимо їхню згортку згідно з формулою (див., наприклад, [78, с. 32, 52])

$$\big(g_1 * g_2\big)(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{\mathcal{E}} g_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}) g_2(\boldsymbol{u}) d\boldsymbol{u}$$

При цьому виконується нерівність

$$\|g_1 * g_2\|_{L_p(\mathcal{E})} \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|g_1(\cdot)\|_{L_1(\mathcal{E})} \cdot \|g_2(\cdot)\|_{L_p(\mathcal{E})}, \tag{3.8}$$

де, як і раніше, $\mathcal{E}$ позначає $\mathbb{R}^d$ або $\mathbb{T}^d$.

3.2. Оцінки ентропійних чисел класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ у просторі квазінеперервних функцій

У подальших міркуваннях будемо вважати, що вектор $\boldsymbol{r}$, який входить в означення класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ має вигляд $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_1) \in \mathbb{R}^d_+$.

Зауваження 3.7. Скрізь у цьому розділі, як і в розділі 2, умова на параметр $\boldsymbol{r}$, відповідно до твердження 1.3 і зауваження 1.13, забезпечує належність функції з класу $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ до простору в метриці якого здійснюється оцінка відповідних апроксимаційних характеристик. Додаткові обмеження на $\boldsymbol{r}$ (r_1) можуть бути зумовлені технікою одержання відповідних результатів.

Теорема 3.8. *Нехай* $1 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant \theta < \infty$, $r_1 > \max\left\{\frac{1}{p}, \frac{1}{2}\right\}$. *Тоді при* $d \geqslant 2$ *справедлива оцінка*

$$\varepsilon_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\big) \ll M^{-r_1}\big(\log^{d-1} M\big)^{r_1 + \left(\frac{1}{p^*} - \frac{1}{\theta}\right)_+} \sqrt{\log M}, \tag{3.9}$$

де $p^* = \min\{p, 2\}$, $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Доведення. Розглянемо спочатку випадок $1 < p \leqslant 2$, $p < \theta < \infty$.

Для $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant d$, покладемо

$$Q_n = \bigcup_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1}) \leqslant n} \rho(\boldsymbol{s}), \ \Delta Q_n = Q_n \backslash Q_{n-1}$$

і

$$\mathfrak{N}_n = \Big\{ \boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_d) \colon (\boldsymbol{s}, \mathbf{1}) = n, s_j \in \mathbb{Z}, j = \overline{1,d} \Big\},$$

де $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^d$.

Для кількості елементів множини

$$\Delta Q_n = \bigcup_{\boldsymbol{s} \in \mathfrak{N}_n} \rho(\boldsymbol{s})$$

будемо мати оцінку

$$|\Delta Q_n| = \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n} 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})} = 2^n \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=n} 1 \asymp 2^n n^{d-1}.$$

Отже, згідно з лемою 3.1 для $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ будемо мати

$$\Big\| \sum_{\boldsymbol{s} \in \mathfrak{N}_n} \delta_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot) \Big\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} \ll \Big(\sum_{\boldsymbol{s} \in \mathfrak{N}_n} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot)\|^p_{L_p(\mathbb{T}^d)} \Big)^{\frac{1}{p}} = \mathfrak{I}_1. \tag{3.10}$$

Зауважимо, що у випадку $\boldsymbol{r} = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}^d_+$ для вектора $\boldsymbol{\gamma}$ ми отримаємо, що всі його координати рівні 1, тобто $\boldsymbol{\gamma} = (1, \dots, 1)$. Тоді лему 2.4 можна переформулювати таким чином:

Лема 3.9 ([123], Вступ, с. 11)**.** *Справедливе співвідношення*

$$\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1}) \geqslant l} 2^{-\alpha(\boldsymbol{s},\mathbf{1})} \asymp 2^{-\alpha l} l^{d-1}, \quad \alpha > 0.$$

Далі, скориставшись нерівністю Гельдера з показником $\frac{\theta}{p}$ і лемою 3.9, одержимо

$$\mathfrak{I}_1 = \Big(\sum_{\boldsymbol{s} \in \mathfrak{N}_n} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot)\|^p_{L_p(\mathbb{T}^d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sum_{\boldsymbol{s} \in \mathfrak{N}_n} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot)\|^\theta_{L_p(\mathbb{T}^d)} \Big)^{\frac{1}{\theta}} \Big(\sum_{\boldsymbol{s} \in \mathfrak{N}_n} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\frac{\theta p}{\theta - p}} \Big)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \|f(\cdot)\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)} \Big(\sum_{\boldsymbol{s} \in \mathfrak{N}_n} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\frac{\theta p}{\theta - p}} \Big)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathfrak{N}_n} 2^{-r_1(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\frac{\theta p}{\theta-p}} \right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}} \asymp 2^{-nr_1} n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{3.11}$$

Аналогічно у випадку $1 < p \leqslant 2$ і $\theta = p$ можемо записати

$$\mathfrak{I}_1 = 2^{-nr_1} \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathfrak{N}_n} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})p} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^p_{L_p(\mathbb{T}^d)} \right)^{\frac{1}{p}} \ll$$

$$\ll 2^{-nr_1} \|f(\cdot)\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,p}B(\mathbb{T}^d)} \leqslant 2^{-nr_1}. \tag{3.12}$$

Таким чином, при $1 < p \leqslant 2$, $p \leqslant \theta < \infty$, згідно з (3.10)–(3.12) маємо

$$\left\| \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathfrak{N}_n} \delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot) \right\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} \ll 2^{-nr_1} n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{3.13}$$

Далі, нехай задано достатньо велике число M. Підберемо $m \in \mathbb{N}$ так, щоб виконувалися нерівності

$$|\Delta Q_{m-1}| < M \leqslant |\Delta Q_m|.$$

Тоді, оскільки

$$|\Delta Q_{m-1}| \asymp |\Delta Q_m| \asymp 2^m m^{d-1},$$

то $M \asymp 2^m m^{d-1}$.

Тепер покладемо $\beta = \dfrac{1}{2} \min\left\{ r_1 - \dfrac{1}{p}, 1 \right\}$ і

$$\overline{M}_n = \begin{cases} C(\beta) M 2^{-\frac{1}{2}(m-n)}, & n < m, \\ C(\beta) M 2^{-\beta(n-m)}, & n \geqslant m, \end{cases}$$

де числа $C(\beta) > 0$ підібрано таким чином, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{M}_n \leqslant M.$$

Зауважимо, що такі числа $C(\beta) > 0$ існують, оскільки

$$M \sum_{n=0}^{m-1} 2^{-\frac{1}{2}(m-n)} + M \sum_{n=m}^{\infty} 2^{-\beta(n-m)} \ll M.$$

Нехай $M_n = [\overline{M}_n]$, де $[a]$ — ціла частина числа a. Тоді $M_n = 0$, якщо $C(\beta)M2^{-\beta(n-m)} < 1$, тобто при $n > m_1 = m + \beta^{-1}\log C(\beta)M$.

Позначимо

$$S_{\Delta Q_n}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)\big) := \Big\{g\colon g(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\Delta Q_n} \widehat{f}(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}, f \in S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)\Big\}$$

і

$$\big\|S_{\Delta Q_n}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)\big)\big\|_{QC(\mathbb{T}^d)} := \sup_{g\in S_{\Delta Q_n}(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{T}^d))} \|g(\cdot)\|_{QC(\mathbb{T}^d)}.$$

Отже, згідно з позначеннями і властивостями ентропійних чисел [81, §12.1] для $\varepsilon_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\big)$, можемо записати

$$\varepsilon_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\big) \leqslant \sum_{n\leq m_1} \varepsilon_{M_n}\big(S_{\Delta Q_n}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)\big), QC(\mathbb{T}^d)\big) +$$

$$+ \sum_{n>m_1} \|S_{\Delta Q_n}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)\big)\|_{QC(\mathbb{T}^d)} = I_1 + I_2. \tag{3.14}$$

Оцінимо спочатку доданок I_2, скориставшись відомим твердженням.

Для будь-якої множини $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ через $\mathcal{T}(\Lambda)$ будемо позначати множину тригонометричних поліномів t вигляду

$$t(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\Lambda} c_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{T}^d.$$

У випадку, коли множина Λ симетрична відносно початку координат ($\Lambda = -\Lambda$), покладемо

$$\mathcal{T}_r(\Lambda) = \Big\{t \in \mathcal{T}(\Lambda)\colon c_{\boldsymbol{k}} = \overline{c}_{-\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{k} \in \Lambda\Big\}.$$

Твердження 3.10 ([123], гл. 1, теорема 2.1)**.** *Нехай $f \in \mathcal{T}(Q_n)$. Тоді при $1 \leqslant p < \infty$ виконується порядкова нерівність*

$$\|f(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{T}^d)} \ll 2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|f(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{T}^d)}. \tag{3.15}$$

Зауважимо, що оцінка (3.15) залишається вірною і у тому випадку, коли $f \in \mathcal{T}(\Delta Q_n)$.

Оцінимо спочатку $\|g(\cdot)\|_{QC(\mathbb{T}^d)}$. Для цього представимо функцію $g \in \mathcal{T}(\Delta Q_n)$ у вигляді

$$g(\boldsymbol{x}) = \sum_{s_1} \sum_{2^{s_1-1} \leqslant |k_1| < 2^{s_1}} e^{ik_1x_1} g_{k_1}(\boldsymbol{x}^1).$$

Тоді згідно з означенням $QC(\mathbb{T}^d)$-норми можемо записати

$$\|g(\cdot)\|_{QC(\mathbb{T}^d)} = \int_0^1 \left\| \sum_{s_1} r_{s_1}(\omega) \sum_{2^{s_1-1} \leqslant |k_1| < 2^{s_1}} e^{ik_1x_1} g_{k_1}(\boldsymbol{x}^1) \right\|_{L_\infty(\mathbb{T}^d)} d\omega.$$

Звідси, скориставшись властивістю $QC(\mathbb{T})$-норми (1.52), формулою (1.53) та оцінками (3.13) і (3.15), отримаємо

$$\|g(\cdot)\|_{QC(\mathbb{T}^d)} \ll 2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{p}\right)} 2^{-nr_1} n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)} =$$
$$= 2^{-n\left(r_1-\frac{1}{p}\right)} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Отже, для кожного доданку в I_2 можемо записати

$$\left\| S_{\Delta Q_n}\left(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} B(\mathbb{T}^d)\right) \right\|_{QC(\mathbb{T}^d)} \ll 2^{-n\left(r_1-\frac{1}{p}\right)} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Далі, провівши підсумовування по $n > m_1$ і врахувавши значення m_1, одержимо

$$I_2 \ll \sum_{n>m_1} 2^{-n\left(r_1-\frac{1}{p}\right)} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} \ll 2^{-m_1\left(r_1-\frac{1}{p}\right)} m_1^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} = \mathfrak{I}_2. \tag{3.16}$$

Для продовження оцінки величини $\mathfrak{I}_2$ розглянемо два випадки.

Нехай $r_1 - \frac{1}{p} > 1$. Тоді $\beta = \frac{1}{2}$ і відповідно $m_1 = m + \log(C(\beta)M)^2$. Таким чином, будемо мати

$$\mathfrak{I}_2 = 2^{-m\left(r_1-\frac{1}{p}\right)} \left(C(\beta)M\right)^{-2\left(r_1-\frac{1}{p}\right)} \left(m + \log(C(\beta)M)^2\right)^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} \asymp$$
$$\asymp 2^{-m\left(r_1-\frac{1}{p}\right)} 2^{-2\left(r_1-\frac{1}{p}\right)m} m^{-2(d-1)\left(r_1-\frac{1}{p}\right)} m^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} \ll$$
$$\ll 2^{-mr_1} m^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{3.17}$$

Нехай тепер $0 < r_1 - \frac{1}{p} \leqslant 1$. Тоді $\beta = \frac{1}{2}\left(r_1 - \frac{1}{p}\right)$, $m_1 = m + \log(C(\beta)M)^{\frac{2p}{r_1 p - 1}}$ і величина $\mathfrak{I}_2$ оцінюється у такий спосіб

$$\mathfrak{I}_2 = 2^{-m\left(r_1 - \frac{1}{p}\right)}\big(C(\beta)M\big)^{-\frac{2p}{r_1 p-1}\left(r_1 - \frac{1}{p}\right)}\big(m + \log(C(\beta)M)^{\frac{2p}{r_1 p-1}}\big)^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} \asymp$$
$$\asymp 2^{-m\left(r_1 - \frac{1}{p}\right)} 2^{-2m} m^{-2(d-1)} m^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} \ll 2^{-mr_1} m^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)}. \qquad (3.18)$$

Таким чином, згідно з (3.16)–(3.18) отримуємо таке співвідношення

$$I_2 \ll 2^{-mr_1} m^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)}. \qquad (3.19)$$

Для оцінки величини I_1 нам знадобиться допоміжне твердження.

Нехай $\mathcal{T}(\Delta Q_n)_q$ позначає одиничну L_q-кулю у просторі поліномів $\mathcal{T}(\Delta Q_n)$. Крім того покладемо

$$\gamma(q,a,b) = \begin{cases} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{q}} \left[\ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)\right]^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}, & a \leqslant b, \\ e^{-\frac{a}{b}}, & a > b. \end{cases}$$

Лема 3.11 ([179]). *Для $1 < q \leqslant 2$ має місце оцінка*

$$\varepsilon_M\big(\mathcal{T}(\Delta Q_n)_q, QC(\mathbb{T}^d)\big) \ll n^{\frac{1}{2}} \gamma(q, M, \mathcal{K}|\Delta Q_n|).$$

($\mathcal{K} = \mathcal{K}(d)$; інші константи у цій нерівності також не залежать ні від M, ні від n).

Отже, представимо величину I_1 у вигляді

$$I_1 = \sum_{n \leqslant m} \varepsilon_{M_n}\big(S_{\Delta Q_n}(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)), QC(\mathbb{T}^d)\big) +$$
$$+ \sum_{m < n \leqslant m_1} \varepsilon_{M_n}\big(S_{\Delta Q_n}(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)), QC(\mathbb{T}^d)\big). \qquad (3.20)$$

Далі, згідно з (3.13) і лемою 3.11 знаходимо

$$\sum_{n \leqslant m} \varepsilon_{M_n}\big(S_{\Delta Q_n}(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)), QC(\mathbb{T}^d)\big) \ll \sum_{n \leqslant m} 2^{-nr_1} n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)} n^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{M_n}{\mathcal{K}|\Delta Q_n|}} \ll$$
$$\ll 2^{-mr_1} m^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)} m^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.21)$$

Аналогічно при $n < m \leqslant m_1$ одержимо

$$\sum_{m<n\leqslant m_1} \varepsilon_{M_n}\big(S_{\Delta Q_n}(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)), QC(\mathbb{T}^d)\big) \ll$$

$$\ll \sum_{m<n\leqslant m_1} 2^{-nr_1} n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)} n^{\frac{1}{2}} \left(\frac{|\Delta Q_n|}{M_n}\right)^{\frac{1}{p}} \left[\ln\left(1+\frac{|\Delta Q_n|}{M_n}\right)\right]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll 2^{-mr_1} m^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)} m^{\frac{1}{2}}. \tag{3.22}$$

Отже, згідно з (3.20)–(3.22) для оцінки величини I_1 можемо записати

$$I_1 \ll 2^{-mr_1} m^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)} m^{\frac{1}{2}}. \tag{3.23}$$

Тепер, об'єднавши оцінки (3.14), (3.19) і (3.23) та беручи до уваги, що $M \asymp 2^m m^{d-1}$, для випадку $1 < p \leqslant 2$, $p \leqslant \theta < \infty$ одержимо

$$\varepsilon_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\big) \ll M^{-r_1}\big(\log^{d-1} M\big)^{r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}} \sqrt{\log M}. \tag{3.24}$$

Далі, скориставшись оцінкою (3.24) одержимо оцінки величини $\varepsilon_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\big)$ у випадках, що залишилися нерозглянутими.

Нехай $1 < p \leqslant 2$, $1 \leqslant \theta < p$. Тоді, врахувавши, що $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d) \subset$ $\subset S^{\boldsymbol{r}}_{p,p}B(\mathbb{T}^d)$, згідно з (3.24) маємо

$$\varepsilon_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\big) \ll \varepsilon_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,p}B(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\big) \ll$$

$$\ll M^{-r_1}\big(\log^{d-1} M\big)^{r_1} \sqrt{\log M}. \tag{3.25}$$

Нехай $2 < p \leqslant \infty$, $2 < \theta < \infty$. Тоді $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d) \subset S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ і тому, скориставшись (3.24), можемо записати

$$\varepsilon_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\big) \ll \varepsilon_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\big) \ll$$

$$\ll M^{-r_1}\big(\log^{d-1} M\big)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}} \sqrt{\log M}. \tag{3.26}$$

Нехай $2 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant 2$. Тоді $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d) \subset S^{\boldsymbol{r}}_{p,2}B(\mathbb{T}^d) \subset S^{\boldsymbol{r}}_{2,2}B(\mathbb{T}^d)$ і згідно з (3.24) при $\theta = p = 2$ одержимо

$$\varepsilon_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\big) \ll \varepsilon_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{2,2}B(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\big) \ll$$

$$\ll M^{-r_1}\left(\log^{d-1} M\right)^{r_1}\sqrt{\log M}. \qquad (3.27)$$

Об'єднавши (3.24)–(3.27) приходимо до шуканої оцінки.

Теорему 3.8 доведено.

У наступному твердженні встановимо оцінку знизу величини $\varepsilon_M\left(S^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}B(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\right)$.

Теорема 3.12. *Нехай $r_1 > 0$, $1 \leqslant \theta < \infty$. Тоді при $d \geqslant 2$ справедлива оцінка*

$$\varepsilon_M\left(S^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}B(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\right) \gg M^{-r_1}\left(\log^{d-1} M\right)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}\sqrt{\log M}. \qquad (3.28)$$

Доведення. Нехай $N_\varepsilon(F,\mathfrak{X})$ — мінімальна кількість замкнених куль радіуса $\varepsilon > 0$ простору $\mathfrak{X}$ необхідних для компактного покриття множини F, а $M_\varepsilon(F,\mathfrak{X})$ — максимальна кількість таких точок $x_i \in F$, що $\|x_i - x_j\|_{\mathfrak{X}} > \varepsilon$, $i \neq j$. Тоді виконуються нерівності (див., наприклад, [43])

$$N_\varepsilon(F,\mathfrak{X}) \leqslant M_\varepsilon(F,\mathfrak{X}) \leqslant N_{\frac{\varepsilon}{2}}(F,\mathfrak{X}). \qquad (3.29)$$

Далі для парних n і $d \geqslant 2$ позначимо

$$Y^d_n = \left\{\boldsymbol{s}\colon \boldsymbol{s} = (2l_1, \ldots, 2l_d),\ l_1 + \ldots + l_d = \frac{n}{2},\ \boldsymbol{l} \in \mathbb{N}^d\right\},$$

$$\mathfrak{D}_n = \bigcup_{\boldsymbol{s}\in Y^d_n} \rho(\boldsymbol{s})$$

і $\mathcal{T}_r(\mathfrak{D}_n)$ — простір дійсних тригонометричних поліномів $t \in \mathcal{T}(\mathfrak{D}_n)$. При цьому зауважимо, що для кількості елементів множин $\mathfrak{D}_n$ справджується співвідношення $|\mathfrak{D}_n| \asymp 2^n n^{d-1}$.

У [179] (див. також [226]) для кожного n побудовано набір функцій $\{f^n_i\}_{i=1}^{A_n}$, $f^n_i \in \mathcal{T}_r(\mathfrak{D}_n)$, які мають такі властивості:

$$\begin{aligned}
&1)\quad \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f^n_i,\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{T}^d)} \leqslant 1, && \boldsymbol{s} \in Y^d_n;\\
&2)\quad \|f^n_i(\cdot) - f^n_j(\cdot)\|_{QC(\mathbb{T}^d)} \geqslant C(d)n^{\frac{d}{2}}, && i \neq j;\\
&3)\quad A_n \geqslant 2^{\frac{|\mathfrak{D}_n|}{2}}.
\end{aligned} \qquad (3.30)$$

Покажемо, що кожна функція з множини

$$F_n = \left\{ C(\theta, d) 2^{-nr_1} n^{-\frac{d-1}{\theta}} f_i^n \right\}_{i=1}^{A_n}$$

з деякою сталою $C(\theta, d)$ належить класу $S^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, $1 \leqslant \theta < \infty$.

Маємо

$$\|f_i^n(\cdot)\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}B(\mathbb{T}^d)} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathfrak{D}_n} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|A_{\boldsymbol{s}}(f_i^n, \cdot)\|^{\theta}_{L_\infty(\mathbb{T}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathfrak{D}_n} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \left\| A_{\boldsymbol{s}} * \sum_{\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty \leqslant 1} \delta_{\boldsymbol{s}'}(f_i^n, \cdot) \right\|^{\theta}_{L_\infty(\mathbb{T}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathfrak{D}_n} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|A_{\boldsymbol{s}}(\cdot)\|^{\theta}_{L_1(\mathbb{T}^d)} \left\| \sum_{\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty \leqslant 1} \delta_{\boldsymbol{s}'}(f_i^n, \cdot) \right\|^{\theta}_{L_\infty(\mathbb{T}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathfrak{D}_n} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty \leqslant 1} \|\delta_{\boldsymbol{s}'}(f_i^n, \cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{T}^d)} \right)^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 2^{nr_1} n^{\frac{d-1}{\theta}}.$$

Отже, $F_n \subset S^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}B(\mathbb{T}^d)$.

Тепер, беручи до уваги (3.29) і використовуючи другу властивість для функцій із (3.30), можемо записати

$$\varepsilon_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}B(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\big) \gg \varepsilon_M\big(F_n, QC(\mathbb{T}^d)\big) \gg$$

$$\gg 2^{-nr_1} n^{-\frac{d-1}{\theta}} n^{\frac{d}{2}} = 2^{-nr_1} n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)} n^{\frac{1}{2}} \asymp M^{-r_1} (\log^{d-1} M)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}} \sqrt{\log M}.$$

Оцінку (3.28) встановлено.

Теорему 3.12 доведено.

З результатів теорем 3.8 та 3.12 легко одержати таке твердження.

Теорема 3.13. *Нехай* $2 \leqslant p \leqslant \infty$, $2 \leqslant \theta < \infty$, $r_1 > \frac{1}{2}$. *Тоді при* $d \geqslant 2$ *справедлива оцінка*

$$\varepsilon_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\big) \asymp M^{-r_1} (\log^{d-1} M)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}} \sqrt{\log M}. \tag{3.31}$$

Доведення. Оскільки для $1 \leqslant p < \infty$ має місце вкладення $S^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}B(\mathbb{T}^d) \subset S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, то, використовуючи оцінку (3.28), зокрема, і для $2 \leqslant p \leqslant \infty$, $2 \leqslant \theta < \infty$, $r_1 > \frac{1}{2}$, маємо

$$\varepsilon_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\big) \gg \varepsilon_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}B(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\big) \gg$$

$$\gg M^{-r_1}\big(\log^{d-1} M\big)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}\sqrt{\log M}. \tag{3.32}$$

Зіставляючи оцінку (3.32) з оцінкою (3.9) з теореми 3.8, одержуємо оцінку (3.31).

Теорему 3.13 доведено.

На завершення даного підрозділу зробимо декілька коментарів.

Одержані у теоремі 3.13 точні за порядком оцінки ентропійних чисел класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ у просторі $QC(\mathbb{T}^d)$ поширюють та доповнюють відповідні результати для класів Соболєва $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$ та Нікольського $S^{\boldsymbol{r}}_{p}H(\mathbb{T}^d)$, які наведені у твердженні 1.20.

Стосовно оцінок ентропійних чисел класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ у просторі $L_\infty(\mathbb{T}^d)$ зазначимо, що їхні точні за порядком оцінки відомі лише у двовимірному випадку $d = 2$ [202] і наведені у твердженнях 1.16 і 1.17.

Отже, співставивши оцінки (1.58) та (1.59) із тверджень 1.16 і 1.17 з результатом теореми 3.13 при $d = 2$ бачимо, що справедливе співвідношення:

$$\varepsilon_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^2), QC(\mathbb{T}^2)\big) \asymp \varepsilon_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^2), L_\infty(\mathbb{T}^2)\big) \asymp M^{-r_1}\big(\log M\big)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}},$$

$$2 \leqslant p \leqslant \infty,\ r_1 > \frac{1}{2},\ 2 \leqslant \theta < \infty.$$

Якщо ж співставити лише оцінку знизу з (1.59) із твердження 1.17 з результатом теореми 3.12 при $d = 2$ бачимо, що вони також однакові за порядком.

Однак питання про порядок величини $\varepsilon_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), L_\infty(\mathbb{T}^d)\big)$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, у випадку $d > 2$ залишається відкритим.

Порівняємо також результат теореми 3.13 з оцінкою величини $\varepsilon_M\big(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{T}^d), L_q(\mathbb{T}^d)\big)$ з твердження 1.18, для цього наведену там оцінку (1.60) запишемо при $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_1) \in \mathbb{R}^d_+$:

$$\varepsilon_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), L_q(\mathbb{T}^d)\big) \asymp M^{-r_1}(\log^{d-1} M)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}. \tag{3.33}$$

Отже, співставивши (3.31) і (3.33) виявляємо, що при виконанні умов теореми 3.13 на параметри p, θ і r_1 порядки величин $\varepsilon_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), L_q(\mathbb{T}^d)\big)$ і $\varepsilon_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\big)$ відрізняються множником $\sqrt{\log M}$.

3.3. Колмогоровські поперечники класів $S^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{B}(\mathbb{T}^{\boldsymbol{d}})$ у просторі квазінеперервних функцій

У даному підрозділі, як і в підрозділі 3.2, також будемо вважати, що вектор $\boldsymbol{r}$, який входить в означення класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ має вигляд $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_1) \in \mathbb{R}^d_+$.

Зауважимо також, що при встановленні оцінок колмогоровських поперечників будемо користуватися існуючим зв'язком між їхніми оцінками та оцінками ентропійних чисел класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$. Сформулюємо відповідне допоміжне твердження (див., наприклад, [179]), яке є наслідком однієї нерівності Карла (див. [164]).

Лема 3.14. *Нехай A — компакт у сепарабельному банаховому просторі $\mathfrak{X}$. Припустимо, що для пари чисел (a, b), $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, або $a = 0$, $b < 0$ виконуються співвідношення*

$$d_m\big(A, \mathfrak{X}\big) \ll m^{-a}(\log m)^b,$$

$$\varepsilon_m\big(A, \mathfrak{X}\big) \gg m^{-a}(\log m)^b.$$

Тоді

$$\varepsilon_m\big(A, \mathfrak{X}\big) \asymp d_m\big(A, \mathfrak{X}\big) \asymp m^{-a}(\log m)^b.$$

Як видно з даної леми, якщо вдається одержати оцінку зверху для колмогоровських поперечників і, відповідно, оцінку знизу для ентропійних чисел, то можна зробити висновок про точні за порядком оцінки як для колмогоровських поперечників так і ентропійних чисел.

Теорема 3.15. *Нехай $d \geqslant 2$, $2 \leqslant p \leqslant \infty$, $r_1 > \frac{1}{2}$. Тоді при $2 \leqslant \theta < \infty$ справджується оцінка*

$$d_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\big) \asymp M^{-r_1}\big(\log^{d-1} M\big)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}\sqrt{\log M}. \tag{3.34}$$

Доведення. Для встановлення оцінки (3.34) розглянемо спочатку випадок $p = 2$.

Для $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant d$, $\boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_d)$, $s_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1,d}$, $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ покладемо

$$Q_n = \bigcup_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\leqslant n} \rho(\boldsymbol{s}), \Delta Q_n = Q_n \backslash Q_{n-1}$$

і розглянемо множину вигляду

$$\mathfrak{N}_j = \Big\{\boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_d)\colon (\boldsymbol{s}, \mathbf{1}) = j,\ j \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Зазначимо, що для кількості елементів множини

$$\Delta Q_j = \bigcup_{\boldsymbol{s}\in\mathfrak{N}_j} \rho(\boldsymbol{s})$$

маємо $|\Delta Q_j| \asymp 2^j j^{d-1}$.

Далі підберемо число $l \in \mathbb{N}$ у відповідності зі співвідношенням $2^l l^{d-1} \asymp M$ і покладемо

$$M_j = \begin{cases} 2^j j^{d-1}, & d \leqslant j \leqslant l, \\ \big[2^{l\left(r_1+\frac{1}{2}\right)} l^{d-1} 2^{-j\left(r_1-\frac{1}{2}\right)}\big] + 1, & l < j < \alpha l, \\ 0, & j \geqslant \alpha l, \end{cases}$$

де

$$\alpha = \frac{r_1 + \frac{1}{2}}{r_1 - \frac{1}{2}}.$$

Переконаємося, що $\sum\limits_{j=d}^{\infty} M_j \ll M$ при $r_1 > \frac{1}{2}$. Маємо

$$\sum_{j=d}^{\infty} M_j \ll \sum_{j=d}^{l} 2^j j^{d-1} + \sum_{l<j<\alpha l} 2^{l\left(r_1+\frac{1}{2}\right)} l^{d-1} 2^{-j\left(r_1-\frac{1}{2}\right)} + \alpha l \ll$$

$$\ll 2^l l^{d-1} + 2^{l\left(r_1+\frac{1}{2}\right)} l^{d-1} \sum_{l<j<\alpha l} 2^{-j\left(r_1-\frac{1}{2}\right)} + \alpha l \ll$$

$$\ll 2^l l^{d-1} + 2^{l\left(r_1+\frac{1}{2}\right)} l^{d-1} 2^{-l\left(r_1-\frac{1}{2}\right)} + \alpha l =$$

$$= 2^l l^{d-1} + 2^l l^{d-1} + \alpha l \asymp 2^l l^{d-1} \asymp M.$$

Отже, нехай $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ і $\theta \in (2, \infty)$. Тоді, використовуючи спочатку нерівність Гельдера з показником $\frac{\theta}{2}$, а потім лему 3.9, маємо

$$\left\| \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathfrak{N}_j} \delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{T}^d)} = \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathfrak{N}_j} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T}^d)} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathfrak{N}_j} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T}^d)} \, 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathfrak{N}_j} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^{\theta}_{L_2(\mathbb{T}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathfrak{N}_j} 2^{-2(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\frac{\theta}{\theta-2}} \right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}} \leqslant$$

$$\ll \|f(\cdot)\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{T}^d)} \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathfrak{N}_j} 2^{-2(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\frac{\theta}{\theta-2}} \right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}} \ll 2^{-jr_1} j^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{3.35}$$

Тепер нехай $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{2,2}B(\mathbb{T}^d)$. Тоді можемо записати

$$\left\| \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathfrak{N}_j} \delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{T}^d)} = \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathfrak{N}_j} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T}^d)} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2^{-jr_1} \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathfrak{N}_j} 2^{2(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T}^d)} \right)^{\frac{1}{2}} \ll 2^{-jr_1} \|f(\cdot)\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{2,2}B(\mathbb{T}^d)} \leqslant 2^{-jr_1}. \tag{3.36}$$

Таким чином, для $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, $2 \leqslant \theta < \infty$, враховуючи (3.35) і (3.36), отримуємо

$$\Big\| \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathfrak{N}_j} \delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot) \Big\|_{L_2(\mathbb{T}^d)} \ll 2^{-jr_1} j^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{3.37}$$

Підмножину тригонометричних поліномів вигляду

$$\tau(f) = \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathfrak{N}_j} \delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot),$$

для яких виконується (3.37), позначимо $S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(j)$.

Далі нам знадобиться ще одне допоміжне твердження, яке випливає безпосередньо з означення колмогоровського поперечника.

Лема 3.16. *Нехай $\mathfrak{X}$ — банахів простір, $W, W_1, \ldots, W_l, \ldots$ — підмножини $\mathfrak{X}$ і $N_l \in \mathbb{Z}_+$. Тоді якщо*

$$\sum_l N_l \leqslant N \quad i \quad W \subset \bigcup_l W_l,$$

то

$$d_N\big(W, \mathfrak{X}\big) \leqslant \sum_l d_{N_l}(W_l, \mathfrak{X}). \tag{3.38}$$

Таким чином, використовуємо лему 3.16, записуємо

$$d_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\big) \ll \sum_{d\leqslant j<\alpha l} d_{M_j}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(j), QC(\mathbb{T}^d)\big) +$$

$$+ \sup_{f\in S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{T}^d)} \Big\| \sum_{(\boldsymbol{s},1)\geqslant\alpha l} \delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot) \Big\|_{QC(\mathbb{T}^d)} = I_3 + I_4 \tag{3.39}$$

Оцінимо спочатку доданок I_4. Для цього скористаємося твердженням 3.10.

Згідно з означенням та властивостями $QC(\mathbb{T}^d)$-норми, оцінками (3.37) і (3.15) при $p = 2$, для будь-якої $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ маємо

$$\Big\| \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathfrak{N}_j} \delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot) \Big\|_{QC(\mathbb{T}^d)} \ll 2^{\frac{j}{2}} j^{(d-1)\left(1-\frac{1}{2}\right)} \Big\| \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathfrak{N}_j} \delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot) \Big\|_{L_2(\mathbb{T}^d)} \ll$$

$$\ll 2^{\frac{j}{2}} j^{\frac{d-1}{2}} 2^{-jr_1} j^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)} = 2^{-j\left(r_1-\frac{1}{2}\right)} j^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}. \qquad (3.40)$$

Отже, враховуючи (3.40) і значення α, для величини I_4 можемо записати

$$I_4 = \sup_{f \in S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{T}^d)} \Bigg\| \sum_{(\boldsymbol{s},1) \geqslant \alpha l} \delta_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot) \Bigg\|_{QC(\mathbb{T}^d)} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{f \in S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{T}^d)} \Bigg\| \sum_{j=[\alpha l]+1}^{\infty} \sum_{\boldsymbol{s} \in \mathfrak{N}_j} \delta_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot) \Bigg\|_{QC(\mathbb{T}^d)} \ll$$

$$\ll \sup_{f \in S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{T}^d)} \sum_{j=[\alpha l]+1}^{\infty} \Bigg\| \sum_{\boldsymbol{s} \in \mathfrak{N}_j} \delta_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot) \Bigg\|_{QC(\mathbb{T}^d)} \ll \sum_{j=[\alpha l]+1}^{\infty} 2^{-j\left(r_1-\frac{1}{2}\right)} j^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} \ll$$

$$\ll 2^{-\alpha l\left(r_1-\frac{1}{2}\right)} (\alpha l)^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} \ll 2^{-l\left(r_1+\frac{1}{2}\right)} l^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}. \qquad (3.41)$$

Для оцінки доданка I_3 скористаємося допоміжним твердженням.

Нехай $\mathcal{T}(\Delta Q_n)_2$ позначає одиничну L_2-кулю у просторі поліномів $\mathcal{T}(\Delta Q_n)$.

Лема 3.17 ([179]). *Має місце оцінка*

$$d_M\big(\mathcal{T}(\Delta Q_n)_2, QC(\mathbb{T}^d)\big) \ll n^{\frac{1}{2}} (|\Delta Q_n|/M)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.42)$$

Попередньо зауважимо, що у відповідності з означенням чисел M_j виконується рівність

$$d_{M_j}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(j), QC(\mathbb{T}^d)\big) = 0, \;\; d \leqslant j \leqslant l.$$

Тому, використовуючи оцінку (3.42) і враховуючи вибір чисел M_j, маємо

$$I_3 = \sum_{d \leqslant j < \alpha l} d_{M_j}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(j), QC(\mathbb{T}^d)\big) = \sum_{l < j < \alpha l} d_{M_j}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(j), QC(\mathbb{T}^d)\big) \ll$$

$$\ll \sum_{j=l+1}^{[\alpha l]+1} j^{\frac{1}{2}} M_j^{-\frac{1}{2}} 2^{\frac{j}{2}} j^{\frac{d-1}{2}} 2^{-jr_1} j^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)} \ll$$

$$\ll 2^{-\frac{l}{2}\left(r_1+\frac{1}{2}\right)} l^{-\frac{d-1}{2}} \sum_{j=l+1}^{[\alpha l]+1} j^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{j}{2}} j^{\frac{d-1}{2}} 2^{\frac{j}{2}\left(r_1-\frac{1}{2}\right)} 2^{-jr_1} j^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)} =$$

$$= 2^{-\frac{l}{2}\left(r_1+\frac{1}{2}\right)}\, l^{-\frac{d-1}{2}} \sum_{j=l+1}^{[\alpha l]+1} 2^{-\frac{j}{2}\left(r_1-\frac{1}{2}\right)}\, j^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}\, j^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll 2^{-lr_1} l^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)} l^{\frac{1}{2}}. \tag{3.43}$$

Далі, підставляючи (3.41) і (3.43) в (3.39) і враховуючи, що $M \asymp 2^l l^{d-1}$, отримуємо

$$d_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\big) \ll 2^{-lr_1} l^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}\, l^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp M^{-r_1}\big(\log^{d-1} M\big)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}} \sqrt{\log M}. \tag{3.44}$$

У випадку $2 < p \leqslant \infty$ оцінка зверху для поперечника $d_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\big)$ є наслідком оцінки (3.44) згідно з вкладенням $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d) \subset S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, а саме:

$$d_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\big) \ll d_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\big) \ll$$

$$\ll M^{-r_1}\big(\log^{d-1} M\big)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}} \sqrt{\log M}. \tag{3.45}$$

Оцінку зверху в теоремі 3.15 встановлено.

Перейдемо до встановлення оцінки знизу в (3.34). З огляду на лему (3.14), для доведення оцінки знизу в теоремі 3.15 нам достатньо скористатися відповідною оцінкою для ентропійних чисел $\varepsilon_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\big)$.

Відповідно до теореми 3.13 для $2 \leqslant p \leqslant \infty$, $2 \leqslant \theta < \infty$, $r_1 > \frac{1}{2}$, маємо

$$\varepsilon_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\big) \gg M^{-r_1}(\log^{d-1} M)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}} \sqrt{\log M}. \tag{3.46}$$

Зіставляючи оцінку (3.46) з (3.45) і застосовуючи лему 3.14, одержуємо твердження теореми.

Теорему 3.15 доведено.

Зауважимо, що у теоремі 3.15 залишився не розглянутий, зокрема, випадок $1 \leqslant \theta < 2$. У наступному твердженні для цих значень параметра θ встановимо оцінку зверху для величин $d_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\big)$, $2 \leqslant p \leqslant \infty$, $r_1 > \frac{1}{2}$.

Теорема 3.18. *Нехай* $2 \leqslant p \leqslant \infty$, $r_1 > \frac{1}{2}$. *Тоді при* $1 \leqslant \theta < 2$ *і* $d \geqslant 2$ *справедлива оцінка*

$$d_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\big) \ll M^{-r_1}\big(\log^{d-1} M\big)^{r_1}\sqrt{\log M}. \tag{3.47}$$

Доведення. Оцінку (3.47) встановимо за схемою, яку було використано при доведенні оцінки зверху в теоремі 3.15. При цьому будемо використовувати всі позначення з теореми 3.15 і акцентуватимемо увагу на відмінностях, а саме, нам необхідно у співвідношенні (3.39) оцінити доданки I_3 та I_4 у випадку $1 \leqslant \theta < 2$.

Нехай $p = 2$ і $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, де $1 \leqslant \theta < 2$. Тоді, використовуючи нерівність (2.17), яку для зручності нагадаємо,

$$\left(\sum_k |a_k|^{v_2}\right)^{\frac{1}{v_2}} \leqslant \left(\sum_k |a_k|^{v_1}\right)^{\frac{1}{v_1}}, \ 0 < v_1 \leqslant v_2 < \infty,$$

враховуючи означення множини $\mathfrak{N}_j$, записуємо

$$\Bigg\|\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathfrak{N}_j}\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\Bigg\|_{L_2(\mathbb{T}^d)} = \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathfrak{N}_j}\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T}^d)}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-jr_1}\left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathfrak{N}_j}2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta}\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^{\theta}_{L_2(\mathbb{T}^d)}\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll 2^{-jr_1}\|f(\cdot)\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{T}^d)} \leqslant 2^{-jr_1}. \tag{3.48}$$

Далі з урахуванням співвідношення (3.48) для оцінки доданків I_3 та I_4 маємо

$$I_4 \ll 2^{-l\left(r_1+\frac{1}{2}\right)}l^{\frac{d-1}{2}} \tag{3.49}$$

і

$$I_3 \ll 2^{-lr_1}l^{\frac{1}{2}}. \tag{3.50}$$

Підставляючи (3.49) і (3.50) в (3.39), отримуємо

$$d_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\big) \ll M^{-r_1}\big(\log^{d-1} M\big)^{r_1}\sqrt{\log M}$$

і для $2 < p \leqslant \infty$ згідно з вкладенням $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d) \subset S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ маємо

$$d_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\big) \ll d_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\big) \ll$$
$$\ll M^{-r_1}\big(\log^{d-1} M\big)^{r_1}\sqrt{\log M}.$$

Теорему 3.18 доведено.

Зіставляючи оцінку для ентропійних чисел з теореми 3.13 з оцінкою для M-вимірного колмогоровського поперечника з теореми 3.15 сформулюємо загальну теорему.

Теорема 3.19. *При $d \geqslant 2$ і $2 \leqslant p \leqslant \infty$, $2 \leqslant \theta < \infty$, $r_1 > \frac{1}{2}$ справедливі оцінки*

$$\varepsilon_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\big) \asymp d_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), QC(\mathbb{T}^d)\big) \asymp$$
$$\asymp M^{-r_1}(\log^{d-1} M)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}\sqrt{\log M}. \tag{3.51}$$

На завершення даного підрозділу зробимо декілька коментарів.

Зазначимо, що встановлена у теоремі 3.15 точна за порядком оцінка M-вимірного колмогоровського поперечника у просторі $QC(\mathbb{T}^d)$ поширює відповідні результати для класів Соболєва $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\alpha}(\mathbb{T}^d)$ та Нікольського $S^{\boldsymbol{r}}_p H(\mathbb{T}^d)$, встановлені Б. С. Кашиним і В. М. Темляковим [179], які наведені у твердженні 1.21 на класи $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, $1 \leqslant \theta < \infty$.

Відмітимо також, що у двовимірному випадку встановлена у теоремі 3.15 оцінка M-вимірного колмогоровського поперечника класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^2)$ співпадає за порядком з відповідною оцінкою у просторі $L_\infty(\mathbb{T}^2)$ (твердження 1.16), яку, як зазначено вище, отримано у роботі [202], тобто справедливе співвідношення:

$$d_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^2), QC(\mathbb{T}^2)\big) \asymp d_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^2), L_\infty(\mathbb{T}^2)\big) \asymp M^{-r_1}(\log M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}},$$
$$2 \leqslant p \leqslant \infty,\ r_1 > \frac{1}{2},\ 2 \leqslant \theta < \infty.$$

Однак питання про порядок величини $d_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), L_\infty(\mathbb{T}^d)\big)$, $1 < \theta \leqslant \infty$, $1 \leqslant p < \infty$ у випадку $d > 2$ залишається відкритим.

Порівняємо також результат теореми 3.18 з оцінкою зверху величини $d_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{\infty,1}(\mathbb{T}^d), L_\infty(\mathbb{T}^d)\big)$ із твердження 1.19, для цього наведену там оцінку (1.61) запишемо при $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_1) \in \mathbb{R}^d_+$:

$$d_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{\infty,1}B(\mathbb{T}^d), L_\infty(\mathbb{T}^d)\big) \ll M^{-r_1}(\log^{d-1} M)^{r_1}. \tag{3.52}$$

Отже, співставивши (3.47) і (3.52) при виконанні відповідних умов на параметри p, θ і $\boldsymbol{r}$ виявляємо, що вони відрізняються множником $\sqrt{\log M}$.

3.4. Оцінки апроксимаційних характеристик класів $\boldsymbol{S^{r}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)}$ у просторі $\boldsymbol{B_{1,1}(\mathbb{T}^d)}$

Одержані у цій частині роботи результати стосуються оцінок величин $d^\perp_M\big(F, B_{1,1}\big)$ і $d^B_M\big(F, B_{1,1}\big)$, де F — класи $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ або $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$, $d \geqslant 1$.

Згідно з означенням просторів $B_{1,1}$ та співвідношенням (1.54) зрозуміло, що аналогічне до (1.47) співвідношення має місце і у просторі $B_{1,1}(\mathbb{T}^d)$, тобто

$$d_M\big(F, B_{1,1}(\mathbb{T}^d)\big) \leqslant d^B_M\big(F, B_{1,1}(\mathbb{T}^d)\big) \leqslant d^\perp_M\big(F, B_{1,1}(\mathbb{T}^d)\big). \tag{3.53}$$

3.4.1. Апроксимаційні характеристики класів функцій однієї змінної

Справедливим є таке твердження.

Теорема 3.20. *Нехай $d = 1$, $1 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ і $r > 0$. Тоді виконуються співвідношення*

$$d^\perp_M\big(S^r_{p,\theta}B(\mathbb{T}), B_{1,1}\big) \asymp d^B_M\big(S^r_{p,\theta}B(\mathbb{T}), B_{1,1}\big) \asymp M^{-r}. \tag{3.54}$$

Доведення. Попередньо зауважимо, що згідно зі співвідношенням (3.53) для доведення (3.54) достатньо встановити оцінку зверху для ортопоперечника $d^\perp_M\big(S^r_{p,\theta}B(\mathbb{T}), B_{1,1}\big)$, $1 < p < \infty$, а знизу — для величини $d^B_M\big(S^r_{p,\theta}B(\mathbb{T}), B_{1,1}\big)$.

Крім того, оскільки $S^r_{\infty,\theta}B(\mathbb{T}) \subset S^r_{p,\theta}B(\mathbb{T}) \subset S^r_pH(\mathbb{T})$, $1<p<\infty$, оцінку зверху достатньо отримати для ортопоперечника $d^{\perp}_M\big(S^r_pH(\mathbb{T}), B_{1,1}\big)$. Отже, нехай $M \in \mathbb{N}$, $M \geqslant 4$ і $f \in S^r_pH(\mathbb{T})$, $1<p<\infty$. Розглянемо наближення функції f за допомогою поліномів $t_n(f,\cdot)$ вигляду

$$t_n(f,\cdot) = \sum_{s=1}^{n} \delta_s(f,\cdot),$$

де число $n \in \mathbb{N}$ пов'язане з M співвідношенням $2^{n+1} \leqslant M \leqslant 2^{n+2}$. Тоді згідно з означенням норми у просторі $B_{1,1}$, беручи до уваги властивість згортки (3.8), одержуємо

$$\|f(\cdot)-t_n(f,\cdot)\|_{B_{1,1}} = \Bigg\| \sum_{s=n+1}^{\infty} \delta_s(f,\cdot) \Bigg\|_{B_{1,1}} =$$

$$= \sum_{s\in\mathbb{N}} \Bigg\| A_s(\cdot) * \sum_{s'=n+1}^{\infty} \delta_{s'}(f,\cdot) \Bigg\|_{L_1(\mathbb{T})} \leqslant \sum_{s=n}^{\infty} \Bigg\| A_s(\cdot) * \sum_{s'=s-1}^{s+1} \delta_{s'}(f,\cdot) \Bigg\|_{L_p(\mathbb{T})} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=n}^{\infty} \|A_s(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})} \Bigg\| \sum_{s'=s-1}^{s+1} \delta_{s'}(f,\cdot) \Bigg\|_{L_p(\mathbb{T})} = J_1. \tag{3.55}$$

Для продовження оцінки величини J_1 зазначимо, що згідно зі співвідношенням $\|V_{2^s}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})} \leqslant C_1$ (див., наприклад, [227, гл. 1, § 1]) маємо

$$\|A_s(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})} = \|V_{2^s}(\cdot) - V_{2^{s-1}}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})} \leqslant$$

$$\leqslant \|V_{2^s}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})} + \|V_{2^{s-1}}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})} \leqslant C_2. \tag{3.56}$$

Крім того, беручи до уваги, що (див., наприклад, [227, гл. 1, § 3])

$$\|\delta_{s'}(f,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{T})} \ll 2^{-s'r_1}, \quad s' \in \mathbb{N},$$

можемо записати

$$\Bigg\| \sum_{s'=s-1}^{s+1} \delta_{s'}(f,\cdot) \Bigg\|_{L_p(\mathbb{T})} \leqslant \sum_{s'=s-1}^{s+1} \|\delta_{s'}(f,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{T})} \ll$$

$$\ll \sum_{s'=s-1}^{s+1} 2^{-s'r} \ll 2^{-sr}. \tag{3.57}$$

Отже, з (3.55) із урахуванням (3.56), (3.57) випливає, що

$$J_1 \ll \sum_{s=n}^{\infty} 2^{-sr} \ll 2^{-nr},$$

з огляду на співвідношення між числами M і n приходимо до оцінок

$$d_M^B\big(S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}), B_{1,1}\big) \leqslant d_M^{\perp}\big(S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}), B_{1,1}\big) \ll M^{-r}.$$

Оцінка знизу величини $d_M^B\big(S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}), B_{1,1}\big)$ випливає з теореми 1.22 при $d = 1$ згідно з нерівністю (1.54), а саме $\|\cdot\|_{B_{1,1}} \gg \|\cdot\|_{L_1(\mathbb{T})}$.

Теорему 3.20 доведено.

Як наслідок одержаного результату і відомих оцінок величин $d_M^B\big(W_{p,\alpha}^r(\mathbb{T}), L_1(\mathbb{T})\big)$ [120] сформулюємо відповідне теоремі 3.20 твердження для класів $W_{p,\alpha}^r(\mathbb{T})$.

Теорема 3.21. *Нехай $d = 1$, $1 < p \leqslant \infty$, $r > 0$. Тоді при $\alpha \in \mathbb{R}$ справджуються співвідношення*

$$d_M^{\perp}\big(W_{p,\alpha}^r(\mathbb{T}), B_{1,1}\big) \asymp d_M^B\big(W_{p,\alpha}^r(\mathbb{T}), B_{1,1}\big) \asymp M^{-r}. \tag{3.58}$$

Доведення. Оцінки зверху в (3.58) для обох величин випливають з теореми 3.20 при $\theta = \infty$, згідно з вкладенням $W_{p,\alpha}^r(\mathbb{T}) \subset S_p^r H(\mathbb{T})$. Відповідна оцінка знизу для величини $d_M^B\big(W_{p,\alpha}^r(\mathbb{T}), B_{1,1}\big)$, $1 < p \leqslant \infty$, є наслідком оцінки [120]:

$$d_M^B\big(W_{p,\alpha}^r(\mathbb{T}), L_1(\mathbb{T})\big) \asymp M^{-r}$$

і співвідношення (1.54).

Теорему 3.21 доведено.

У теоремах 3.20, 3.21 залишився не розглянутим випадок $p = 1$, для якого вдалося встановити тільки порядки величин $d_M^B\big(S_{1,\theta}^r B(\mathbb{T}), B_{1,1}\big)$ і $d_M^B\big(W_{1,\alpha}^r(\mathbb{T}), B_{1,1}\big)$.

Справедливим є таке твердження.

Теорема 3.22. *Нехай $d=1$, $r>0$, $1\leqslant\theta\leqslant\infty$. Тоді*

$$d_M^B\big(S^r_{1,\theta}B(\mathbb{T}), B_{1,1}\big)\asymp M^{-r}. \tag{3.59}$$

Доведення. Як і при доведенні теореми 3.20, оцінку зверху достатньо одержати для класів $S^r_1H(\mathbb{T})$. Розглянемо наближення функцій $f\in S^r_1H(\mathbb{T})$ тригонометричними поліномами вигляду

$$\tilde{t}_n(f,\cdot)=\sum_{s=1}^{n-1}A_s(f,\cdot),$$

де число $n\in\mathbb{N}$ пов'язане з M співвідношенням $2^n\leqslant M\leqslant 2^{n+1}$. При означенні досліджуваної величини у підпункті 1.2.2 було зазначено, що оператор G, який ставить у відповідність функції f поліном такого вигляду належить $L_M(1)_2$.

Отже, згідно з означенням норми у просторі $B_{1,1}$ можемо записати

$$\|f(\cdot)-\tilde{t}_n(f,\cdot)\|_{B_{1,1}}=\left\|\sum_{s=n}^{\infty}A_s(f,\cdot)\right\|_{B_{1,1}}=$$

$$=\sum_{s\in\mathbb{N}}\left\|A_s(\cdot)*\sum_{s'=n}^{\infty}A_{s'}(f,\cdot)\right\|_{L_1(\mathbb{T})}\leqslant\sum_{s=n-1}^{\infty}\left\|A_s(\cdot)*\sum_{s'=s-1}^{s+1}A_{s'}(f,\cdot)\right\|_{L_1(\mathbb{T})}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{s=n-1}^{\infty}\|A_s(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})}\left\|\sum_{s'=s-1}^{s+1}A_{s'}(f,\cdot)\right\|_{L_1(\mathbb{T})}\ll\sum_{s=n-1}^{\infty}\sum_{s'=s-1}^{s+1}\|A_{s'}(f,\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})}\ll$$

$$\ll\sum_{s=n-2}^{\infty}\|A_s(f,\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})}\ll\sum_{s=n-2}^{\infty}2^{-sr}\ll 2^{-nr}.$$

Враховуючи співвідношення між числами M і n одержуємо

$$d_M^B\big(S^r_{1,\theta}B(\mathbb{T}), B_{1,1}\big)\ll M^{-r}.$$

Оцінка знизу в (3.59) випливає з теореми 1.23 згідно зі співвідношенням (1.54).

Теорему 3.22 доведено.

Аналогічне твердження справедливе і для класів $W^r_{1,\alpha}(\mathbb{T})$.

Теорема 3.23. *Нехай $d = 1$, $r > 0$. Тоді при $\alpha \in \mathbb{R}$*
$$d_M^B\big(W_{1,\alpha}^r(\mathbb{T}), B_{1,1}\big) \asymp M^{-r}. \qquad (3.60)$$

Доведення. Оцінка зверху в (3.60) випливає з теореми 3.22 при $\theta = \infty$ згідно з вкладенням $W_{1,\alpha}^r(\mathbb{T}) \subset S_1^r H(\mathbb{T})$. Відповідна оцінка знизу є наслідком твердження 1.26 та співвідношення (1.54).

Теорему 3.23 доведено.

Прокоментуємо результати, які одержано у підпункті 3.4.1.

Насамперед зазначимо, що розглянуті апроксимаційні характеристики класів $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T})$, $1 \leqslant \theta < \infty$, $S_p^r H(\mathbb{T})$ і $W_{p,\alpha}^r(\mathbb{T})$ у просторі $B_{1,1}$ однакові за порядком. Більше того, ці характеристики мають такі ж порядки й у просторі $L_1(\mathbb{T})$ (твердження 1.22, 1.23, 1.26 при $d = 1$). Крім того, в усіх розглянутих випадках одержані оцінки не залежать від значення параметрів p і θ.

3.4.2. Апроксимаційні характеристики класів функцій багатьох змінних

У цьому підпункті встановимо точні за порядком оцінки розглянутих у підпункті 3.4.1 апроксимаційних характеристик, але вже у багатовимірному випадку ($d \geqslant 2$).

Справедливим є таке твердження.

Теорема 3.24. *Нехай $d \geqslant 2$, $1 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. Тоді при $r_1 > 0$ виконуються співвідношення*
$$d_M^{\perp}\big(S_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{T}^d), B_{1,1}\big) \asymp d_M^B\big(S_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{T}^d), B_{1,1}\big) \asymp$$
$$\asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}. \qquad (3.61)$$

Доведення. Як зазначено при доведенні теореми 3.20 згідно з (3.53) оцінку зверху достатньо встановити для ортопоперечника $d_M^{\perp}\big(S_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{T}^d), B_{1,1}\big)$, $1 < p < \infty$, а знизу — для величини $d_M^B\big(S_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{T}^d), B_{1,1}\big)$, $1 < p \leqslant \infty$.

Отже, нехай числа M і $n \in \mathbb{N}$, пов'язані співвідношенням $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$. Розглянемо для $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, $1 < p < \infty$, наближаючий поліном

$$S_{Q_n^{\gamma'}}(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma'})<n} \delta_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}),$$

який називають східчасто-гіперболічною сумою Фур'є функції f. Тоді, поклавши $\boldsymbol{\gamma'}(d) = \gamma'_1 + \ldots + \gamma'_d$, згідно з означенням норми у просторі $B_{1,1}$ і властивістю згортки можемо записати

$$\Big\| f(\cdot) - \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma'})<n} \delta_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot) \Big\|_{B_{1,1}} = \Big\| \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma'})\geqslant n} \delta_s(f, \cdot) \Big\|_{B_{1,1}} =$$

$$= \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d} \Big\| A_{\boldsymbol{s}}(\cdot) * \sum_{\substack{\boldsymbol{s'}\in\mathbb{N}^d \\ (\boldsymbol{s'},\boldsymbol{\gamma'})\geqslant n}} \delta_{\boldsymbol{s'}}(f, \cdot) \Big\|_{L_1(\mathbb{T}^d)} \leqslant \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d} \Big\| A_{\boldsymbol{s}}(\cdot) * \sum_{\substack{\boldsymbol{s'}\in\mathbb{N}^d \\ (\boldsymbol{s'},\boldsymbol{\gamma'})\geqslant n}} \delta_{\boldsymbol{s'}}(f, \cdot) \Big\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma'})\geqslant n-\boldsymbol{\gamma'}(d)} \Big\| A_{\boldsymbol{s}}(\cdot) * \sum_{\substack{\boldsymbol{s'}\in\mathbb{N}^d \\ \|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s'}\|_\infty\leqslant 1}} \delta_{\boldsymbol{s'}}(f, \cdot) \Big\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma'})\geqslant n-\boldsymbol{\gamma'}(d)} \|A_{\boldsymbol{s}}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T}^d)} \Big\| \sum_{\substack{\boldsymbol{s'}\in\mathbb{N}^d \\ \|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s'}\|_\infty\leqslant 1}} \delta_{\boldsymbol{s'}}(f, \cdot) \Big\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} \ll$$

$$\ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma'})\geqslant n-\boldsymbol{\gamma'}(d)} \sum_{\substack{\boldsymbol{s'}\in\mathbb{N}^d \\ \|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s'}\|_\infty\leqslant 1}} \|\delta_{\boldsymbol{s'}}(f, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma'})\geqslant n-2\boldsymbol{\gamma'}(d)} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} = J_2. \qquad (3.62)$$

Для подальшої оцінки величини J_2 розглянемо три випадки.

Нехай $1 < \theta < \infty$. Тоді, застосовуючи до J_2 нерівність Гельдера з показником θ, можемо записати

$$J_2 = \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma'})\geqslant n-2\boldsymbol{\gamma'}(d)} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{T}^d)}\, 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\geqslant n-2\boldsymbol{\gamma}'(d)} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{T}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\geqslant n-2\boldsymbol{\gamma}'(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta'} \right)^{\frac{1}{\theta'}} \ll$$

$$\ll \|f(\cdot)\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\geqslant n-2\boldsymbol{\gamma}'(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta'} \right)^{\frac{1}{\theta'}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\geqslant n-2\boldsymbol{\gamma}'(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})r_1\theta'} \right)^{\frac{1}{\theta'}}.$$

Далі, використовуючи лему 2.4, отримуємо

$$J_2 \ll 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(1-\frac{1}{\theta})} \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}},$$

і з огляду на (3.62) приходимо до шуканої оцінки.

Нехай $\theta = 1$. Тоді величина J_2 оцінюється таким чином:

$$J_2 = \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\geqslant n-2\boldsymbol{\gamma}'(d)} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})r_1} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\geqslant n-2\boldsymbol{\gamma}'(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')r_1} \|f(\cdot)\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,1}B(\mathbb{T}^d)} \ll 2^{-nr_1} \asymp$$

$$\asymp M^{-r_1} \big(\log^{\nu-1} M\big)^{r_1}. \tag{3.63}$$

Із (3.62) і (3.63) випливає шукана оцінка зверху при $\theta = 1$.

Якщо ж $\theta = \infty$, то врахувавши, що для $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}B(\mathbb{T}^d)$ справджується співвідношення $\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} \ll 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})}$, $\boldsymbol{s} \in \mathbb{N}^d$, скориставшись лемою 2.4 маємо

$$J_2 \ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\geqslant n-2\boldsymbol{\gamma}'(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} = \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\geqslant n-2\boldsymbol{\gamma}'(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})r_1} \ll$$

$$\ll 2^{-nr_1} n^{\nu-1} \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1+1}. \tag{3.64}$$

Поєднуючи (3.62) і (3.64), приходимо до шуканої оцінки.

Отже, оцінку зверху для ортопоперечника $d^{\perp}_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), B_{1,1}\big)$ при $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ і $1 < p < \infty$ доведено.

Якщо ж $p=\infty$, то оцінка зверху величини $d_M^{\perp}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}B(\mathbb{T}^d),B_{1,1}\big)$, згідно з вкладенням $S^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}B(\mathbb{T}^d)\subset S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, $1<p<\infty$, є наслідком щойно одержаної оцінки.

Що стосується оцінки знизу величини $d_M^{B}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d),B_{1,1}\big)$, то, згідно із співвідношенням 1.48, вона є наслідком твердження 1.24, оскільки

$$d_M^{B}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d),B_{1,1}\big)\geqslant d_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d),B_{1,1}\big)\asymp M^{-r_1}\big(\log^{\nu-1}M\big)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}.$$

Теорему 3.24 доведено.

Наступне твердження містить аналогічні теоремі 3.24 результати для класів $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$.

Теорема 3.25. *Нехай $d\geqslant 2$, $1<p\leqslant\infty$, $r_1>0$. Тоді при $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^d$ справедливі співвідношення*

$$d_M^{\perp}\big(W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d),B_{1,1}\big)\asymp d_M^{B}\big(W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d),B_{1,1}\big)\asymp M^{-r_1}\big(\log^{\nu-1}M\big)^{r_1+\frac{1}{2}}. \tag{3.65}$$

Доведення. Оцінки знизу в (3.65) є наслідком твердження 1.25, оскільки

$$d_M^{B}\big(W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d),B_{1,1}\big)\geqslant d_M\big(W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d),B_{1,1}\big).$$

Відповідну оцінку зверху для ортопоперечника $d_M^{\perp}\big(W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d),B_{1,1}\big)$ одержимо, скориставшись результатом теореми 3.24.

Нехай $p\in(1,2]$. Тоді, беручи до уваги, що $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)\subset S^{\boldsymbol{r}}_{p,2}B(\mathbb{T}^d)$, згідно з (3.61) при $\theta=2$ записуємо

$$d_M^{\perp}\big(W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d),B_{1,1}\big)\ll d_M^{\perp}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,2}B(\mathbb{T}^d),B_{1,1}\big)\asymp M^{-r_1}\big(\log^{\nu-1}M\big)^{r_1+\frac{1}{2}}. \tag{3.66}$$

Якщо ж $p\in(2,\infty)$, то, використовуючи (3.66), маємо

$$d_M^{\perp}\big(W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d),B_{1,1}\big)\ll d_M^{\perp}\big(W^{\boldsymbol{r}}_{2,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d),B_{1,1}\big)\ll M^{-r_1}\big(\log^{\nu-1}M\big)^{r_1+\frac{1}{2}}.$$

Теорему 3.25 доведено.

Проаналізувавши доведення та співставивши одержані в теоремі 3.25 оцінки при $\theta=2$ з оцінками теореми 3.24 бачимо, що на класах $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$

і $S^{\boldsymbol{r}}_{p,2}B(\mathbb{T}^d)$ вони однакові за порядком. Крім того зазначимо, що встановлені у цих теоремах оцінки не залежать від значення параметра p.

На завершення цього пункту встановимо точні за порядком значення величин $d^B_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d), B_{1,1}\big)$ і $d^B_M\big(W^{\boldsymbol{r}}_{1,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d), B_{1,1}\big)$.

Теорема 3.26. *Нехай $r_1 > 0$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. Тоді при $d \geqslant 2$*

$$d^B_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d), B_{1,1}\big) \asymp M^{-r_1}\big(\log^{\nu-1} M\big)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}. \tag{3.67}$$

Доведення. Для встановлення оцінки зверху підберемо число $n \in \mathbb{N}$ зі співвідношення $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$ і розглянемо для функції $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ наближаючий поліном вигляду

$$\bar{t}_n(f, \cdot) = \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')<n} A_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot).$$

Як зазначалося вище, оператор G, який ставить у відповідність функції f поліном такого вигляду належить $L_M(1)_2$. Тому використовуючи оцінку [88]

$$\|f(\cdot) - \bar{t}_n(f, \cdot)\|_{B_{1,1}} \ll 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)},$$

де число $n \in \mathbb{N}$ задовольняє умові $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$, можемо записати

$$d^B_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d), B_{1,1}\big) \ll M^{-r_1}\big(\log^{\nu-1} M\big)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}.$$

Оцінка знизу в (3.67) є наслідком теореми 1.23.

Теорему 3.26 доведено.

Аналог теореми 3.26 для класів $W^{\boldsymbol{r}}_{1,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$ має такий вигляд.

Теорема 3.27. *Нехай $r_1 > 0$. Тоді при $d \geqslant 2$ і $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$*

$$d^B_M\big(W^{\boldsymbol{r}}_{1,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d), B_{1,1}\big) \asymp M^{-r_1}\big(\log^{\nu-1} M\big)^{r_1+1}. \tag{3.68}$$

Доведення. Оцінка зверху в (3.68) випливає з теореми 3.26 при $\theta = \infty$, оскільки $W^{\boldsymbol{r}}_{1,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d) \subset S^{\boldsymbol{r}}_1 H(\mathbb{T}^d)$. Відповідна оцінка знизу є наслідком теореми 1.26.

Теорему 3.27 доведено.

Прокоментуємо результати одержані у теоремах 3.24 — 3.27.

У багатовимірному випадку ($d \geqslant 2$), на відміну від одновимірного, одержані оцінки розглянутих апроксимаційних характеристик класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, $1 \leqslant \theta < \infty$, у просторі $B_{1,1}$ залежать від значення параметра θ. Крім цього, в результаті проведених досліджень величин $d^B_M\big(W^{\boldsymbol{r}}_{1,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d), B_{1,1}\big)$ і $d^B_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_1 H(\mathbb{T}^d), B_{1,1}\big)$ виявлено, що для них справедливе співвідношення

$$d^B_M\big(W^{\boldsymbol{r}}_{1,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d), B_{1,1}\big) \asymp d^B_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_1 H(\mathbb{T}^d), B_{1,1}\big).$$

З іншого боку, при $1 \leqslant \theta < \infty$

$$d^B_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d), B_{1,1}\big) \asymp d^B_M\big(F^{\boldsymbol{r}}_1, B_{1,1}\big)\big(\log^{\nu-1} M\big)^{-\frac{1}{\theta}},$$

де $F^{\boldsymbol{r}}_1 = W^{\boldsymbol{r}}_{1,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$ або $F^{\boldsymbol{r}}_1 = S^{\boldsymbol{r}}_1 H(\mathbb{T}^d)$.

Варто зазначити, що на всіх трьох класах $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, $W^{\boldsymbol{r}}_{1,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$ і $S^{\boldsymbol{r}}_1 H(\mathbb{T}^d)$ згадані апроксимаційні характеристики у просторах $L_1(\mathbb{T}^d)$ і $B_{1,1}$ відповідно мають однакові порядки. Що стосується цих характеристик, а також ортопоперечників класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$ і $S^{\boldsymbol{r}}_p H(\mathbb{T}^d)$, $1 < p \leqslant \infty$, у просторі $B_{1,1}$, то у більшості випадків вони відрізняються за порядком від відповідних апроксимаційних характеристик у просторі $L_1(\mathbb{T}^d)$ (див. твердження 1.22, теореми 3.24, 3.25, а також теореми 4.1, 4.1′ [120]).

Більш наочно сказане вище при $d \geqslant 2$, проаналізувавши та співставивши відповідні результати, схематично можна відобразити наступним чином.

Для $1 < p \leqslant \infty$ маємо

$$d^{\perp}_M \begin{pmatrix} S^{\boldsymbol{r}}_{p,1}B(\mathbb{T}^d), L_1 \\ S^{\boldsymbol{r}}_{p,1}B(\mathbb{T}^d), B_{1,1} \\ W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d), L_1 \end{pmatrix} \asymp d^B_M \begin{pmatrix} S^{\boldsymbol{r}}_{p,1}B(\mathbb{T}^d), L_1 \\ S^{\boldsymbol{r}}_{p,1}B(\mathbb{T}^d), B_{1,1} \\ W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d), L_1 \end{pmatrix} \asymp M^{-r_1}\big(\log^{\nu-1} M\big)^{r_1},$$

тобто для розглянутих класів функцій досліджувані апроксимаційні характеристики у просторах $L_1(\mathbb{T}^d)$ і $B_{1,1}$ рівні за порядком лише при $\theta = 1$.

В інших ситуаціях маємо:

— при $p \geqslant 2$ і $\theta > 2$

$$\begin{matrix} d_M^{\perp} \\ d_M^{B} \end{matrix} \big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), L_1\big) \asymp \begin{matrix} d_M^{\perp} \\ d_M^{B} \end{matrix} \big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), B_{1,1}\big)\big(\log^{\nu-1} M\big)^{-\frac{1}{2}}$$

і, крім того, при $\theta = \infty$ можемо записати

$$\begin{matrix} d_M^{\perp} \\ d_M^{B} \end{matrix} \big(S^{\boldsymbol{r}}_{p}H(\mathbb{T}^d), L_1\big) \asymp \begin{matrix} d_M^{\perp} \\ d_M^{B} \end{matrix} \big(W^{\boldsymbol{r}}_{p,\alpha}(\mathbb{T}^d), B_{1,1}\big) \asymp M^{-r_1}\big(\log^{\nu-1} M\big)^{r_1+\frac{1}{2}};$$

— при $1 < p < 2$, $\theta > p$

$$\begin{matrix} d_M^{\perp} \\ d_M^{B} \end{matrix} \big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), L_1\big) \asymp \begin{matrix} d_M^{\perp} \\ d_M^{B} \end{matrix} \big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), B_{1,1}\big)\big(\log^{\nu-1} M\big)^{-1+\frac{1}{p}};$$

— при $1 < p < 2$, $\theta \leqslant p$ і $p \geqslant 2$, $1 < \theta \leqslant 2$

$$\begin{matrix} d_M^{\perp} \\ d_M^{B} \end{matrix} \big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), L_1\big) \asymp \begin{matrix} d_M^{\perp} \\ d_M^{B} \end{matrix} \big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d), B_{1,1}\big)\big(\log^{\nu-1} M\big)^{-1+\frac{1}{\theta}};$$

— для усіх $1 < p \leqslant \infty$ справедливе співвідношення

$$\begin{matrix} d_M^{\perp} \\ d_M^{B} \end{matrix} \big(W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d), L_1\big) \asymp \begin{matrix} d_M^{\perp} \\ d_M^{B} \end{matrix} \big(W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d), B_{1,1}\big)\big(\log^{\nu-1} M\big)^{-\frac{1}{2}}.$$

3.5. Оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $\boldsymbol{S^{r}_{1,\theta}B}(\mathbb{T}^{\boldsymbol{d}})$ і $\boldsymbol{W^{r}_{1,\alpha}}(\mathbb{T}^{\boldsymbol{d}})$ у просторі $\boldsymbol{B_{\infty,1}}(\mathbb{T}^{\boldsymbol{d}})$

3.5.1. Оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів функцій однієї змінної

Справедливою є така теорема.

Теорема 3.28. *Нехай $d = 1$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ і $r > 1$. Тоді*

$$e_M^{\perp}\big(S^{r}_{1,\theta}B(\mathbb{T})\big)_{B_{\infty,1}} \asymp M^{-r+1}. \tag{3.69}$$

Доведення. Встановимо в (3.69) оцінку зверху. Попередньо зауважимо, що внаслідок вкладення $S^r_{1,\theta}B(\mathbb{T}) \subset S^r_1 H(\mathbb{T})$, $1 \leqslant \theta < \infty$, її достатньо отримати при $\theta = \infty$, тобто для класів $S^r_1 H(\mathbb{T})$.

Отже, нехай $M \in \mathbb{N}$ і $f \in S^r_1 H(\mathbb{T})$. Розглянемо наближення функції f за допомогою поліномів вигляду (3.6), де число n пов'язане з M співвідношенням $2^n \leqslant M \leqslant 2^{n+1}$. Тоді згідно з означенням норми у просторі $B_{\infty,1}$, беручи до уваги властивість згортки, отримуємо

$$e^{\perp}_M(f)_{B_{\infty,1}} \ll \|f(\cdot) - S_{2^n}(f,\cdot)\|_{B_{\infty,1}} = \left\| \sum_{s=n+1}^{\infty} \delta_s(f,\cdot) \right\|_{B_{\infty,1}} =$$

$$= \sum_{s=n+1}^{\infty} \left\| A_s(\cdot) * \sum_{s'=s-1}^{s+1} \delta_{s'}(f,\cdot) \right\|_{L_\infty(\mathbb{T})} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=n+1}^{\infty} \|A_s(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})} \left\| \sum_{s'=s-1}^{s+1} \delta_{s'}(f,\cdot) \right\|_{L_\infty(\mathbb{T})} = J_3. \tag{3.70}$$

Для продовження оцінювання величини J_3 зазначимо, що згідно зі співвідношенням $\|V_{2^s}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})} \leqslant C_3$, $C_3 > 0$ (див., наприклад, [227, гл. 1, § 1]), маємо

$$\|A_s(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})} = \|V_{2^s}(\cdot) - V_{2^{s-1}}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})} \leqslant$$

$$\leqslant \|V_{2^s}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})} + \|V_{2^{s-1}}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})} \leqslant C_4, \qquad C_4 > 0.$$

Тому для величини J_3 одержуємо оцінку

$$J_3 \ll \sum_{s=n+1}^{\infty} \left\| \sum_{s'=s-1}^{s+1} \delta_{s'}(f,\cdot) \right\|_{L_\infty(\mathbb{T})} \leqslant \sum_{s=n+1}^{\infty} \sum_{s'=s-1}^{s+1} \|\delta_{s'}(f,\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{T})} \ll$$

$$\ll \sum_{s=n}^{\infty} \|\delta_s(f,\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{T})} = \sum_{s=n}^{\infty} \left\| \delta_s \left(\sum_{s'=s-1}^{s+1} A_{s'}(f,\cdot) \right) \right\|_{L_\infty(\mathbb{T})} = J_4. \tag{3.71}$$

Далі, враховуючи, що норма оператора $\delta_s\colon \delta_s f = \delta_s(f,\cdot)$, як оператора з $L_1(\mathbb{T})$ в $L_\infty(\mathbb{T})$ не перевищує за порядком 2^s, продовжуємо оцінювання величини J_4:

$$J_4 \ll \sum_{s=n}^{\infty} 2^s \left\| \sum_{s'=s-1}^{s+1} A_{s'}(f,\cdot) \right\|_{L_1(\mathbb{T})} \leqslant \sum_{s=n}^{\infty} 2^s \sum_{s'=s-1}^{s+1} \|A_{s'}(f,\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})} = J_5.$$

Беручи до уваги, що для функції $f \in S_1^r H(\mathbb{T})$ виконується співвідношення (1.43) при $p=1$, тобто $\|A_{s'}(f,\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})} \ll 2^{-s'r}$, можемо записати

$$J_5 \ll \sum_{s=n}^{\infty} 2^s \sum_{s'=s-1}^{s+1} 2^{-s'r} \ll \sum_{s=n}^{\infty} 2^s 2^{-sr} = \sum_{s=n}^{\infty} 2^{-s(r-1)} \ll 2^{-n(r-1)}. \qquad (3.72)$$

Отже, враховуючи (3.70) – (3.72), а також співвідношення між числами M і n, отримуємо оцінку

$$e_M^{\perp}\big(S_{1,\theta}^r B(\mathbb{T})\big)_{B_{\infty,1}} \ll M^{-r+1}.$$

Оцінку зверху встановлено.

Щодо оцінки знизу в (3.69) зауважимо, що вона є наслідком твердження 1.27 за умови $p=1$ і $\nu=1$, оскільки, згідно зі співвідношенням (1.55), можемо записати

$$e_M^{\perp}\big(S_{1,\theta}^r B(\mathbb{T})\big)_{B_{\infty,1}} \gg e_M^{\perp}\big(S_{1,\theta}^r B(\mathbb{T})\big)_{L_\infty(\mathbb{T})} \asymp M^{-r+1}.$$

Теорему 3.28 доведено.

Наслідок 3.29. *Нехай $d=1$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ і $r>1$. Тоді*

$$\mathcal{E}_{2^n}\big(S_{1,\theta}^r B(\mathbb{T})\big)_{B_{\infty,1}} \asymp 2^{-n(r-1)}. \qquad (3.73)$$

Оцінку зверху в (3.73) встановлено при доведенні теореми 3.28. Відповідна оцінка знизу також є наслідком цієї теореми, оскільки при $2^n \leqslant M \leqslant 2^{n+1}$ маємо

$$\mathcal{E}_{2^n}\big(S_{1,\theta}^r B(\mathbb{T})\big)_{B_{\infty,1}} \gg e_M^{\perp}\big(S_{1,\theta}^r B(\mathbb{T})\big)_{B_{\infty,1}} \asymp 2^{-n(r-1)}.$$

Зауваження 3.30. Проаналізувавши доведення теореми 3.28 і наслідку 3.29, а також співставивши одержані в них оцінки з відповідними результатами, які наведені у твердженнях 1.27 і 3.4, можемо зробити висновок, що при $d=1$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ і $r>1$ справджуються співвідношення:

$$e_M^{\perp}\big(S^r_{1,\theta}B(\mathbb{T})\big)_{B_{\infty,1}} \asymp e_M^{\perp}\big(S^r_{1,\theta}B(\mathbb{T})\big)_{L_\infty(\mathbb{T})};$$

$$\mathcal{E}_{2^n}\big(S^r_{1,\theta}B(\mathbb{T})\big)_{B_{\infty,1}} \asymp \mathcal{E}_{2^n}\big(S^r_{1,\theta}B(\mathbb{T})\big)_{L_\infty(\mathbb{T})}.$$

Далі одержимо аналогічні теоремі 3.28 та наслідку 3.29 твердження для класів $W^r_{1,\alpha}(\mathbb{T})$.

Теорема 3.31. *Нехай $d=1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ і $r>1$. Тоді*

$$e_M^{\perp}\big(W^r_{1,\alpha}(\mathbb{T})\big)_{B_{\infty,1}} \asymp M^{-r+1}.$$

Доведення. Оцінка зверху випливає з теореми 3.28 згідно з вкладенням $W^r_{1,\alpha}(\mathbb{T}) \subset S^r_1H(\mathbb{T})$, а відповідна оцінка знизу є наслідком твердження 3.5 за умови $2^n \leqslant M \leqslant 2^{n+1}$.

Теорему 3.31 доведено.

Наслідок 3.32. *Нехай $d=1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ і $r>1$. Тоді справджується співвідношення*

$$\mathcal{E}_{2^n}\big(W^r_{1,\alpha}(\mathbb{T})\big)_{B_{\infty,1}} \asymp 2^{-n(r-1)}.$$

Оцінка зверху випливає з (3.73), оскільки $W^r_{1,\alpha}(\mathbb{T}) \subset S^r_1H(\mathbb{T})$, а відповідна оцінка знизу є наслідком твердження 3.5 і співвідношення (1.55).

Зауваження 3.33. Аналогічно, як і для класів $S^r_{1,\theta}B(\mathbb{T})$, робимо висновок, що для класів $W^r_{1,\alpha}(\mathbb{T})$ при $d=1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ і $r>1$ справджуються співвідношення:

$$e_M^{\perp}\big(W^r_{1,\alpha}(\mathbb{T})\big)_{B_{\infty,1}} \asymp e_M^{\perp}\big(W^r_{1,\alpha}(\mathbb{T})\big)_{L_\infty(\mathbb{T})};$$

$$\mathcal{E}_{2^n}\big(W^r_{1,\alpha}(\mathbb{T})\big)_{B_{\infty,1}} \asymp \mathcal{E}_{2^n}\big(W^r_{1,\alpha}(\mathbb{T})\big)_{L_\infty(\mathbb{T})}.$$

3.5.2. Оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень та наближення східчасто-гіперболічними сумами Фур'є

У цьому підпункті знайдено точні за порядком оцінки для величини найкращого ортогонального тригонометричного наближення (1.49) та наближення східчасто-гіперболічними сумами Фур'є (3.5) для класів $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ у багатовимірному випадку ($d \geqslant 2$), а також ортопоперечника цих же класів функцій при $d \geqslant 1$. Крім того для $d = 2$ досліджено поведінку відповідних апроксимаційних характеристик класів Соболєва $W^{\boldsymbol{r}}_{1,\mathbf{0}}(\mathbb{T}^2)$.

Теорема 3.34. *Нехай $d \geqslant 2$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $r_1 > 1$. Тоді справедлива оцінка*

$$e^{\perp}_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)\big)_{B_{\infty,1}} \asymp \big(M^{-1}\log^{\nu-1} M\big)^{r_1-1}\big(\log^{\nu-1} M\big)^{1-\frac{1}{\theta}}. \tag{3.74}$$

Доведення. Встановимо спочатку оцінку зверху. Нехай $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ і $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$. Тоді, поклавши $\gamma(d) = \gamma_1 + \ldots + \gamma_d$ і підібравши число $n = n(M) \in \mathbb{N}$ із умови $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$ та скориставшись властивістю згортки, можемо записати

$$e^{\perp}_M(f)_{B_{\infty,1}} \ll \Big\| f(\cdot) - \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})<n} \delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\Big\|_{B_{\infty,1}} =$$

$$= \Big\| \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\geqslant n} \delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\Big\|_{B_{\infty,1}} = \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d} \Big\| A_{\boldsymbol{s}}(\cdot) * \sum_{\substack{\boldsymbol{s}'\in\mathbb{N}^d \\ (\boldsymbol{s}',\boldsymbol{\gamma})\geqslant n}} \delta_{\boldsymbol{s}'}(f,\cdot)\Big\|_{L_\infty(\mathbb{T}^d)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\geqslant n-\gamma(d)} \Big\| A_{\boldsymbol{s}}(\cdot) * \sum_{\substack{\boldsymbol{s}'\in\mathbb{N}^d \\ \|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty\leqslant 1}} \delta_{\boldsymbol{s}'}(f,\cdot)\Big\|_{L_\infty(\mathbb{T}^d)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\geqslant n-\gamma(d)} \|A_{\boldsymbol{s}}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T}^d)} \Big\| \sum_{\substack{\boldsymbol{s}'\in\mathbb{N}^d \\ \|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty\leqslant 1}} \delta_{\boldsymbol{s}'}(f,\cdot)\Big\|_{L_\infty(\mathbb{T}^d)} \ll$$

$$\ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\geqslant n-\gamma(d)} \sum_{\substack{\boldsymbol{s}'\in\mathbb{N}^d \\ \|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty\leqslant 1}} \|\delta_{\boldsymbol{s}'}(f,\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{T}^d)} \ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\geqslant n-2\gamma(d)} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{T}^d)} =$$

$$= \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\geqslant n-2\gamma(d)} \left\| \delta_{\boldsymbol{s}} \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty\leqslant 1} A_{\boldsymbol{s}'}(f,\cdot) \right) \right\|_{L_\infty(\mathbb{T}^d)} = J_6. \tag{3.75}$$

Далі, беручи до уваги, що норма оператора $\delta_{\boldsymbol{s}}\colon \delta_{\boldsymbol{s}} f = \delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)$, як оператора з $L_1(\mathbb{T}^d)$ в $L_\infty(\mathbb{T}^d)$, не перевищує за порядком $2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})}$, де $\boldsymbol{1}=(1,\ldots,1)\in\mathbb{N}^d$, для величини J_6 одержимо

$$J_6 \ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\geqslant n-2\gamma(d)} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})} \sum_{\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty\leqslant 1} \|A_{\boldsymbol{s}'}(f,\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T}^d)} \ll$$

$$\ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\geqslant n-3\gamma(d)} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})} \|A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T}^d)} = J_7. \tag{3.76}$$

Для продовження оцінювання величини J_7 розглянемо кілька випадків.

1) Нехай $1<\theta<\infty$. Тоді, застосувавши до J_7 нерівність Гельдера з показником θ і врахувавши означення норми (1.42), можемо записати

$$J_7 = \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\geqslant n-3\gamma(d)} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \|A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T}^d)}\, 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\geqslant n-3\gamma(d)} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^\theta_{L_1(\mathbb{T}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\geqslant n-3\gamma(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r}-\boldsymbol{1})\frac{\theta}{\theta-1}} \right)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \|f(\cdot)\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\geqslant n-3\gamma(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r}-\boldsymbol{1})\frac{\theta}{\theta-1}} \right)^{1-\frac{1}{\theta}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\geqslant n-3\gamma(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\tilde{\boldsymbol{\gamma}})(r_1-1)\frac{\theta}{\theta-1}} \right)^{1-\frac{1}{\theta}} = J_8, \tag{3.77}$$

де $\tilde{\boldsymbol{\gamma}} = (\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_d)$ — вектор з координатами $\tilde{\gamma}_j = \dfrac{r_j - 1}{r_1 - 1}$, $j = \overline{1,d}$, а $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{1}$ позначає вектор з координатами $r_j - 1$, $j = \overline{1,d}$. Легко бачити, що $\tilde{\gamma}_j = \gamma_j = 1$, $j = \overline{1,\nu}$, і $1 < \gamma_j < \tilde{\gamma}_j$ при $j = \overline{\nu+1,d}$, і тому, використовуючи лему 2.4 при $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$, отримуємо

$$J_8 \ll 2^{-n(r_1-1)} n^{(\nu-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} \asymp \left(M^{-1} \log^{\nu-1} M\right)^{r_1-1} \left(\log^{\nu-1} M\right)^{1-\frac{1}{\theta}}. \quad (3.78)$$

Поєднуючи (3.75)–(3.78), приходимо до шуканої оцінки зверху величини $e_M^{\perp}\left(S_{1,\theta}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{T}^d)\right)_{B_{\infty,1}}$ у випадку $1 < \theta < \infty$.

2) Нехай $\theta = 1$. Тоді J_7 оцінюємо таким чином:

$$J_7 = \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}) \geqslant n - 3\gamma(d)} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \|A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T}^d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})} \ll$$

$$\ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}) \geqslant n - 3\gamma(d)} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \|A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T}^d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})(r_1-1)} \leqslant$$

$$\leqslant \|f(\cdot)\|_{S_{1,\theta}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{T}^d)} \sup_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}) \geqslant n - 3\gamma(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})(r_1-1)} \ll$$

$$\ll 2^{-n(r_1-1)} \asymp \left(M^{-1} \log^{\nu-1} M\right)^{r_1-1}. \quad (3.79)$$

Із (3.75), (3.76) і (3.79) випливає шукана оцінка зверху величини $e_M^{\perp}\left(S_{1,1}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{T}^d)\right)_{B_{\infty,1}}$.

3) У випадку $\theta = \infty$, враховуючи, що для $f \in S_{1,\infty}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{T}^d) \equiv S_1^{\boldsymbol{r}} H(\mathbb{T}^d)$ згідно з (1.43) справджується співвідношення $\|A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T}^d)} \ll 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})}$, $\boldsymbol{s} \in \mathbb{N}^d$, маємо

$$J_7 \ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}) \geqslant n - 3\gamma(d)} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \leqslant \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}) \geqslant n - 3\gamma(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\tilde{\boldsymbol{\gamma}})(r_1-1)} \ll$$

$$\ll 2^{-n(r_1-1)} n^{\nu-1} \asymp \left(M^{-1} \log^{\nu-1} M\right)^{r_1-1} \left(\log^{\nu-1} M\right). \quad (3.80)$$

Поєднуючи (3.75), (3.76) і (3.80), приходимо до шуканої оцінки зверху величини $e_M^{\perp}\left(S_{1,\infty}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{T}^d)\right)_{B_{\infty,1}}$.

Оцінка знизу в (3.74) є наслідком твердження 1.27, оскільки згідно зі співвідношенням (1.55) маємо

$$e_M^{\perp}\left(S_{1,\infty}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{T}^d)\right)_{B_{\infty,1}} \gg e_M^{\perp}\left(S_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}} B(\mathbb{T}^d)\right)_{L_\infty(\mathbb{T}^d)} \asymp$$

$$\asymp \left(M^{-1}\log^{\nu-1} M\right)^{r_1-\frac{1}{p}}\left(\log^{\nu-1} M\right)^{1-\frac{1}{\theta}}.$$

Теорему 3.34 доведено

Наведемо наслідки з теореми 3.34.

Наслідок 3.35. *Нехай $d \geqslant 2$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ і $r_1 > 1$. Тоді*

$$\mathcal{E}_{Q_n^\gamma}\left(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)\right)_{B_{\infty,1}} \asymp 2^{-n(r_1-1)}n^{(\nu-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{3.81}$$

Оцінку зверху в (3.81) встановлено при доведенні теореми 3.34. Відповідна оцінка знизу також є наслідком теореми 3.34, оскільки при $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$ виконуються співвідношення

$$\mathcal{E}_{Q_n^\gamma}\left(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)\right)_{B_{\infty,1}} \gg e^{\perp}_M\left(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\infty}B(\mathbb{T}^d)\right)_{B_{\infty,1}} \asymp 2^{-n(r_1-1)}n^{(\nu-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Оцінки (3.74) та (3.81) доповнюють відповідні результати для класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, які при $1 < p < \infty$, встановлені у [100].

Наступний наслідок стосується ортопоперечників класів $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ у просторі $B_{\infty,1}$.

Наслідок 3.36. *Нехай $d \geqslant 1$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. Тоді при $r_1 > 1$*

$$d^{\perp}_M\left(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d), B_{\infty,1}\right) \asymp M^{-r_1+1}\left(\log^{\nu-1} M\right)^{r_1-\frac{1}{\theta}}. \tag{3.82}$$

Оцінка зверху випливає з (3.73) і (3.81) при відповідному виборі чисел n, а оцінка знизу згідно з нерівністю (1.55) є наслідком твердження 1.28 при $p = 1$.

Зазначимо, що оцінка (3.82) доповнює відповідний результат, який для класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, $1 < p < \infty$, встановлений у [98].

Крім того при дослідженні апроксимаційних характеристик класів $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ виявлено, що в одновимірному випадку, на відміну від багатовимірного ($d \geqslant 2$), одержані результати не залежать від значення параметра θ.

Зауваження 3.37. Співставивши одержані в теоремі 3.34 та наслідках 3.35, 3.36 оцінки з відповідними результатами, які наведені у твердженнях 1.27, 3.4 і 1.28 можемо зробити висновок, що при $d \geqslant 2$,

$1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ і $r_1 > 1$ справджуються співвідношення:

$$e_M^{\perp}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)\big)_{B_{\infty,1}} \asymp e_M^{\perp}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{T}^d)};$$
$$\mathcal{E}_{Q_n^{\gamma}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)\big)_{B_{\infty,1}} \asymp \mathcal{E}_{Q_n^{\gamma}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{T}^d)};$$

і, відповідно, при $d \geqslant 1$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ і $r_1 > 1$

$$d_M^{\perp}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d), B_{\infty,1}\big) \asymp d_M^{\perp}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d), L_\infty(\mathbb{T}^d)\big).$$

Насамкінець наведемо два наслідки, які стосуються відповідних апроксимаційних характеристик класів Соболєва $W^{\boldsymbol{r}}_{1,\mathbf{0}}(\mathbb{T}^2)$.

Наслідок 3.38. *Нехай $d = 2$, $\boldsymbol{r} = (r_1, r_1)$, $r_1 > 1$. Тоді*

$$d_M^{\perp}\big(W^{\boldsymbol{r}}_{1,\mathbf{0}}(\mathbb{T}^2), B_{\infty,1}\big) \asymp M^{-r_1+1}(\log M)^{r_1}. \tag{3.83}$$

Оцінка зверху випливає з (3.82) при $\theta = \infty$ внаслідок вкладення $W^{\boldsymbol{r}}_{1,\mathbf{0}}(\mathbb{T}^2) \subset S^{\boldsymbol{r}}_1 H(\mathbb{T}^2)$. Відповідна оцінка знизу в (3.83) одержується з твердження 1.29 згідно зі співвідношенням (1.55).

Наслідок 3.39. *Нехай $d = 2$, $\boldsymbol{r} = (r_1, r_1)$, $r_1 > 1$. Тоді*

$$\mathcal{E}_{Q_n}\big(W^{\boldsymbol{r}}_{1,\mathbf{0}}(\mathbb{T}^2)\big)_{L_\infty(\mathbb{T}^2)} \asymp \mathcal{E}_{Q_n}\big(W^{\boldsymbol{r}}_{1,\mathbf{0}}(\mathbb{T}^2)\big)_{B_{\infty,1}} \asymp 2^{-n(r_1-1)}n. \tag{3.84}$$

Доведення. Зауважимо, що оцінку зверху в (3.84) достатньо встановити для величини $\mathcal{E}_{Q_n}\big(W^{\boldsymbol{r}}_{1,\mathbf{0}}(\mathbb{T}^2)\big)_{B_{\infty,1}}$, а знизу — для $\mathcal{E}_{Q_n}\big(W^{\boldsymbol{r}}_{1,\mathbf{0}}(\mathbb{T}^2)\big)_{L_\infty(\mathbb{T}^2)}$.

Отже, оцінка зверху величини $\mathcal{E}_{Q_n}\big(W^{\boldsymbol{r}}_{1,\mathbf{0}}(\mathbb{T}^2)\big)_{B_{\infty,1}}$ випливає з наслідку 3.35 при умові $d = 2$, $\theta = \infty$ згідно з вкладенням $W^{\boldsymbol{r}}_{1,\mathbf{0}}(\mathbb{T}^2) \subset S^{\boldsymbol{r}}_1 H(\mathbb{T}^2)$. Оцінка знизу величини $\mathcal{E}_{Q_n}\big(W^{\boldsymbol{r}}_{1,\mathbf{0}}(\mathbb{T}^2)\big)_{L_\infty(\mathbb{T}^2)}$ випливає з теореми 1.29 при умові, що число $n \in \mathbb{N}$ підібрано по заданому M із співвідношення $M \asymp 2^n n$.

Наслідок 3.39 доведено.

3.6. Властивості операторів найкращого наближення у просторі $B_{1,1}$

Насамперед наведемо деякі зауваження стосовно питання, яке досліджується у цьому підпункті.

Повертаючись до твердження 3.2, у якому, зокрема, при $d \geqslant 2$ і $\boldsymbol{r} = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}^d_+$ одержана оцінка

$$E_{Q_n}\bigl(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)\bigr)_{B_{1,1}} \asymp 2^{-nr_1} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}, \quad 1 \leqslant \theta \leqslant \infty, \quad r_1 > 0, \tag{3.85}$$

зазначимо, що вона реалізується за допомогою наближення класів $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ у просторі $B_{1,1}$ лінійним методом. Більш конкретно в якості такого лінійного методу використовувалась послідовність лінійних операторів $\bigl\{\mathbb{V}_{Q_n}\bigr\}_{n=1}^{\infty}$, які співставляють функції $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ поліном вигляду

$$\mathbb{V}_{Q_n} f = V_{Q_n}(f, \cdot) := \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1}) \leqslant n} A_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot) = f(\cdot) * V_{Q_n}(\cdot),$$

де

$$V_{Q_n}(\boldsymbol{x}) = \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1}) \leqslant n} A_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x}).$$

Проте, послідовність цих операторів має одну суттєву ваду, яка полягає в тому, що норма оператора $\mathbb{V}_{Q_n}$, як оператора із $L_1(\mathbb{T}^d)$ в $L_1(\mathbb{T}^d)$ дорівнює $\|V_{Q_n}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T}^d)}$, і як показано в [123] (див. наслідок з теореми 1.2.1), справджується оцінка

$$\|V_{Q_n}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T}^d)} \gg n^{d-1}.$$

Іншими словами, послідовність лінійних операторів $\bigl\{\mathbb{V}_{Q_n}\bigr\}_{n=1}^{\infty}$, яка реалізує порядок величин $E_{Q_n}\bigl(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)\bigr)_{B_{1,1}}$ при $d \geqslant 2$, виявилася необмеженою. У зв'язку з цією обставиною природно виникає питання про існування обмеженої послідовності операторів $\mathbb{L}_{Q_n} \colon L_1(\mathbb{T}^d) \to T(Q_n)$, яка б найкращим чином наближала класи $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ у просторі $B_{1,1}$. Відповідь на це питання дається у наступному твердженні.

Теорема 3.40. *Нехай на $L^0_1(\mathbb{T}^d)$, $d \geqslant 2$, визначено послідовність обмежених лінійних операторів $\mathbb{L}_{Q_n}$, які співставляють кожній функції з $L^0_1(\mathbb{T}^d)$ тригонометричний поліном з множини $T(Q_n)$ таким чином, що для функцій $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, $\boldsymbol{r} = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}^d_+$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, виконується співвідношення*

$$\|f(\cdot) - \mathbb{L}_{Q_n} f\|_{B_{1,1}} \ll E_{Q_n}\bigl(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)\bigr)_{B_{1,1}}.$$

Тоді для норми оператора $\mathbb{L}_{Q_n}$ і будь-якого $\varepsilon > 0$ справджується оцінка

$$\|\mathbb{L}_{Q_n}\| \gg n^{(d-1)(1-\varepsilon)}.$$

Доведення. Схема доведення аналогічна тій, що використовувалась у роботі [198] при дослідженні подібного питання, пов'язаного з наближенням класів $S^r_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ у просторі $L_1(\mathbb{T}^d)$.

Отже, нехай $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_d)$, $\tau_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, і $\mathbb{I}_{\boldsymbol{\tau}}$ — оператор зсуву аргументу функції f на вектор $\boldsymbol{\tau}$, тобто $\mathbb{I}_{\boldsymbol{\tau}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\tau})$. Наслідуючи Ю. Марцинкевича [187], будемо розглядати обмежений лінійний оператор $\mathbb{T}_{Q_n}$, який діє на функцію f згідно з формулою

$$\mathbb{T}_{Q_n} f(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} (\mathbb{I}_{-\boldsymbol{\tau}} \mathbb{L}_{Q_n} \mathbb{I}_{\boldsymbol{\tau}} f)(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{\tau}.$$

Тоді, внаслідок інваріантності норми відносно зсуву аргументу між нормами операторів $\mathbb{T}_{Q_n}$ і $\mathbb{L}_{Q_n}$ виконується співвідношення

$$\|\mathbb{T}_{Q_n}\| \leqslant \|\mathbb{L}_{Q_n}\|. \tag{3.86}$$

Крім того, легко переконатися, що

$$\mathbb{T}_{Q_n} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})} = \begin{cases} c_{n,\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}, & \boldsymbol{k} \in Q_n, \\ 0, & \boldsymbol{k} \notin Q_n, \end{cases}$$

і тому оператор $\mathbb{T}_{Q_n}$ діє на функцію f, як оператор згортки, тобто

$$\mathbb{T}_{Q_n} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) * \sum_{\boldsymbol{k} \in Q_n} c_{n,\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}. \tag{3.87}$$

Далі, нехай $f \in S^r_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)$. Тоді $\mathbb{I}_{\boldsymbol{\tau}} f \in S^r_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ і згідно з умовою теореми маємо

$$\|\mathbb{I}_{\boldsymbol{\tau}} f - \mathbb{L}_{Q_n}(\mathbb{I}_{\boldsymbol{\tau}} f)\|_{B_{1,1}} \ll E_{Q_n}\big(S^r_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)\big)_{B_{1,1}}. \tag{3.88}$$

Нехай $\mathbb{I}$ позначає одиничний оператор. Тоді, використовуючи (3.88), записуємо

$$\|f(\cdot) - \mathbb{T}_{Q_n} f\|_{B_{1,1}} = (2\pi)^{-d} \bigg\| \int\limits_{\mathbb{T}^d} \mathbb{I}_{-\boldsymbol{\tau}} (\mathbb{I} - \mathbb{L}_{Q_n})(\mathbb{I}_{\boldsymbol{\tau}} f) d\boldsymbol{\tau} \bigg\|_{B_{1,1}} \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \left\| \mathbb{I}_{-\boldsymbol{\tau}} \big(\mathbb{I}_{\boldsymbol{\tau}} f - \mathbb{L}_{Q_n}(\mathbb{I}_{\boldsymbol{\tau}} f) \big) \right\|_{B_{1,1}} d\boldsymbol{\tau} =$$

$$= (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \left\| \mathbb{I}_{\boldsymbol{\tau}} f - \mathbb{L}_{Q_n}(\mathbb{I}_{\boldsymbol{\tau}} f) \right\|_{B_{1,1}} d\boldsymbol{\tau} \ll E_{Q_n}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)\big)_{B_{1,1}}. \qquad (3.89)$$

Таким чином, зі співвідношень (3.86) і (3.89) випливає, що доведення достатньо провести для послідовності операторів, які діють згідно з формулою (3.87).

Отже, нехай $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ і

$$\mathbb{L}_{Q_n} f(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) L_{Q_n}(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y},$$

де

$$L_{Q_n}(\boldsymbol{y}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in Q_n} c_{n,\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{y})}.$$

Тоді для норми оператора $\mathbb{L}_{Q_n}$ справджуєтся співвідношення

$$\|\mathbb{L}_{Q_n}\| = \|L_{Q_n}\|_{L_1(\mathbb{T}^d)}. \qquad (3.90)$$

Для проведення подальших міркувань нам знадобиться допоміжне твердження.

Лема 3.41. *Для будь-якого $\delta > 0$ існує така стала $C(\delta) > 0$, що для всіх n виконуєтъся нерівність*

$$\sum_{\boldsymbol{k} \in Q_n} |c_{n,\boldsymbol{k}}| \geqslant C(\delta) |Q_n| n^{-(d-1)\delta}.$$

Доведення. Нехай число $n \in \mathbb{N}$ задане. Розглянемо функцію

$$v_n(\boldsymbol{x}) = C_5 (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \prod_{j=1}^{d} V_{2^n}(x_j - y_j) F_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{y},$$

яка з деякою сталою $C_5 > 0$ належить класу $W^{\boldsymbol{r}}_{1,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$, а отже і класу $S^{\boldsymbol{r}}_1 H(\mathbb{T}^d)$, оскільки $W^{\boldsymbol{r}}_{1,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d) \subset S^{\boldsymbol{r}}_1 H(\mathbb{T}^d)$. Таким чином, згідно з означенням норми у просторі $S^{\boldsymbol{r}}_1 H(\mathbb{T}^d)$, для кожного вектора $\boldsymbol{s} \in \mathbb{N}^d$ виконується

нерівність
$$\|A_{\boldsymbol{s}}(\upsilon_n, \cdot)\|_{L_1(\mathbb{T}^d)} \ll 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})}.$$
Покладемо $S_n = \left\{\boldsymbol{s} \in \mathbb{N}^d \colon (\boldsymbol{s}, \mathbf{1}) \leqslant n\right\}$ і $\Delta S_{n,d} = S_{n+3d} - S_{n-d}$ і розглянемо функцію
$$g_n(\boldsymbol{x}) = C_6 n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{\boldsymbol{s} \in \Delta S_{n,d}} A_{\boldsymbol{s}}(\upsilon_n, \boldsymbol{x}), C_6 > 0,$$
яка, як показано в [198], з відповідною сталою $C_6 > 0$ належить класу $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)$.

Далі розглянемо наближення функції g_n у просторі $B_{1,1}$ поліномами вигляду
$$V_{Q_{n+d}}(g_n, \boldsymbol{x}) = \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1}) \leqslant n+d} A_{\boldsymbol{s}}(g_n, \boldsymbol{x}).$$
Повторивши міркування, які проводилися при доведенні теореми 7 [88], отримаємо
$$\|g_n(\cdot) - V_{Q_{n+d}}(g_n, \cdot)\|_{B_{1,1}} \ll 2^{-nr_1} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{3.91}$$
Оскільки для поліномів $V_{Q_{n+d}}(g_n, \boldsymbol{x})$ при всіх $\boldsymbol{k} \in Q_n$ справджується рівність
$$\widehat{g}_n(\boldsymbol{k}) = \widehat{V}_{Q_{n+d}}(g_n(\boldsymbol{k})),$$
то
$$\mathbb{L}_{Q_n} g_n(\boldsymbol{x}) = \mathbb{L}_{Q_n} V_{Q_{n+d}}(g_n, \boldsymbol{x}).$$
Окрім цього, згідно з умовою теореми маємо
$$\|g_n(\cdot) - \mathbb{L}_{Q_n} g_n\|_{B_{1,1}} \ll E_{Q_n}\left(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)\right)_{B_{1,1}}. \tag{3.92}$$

Легко переконатися, що із (3.91) і (3.92) випливає оцінка
$$\|V_{Q_{n+d}}(g_n, \cdot) - \mathbb{L}_{Q_n} g_n\|_{L_1(\mathbb{T}^d)} \ll 2^{-nr_1} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Справді, беручи до уваги нерівність $\|\cdot\|_{L_1(\mathbb{T}^d)} \ll \|\cdot\|_{B_{1,1}}$ і використовуючи твердження 3.2, та співвідношення (3.91), (3.92), маємо
$$\|V_{Q_{n+d}}(g_n, \cdot) - \mathbb{L}_{Q_n} g_n\|_{L_1(\mathbb{T}^d)} \ll \|V_{Q_{n+d}}(g_n, \cdot) - \mathbb{L}_{Q_n} g_n\|_{B_{1,1}} \leqslant$$

$$\leqslant \|g_n(\cdot) - \mathbb{L}_{Q_n} g_n\|_{B_{1,1}} + \|g_n(\cdot) - V_{Q_{n+d}}(g_n, \cdot)\|_{B_{1,1}} \ll$$
$$\ll E_{Q_n}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)\big)_{B_{1,1}} + 2^{-nr_1} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} \asymp 2^{-nr_1} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Далі, повторюючи міркування, які використовувалися при доведенні леми 3.3 [198], одержуємо оцінку

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in Q_n} |c_{n,\boldsymbol{k}}| \geqslant C(\delta)|Q_n| n^{-(d-1)\delta}.$$

Лему 3.41 доведено.

Для завершення доведення теореми скористаємося рівністю (3.90), лемами 3.41 та 3.6 при $\eta = \delta$. В результаті отримаємо

$$\|\mathbb{L}_{Q_n}\| = \|L_{Q_n}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T}^d)} \gg n^{-\delta} 2^{-n} \sum_{\boldsymbol{k}\in Q_n} |c_{n,\boldsymbol{k}}| \gg$$
$$\gg n^{-\delta} 2^{-n} 2^n n^{d-1} n^{-(d-1)\delta} = n^{(d-1)\left(1-\frac{d\delta}{d-1}\right)}.$$

Поклавши $\varepsilon = \frac{d\delta}{d-1}$, прийдемо до шуканої оцінки.

Теорему 3.40 доведено.

Таким чином, з одержаного результату робимо висновок, що у багатовимірному випадку ($d \geqslant 2$) послідовність норм лінійних операторів, які наближають класи $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ у просторі $B_{1,1}$ за порядком найкращих наближень, є необмеженою.

Далі розглянемо одновимірний випадок і переконаємося, що тут ситуація є іншою.

Нехай $T(2^n)$ — множина тригонометричних поліномів вигляду

$$T(2^n) := \left\{t\colon t(x) = \sum_{k=-2^{n-1}}^{2^{n-1}} c_k e^{ikx}\right\}$$

і

$$E_n(f)_{B_{1,1}} := \inf_{t\in T(2^n)} \|f(\cdot) - t(\cdot)\|_{B_{1,1}}$$

— найкраще наближення функції f поліномами із множини $T(2^n)$ у просторі $B_{1,1}$. Для класу $S^r_{1,\theta}B(\mathbb{T})$ покладемо

$$E_n\big(S^r_{1,\theta}B(\mathbb{T})\big)_{B_{1,1}} := \sup_{f\in S^r_{1,\theta}B(\mathbb{T})} E_n\big(f\big)_{B_{1,1}}.$$

Справедливим є таке твердження.

Теорема 3.42. *Нехай* $d=1$, $1\leqslant\theta\leqslant\infty$, $r>0$. *Тоді*

$$E_n\big(S^r_{1,\theta}B(\mathbb{T})\big)_{B_{1,1}} \asymp 2^{-nr}. \tag{3.93}$$

Доведення. Оцінка зверху реалізується за наближення поліномами вигляду

$$\tilde{t}_n(f,x)=\sum_{s=1}^{n-1}A_s(f,x)$$

і встановлена при доведенні теореми 3.22.

Для доведення в (3.93) оцінки знизу розглянемо функцію

$$f_1(x)=2^{-nr_1}e^{i2^{n+1}x},$$

яка, як легко бачити, належить класу $S^r_{1,\theta}B(\mathbb{T})$, $1\leqslant\theta\leqslant\infty$.

Нехай

$$t^*_n(x)=\sum_{k=-2^{n-1}}^{2^{n-1}}c^*_k e^{ikx}$$

— поліном найкращого наближення функції f_1 у просторі $B_{1,1}$. Тоді, з одного боку,

$$\big((f_1(x)-t^*_n(x)),e^{i2^{n+1}x}\big)=\big(f_1(x),e^{i2^{n+1}x}\big)=2^{-nr}, \tag{3.94}$$

а з іншого боку

$$\big((f_1(x)-t^*_n(x)),e^{i2^{n+1}x}\big)\leqslant\|f_1(\cdot)-t^*_n(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})}\|e^{i2^{n+1}x}\|_{L_\infty(\mathbb{T})}\ll$$

$$\ll\|f_1(\cdot)-t^*_n(\cdot)\|_{B_{1,1}}=E_n\big(f_1\big)_{B_{1,1}}. \tag{3.95}$$

Отже, поєднуючи (3.94) і (3.95), приходимо до оцінок

$$E_n\big(S^r_{1,\theta}B(\mathbb{T})\big)_{B_{1,1}} \geqslant E_n\big(f_1\big)_{B_{1,1}} \gg 2^{-nr}.$$

Теорему 3.42 доведено.

У зв'язку з результатом теореми 3.42 зазначимо, що норми операторів $\mathbb{A}_n$, які діють згідно з формулою

$$\mathbb{A}_n f = \tilde{t}_n(f,\cdot) = \sum_{s=1}^{n-1} A_s(f,\cdot)$$

є обмеженими, оскільки

$$\|\mathbb{A}_n\| = \left\|\sum_{s=1}^{n-1} A_s(\cdot)\right\|_{L_1(\mathbb{T})} \leqslant \|V_{2^0}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})} + \|V_{2^{n-1}}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})} \leqslant C_7, \quad C_7 > 0.$$

На завершення зауважимо, що аналогічні властивості операторів найкращого наближення класів $S^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}(\mathbb{T}^d)$ у просторі $B_{\infty,1}$ тригонометричними поліномами з "номерами" гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів встановлено у роботі [98]. Питання про норми послідовностей лінійних операторів, які найкращим чином наближають класи $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}(\mathbb{T}^d)$ і $S^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}(\mathbb{T}^d)$ у просторах $L_1(\mathbb{T}^d)$ і $L_\infty(\mathbb{T}^d)$ відповідно, досліджувалося у роботі [198], а для класів Соболєва $W^{\boldsymbol{r}}_{1,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$ та Нікольського $S^{\boldsymbol{r}}_1(\mathbb{T}^d)$ у просторі $L_1(\mathbb{T}^d)$ у роботах В. М. Темлякова [122, 124] (див. також [123]). Звернемо увагу, що в одновимірному випадку рівномірна обмеженість послідовності операторів згортки, яка реалізує порядок найкращого наближення класів $W^r_{p,r}(\mathbb{T})$ періодичних функцій у просторі $L_p(\mathbb{T})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, випливає з результатів В. Дамена і Е. Герліха [165]. Для класів періодичних функцій, які є узагальненням класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{T}^d)$, аналогічне питання у просторі $L_\infty(\mathbb{T}^d)$ досліджувалося у роботі [44].

Висновки до розділу 3

У даному розділі:

1. Знайдено точні за порядком оцінки ентропійних чисел та M-вимірного колмогоровського поперечника класів функцій $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, $d \geqslant 2$, з домінуючою мішаною гладкістю у метриці простору квазінеперервних функцій $QC(\mathbb{T}^d)$ у випадку $2 \leqslant p \leqslant \infty$, $2 \leqslant \theta < \infty$, $r_1 > \frac{1}{2}$, та встановлено, що вони рівні між собою по порядку. Для деяких інших значень параметрів отримані оцінки знизу і зверху відповідних апроксимаційних характеристик.

2. Встановлено точні за порядком оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, у просторі $B_{\infty,1}(\mathbb{T}^d)$, $d \geqslant 1$.

3. У багатовимірному випадку, $d \geqslant 2$, встановлено точні за порядком оцінки наближень класів функцій $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ їхніми східчасто-гіперболічними сумами Фур'є у просторі $B_{\infty,1}(\mathbb{T}^d)$, а також порядки ортопоперечників у цьому ж просторі. У деяких випадках досліджено поведінку відповідних апроксимаційних характеристик і класів Соболєва $W^{\boldsymbol{r}}_{1,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$ при $d \in \{1, 2\}$.

4. Одержано точні за порядком оцінки ортопоперечників і близьких до них апроксимаційних характеристик класів Соболєва $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$ та класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ періодичних функцій однієї та багатьох змінних у просторі $B_{1,1}$.

5. Встановлено, що у багатовимірному випадку, на противагу одновимірному, послідовність норм лінійних операторів, які реалізують порядкові значення найкращого наближення класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ у просторі $B_{1,1}$ за допомогою тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів, є необмеженою.

Основні результати даного розділу опубліковано у працях [1 – 4] зі списку публікацій і, відповідно, [203, 206, 207, 210] зі списку використаних джерел, а також опубліковані у тезах конференцій [18, 19, 21 – 23] і, відповідно, [102, 204, 205, 208, 209].

Розділ 4

Апроксимаційні характеристики узагальнених класів функцій $\boldsymbol{S^{\Omega}_{p,\theta}}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{d}})$

Даний розділ присвячено дослідженню апроксимаційних характеристик узагальнених класів функцій з домінуючою мішаною похідною $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, де параметр $\Omega(\boldsymbol{t})$ функція типу мішаного модуля неперервності, у просторі Лебега $L_q(\mathbb{R}^d)$. Встановлено точні за порядком оцінки наближення функцій із даних класів за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є на множинах, які породжуються поверхнями рівня функції $\Omega(\boldsymbol{t})$ у тому випадку, коли похибка наближення оцінюється у метриці простору $L_q(\mathbb{R}^d)$, при $1 < p \leqslant q \leqslant \infty$, $p \neq \infty$. Також одержано точні за порядком оцінки наближення функцій з даних класів за допомогою цілих функцій експоненціального типу зі спектром спеціального вигляду та у східчастому гіперболічному хресті в просторі $L_q(\mathbb{R}^d)$ при деяких співвідношеннях між параметрами p і q.

4.1. Допоміжні означення та твердження

Перш ніж сформулювати допоміжні результати, які будуть необхідні для доведення основних тверджень даного розділу, наведемо означення деяких множин в $\mathbb{Z}^d_+$.

Покладемо

$$\kappa^{\perp}(N) := \kappa^{\perp}(\Omega, N) :=$$

$$:= \left\{ \boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{Z}_+^d \colon \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} < \frac{1}{N} \right\}, \tag{4.1}$$

де $1 < p \leqslant q \leqslant \infty$, $p \neq \infty$ і

$$Q^{\perp}(\kappa^{\perp}(N)) := Q^{\perp}(\Omega, \kappa^{\perp}(N)) := \bigcup_{\boldsymbol{s} \in \kappa^{\perp}(N)} Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}},$$

$$\Theta(\kappa^{\perp}(N)) := \kappa^{\perp}(N) \backslash \kappa^{\perp}(2^l N),$$

тобто

$$\Theta(\kappa^{\perp}(N)) = \Big\{ \boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{Z}_+^d \colon$$
$$\frac{1}{2^l N} \leqslant \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} < \frac{1}{N} \Big\}. \tag{4.2}$$

Нагадаємо, що $Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}}$ означається згідно з формулою (1.7), а саме

$$Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}} = \left\{ \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \colon \; \eta(s_j) 2^{s_j - 1} \leqslant |\lambda_j| < 2^{s_j}, \lambda_j \in \mathbb{R}, \;\; j = \overline{1, d} \right\}.$$

Зауважимо, що множина $\Theta(\kappa^{\perp}(N))$ не порожня ($\Theta(\kappa^{\perp}(N)) \neq \varnothing$) і має місце співвідношення

$$\left| \Theta(\kappa^{\perp}(N)) \right| \asymp \left(\log_2 N \right)^{d-1}, \tag{4.3}$$

де через $|A|$ позначено кількість елементів скінченної множини A. Дані властивості множини $\Theta(\kappa^{\perp}(N))$ у випадку $p = q$ встановлені в [194]. Використовуючи міркування запропоновані у цій роботі з деякою модифікацією, відповідно до розглядуваного нами випадку, їх можна встановити і в більш загальній ситуації, а саме для $1 < p < q \leqslant \infty$.

Покажемо, що множина $\Theta(\kappa^{\perp}(N)) \neq \varnothing$ і у випадку $1 < p < q \leqslant \infty$. Зауважимо, що згідно з властивостями функції типу модуля неперервності порядку l можемо записати

$$\Omega(2^{-s_1}, \dots, 2 \cdot 2^{-s_j}, \dots, 2^{-s_d}) \leqslant 2^l \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}). \tag{4.4}$$

Далі виберемо вектор $\boldsymbol{s}$ так, що $\boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_j, \dots, s_d) \notin \kappa^{\perp}(2^l N)$, але вектор $\boldsymbol{s}'$, у якого $s'_j = s_j + 1$, тобто $\boldsymbol{s}' = (s_1, \dots, s_j + 1, \dots, s_d)$ і

$\boldsymbol{s}' \in \kappa^{\perp}(2^l N)$. Згідно з (4.1) можемо записати

$$\Omega(2^{-\boldsymbol{s}'})2^{\|\boldsymbol{s}'\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} < \frac{1}{2^l N}. \tag{4.5}$$

Припустимо, що $\boldsymbol{s} \notin \Theta(\kappa^{\perp}(N))$, а тому маємо, що $\boldsymbol{s} \in \kappa(N)$. Згідно з (1.68), (4.4) і (4.5) отримуємо

$$\frac{1}{N} \leqslant \Omega(2^{-\boldsymbol{s}})2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} = \Omega(2^{-s_1}, \ldots, 2\cdot 2^{-(s_j+1)}, \ldots, 2^{-s_d})\frac{2^{\|\boldsymbol{s}'\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}}{2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^l}{2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}\Omega(2^{-\boldsymbol{s}'})2^{\|\boldsymbol{s}'\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} < \frac{2^l}{2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}\frac{1}{2^l N} = \frac{1}{2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}N}.$$

Як наслідок з нашого припущення отримуємо суперечність, а тому $\boldsymbol{s} \in \Theta(\kappa^{\perp}(N))$ і тим самим множина $\Theta(\kappa^{\perp}(N))$ не є порожньою.

Звернемо увагу, що як наслідок означення множини $\Theta(\kappa^{\perp}(N))$, у процесі запропонованих міркувань, на відміну від випадку $p = q$, виникає додатковий множник, а саме $2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$, який, по суті, залежить від $\frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Цілком аналогічно, з урахуванням сказаного вище, використовуючи міркування з [194], також можна показати, що (4.3) виконується і випадку, коли $p \neq q$.

Мають місце такі твердження.

Лема 4.1. *Нехай Ω — функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умову (S^{α}), $\alpha > 0$. Тоді для $0 < \mu < \infty$*

$$\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{\mu} \ll \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(\kappa^{\perp}(N))} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{\mu}. \tag{4.6}$$

Лема 4.2. *Нехай Ω — функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умову (S^{α}) з $0 < \alpha < 1$ і $\alpha > \beta > 0$. Тоді для $0 < \mu < \infty$*

$$\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})2^{\|s\|_1\beta}\right)^{\mu} \ll \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(\kappa^{\perp}(N))} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})2^{\|s\|_1\beta}\right)^{\mu}. \tag{4.7}$$

Леми 4.1, 4.2 вперше було отримано в [194] також у випадку, коли параметри p і q у відповідних множинах рівні між собою. Проаналізувавши їхнє доведення, можна переконатися, що дані леми залишаються вірними і у більш загальному випадку, а саме для векторів $\boldsymbol{s}$, які належать вище означеним множинам $\kappa^{\perp}(N)$ та $\Theta(\kappa^{\perp}(N))$, з $1 < p \leqslant q \leqslant \infty$, $p \neq \infty$.

Як наслідок з (4.6), (4.7), (4.2) та (4.3) для $0 < \mu < \infty$ маємо

$$\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\right)^{\mu} \ll \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(\kappa^{\perp}(N))} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\right)^{\mu} <$$

$$< \left(\frac{1}{N}\right)^{\mu} \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(\kappa^{\perp}(N))} 1 = \left(\frac{1}{N}\right)^{\mu} \left|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\right| \tag{4.8}$$

Також у процесі досліджень нами будуть використовуватися відомі для класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ оцінки величини (1.21), яка досліджувалася у випадку, коли для векторів $\boldsymbol{s} \in \mathcal{L}$ виконується умова $\|\boldsymbol{s}\|_1 \leqslant n$, де $\|\boldsymbol{s}\|_1 = s_1 + \ldots + s_d$, $n \in \mathbb{N}$. Тобто розглядається наближення на множині

$$\tilde{Q}_n = \bigcup_{\|\boldsymbol{s}\|_1\leqslant n} Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}}. \tag{4.9}$$

У цьому випадку для (1.19), (1.20) і (1.21) будемо використовувати такі позначення

$$S_{\tilde{Q}_n}(f,\boldsymbol{x}) = \sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1\leqslant n} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x}), \tag{4.10}$$

$$\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n}(f)_{L_q(\mathbb{R}^d)} := \|f(\cdot) - S_{\tilde{Q}_n}(f,\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \tag{4.11}$$

та

$$\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n}\left(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\right)_{L_q(\mathbb{R}^d)} := \sup_{f\in S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \mathcal{E}_{\tilde{Q}_n}(f)_{L_q(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.12}$$

Мають місце твердження.

Твердження 4.3 ([113]). *Нехай $1 < p < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ і $\Omega(\boldsymbol{t}) = \omega\,(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d)$, де $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з $\alpha > 0$. Тоді справедливе порядкове співвідношення*

$$\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n}\left(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\right)_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)\left(\frac{1}{p^*}-\frac{1}{\theta}\right)_+},$$

де $a_+ = \max\{a,\ 0\}$, $p^* = \min\{p,\ 2\}$.

Твердження 4.4 ([144]). *Нехай* $1 < p < q < \infty$ *і* $\Omega(\boldsymbol{t}) = \omega(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d)$, *де* $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ *з* $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. *Тоді для* $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ *має місце порядкове співвідношення*

$$\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp \omega(2^{-n})2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+},$$

де $a_+ = \max\{a,\ 0\}$.

Зазначимо, що у теоремах відповідних до тверджень 4.3 і 4.4, із урахуванням співвідношення (1.26), також одержані оцінки і для величини (1.18) у тому випадку, коли наближення розглядається на множині $\tilde{Q}_n$.

4.2. Порядкові оцінки наближення функцій з класів $S^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ із заданою мажорантою мішаних модулів гладкості

Нашою метою у даному пункті є встановлення порядкових по параметру N оцінок величин $E_{Q(\kappa(N))}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ (1.69) та $\mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ (1.70) при певних обмеженнях на параметри p, q, θ та функціонального параметра $\Omega(\boldsymbol{t})$.

При цьому зазначимо, що при $1 < q < \infty$ і $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$ має місце співвідношення аналогічне до (1.26) (див., наприклад, [55])

$$E_{Q(\kappa(N))}\big(f\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\big(f\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \leqslant C E_{Q(\kappa(N))}\big(f\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}, \qquad (4.13)$$

де $C \geqslant 1$ — деяка стала.

Розглянемо спочатку випадок $p = q$. Зауважимо, що згідно з (4.2) маємо

$$\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) \asymp \frac{1}{N}, \quad \boldsymbol{s} \in \Theta(\kappa^{\perp}(N)). \qquad (4.14)$$

Теорема 4.5. *Нехай* $1 < p < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $\Omega(\boldsymbol{t}) \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 0$, *тоді справедливими є порядкові оцінки*

$$\mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp E_{Q(\kappa(N))}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp$$
$$\asymp \frac{1}{N}\left|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\right|^{\left(\frac{1}{p^*}-\frac{1}{\theta}\right)_+}, \tag{4.15}$$

де $p^* = \min\{p, 2\}$, $a_+ = \max\{0, a\}$.

Доведення. Спочатку встановимо в (4.15) оцінку зверху.

Нехай $f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$. Скориставшись послідовно співвідношенням (4.13), твердженням 2.1, нерівністю (2.17), яку для зручності нагадаємо,

$$\left(\sum_k |a_k|^{v_2}\right)^{\frac{1}{v_2}} \leqslant \left(\sum_k |a_k|^{v_1}\right)^{\frac{1}{v_1}}, \quad 0 < v_1 \leqslant v_2 < \infty,$$

і нерівністю Мінковського, одержимо

$$E_{Q(\kappa(N))}(f)_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp \mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}(f)_{L_p(\mathbb{R}^d)} = \Bigg\| f(\cdot) - \sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa(N)} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\Bigg\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} =$$
$$= \Bigg\| \sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\Bigg\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \ll \Bigg\| \Bigg(\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} |\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)|^2\Bigg)^{\frac{1}{2}}\Bigg\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leqslant$$
$$\leqslant \Bigg\| \Bigg(\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} |\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)|^{p^*}\Bigg)^{\frac{1}{p^*}}\Bigg\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp \Bigg(\Bigg\| \sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} |\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)|^{p^*}\Bigg\|_{L_{p/p^*}(\mathbb{R}^d)}\Bigg)^{\frac{1}{p^*}} \leqslant$$
$$\leqslant \Bigg(\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \big\| |\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)|^{p^*}\big\|_{L_{p/p^*}(\mathbb{R}^d)}\Bigg)^{\frac{1}{p^*}} = \Bigg(\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^{p^*}_{L_p(\mathbb{R}^d)}\Bigg)^{\frac{1}{p^*}}. \tag{4.16}$$

Далі розглянемо два випадки у залежності від співвідношення між параметрами p^* і θ.

1) У випадку $p^* < \theta < \infty$, застосовуючи до останньої суми у співвідношенні (4.16) нерівність Гельдера з показником $\frac{\theta}{p^*}$, враховуючи означення

норми функцій з класу $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ (1.66), а також співвідношення (4.8), продовжимо оцінку

$$E_{Q(\kappa(N))}(f)_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^{p^*}_{L_p(\mathbb{R}^d)}\big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-1}\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\right)^{\frac{1}{p^*}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)}\big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{\frac{p^*\theta}{\theta-p^*}}\right)^{\frac{1}{p^*}-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \|f(\cdot)\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{\frac{p^*\theta}{\theta-p^*}}\right)^{\frac{1}{p^*}-\frac{1}{\theta}} \ll \frac{1}{N}\left|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\right|^{\frac{1}{p^*}-\frac{1}{\theta}}.$$

Якщо ж $\theta = \infty$, то аналогічно до попереднього випадку, але скориставшись (1.67), можемо записати

$$E_{Q(\kappa(N))}(f)_{L_p(\mathbb{R}^d)} \ll \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^{p^*}_{L_p(\mathbb{R}^d)}\right)^{\frac{1}{p^*}} \ll$$

$$\ll \sup_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-1}\|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \ll$$

$$\ll \frac{1}{N}\left|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\right|^{\frac{1}{p^*}}.$$

2) Нехай $1 \leqslant \theta \leqslant p^*$, $p^* \neq 1$. Тоді, скориставшись нерівністю (2.17), оцінку (4.16) продовжимо таким чином:

$$E_{Q(\kappa(N))}(f)_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^{p^*}_{L_p(\mathbb{R}^d)}\right)^{\frac{1}{p^*}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)}\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \kappa^{\perp}(N)} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-\theta} \|\delta_{\boldsymbol{s}}^{*}(f, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \sup_{\boldsymbol{s} \in \kappa^{\perp}(N)} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) \ll \frac{1}{N}.$$

Оцінки зверху в (4.15) встановлено.

Перейдемо до встановлення оцінки знизу. Для цього розглянемо кілька випадків у залежності від значень параметрів p і θ та побудуємо функції $f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, для яких оцінки знизу величин $\mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\big(f\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)}$ збігаються за порядком з оцінками знизу величин $\mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)}$ в (4.15). Ці функції будемо будувати на основі функції $D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$, яка означена згідно з формулою (2.23) і описана у пункті 2.3. Зауважимо також, що при $1 < p < \infty$ для норми $D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$ має місце оцінка (2.26), яка відіграє важливе значення при встановленні результатів, а саме

$$\Big\| \sum_{\boldsymbol{k} \in \rho_{+}^{*}(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot) \Big\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(1 - \frac{1}{p}\right)}.$$

Також важливу роль при доведенні результатів буде відігравати наступне твердження, яке ми, наслідуючи Wang Heping і Sun Yongsheng, сформулюємо у вигляді леми.

Лема 4.6 ([237]). *Нехай $1 < p < \infty$. Тоді для функції*

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \geqslant 0} c_{\boldsymbol{k}} \prod_{j=1}^{d} D_{2^{k_j - 1}}(x_j),$$

виконується співвідношення

$$\|f(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{k} \geqslant 0} |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Далі розглянемо декілька випадків.

1) Нехай $2 < p < \infty$, $2 \leqslant \theta < \infty$. Тоді розглянемо функцію

$$f_1(\boldsymbol{x}) := C_1 \frac{1}{N} \left|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\right|^{-\frac{1}{\theta}} \sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(\kappa^{\perp}(N))} \prod_{j=1}^{d} D_{2^{s_j - 1}}(x_j).$$

Покажемо, що за певного вибору сталої $C_1 > 0$ функція $f_1 \in S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$. Оскільки, як випливає з доведення леми 4.6,

$$\left\| \prod_{j=1}^{d} D_{2^{s_j-1}}(x_j) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \ll \left\| \prod_{j=1}^{d} \left| \frac{\sin(x_j/2)}{x_j} \right| \right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \ll 1, \tag{4.17}$$

то, скориставшись означенням норми функції з класу $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ (співвідношення (1.66) і (4.14)), отримаємо

$$\|f_1(\cdot)\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(\kappa^{\perp}(N))} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-\theta} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_1, \cdot)\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \frac{1}{N} \left|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\right|^{-\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(\kappa^{\perp}(N))} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-\theta} \left\| \prod_{j=1}^{d} D_{2^{s_j-1}}(\cdot) \right\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \frac{1}{N} \left|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\right|^{-\frac{1}{\theta}} N \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(\kappa^{\perp}(N))} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= \left|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\right|^{-\frac{1}{\theta}} \left|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\right|^{\frac{1}{\theta}} = 1.$$

Далі, оскільки відповідно до вибору функції f_1 маємо $S_{Q(\kappa(N))}(f_1, \cdot) = 0$, то згідно з лемою 4.6, отримаємо

$$\mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} \gg \mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\big(f_1\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \|f_1(\cdot) - S_{Q(\kappa(N))}(f_1, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} = \|f_1(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp$$

$$\asymp \frac{1}{N} \left|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\right|^{-\frac{1}{\theta}} \left\| \sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(\kappa^{\perp}(N))} \prod_{j=1}^{d} D_{2^{s_j-1}}(x_j) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp$$

$$\asymp \frac{1}{N} \left|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\right|^{-\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{s \in \Theta(\kappa^{\perp}(N))} 1 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{N} \left|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\right|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}.$$

2) У випадку $2 < p < \infty$, $\theta = \infty$ розглянемо функцію

$$f_2(\boldsymbol{x}) := C_2 \frac{1}{N} \sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(\kappa^{\perp}(N))} \prod_{j=1}^{d} D_{2^{s_j - 1}}(x_j)$$

і покажемо, що вона належить до класу $S^{\Omega}_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)$ з деякою сталою $C_2 > 0$.

Скориставшись означенням норми функції з класу $S^{\Omega}_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)$ (1.67), співвідношеннями (4.14) і (4.17), отримуємо

$$\|f_2(\cdot)\|_{S^{\Omega}_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)} \asymp \sup_{\boldsymbol{s} \in \Theta(\kappa^{\perp}(N))} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-1} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_2, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp$$

$$\asymp \frac{1}{N} \sup_{\boldsymbol{s} \in \Theta(\kappa^{\perp}(N))} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-1} \left\| \prod_{j=1}^{d} D_{2^{s_j - 1}}(\cdot) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \ll 1.$$

Оскільки згідно з вибором функції f_2 маємо $S_{Q(\kappa(N))}(f_2, \cdot) = 0$, то скориставшись лемою 4.6, отримуємо

$$\mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\big(S^{\Omega}_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} \geqslant \mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\big(f_2\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \|f_2(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \gg \frac{1}{N} \left\| \sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(\kappa^{\perp}(N))} \prod_{j=1}^{d} D_{2^{s_j - 1}}(\cdot) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp$$

$$\asymp \frac{1}{N} \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(\kappa^{\perp}(N))} 1 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{N} \left|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\right|^{\frac{1}{2}}.$$

3) Нехай тепер має місце випадок $1 < p < \infty$, $1 \leqslant \theta < p^*$.

Покажемо, що функція

$$f_3(\boldsymbol{x}) := C_3\, \Omega(2^{-\tilde{\boldsymbol{s}}}) \prod_{j=1}^{d} D_{2^{\tilde{s}_j - 1}}(x_j), \quad \tilde{\boldsymbol{s}} \in \Theta(\kappa^{\perp}(N)), \quad C_3 > 0,$$

належить до класу $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$.

Дійсно, відповідно до (1.66) і (4.17), маємо

$$\|f_3(\cdot)\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \asymp \left(\sum_{\tilde{\boldsymbol{s}} \in \Theta(\kappa^{\perp}(N))} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-\theta} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_3, \cdot)\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= \left(\left\| \Omega(2^{-\tilde{\boldsymbol{s}}}) \prod_{j=1}^{d} D_{2^{\tilde{s}_j-1}}(\cdot) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^{\theta} \left(\Omega(2^{-\tilde{\boldsymbol{s}}})\right)^{-\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 1.$$

Врахувавши, що $S_{Q(\kappa(N))}(f_3, \cdot) = 0$, а також (4.14) і (4.17), отримуємо

$$\mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} \geqslant \mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\big(f_3\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} = \|f_3(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= C_3 \left\| \Omega(2^{-\tilde{s}}) \prod_{j=1}^{d} D_{2^{\tilde{s}_j-1}}(\cdot) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp \frac{1}{N}.$$

4) У випадку $1 < p \leqslant 2$, $p \leqslant \theta < \infty$ розглянемо функцію

$$f_4(\boldsymbol{x}) := C_4 \frac{1}{N} \big|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\big|^{-\frac{1}{\theta}} \sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(\kappa^{\perp}(N))} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(\frac{1}{p}-1\right)} \sum_{\boldsymbol{k} \in \rho^*_{+}(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}),$$

де $\|\boldsymbol{s}\|_1 = s_1 + \ldots + s_d$.

Спочатку покажемо, що $f_4 \in S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ з деякою сталою $C_4 > 0$. Беручи до уваги (2.26) і (4.2), будемо мати

$$\|f_4(\cdot)\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(\kappa^{\perp}(N))} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\right)^{-\theta} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_4, \cdot)\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \frac{1}{N} \big|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\big|^{-\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(\kappa^{\perp}(N))} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\right)^{-\theta} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(\frac{1}{p}-1\right)\theta} \times \right.$$

$$\left. \times \left\| \sum_{\boldsymbol{k} \in \rho^*_{+}(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot) \right\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \frac{1}{N} \big|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\big|^{-\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(\kappa^{\perp}(N))} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\right)^{-\theta} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(\frac{1}{p}-1\right)\theta}\, 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(1-\frac{1}{p}\right)\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \frac{1}{N} \big|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\big|^{-\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(\kappa^{\perp}(N))} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\right)^{-\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \frac{1}{N}\left|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\right|^{-\frac{1}{\theta}} N \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(\kappa^{\perp}(N))} 1\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 1.$$

Покладемо

$$\Delta(\boldsymbol{s}) = \left\{\boldsymbol{x}\colon 2^{-s_j-1} \leqslant x_j < 2^{-s_j},\ j=\overline{1,d}\right\},$$

і зауважимо, що $\Delta(\boldsymbol{s})\cap\Delta(\boldsymbol{s}') = \varnothing$, якщо $\boldsymbol{s}\neq\boldsymbol{s}'$. Таким чином, беручи до уваги, що $S_{Q(\kappa(N))}(f_4,\cdot) = 0$, і скориставшись твердженням 2.1, будемо мати

$$\mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} \geqslant \mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\big(f_4\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \|f_4(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \gg \left\|\left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(\kappa^{\perp}(N))} |\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_4,\cdot)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(\kappa^{\perp}(N))} \int\limits_{\Delta(\boldsymbol{s})} |\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_4,\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.18}$$

Далі, оскільки

$$\int\limits_{\Delta(\boldsymbol{s})} |\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_4,\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} =$$

$$= \left(\frac{1}{N}\right)^p \left|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\right|^{-\frac{p}{\theta}} 2^{p\|\boldsymbol{s}\|_1\left(\frac{1}{p}-1\right)} \int\limits_{\Delta(\boldsymbol{s})} \left|\sum_{\boldsymbol{k}\in\rho^*_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})\right|^p d\boldsymbol{x} \gg$$

$$\gg \left(\frac{1}{N}\right)^p \left|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\right|^{-\frac{p}{\theta}} 2^{p\|\boldsymbol{s}\|_1\left(\frac{1}{p}-1\right)} \int\limits_{\Delta(\boldsymbol{s})} 2^{p\|\boldsymbol{s}\|_1} d\boldsymbol{x} \gg$$

$$\gg \left(\frac{1}{N}\right)^p \left|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\right|^{-\frac{p}{\theta}} 2^{p\left(\frac{1}{p}-1\right)\|\boldsymbol{s}\|_1} 2^{(p-1)\|\boldsymbol{s}\|_1} = \left(\frac{1}{N}\right)^p \left|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\right|^{-\frac{p}{\theta}},$$

то (4.18) продовжимо таким чином:

$$\mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} \gg \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(\kappa^{\perp}(N))} \left(\frac{1}{N}\right)^p \left|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\right|^{-\frac{p}{\theta}}\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \frac{1}{N}\big|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\big|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}}.$$

5) Насамкінець у випадку $1 < p \leqslant 2$, $\theta = \infty$, розглянемо функцію

$$f_5(\boldsymbol{x}) := C_5\frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(\kappa^{\perp}(N))} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\left(\frac{1}{p}-1\right)}\sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+^*(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}), \quad C_5 > 0,$$

для якої, скориставшись (2.26) і (4.2), маємо

$$\|f_5(\cdot)\|_{S^{\Omega}_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)} \asymp \sup_{\boldsymbol{s}\in\Theta(\kappa^{\perp}(N))}\frac{\|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_5,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}}{\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})} \ll$$

$$\ll \sup_{\boldsymbol{s}\in\Theta(\kappa^{\perp}(N))} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\left(\frac{1}{p}-1\right)}\Bigg\|\sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+^*(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot)\Bigg\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \ll 1.$$

Аналогічно, як і для функції f_4, отримуємо

$$\mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} \geqslant \mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\big(f_5\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \|f_5(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \gg \frac{1}{N}\big|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\big|^{\frac{1}{p}}.$$

Оцінки знизу в (4.15) встановлено.

Теорему 4.5 доведено.

Зауваження 4.7. Скориставшись співвідношенням (4.3), отримані в теоремі 4.5 оцінки можна переписати таким чином

$$\mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp E_{Q(\kappa(N))}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp$$

$$\asymp \frac{1}{N}\big(\log_2 N\big)^{(d-1)\left(\frac{1}{p^*}-\frac{1}{\theta}\right)_+}.$$

У наступному твердженні встановимо оцінки для величин $\mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ та $E_{Q(\kappa(N))}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ при $1 < p < q < \infty$.

Теорема 4.8. *Нехай $1 < p < q < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, з деяким $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, тоді мають місце порядкові оцінки*

$$\mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp E_{Q(\kappa(N))}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp$$

$$\asymp \frac{1}{N}\big|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\big|^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+}, \tag{4.19}$$

де $a_+ = \max\{0, a\}$.

Зауваження 4.9. Оскільки $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, з деяким $\alpha > \beta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, то на підставі твердження 1.31 для $f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ маємо, що $f \in S^{\Omega_1}_{q,\theta}B(\mathbb{R}^d) \subset$ $\subset L_q(\mathbb{R}^d)$, де $\Omega_1(\boldsymbol{t}) = \Omega(\boldsymbol{t})\boldsymbol{t}^{-\beta}$ і, крім цього, $\|f\|_{S^{\Omega_1}_{q,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \ll \|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)}$.

Доведення. Спочатку встановимо в (4.19) оцінки зверху. Нехай $f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ і $1 < p < q < \infty$. Тоді, скориставшись співвідношенням (4.13) і лемою 2.2, можемо записати

$$E_{Q(\kappa(N))}(f)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp \mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}(f)_{L_q(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \Bigg\| f(\cdot) - \sum_{\boldsymbol{s} \in \kappa(N)} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot) \Bigg\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} = \Bigg\| \sum_{\boldsymbol{s} \in \kappa^{\perp}(N)} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot) \Bigg\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}$$

$$\ll \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \kappa^{\perp}(N)} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^q_{L_p(\mathbb{R}^d)} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) q} \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{4.20}$$

Далі, щоб продовжити останню оцінку, розглянемо декілька співвідношень між параметрами q і θ.

1) Нехай $q < \theta$. Тоді, для $1 < \theta < \infty$, застосувавши до (4.20) нерівність Гельдера з показником $\frac{\theta}{q}$ та співвідношення (4.8), одержуємо

$$E_{Q(\kappa(N))}(f)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \ll \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \kappa^{\perp}(N)} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \times$$

$$\times \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \kappa^{\perp}(N)} \left(2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \, \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) \right)^{\frac{q\theta}{\theta - q}} \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}} \leqslant$$

$$\leqslant \|f(\cdot)\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \kappa^{\perp}(N)} \left(2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \, \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) \right)^{\frac{q\theta}{\theta - q}} \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \frac{1}{N} \big| \Theta(\kappa^{\perp}(N)) \big|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}}.$$

Якщо ж $\theta = \infty$, то для $f \in S^{\Omega}_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)$, згідно з (1.67), має місце співвідношення $\|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \ll \Omega(2^{-\boldsymbol{s}})$. Тому (4.20), скориставшись (4.8), можемо продовжити таким чином

$$E_{Q(\kappa(N))}(f)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \ll \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \kappa^{\perp}(N)} \left(2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \frac{1}{N} \left| \Theta(\kappa^{\perp}(N)) \right|^{\frac{1}{q}}.$$

2) Нехай тепер $1 \leqslant \theta \leqslant q < \infty$, $q \neq 1$. Скориставшись нерівністю (2.17), беручи до уваги, що $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ та враховуючи (4.2), із (4.20), отримуємо

$$E_{Q(\kappa(N))}(f)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \kappa^{\perp}(N)} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \kappa^{\perp}(N)} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\right)^{-\theta} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\theta} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\right)^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \kappa^{\perp}(N)} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^{\theta}_{p} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\right)^{-\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \sup_{\boldsymbol{s} \in \kappa^{\perp}(N)} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) \leqslant$$

$$\leqslant \|f(\cdot)\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \sup_{\boldsymbol{s} \in \kappa^{\perp}(N)} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) \ll \frac{1}{N}.$$

Оцінки зверху в теоремі встановлено.

Перейдемо до встановлення оцінок знизу. Для цього при певних значеннях параметрів p, q і θ достатньо вказати функції $f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, для яких оцінки знизу величин $\mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}(f)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ співпадають за порядком з оцінками знизу величин $\mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\left(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\right)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ в (4.19). Ці функції також будемо будувати на основі функції $D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$ (див. (2.23)).

Далі розглянемо декілька випадків у залежності від значень параметрів p, q і θ.

1) Нехай $\theta=\infty$. Розглянемо функцію

$$f_6(\boldsymbol{x})=C_6\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(\kappa^{\perp}(N))}\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)}\sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+^*(\boldsymbol{s})}D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}).$$

При певному виборі сталої $C_6>0$ дана функція належить до класу $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ оскільки, скориставшись оцінкою (2.26), можемо записати

$$\|f_6(\cdot)\|_{S^{\Omega}_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)}=\sup_{\boldsymbol{s}\in\Theta(\kappa^{\perp}(N))}\frac{\|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_6,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}}{\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})}=$$

$$=\sup_{\boldsymbol{s}\in\Theta(\kappa^{\perp}(N))}C_6\frac{\left\|\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)}\sum\limits_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})}D_{\boldsymbol{k}}(\cdot)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}}{\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})}\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{\boldsymbol{s}\in\Theta(\kappa^{\perp}(N))}2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)}\left\|\sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+^*(\boldsymbol{s})}D_{\boldsymbol{k}}(\cdot)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}\leqslant C_7,\ C_7>0.$$

Далі для $\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^d_+$ знову будемо розглядати множину

$$\Delta(\boldsymbol{s})=\left\{\boldsymbol{x}\colon 2^{-s_j-1}\leqslant x_j<2^{-s_j},\quad j=\overline{1,d}\right\}.$$

Таким чином, беручи до уваги, що $S_{Q(\kappa(N))}(f_6,\cdot)=0$, скориставшись твердженням 2.1 та враховуючи, що (див., наприклад, [237])

$$\left|\sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+^*(\boldsymbol{s})}D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})\right|=\left|\sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+^*(\boldsymbol{s})}\prod_{j=1}^{d}D_{k_j}(x_j)\right|=\left|\prod_{j=1}^{d}\sum_{k_j=\eta(s_j)2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1}D_{k_j}(x_j)\right|=$$

$$=\left|\prod_{j=1}^{d}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin 2^{s_j}x_j-\sin\eta(s_j)2^{s_j-1}x_j}{x_j}\right|,$$

а також (4.2), будемо мати

$$\mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}\geqslant\mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\big(f_6\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}=\|f_6(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}\gg$$

$$\gg \left\| \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(\kappa^{\perp}(N))} |\delta_{\boldsymbol{s}}^{*}(f_6, \cdot)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \geqslant \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(\kappa^{\perp}(N))} \int\limits_{\Delta(\boldsymbol{s})} |\delta_{\boldsymbol{s}}^{*}(f_6, \boldsymbol{x})|^q d\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{q}} \gg$$

$$\gg \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(\kappa^{\perp}(N))} \int\limits_{\Delta(\boldsymbol{s})} \left| \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(1-\frac{1}{p}\right)} \sum_{\boldsymbol{k} \in \rho_{+}^{*}(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) \right|^q d\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(\kappa^{\perp}(N))} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(1-\frac{1}{p}\right)} \right)^q \int\limits_{\Delta(\boldsymbol{s})} \left| \sum_{\boldsymbol{k} \in \rho_{+}^{*}(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) \right|^q d\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{q}} \gg$$

$$\gg \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(\kappa^{\perp}(N))} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \geqslant \frac{1}{2^l N} \left| \Theta(\kappa^{\perp}(N)) \right|^{\frac{1}{q}}. \qquad (4.21)$$

2) Нехай тепер $1 \leqslant \theta \leqslant q < \infty$, $q \neq 1$. Розглянемо функцію

$$f_7(\boldsymbol{x}) := C_8 \Omega(2^{-\tilde{\boldsymbol{s}}}) 2^{-\|\tilde{\boldsymbol{s}}\|_1 \left(1-\frac{1}{p}\right)} \sum_{\boldsymbol{k} \in \rho_{+}^{*}(\tilde{\boldsymbol{s}})} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}),$$

$$\tilde{\boldsymbol{s}} \in \Theta(\kappa^{\perp}(N)), \quad C_8 > 0.$$

Згідно з (2.26) маємо

$$\|f_7(\cdot)\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(\kappa^{\perp}(N))} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) \right)^{-\theta} \|\delta_{\boldsymbol{s}}^{*}(f_7, \cdot)\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \left(\left(\Omega(2^{-\tilde{\boldsymbol{s}}}) \right)^{-\theta} \left(\Omega(2^{-\tilde{\boldsymbol{s}}}) \right)^{\theta} 2^{-\theta \|\tilde{\boldsymbol{s}}\|_1 \left(1-\frac{1}{p}\right)} \left\| \sum_{\boldsymbol{k} \in \rho_{+}^{*}(\tilde{\boldsymbol{s}})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot) \right\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \left(2^{-\theta \|\tilde{\boldsymbol{s}}\|_1 \left(1-\frac{1}{p}\right)} 2^{\theta \|\tilde{\boldsymbol{s}}\|_1 \left(1-\frac{1}{p}\right)} \right)^{\frac{1}{\theta}} = 1,$$

а отже, $f_7 \in S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ при певному значенні сталої C_8.

Враховуючи, що $S_{Q(\kappa(N))}(f_7, \cdot) = 0$, (2.26) та (4.2), отримуємо

$$\mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\left(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\right)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \geqslant \mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\left(f_7\right)_{L_q(\mathbb{R}^d)} = \|f_7(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \gg$$

$$\gg \Omega(2^{-\tilde{\boldsymbol{s}}})2^{-\|\tilde{\boldsymbol{s}}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)}\left\|\sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+^*(\tilde{\boldsymbol{s}})} D_k(\cdot)\right\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp$$

$$\asymp \Omega(2^{-\tilde{\boldsymbol{s}}})2^{-\|\tilde{\boldsymbol{s}}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)}2^{\|\tilde{\boldsymbol{s}}\|_1\left(1-\frac{1}{q}\right)} = \Omega(2^{-\tilde{\boldsymbol{s}}})2^{\|\tilde{\boldsymbol{s}}\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \geqslant \frac{1}{2^l N}.$$

3) У випадку $1 < q < \theta < \infty$ для функції

$$f_8(\boldsymbol{x}) = C_9\left|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\right|^{-\frac{1}{\theta}}\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(\kappa^{\perp}(N))}\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)}\sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+^*(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}),$$

скориставшись співвідношенням (2.26), отримаємо

$$\|f_8(\cdot)\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \asymp \left|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\right|^{-\frac{1}{\theta}}\left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(\kappa^{\perp}(N))}\big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-\theta}\|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_8,\cdot)\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)}\right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \left|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\right|^{-\frac{1}{\theta}}\left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(\kappa^{\perp}(N))}\big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-\theta}\big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{\theta}2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1\theta\left(1-\frac{1}{p}\right)}\times\right.$$

$$\left.\times\left\|\sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+^*(\boldsymbol{s})} D_k(\cdot)\right\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)}\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \left|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\right|^{-\frac{1}{\theta}}\left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(\kappa^{\perp}(N))}2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1\theta\left(1-\frac{1}{p}\right)}2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\theta\left(1-\frac{1}{p}\right)}\right)^{\frac{1}{\theta}} = 1.$$

Отже, $f_8 \in S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ для деякого значення $C_9 > 0$.

Врахувавши, що $S_{Q(\kappa(N))}(f_8,\cdot) = 0$, та провівши міркування, аналогічні до тих, що використовувалися для встановлення оцінки (4.21), одержимо

$$\mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \geqslant \mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\big(f_8\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} = \|f_8(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \gg$$

$$\gg \frac{1}{N}\left|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}}.$$

Оцінки знизу в (4.19) встановлено.

Теорему 4.8 доведено.

Зауваження 4.10. Скориставшись співвідношенням (4.3), отримані в теоремі 4.8 оцінки можна записати таким чином

$$\mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp E_{Q(\kappa(N))}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp$$
$$\asymp \frac{1}{N}\big(\log_2 N\big)^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+}.$$

На завершення зробимо коментарі щодо одержаних у цьому підпункті результатів та порівняємо їх з відомими оцінками для класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$.

Як уже зазначалося у випадку $\Omega(\boldsymbol{t}) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$, $r_j > 0$, класи $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ збігаються з класами з домінуючою мішаною похідною $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$.

Розглянемо спочатку випадок $p = q$. Параметр $\boldsymbol{r}$ виберемо так, що $\boldsymbol{r} = \mathbf{1}$, тобто $r_j = 1$, $j = \overline{1,d}$. Провівши елементарні перетворення, отримуємо, що наближення буде здійснюватися на множині

$$Q(\kappa(N)) = \bigcup_{\boldsymbol{s}\in\kappa(N)} Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}} = \bigcup_{\|\boldsymbol{s}\|_1\leqslant \log_2 N} Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}},$$

оскільки
$$\kappa(N) = \left\{\boldsymbol{s} = (s_1,\dots,s_d) \in \mathbb{Z}^d_+ \colon 2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1} \geqslant \frac{1}{N}\right\}.$$

Відповідно при $\boldsymbol{r} = \mathbf{1}$ східчастий гіперболічний хрест, який визначається згідно з формулою (1.22), буде мати вигляд (див. також (4.9)):

$$\tilde{Q}_n = \bigcup_{\|\boldsymbol{s}\|_1\leqslant n} Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}}.$$

Далі, якщо параметри n та N пов'язати співвідношенням $n \asymp \log_2 N$, то будемо мати, що $\operatorname{mes} Q(\kappa(N)) \asymp \operatorname{mes} \tilde{Q}_n$ і, крім цього, з теореми 4.5 отримаємо таку оцінку

$$\mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\big(S^{\mathbf{1}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp E_{Q(\kappa(N))}\big(S^{\mathbf{1}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp$$
$$\asymp 2^{-n} n^{(d-1)\left(\frac{1}{p^*}-\frac{1}{\theta}\right)_+},$$

яка збігається з уже відомою оцінкою величин (1.23) і (1.24) з твердження 1.6 при відповідних значеннях параметрів і встановлена Sun YoungSheng та Wang Heping.

У випадку, коли $p = q$ і параметр $\boldsymbol{r}$ вибрати так, що $r_j = r_i \neq 1$, $i, j = \overline{1, d}$, то отримуємо, що наближення уже буде здійснюватися на множині

$$Q(\kappa(N)) = \bigcup_{\boldsymbol{s} \in \kappa(N)} Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}} = \bigcup_{\|\boldsymbol{s}\|_1 \leqslant \frac{1}{r_1} \log_2 N} Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}}.$$

Як видно з останньої формули вибір множини на якій буде міститися носій перетворення Фур'є функцій з допомогою яких здійснюється наближення буде залежати також і від значення r_1, на відміну від східчастого гіперболічного хреста, який і у цьому випадку визначається формулою (4.9). Відповідно вибравши $n \asymp \frac{1}{r_1} \log_2 N$, з теореми 4.5 отримаємо таку оцінку

$$\mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp E_{Q(\kappa(N))}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp$$

$$\asymp 2^{-nr_1}\big(nr_1\big)^{(d-1)\left(\frac{1}{p^*}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \asymp C(r_1)\ 2^{-nr_1} n^{(d-1)\left(\frac{1}{p^*}-\frac{1}{\theta}\right)_+},$$

яка також збігається за порядком з уже відомою оцінкою з твердження 1.6 при відповідних значеннях параметрів.

Наведемо також приклад, який ілюструє залежність вибору множини $Q(\kappa(N))$ від задання функції $\Omega(\boldsymbol{t})$ у випадку $p = q$ (див., наприклад, [194]).

Нехай

$$\Omega(\boldsymbol{t}) = t_1 \cdot \ldots \cdot t_d \cdot \log_2 \frac{1}{t_d}.$$

Для таким чином заданої функції $\Omega(\boldsymbol{t})$ отримуємо, що носій перетворення Фур'є наближаючого агрегату буде міститися на множині

$$Q(\kappa(N)) = \bigcup_{\boldsymbol{s} \in \kappa(N)} Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}} = \bigcup_{\|\boldsymbol{s}\|_1 (\log_2 s_d)^{-1} \leqslant \log_2 N} Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}},$$

оскільки у цьому випадку

$$\kappa(N) = \left\{ \boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{Z}_+^d \colon 2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1} s_d \geqslant \frac{1}{N} \right\}.$$

Насамкінець зауважимо, що у випадку $p \neq q$, як видно з означення множини $\kappa(N)$ (1.68), отримуємо, що множина, на якій буде міститися носій перетворення Фур'є функцій з допомогою яких здійснюється наближення — $Q(\kappa(N))$, крім вибору Ω, також буде залежати і від значення параметрів p і q.

4.3. Наближення функцій з класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ цілими функціями спеціального вигляду у просторі $L_q(\mathbb{R}^d)$

У даному підрозділі будуть знайдені точні за порядком оцінки для величини (1.27) і відповідно (1.29) у випадку, коли функція f належить класам $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$. Зауважимо, що у процесі доведення отриманих у цьому підпункті результатів будемо використовувати методи і міркування, які були запропоновані у роботах [123, 145, 197], з відповідною модифікацією до означення класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$.

Розглянемо спочатку випадок $1 < p < q < \infty$. Має місце така теорема.

Теорема 4.11. *Нехай* $1 < p < q < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d)$, *де* $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ *з* $\alpha > \max\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}; \frac{1}{p} - \frac{2}{q} + \frac{1}{\theta}\right\}$. *Тоді для будь-яких натуральних* n *та* $M = M(n)$ *таких, що* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *справедливе порядкове співвідношення*

$$e^{\mathfrak{F}}_M\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{4.22}$$

Доведення. Перш ніж безпосередньо перейти до доведення теореми зазначимо, що згідно з умовою також виконується зауваженням 4.9, оскільки у даному випадку $\alpha > \max\left\{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}; \frac{1}{p}-\frac{2}{q}+\frac{1}{\theta}\right\} > \frac{1}{p}-\frac{1}{q}$. Додаткова умова на α зумовлена технікою доведення.

Отримаємо спочатку в (4.22) оцінку зверху. У випадку $\theta \geqslant q$ маємо $\alpha > \frac{1}{p}-\frac{1}{q}$, тому необхідна оцінка, згідно з (1.30), слідує із оцінки наближення класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ цілими функціями $S_{\tilde{Q}_n}(f,\boldsymbol{x})$ за умови, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$ (див. твердження 4.4), а саме маємо

$$e^{\mathfrak{F}}_M\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \ll \mathcal{E}_{\tilde{Q}_n}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp$$
$$\asymp \omega(2^{-n})2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Таким чином залишається отримати оцінку зверху у випадку $1 \leqslant \theta < q$. Нехай $f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant \theta < q$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ підберемо числа $M = M(n)$ так, щоб виконувалось співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$ і покладемо $n_0 = [n + (d-1)\log n]$, де $[a]$ — ціла частина числа a.

Побудуємо множину $\mathcal{L}' \subset \mathbb{Z}^d_+$ і відповідно цілу функцію $S_{\mathfrak{M}}(f,\boldsymbol{x})$, за допомогою якої будемо здійснювати наближення функції $f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$. З цією метою спочатку включимо до множини $\mathcal{L}'$ множину векторів $\boldsymbol{s}$ для яких $\|\boldsymbol{s}\|_1 \leqslant n$ і позначимо її $\Delta(n)$, тобто

$$\Delta(n) = \Big\{\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^d_+ \colon \|\boldsymbol{s}\|_1 \leqslant n\Big\}.$$

Далі будемо розширювати її за рахунок включення необхідної кількості векторів $\boldsymbol{s}$ із множин

$$\Delta^*(l) = \Big\{\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^d_+ \colon \|\boldsymbol{s}\|_1 = l\Big\},$$

де $l \in \mathbb{N}$ і $n < l \leqslant n_0$.

Кожному $l \in \mathbb{N}$, $n < l \leqslant n_0$, поставимо у відповідність величину

$$B_l = \left(\sum_{s \in \Delta^*(l)} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-\theta} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)}\right)^{\frac{1}{\theta}} \tag{4.23}$$

і підберемо число m_l, яке не перевищує кількості елементів множини $\Delta^*(l)$, причому

$$m_l \asymp \big[2^n n^{d-1} 2^{-l} B^{\theta}_l\big] + 1.$$

Далі для довільного $l \in \mathbb{N}$, $l \in (n, n_0]$, через $a_i(f,l)$, $i = 1, 2, \ldots$, позначимо члени спадної перестановки чисел $\|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}$, $\boldsymbol{s} \in \Delta^*(l)$, а через $\widetilde{\Delta}^*(l)$ — набір із m_l векторів $\boldsymbol{s} \in \Delta^*(l)$, яким відповідають найбільші значення $\|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}$. Тепер покладемо

$$\mathcal{L}' = \Delta(n) \cup \bigcup_{l=n+1}^{n_0} \widetilde{\Delta}^*(l).$$

Таким чином ми побудували множину векторів $\mathcal{L}' \subset \mathbb{Z}^d_+$ і разом з нею функцію

$$S_{\mathfrak{M}}(f,\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{s} \in \Delta(n) \cup \bigcup\limits_{l=n+1}^{n_0} \widetilde{\Delta}^*(l)} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x})$$

за допомогою якої здійснюватимемо наближення функції $f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ та множину, на якій зосереджений носій перетворення Фур'є даної функції

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{\boldsymbol{s} \in \Delta(n) \cup \bigcup\limits_{l=n+1}^{n_0} \widetilde{\Delta}^*(l)} Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}}.$$

Покажемо, що $\operatorname{mes}\mathfrak{M} \ll M$. Скориставшись тим, що

$$\sum_{\boldsymbol{s} \in \Delta(n)} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\boldsymbol{s} \in \Delta^*(j)} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1} = \sum_{j=1}^{n} 2^j \sum_{\boldsymbol{s} \in \Delta^*(j)} 1 \asymp$$

$$\asymp \sum_{j=1}^{n} 2^j j^{d-1} \asymp 2^n n^{d-1}, \tag{4.24}$$

і врахувавши вибір чисел m_l, можемо записати

$$\operatorname{mes}\mathfrak{M} \ll \sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta(n)} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1} + \sum_{l=n+1}^{n_0} 2^l m_l \asymp 2^n n^{d-1} + \sum_{l=n+1}^{n_0} 2^l m_l \ll$$

$$\ll 2^n n^{d-1} + 2^n n^{d-1} \sum_{l=n+1}^{n_0} \sum_{\boldsymbol{s} \in \Delta^*(l)} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-\theta} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)} \ll$$

$$\ll 2^n n^{d-1} + 2^n n^{d-1} \|f(\cdot)\|^{\theta}_{S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \ll 2^n n^{d-1} \asymp M.$$

Перейдемо тепер безпосередньо до встановлення оцінки наближення. Для $f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ маємо

$$\|f(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f,\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} = \Bigg\| f(\cdot) - \sum_{\boldsymbol{s}\in\Delta(n_0)} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot) + \sum_{\boldsymbol{s}\in\Delta(n_0)\setminus\mathcal{L}'} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\Bigg\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \leqslant$$

$$\leqslant \Bigg\| f(\cdot) - \sum_{\boldsymbol{s}\in\Delta(n_0)} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\Bigg\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} + \Bigg\| \sum_{\boldsymbol{s}\in\Delta(n_0)\setminus\mathcal{L}'} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\Bigg\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} = I_1 + I_2. \quad (4.25)$$

Оцінимо кожен з одержаних доданків у співвідношенні (4.25).

Для оцінки I_1, використовуючи твердження 4.4 при $1 \leqslant \theta < q$, а також враховуючи вибір числа n_0 і те, що у цьому випадку згідно з умовою теореми ω задовольняє умову (S^{α}) з $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{2}{q} + \frac{1}{\theta}$, отримуємо

$$I_1 \ll \omega(2^{-n_0}) 2^{n_0\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} = \frac{\omega(2^{-n_0})}{2^{-\alpha n_0}} 2^{-n_0\left(\alpha-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-n\left(\alpha-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} n^{-(d-1)\left(\alpha-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} =$$

$$= \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{-(d-1)\left(\alpha-\frac{1}{p}+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)}. \quad (4.26)$$

Для оцінки I_2, використовуючи лему 2.2, а також враховуючи значення чисел $a_i(f,l)$, можемо записати

$$I_2 = \Bigg\| \sum_{\boldsymbol{s}\in\Delta(n_0)\setminus\mathcal{L}'} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\Bigg\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \ll \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Delta(n_0)\setminus\mathcal{L}'} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^q_{L_p(\mathbb{R}^d)} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l=n+1}^{n_0} \sum_{i>m_l} a_i^q(f,l) 2^{l\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{l=n+1}^{n_0} \sum_{i>m_l} a_i^{\theta}(f,l) a_i^{q-\theta}(f,l) 2^{l\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l=n+1}^{n_0} \sum_{i>m_l} a_i^{\theta}(f,l) i^{-\frac{q-\theta}{\theta}} \big(\omega(2^{-l})\big)^{q-\theta} B_l^{q-\theta} 2^{l\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{l=n+1}^{n_0} m_l^{-\frac{q-\theta}{\theta}} \big(\omega(2^{-l})\big)^{q-\theta} B_l^{q-\theta} 2^{l\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)q} \sum_{i>m_l} a_i^{\theta}(f,l) \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l=n+1}^{n_0} m_l^{-\frac{q-\theta}{\theta}} \big(\omega(2^{-l})\big)^{q-\theta} B_l^{q-\theta} 2^{l\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)q} \sum_{\boldsymbol{s}\in\Delta^*(l)} \|\delta_{\boldsymbol{s}}^*(f,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^{\theta} \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l=n+1}^{n_0} m_l^{-\frac{q-\theta}{\theta}} \big(\omega(2^{-l})\big)^{q-\theta} B_l^{q-\theta} 2^{l\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)q} \big(\omega(2^{-l})\big)^{\theta} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{\boldsymbol{s}\in\Delta^*(l)} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-\theta} \|\delta_{\boldsymbol{s}}^*(f,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^{\theta} \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l=n+1}^{n_0} m_l^{-\frac{q-\theta}{\theta}} 2^{l\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)q} \big(\omega(2^{-l})\big)^{q} B_l^{q-\theta} B_l^{\theta} \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{l=n+1}^{n_0} m_l^{-\frac{q-\theta}{\theta}} 2^{l\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)q} \big(\omega(2^{-l})\big)^{q} B_l^{q} \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{4.27}$$

Далі, підставляючи в останню суму (4.27) замість m_l їхні значення, отримуємо

$$I_2 \ll (2^n n^{d-1})^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{l=n+1}^{n_0} 2^{lq\left(\frac{1}{p}-\frac{2}{q}+\frac{1}{\theta}\right)} \big(\omega(2^{-l})\big)^{q} B_l^{\theta} \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{4.28}$$

Враховуючи, що ω задовольняє умову (S^{α}) з $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{2}{q} + \frac{1}{\theta}$, а також співвідношення (4.23), продовжимо оцінку (4.28)

$$I_2 \ll (2^n n^{d-1})^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \left(\sum_{l=n+1}^{n_0} 2^{-lq\left(\alpha-\left(\frac{1}{p}-\frac{2}{q}+\frac{1}{\theta}\right)\right)} B_l^{\theta} \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll (2^n n^{d-1})^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-n\left(\alpha-\frac{1}{p}+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta}\right)} \left(\sum_{l=n+1}^{n_0} B_l^{\theta} \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)} \left(\left(\sum_{l=n+1}^{n_0} \sum_{\boldsymbol{s} \in \Delta^*(l)} \|\delta_{\boldsymbol{s}}^*(f,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^{\theta} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \right)^{\frac{\theta}{q}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)} \|f(\cdot)\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)}^{\frac{\theta}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{4.29}$$

Із (4.25), враховуючи (4.26), (4.29), а також те, що $\operatorname{mes} \mathfrak{M} \ll M$, отримуємо оцінку зверху в (4.22) у випадку $1 \leqslant \theta < q$.

Тепер встановимо в (4.22) оцінку знизу. Для цього на основі функції $D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$, яка означена згідно з формулою (2.23), побудуємо екстремальні функції $f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, які її реалізують.

Нехай M і $l = l(M) \in \mathbb{N}$ — числа пов'язані співвідношеннями $2^l l^{d-1} \asymp M$ і $2^l l^{d-1} \geqslant 2M$. Розглянемо функцію

$$F(\boldsymbol{x}) = \sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 \leqslant l} \sum_{k \in \rho_+^*(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}).$$

Використовуючи оцінку (2.26) та співвідношення (4.24), при $1 \leqslant \theta < \infty$ згідно з твердження 1.30 отримуємо

$$\|F(\cdot)\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \asymp \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 \leqslant l} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-\theta} \|\delta_{\boldsymbol{s}}^*(F,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 \leqslant l} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-\theta} \left\| \sum_{\boldsymbol{k} \in \rho_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 \leqslant l} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-\theta} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(1-\frac{1}{p}\right)\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll \big(\omega(2^{-l})\big)^{-1} 2^{l\left(1-\frac{1}{p}\right)} l^{\frac{d-1}{\theta}}.$$

Отже, функція

$$f_9(\boldsymbol{x}) = C_{10}\, \omega(2^{-l}) 2^{l\left(\frac{1}{p}-1\right)} l^{-\frac{d-1}{\theta}} F(\boldsymbol{x})$$

з деякою сталою $C_{10} > 0$ належить класу $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant \theta < \infty$.

Якщо ж $\theta = \infty$, використовуючи оцінку (2.26), отримуємо

$$\|F(\cdot)\|_{S^{\Omega}_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)} \asymp \sup_{\|\boldsymbol{s}\|_1 \leqslant l} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-1} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(F,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \ll$$

$$\ll \big(\omega(2^{-l})\big)^{-1} \sup_{\|\boldsymbol{s}\|_1 \leqslant l} \Bigg\| \sum_{\boldsymbol{k} \in \rho^*_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot) \Bigg\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \ll$$

$$\ll \big(\omega(2^{-l})\big)^{-1} \sup_{\|\boldsymbol{s}\|_1 \leqslant l} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(1-\frac{1}{p}\right)} \ll \big(\omega(2^{-l})\big)^{-1} 2^{l\left(1-\frac{1}{p}\right)},$$

тобто функція

$$f_{10}(\boldsymbol{x}) = C_{11}\omega(2^{-l}) 2^{l\left(\frac{1}{p}-1\right)} F(\boldsymbol{x}),$$

належить класу $S^{\Omega}_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)$ з деякою сталою $C_{11} > 0$.

Покажемо, що побудовані вище функції f_9 та f_{10} реалізують оцінку знизу в (4.22). Для цього скористаємося відомим співвідношенням (див., наприклад, [15, § 2.6]), яке для функцій $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$ і $g \in L_{q'}(\mathbb{R}^d)$ має вигляд

$$\|f(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} = \sup_{\|g(\cdot)\|_{L_{q'}(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{x})\, g(\boldsymbol{x})| d\boldsymbol{x}, \tag{4.30}$$

де $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Нехай $f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ і $S_{\mathfrak{M}}(f,\boldsymbol{x})$ — ціла функція вигляду (1.28), носій перетворення Фур'є якої міститься у множині $\mathfrak{M} = \bigcup\limits_{\boldsymbol{s} \in \mathcal{L}} Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}}$, $\operatorname{mes}\mathfrak{M} \leqslant M$. Тоді, згідно з наведеним вище співвідношенням, можемо записати

$$\|f(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f,\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} = \sup_{\|g(\cdot)\|_{L_{q'}(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \big|\big(f(\boldsymbol{x}) - S_{\mathfrak{M}}(f,\boldsymbol{x})\big) g(\boldsymbol{x})\big|\, d\boldsymbol{x}. \tag{4.31}$$

Покладемо

$$g(\boldsymbol{x}) = C_{12} 2^{-\frac{l}{q}} l^{-\frac{d-1}{q'}} F(\boldsymbol{x}), \quad C_{12} > 0,$$

і покажемо, що з деякою константою $C_{12} > 0$ для норми функції $g(\boldsymbol{x})$ справедлива нерівність $\|g(\cdot)\|_{L_{q'}(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1$.

Для цього встановимо, що

$$\|F(\cdot)\|_{L_{q'}(\mathbb{R}^d)} \ll 2^{\frac{l}{q}} l^{\frac{d-1}{q'}}, \qquad 1 < q' < \infty. \tag{4.32}$$

Нехай спочатку $1 < q' \leqslant 2$. Тоді згідно з твердженням 2.1 і нерівністю

$$|a+b|^{\alpha} \leqslant |a|^{\alpha} + |b|^{\alpha}, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

можемо записати

$$\|F(\cdot)\|_{L_{q'}(\mathbb{R}^d)} \ll \left\| \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 \leqslant l} |\delta_{\boldsymbol{s}}^*(F,\cdot)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_{q'}(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 \leqslant l} \|\delta_{\boldsymbol{s}}^*(F,\cdot)\|_{L_{q'}(\mathbb{R}^d)}^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}}. \tag{4.33}$$

Використовуючи (2.26), продовжимо оцінку (4.33)

$$\|F(\cdot)\|_{L_{q'}(\mathbb{R}^d)} \ll \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 \leqslant l} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(1-\frac{1}{q'}\right) q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \ll 2^{\frac{l}{q}} \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 \leqslant l} 1 \right)^{\frac{1}{q'}} \ll 2^{\frac{l}{q}} l^{\frac{d-1}{q'}}.$$

Якщо $2 < q' < \infty$, то використовуючи лему 2.2 та співвідношення (2.26), отримуємо

$$\|F(\cdot)\|_{L_{q'}(\mathbb{R}^d)} \ll \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 \leqslant l} \|\delta_{\boldsymbol{s}}^*(F,\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}^{q'} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{q'}\right) q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 \leqslant l} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(1-\frac{1}{q}\right) q'} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{q'}\right) q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \leqslant 2^{\frac{l}{q}} \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 \leqslant l} 1 \right)^{\frac{1}{q'}} \ll 2^{\frac{l}{q}} l^{\frac{d-1}{q'}}.$$

Нехай $1 \leqslant \theta < \infty$. Підставляючи в (4.31) функції f_9 і g та враховуючи, що $M \asymp 2^l l^{d-1}$ і $\|g(\cdot)\|_{L_{q'}(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1$, будемо мати

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S_{p,\theta}^{\Omega} B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \geqslant e_M^{\mathfrak{F}}\big(f_9\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} = \inf_{\mathcal{L}:\, \mathrm{mes}\, \mathfrak{M} \leqslant M} \|f_9(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f_9,\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{\mathcal{L}\colon \operatorname{mes}\mathfrak{M}\leqslant M} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \big|\big(f_9(\boldsymbol{x}) - S_{\mathfrak{M}}(f_9,\boldsymbol{x})\big)g(\boldsymbol{x})\big|d\boldsymbol{x} \gg$$

$$\gg \inf_{\mathcal{L}\colon \operatorname{mes}\mathfrak{M}\leqslant M} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \big|\omega(2^{-l})2^{l\left(\frac{1}{p}-1\right)}l^{-\frac{d-1}{\theta}}\big(F(\boldsymbol{x}) - S_{\mathfrak{M}}(F,\boldsymbol{x})\big)2^{-\frac{l}{q}}l^{-\frac{d-1}{q'}}F(\boldsymbol{x})\big|d\boldsymbol{x} \geqslant$$

$$\geqslant \omega(2^{-l})2^{l\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1\right)}l^{-(d-1)\left(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{q'}\right)}\times$$

$$\times \inf_{\mathcal{L}\colon \operatorname{mes}\mathfrak{M}\leqslant M}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}|F(\boldsymbol{x})|^2d\boldsymbol{x} - \int\limits_{\mathbb{R}^d}|S_{\mathfrak{M}}(F,\boldsymbol{x})F(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}\right). \qquad (4.34)$$

Враховуючи, що згідно з (4.32) при $q = q' = 2$ отримуємо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}|F(\boldsymbol{x})|^2d\boldsymbol{x} = \|F(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^l l^{d-1}$$

і, як показано у роботі [145], має місце співвідношення

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\big|S_{\mathfrak{M}}(F,\boldsymbol{x})F(\boldsymbol{x})\big|d\boldsymbol{x} \leqslant M,$$

оцінку (4.34) продовжимо таким чином

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \geqslant e_M^{\mathfrak{F}}\big(f_9\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \gg$$

$$\gg \omega(2^{-l})2^{l\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1\right)}l^{-(d-1)\left(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{q'}\right)}\big(2^l l^{d-1} - M\big) \gg$$

$$\gg \omega(2^{-l})2^{l\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1\right)}l^{-(d-1)\left(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{q'}\right)}2^l l^{d-1} \asymp \omega(2^{-l})2^{l\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}l^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Цілком аналогічно у випадку $\theta = \infty$, підставляючи у (4.31) функції f_{10} та g, отримуємо

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \geqslant e_M^{\mathfrak{F}}\big(f_{10}\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \inf_{\mathcal{L}\colon \operatorname{mes}\mathfrak{M}\leqslant M}\|f_{10}(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f_{10},\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \gg \omega(2^{-l})2^{l\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}l^{\frac{d-1}{q}}.$$

Оцінки знизу в (4.22) встановлено.

Теорему 4.11 доведено.

Наведемо декілька зауважень стосовно одержаних в теоремі 4.11 оцінок.

Зауваження 4.12. Порівнюючи результати теореми 4.11 і твердження 4.4 робимо висновок, що у випадку $1 < p < q < \infty$, $q \leqslant \theta \leqslant \infty$ і $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, величини $e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ і $\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$, $M \asymp 2^n n^{d-1}$, рівні за порядком. Якщо ж $1 < p < q < \infty$, $1 \leqslant \theta < q < \infty$ і $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{2}{q} + \frac{1}{\theta}$, то має місце порядкове співвідношення

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp \mathcal{E}_{\tilde{Q}_n}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} n^{-(d-1)\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q}\right)},$$

де $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

Зауваження 4.13. Нехай $1 < p < q < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. Якщо $\Omega(\boldsymbol{t}) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{r_1}$ і $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з $\alpha = r_1 > \max\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}; \frac{1}{p} - \frac{2}{q} + \frac{1}{\theta}\right\}$, то з теореми 4.11 отримаємо оцінку

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp M^{-\left(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}\big(\log^{d-1} M\big)^{r_1-\frac{1}{p}+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta}},$$

яка, при вказаних вище значеннях параметрів, збігається з оцінкою наведеною у твердженні 1.10. Проте зауважимо, що у даному твердженні умова на координати вектора $\boldsymbol{r}$ є більш слабкою, а саме вимагається, щоб виконувалася умова $r_1 > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, а тому при $1 \leqslant \theta < q < \infty$ і $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r_1 \leqslant \frac{1}{p} - \frac{2}{q} + \frac{1}{\theta}$ для класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ справедливою є оцінка

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp M^{-\left(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}.$$

Далі наведемо результат, який дає оцінку величини $e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ у випадку $1 < p = q \leqslant 2$.

Теорема 4.14. *Нехай $1 < p \leqslant 2$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ і $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d)$, де $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з $\alpha > \max\left\{0; \frac{1}{\theta} - \frac{1}{p}\right\}$. Тоді для будь-яких натуральних n та $M = M(n)$, таких що $M \asymp 2^n n^{d-1}$, справедливе порядкове співвідношення*

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{4.35}$$

Доведення. Спочатку встановимо в (4.35) оцінку зверху. Оскільки у випадку $\theta \geqslant p$ маємо $\alpha > 0$, то необхідна оцінка, згідно з (1.30), слідує із оцінки наближення класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ цілими функціями $S_{\tilde{Q}_n}(f,\cdot)$ за умови, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$ (див. твердження 4.3), маємо

$$e^{\mathfrak{F}}_M\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} \ll \mathcal{E}_{\tilde{Q}_n}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Таким чином залишається отримати оцінку зверху у випадку $1 \leqslant \theta < p$. При цьому будемо використовувати міркування аналогічні до тих, що проводилися при встановленні оцінки зверху в теоремі 4.11.

Нехай $f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$. В якості апарату наближення виберемо функцію

$$S_{\mathfrak{M}}(f,\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{L}'} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x}), \quad \mathfrak{M} = \bigcup_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{L}'} Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}},$$

де множина $\mathcal{L}'$ будується аналогічно, як при доведенні теореми 4.11. Тоді

$$\big\|f(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f,\cdot)\big\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} = \Bigg\|f(\cdot) - \sum_{\boldsymbol{s}\in\Delta(n_0)} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot) + \sum_{\boldsymbol{s}\in\Delta(n_0)\setminus\mathcal{L}'} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\Bigg\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leqslant$$

$$\leqslant \Bigg\|f(\cdot) - \sum_{\boldsymbol{s}\in\Delta(n_0)} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\Bigg\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} + \Bigg\|\sum_{\boldsymbol{s}\in\Delta(n_0)\setminus\mathcal{L}'} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\Bigg\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} = I_3 + I_4. \quad (4.36)$$

Використовуючи твердження 4.3 при $1 \leqslant \theta < p$, а також враховуючи вибір числа n_0 і те, що ω задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha > \frac{1}{\theta} - \frac{1}{p}$, можемо записати

$$I_3 \ll \omega(2^{-n_0}) = \frac{\omega(2^{-n_0})}{2^{-\alpha n_0}} 2^{-\alpha n_0} \ll \omega(2^{-n})2^{-\alpha(n_0-n)} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n})n^{-\alpha(d-1)} \ll \omega(2^{-n})n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)}. \quad (4.37)$$

Для оцінки величини I_4, скориставшись твердженням 2.1 і нерівністю $|a+b|^c \leqslant |a|^c + |b|^c$, де $0 < c \leqslant 1$, $a, b \in \mathbb{R}$, одержуємо

$$I_4 = \Bigg\|\sum_{\boldsymbol{s}\in\Delta(n_0)\setminus\mathcal{L}'} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\Bigg\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \ll \Bigg\|\Bigg(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Delta(n_0)\setminus\mathcal{L}'} |\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)|^2\Bigg)^{\frac{1}{2}}\Bigg\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leqslant$$

$$\leqslant \Bigg(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Delta(n_0)\setminus\mathcal{L}'} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^p_{L_p(\mathbb{R}^d)}\Bigg)^{\frac{1}{p}}. \quad (4.38)$$

Далі, міркуючи подібно, як і при встановленні оцінки величини I_2 (див. (4.27) і (4.28)), з (4.38) отримуємо

$$I_4 \ll (2^n n^{d-1})^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)} \left(\sum_{l=n+1}^{n_0} \left(\omega(2^{-l})\right)^p 2^{lp\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p}\right)} B_l^{\theta} \right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (4.39)$$

Враховуючи, що ω задовольняє умову (S^{α}) з $\alpha > \frac{1}{\theta} - \frac{1}{p}$, продовжимо оцінку (4.39):

$$I_4 \ll (2^n n^{d-1})^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \left(\sum_{l=n+1}^{n_0} 2^{-lp\left(\alpha-\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p}\right)\right)} B_l^{\theta} \right)^{\frac{1}{p}} \ll$$

$$\ll (2^n n^{d-1})^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-n\left(\alpha-\frac{1}{\theta}+\frac{1}{p}\right)} \left(\sum_{l=n+1}^{n_0} B_l^{\theta} \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)} \left(\left(\sum_{l=n+1}^{n_0} \sum_{\boldsymbol{s}\in\Delta^*(l)} \|\delta_{\boldsymbol{s}}^*(f,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^{\theta} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\right)^{-\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \right)^{\frac{\theta}{p}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)} \|f(\cdot)\|_{S_{p,\theta}^{\Omega}B(\mathbb{R}^d)}^{\frac{\theta}{p}} \leqslant \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)}. \qquad (4.40)$$

Беручи до уваги (4.37) і (4.40), з (4.36) отримуємо

$$\|f(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \ll \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Отже, оцінку зверху в теоремі 4.14 встановлено.

Перейдемо до встановлення оцінки знизу в (4.35). Для цього, як і при доведенні теореми 4.11, побудуємо екстремальні функції $f \in S_{p,\theta}^{\Omega}B(\mathbb{R}^d)$, які її реалізують. Нехай натуральні числа n і $M = M(n)$ такі, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$ і кількість точок з цілочисловими координатами у множині $F_n = \bigcup_{\boldsymbol{s}\in\Delta^*(n)} \rho_+^*(\boldsymbol{s})$ була б більшою за $4M$.

У залежності від значення параметра θ розглянемо такі функції:

$$f_{11}(\boldsymbol{x}) = C_{13}\omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{\boldsymbol{k}\in F_n} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}), \quad C_{13} > 0,$$

якщо $1 \leqslant \theta < \infty$ та

$$f_{12}(\boldsymbol{x}) = C_{14}\omega(2^{-n})2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)} \sum_{\boldsymbol{k}\in F_n} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}), \quad C_{14} > 0,$$

якщо $\theta = \infty$.

Аналогічно до того, як це було зроблено при доведенні теореми 4.11, покажемо, що функції f_{11} і f_{12} належать до класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ і $S^{\Omega}_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)$ відповідно.

Для f_{11}, скориставшись означення норми функцій у просторі $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ (1.66) і оцінкою (2.26), отримуємо

$$\|f_{11}(\cdot)\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Delta^*(n)} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\right)^{-\theta} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_{11},\cdot)\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n})2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\omega(2^{-n})\right)^{-1} \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Delta^*(n)} \left\| \sum_{\boldsymbol{k}\in F_n} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot) \right\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp 2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Delta^*(n)} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\theta\left(1-\frac{1}{p}\right)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp 2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} 2^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)} n^{\frac{d-1}{\theta}} = 1.$$

Отже, $f_{11} \in S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ з деякою сталою $C_{13} > 0$.

Для f_{12}, скориставшись означенням норми функцій у просторі $S^{\Omega}_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)$ (1.67), відповідно будемо мати

$$\|f_{12}(\cdot)\|_{S^{\Omega}_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)} \asymp \sup_{\boldsymbol{s}\in\Delta^*(n)} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\right)^{-1} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_{12},\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n})2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)} \left(\omega(2^{-n})\right)^{-1} \sup_{\boldsymbol{s}\in\Delta^*(n)} \left\| \sum_{\boldsymbol{k}\in F_n} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp$$

$$\asymp 2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)} 2^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)} = 1.$$

Тому $f_{12} \in S^{\Omega}_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)$ з деякою сталою $C_{14} > 0$.

Нехай $\mathcal{L}$ — така довільна множина в $\mathbb{Z}_+^d$, що для множини $\mathfrak{M} = \bigcup\limits_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{L}} Q_{2^{\boldsymbol{s}}}^*$ має місце співвідношення $\operatorname{mes}\mathfrak{M} \leqslant M$. Тоді для кількості елементів множини $\Delta^*(n)\backslash\mathcal{L}$ має місце співвідношення $|\Delta^*(n)\setminus\mathcal{L}| \asymp n^{d-1}$. Враховуючи це, у залежності від того, які значення приймає параметр p, розглянемо два випадки.

Нехай спочатку $1 < p < 2$, $1 \leqslant \theta < \infty$. Для функції f_{11} і

$$S_{\mathfrak{M}}(f_{11}, \boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{L}} \delta_{\boldsymbol{s}}^*(f_{11}, \boldsymbol{x})$$

згідно з лемою 2.3 та співвідошенням (2.26) отримуємо

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S_{p,\theta}^{\Omega}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} \geqslant e_M^{\mathfrak{F}}\big(f_{11}\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \inf_{\mathcal{L}:\, \operatorname{mes}\mathfrak{M}\leqslant M} \|f_{11}(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f_{11},\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \gg$$

$$\gg \left(\sum_{\boldsymbol{s}\geqslant 0} \|\delta_{\boldsymbol{s}}^*\big(f_{11}(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f_{11},\cdot),\cdot\big)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^p 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)p}\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\sum_{s\in\Delta^*(n)\backslash\mathcal{L}} \|\delta_{\boldsymbol{s}}^*(f_{11},\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^p 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)p}\right)^{\frac{1}{p}} \gg$$

$$\gg 2^{n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}\omega(2^{-n})2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)}n^{-\frac{d-1}{\theta}}2^{\frac{n}{2}}\left(\sum_{s\in\Delta^*(n)\backslash\mathcal{L}} 1\right)^{\frac{1}{p}} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n})n^{-\frac{d-1}{\theta}}n^{\frac{d-1}{p}} \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Нехай тепер $p = 2$, $1 \leqslant \theta < \infty$. Тоді, скориставшись твердженням 2.1, маємо

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S_{2,\theta}^{\Omega}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_2(\mathbb{R}^d)} \geqslant e_M^{\mathfrak{F}}\big(f_{11}\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \inf_{\mathcal{L}:\, \operatorname{mes}\mathfrak{M}\leqslant M} \|f_{11}(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f_{11},\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \gg$$

$$\gg \left(\sum_{\boldsymbol{s}\geqslant 0} \|\delta_{\boldsymbol{s}}^*(f_{11}(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f_{11},\cdot),\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_{s \in \Delta^*(n) \setminus \mathcal{L}} \|\delta_{\boldsymbol{s}}^*(f_{11}, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \gg \omega(2^{-n}) 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} 2^{\frac{n}{2}} \left(\sum_{s \in \Delta^*(n) \setminus \mathcal{L}} 1 \right)^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n}) n^{-\frac{d-1}{\theta}} n^{\frac{d-1}{2}} \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)}.$$

У випадку $\theta = \infty$ для функції f_{12}, згідно з лемою 2.3, у випадку $1 < p < 2$, одержуємо

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S_{p,\infty}^{\Omega} B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} \geqslant e_M^{\mathfrak{F}}\big(f_{12}\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \inf_{\mathcal{L}\colon \operatorname{mes} \mathfrak{M} \leqslant M} \|f_{12}(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f_{12}, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \gg$$

$$\gg \left(\sum_{s \in \Delta^*(n) \setminus \mathcal{L}} \|\delta_{\boldsymbol{s}}^*(f_{12}, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^p 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) p} \right)^{\frac{1}{p}} \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p} - 1\right)} 2^{n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)} 2^{\frac{n}{2}} \left(\sum_{s \in \Delta^*(n) \setminus \mathcal{L}} 1 \right)^{\frac{1}{p}} \gg \omega(2^{-n}) n^{\frac{d-1}{p}}.$$

Цілком аналогічно, як і для функції f_{11}, при $p = 2$ і $\theta = \infty$ маємо

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S_{2,\infty}^{\Omega} B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_2(\mathbb{R}^d)} \gg \omega(2^{-n}) n^{\frac{d-1}{2}}.$$

Оцінку знизу в (4.35) встановлено.

Теорему 4.14 доведено.

Далі наведемо декілька зауважень щодо одержаних у теоремі 4.14 оцінок.

Зауваження 4.15. Порівнюючи результати теореми 4.14 і твердження 4.3 робимо висновок, що у випадку $1 < p \leqslant 2$, $p \leqslant \theta$, і $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з $\alpha > 0$, величини $e_M^{\mathfrak{F}}\big(S_{p,\theta}^{\Omega} B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)}$ і $\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n}\big(S_{p,\theta}^{\Omega} B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)}$, $M \asymp 2^n n^{d-1}$, рівні за порядком. Якщо ж $1 < p \leqslant 2$, $1 \leqslant \theta < p$ і $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з $\alpha > \frac{1}{\theta} - \frac{1}{p}$, то при $M \asymp 2^n n^{d-1}$ має місце порядкове співвідношення

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S_{p,\theta}^{\Omega} B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp \mathcal{E}_{\tilde{Q}_n}\big(S_{p,\theta}^{\Omega} B\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} n^{-(d-1)\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p}\right)}.$$

Зауваження 4.16. Нехай $1 < p \leqslant 2$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. Якщо $\Omega(\boldsymbol{t}) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{r_1}$ і $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з $\alpha = r_1 > \max\left\{0; \frac{1}{\theta} - \frac{1}{p}\right\}$, то виконується співвідношення

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp M^{-r_1}\big(\log^{d-1} M\big)^{r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}},$$

яке збігається з оцінкою наведеною у твердженні 1.11 (див. [145]) при $1 < p < 2$ і у випадку $p = 2$, за відповідних умов, з результатом теореми 2.26. Проте зауважимо, що у твердженні 1.11 і теоремі 2.26 умова на координати вектора $\boldsymbol{r}$ є більш слабкою, а саме вимагається, щоб виконувалася умова $r_1 > 0$, а тому у випадку $1 \leqslant \theta < p \leqslant 2$ і $0 < r_1 \leqslant \frac{1}{\theta} - \frac{1}{p}$ для класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ справедливою є оцінка

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp M^{-r_1}.$$

Проаналізувавши одержані в теоремах 4.11 і 4.14 результати для класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, та співставивши їх з відповідними результатами для класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ з тверджень 1.10 та 1.11 і теореми 2.26 бачимо, що на противагу до класів з домінуючою мішаною похідною у випадку дослідження узагальнених класів, вдається отримати оцінки величини $e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ для вужчого діапазону значень відповідного параметра α. Так, зокрема, порядки величини $e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ при $1 < p < q < \infty$, $1 \leqslant \theta < q < \infty$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \alpha \leqslant \frac{1}{p} - \frac{2}{q} + \frac{1}{\theta}$ і у випадку $1 \leqslant \theta < p \leqslant 2$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{\theta} - \frac{1}{p}$ залишаються невідомими.

4.4. Порядкові оцінки апроксимаційних характеристик класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ у рівномірній метриці

У даному пункті одержано точні за порядком оцінки наближення функцій із класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті і на множинах іншої структури, лебегова міра яких є скінченною, а також на множинах, які породжуються поверхнями рівня функції $\Omega(\boldsymbol{t})$ у випадку, коли похибка наближення оцінюється у рівномірній метриці.

При одержані результатів, а саме для встановлення оцінок зверху, ключове значення відіграє нерівність різних метрик для цілих функцій експоненціального типу, яка наведена у твердженні 1.1 і яку для досліджуваних випадків можемо записати у такій формі.

Якщо $1 < p < q = \infty$, то для цілої функції експоненціального типу $g_{\boldsymbol{\nu}} \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_d)$, $\nu_j \geqslant 0$, $j = \overline{1, d}$, має місце нерівність

$$\|g_{\boldsymbol{\nu}}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2^d \left(\prod_{j=1}^{d} \nu_j \right)^{\frac{1}{p}} \|g_{\boldsymbol{\nu}}(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.41}$$

4.4.1. Наближення цілими функціями експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті та цілими функціями спеціального вигляду

Встановимо точні за порядком оцінки величин (4.12) і (1.29) для функцій f з класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$. Мають місце такі результати.

Теорема 4.17. *Нехай $1 < p < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $\Omega(\boldsymbol{t}) = \omega(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d)$, де $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з $\alpha > \frac{1}{p}$. Тоді справедливе порядкове співвідношення*

$$\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{4.42}$$

Теорема 4.18. *Нехай $1 < p < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ і $\Omega(\boldsymbol{t}) = \omega(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d)$, де $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з $\alpha > \frac{1}{p}$. Тоді для будь-яких натуральних n та $M = M(n)$ таких, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$ справедливе порядкове співвідношення*

$$e^{\mathfrak{F}}_M\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{4.43}$$

Перш ніж перейти до доведення сформульованих теорем, відзначимо, що з оцінок (4.42) і (4.43) випливає, що $\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp$ $\asymp e^{\mathfrak{F}}_M\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}$, де $M \asymp 2^n n^{d-1}$. Оскільки має місце співвідношення (1.30), то достатньо встановити оцінку зверху в теоремі 4.17 і оцінку знизу в теоремі 4.18.

Доведення оцінки зверху в теоремі 4.17. Нехай $f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$. Тоді, скориставшись нерівністю Мінковського (2.2), з врахуванням відповідного коментаря, та нерівністю (4.41), можемо записати

$$\|f(\cdot) - S_{\tilde{Q}_n}(f,\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} = \Bigg\| f(\cdot) - \sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 \leqslant n} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\Bigg\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \Bigg\| \sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 > n} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\Bigg\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 > n} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \ll$$

$$\ll \sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 > n} 2^{\frac{\|\boldsymbol{s}\|_1}{p}} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.44}$$

Щоб продовжити оцінку (4.44), розглянемо спочатку випадок, коли $1 \leqslant \theta < \infty$. Тоді, застосувавши до останньої суми нерівність Гельдера (з відповідною модифікацією при $\theta = 1$) і врахувавши, що $\Omega(\boldsymbol{t})$ задовольняє умову (S^{α}) з $\alpha > \frac{1}{p}$, будемо мати

$$\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 > n} 2^{\frac{\|\boldsymbol{s}\|_1}{p}} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \Bigg(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 > n} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-\theta} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)} \Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \times$$

$$\times \Bigg(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 > n} \Big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{\frac{\|\boldsymbol{s}\|_1}{p}} \Big)^{\frac{\theta}{\theta-1}} \Bigg)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \|f(\cdot)\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \Bigg(\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 > n} \Big(\frac{\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})}{2^{-\alpha\|\boldsymbol{s}\|_1}} 2^{-\left(\alpha - \frac{1}{p}\right)\|\boldsymbol{s}\|_1} \Big)^{\frac{\theta}{\theta-1}} \Bigg)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-\left(\alpha - \frac{1}{p}\right)n} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} = \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{4.45}$$

Нехай тепер $\theta = \infty$. Тоді, беручи до уваги, що згідно з (1.67)

$$\|\delta_{\boldsymbol{s}}^*(f,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \ll \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}),$$

оскільки $\Omega(\boldsymbol{t}) \in \Phi_{\alpha,l}$ з $\alpha > \frac{1}{p}$, для останньої суми з (4.44) можемо записати

$$\sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 > n} 2^{\frac{\|s\|_1}{p}} \|\delta_{\boldsymbol{s}}^*(f,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \ll \sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 > n} 2^{\frac{\|s\|_1}{p}} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 > n} 2^{-\left(\alpha - \frac{1}{p}\right)\|\boldsymbol{s}\|_1} \ll \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}} n^{d-1}. \tag{4.46}$$

Таким чином, співставивши (4.45) і (4.46), отримаємо оцінку зверху в (4.42)

$$\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n}\left(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\right)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \ll \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Доведення оцінки знизу в теоремі 4.18. Нехай

$$\Delta^*(n) = \left\{\boldsymbol{s} = (s_1,\ldots,s_d) \in \mathbb{Z}_+^d \colon s_1 + \ldots + s_d = n\right\}$$

і

$$\tilde{Q}_n = \bigcup_{\boldsymbol{s} \in \Delta^*(n)} Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}},$$

тоді $\operatorname{mes} \tilde{Q}_n \asymp 2^n n^{d-1}$.

Вкажемо функції $f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, які будемо будувати на основі функції $D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$ (2.23), що реалізують шукану оцінку знизу.

Розглянемо функцію

$$f_{13}(\boldsymbol{x}) = C_{15}\omega(2^{-n}) 2^{-n\left(1-\frac{1}{p}\right)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{\boldsymbol{s} \in \Delta^*(n)} \sum_{\boldsymbol{k} \in \rho^* + (\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}), \qquad C_{15} > 0,$$

якщо $1 \leqslant \theta < \infty$, і

$$f_{14}(\boldsymbol{x}) = C_{16}\omega(2^{-n}) 2^{-n\left(1-\frac{1}{p}\right)} \sum_{\boldsymbol{s} \in \Delta^*(n)} \sum_{\boldsymbol{k} \in \rho^*_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}), \qquad C_{16} > 0,$$

якщо $\theta = \infty$.

Переконаємося, що дані функції належать класам $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ і $S^{\Omega}_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)$ відповідно.

Для f_{13} згідно з означенням норми (1.66) та з урахуванням оцінки (2.26) будемо мати

$$\|f_{13}(\cdot)\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Delta^*(n)} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-\theta} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_{13},\cdot)\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \left(\big(\omega(2^{-n})\big)^{\theta} 2^{-n\left(1-\frac{1}{p}\right)\theta} n^{-(d-1)} \sum_{\boldsymbol{s}\in\Delta^*(n)} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-\theta} \left\| \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho^*_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot) \right\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp 2^{-n\left(1-\frac{1}{p}\right)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Delta^*(n)} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)} \right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= 2^{-n\left(1-\frac{1}{p}\right)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} 2^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)} \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Delta^*(n)} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 1.$$

Відповідно для f_{14}, згідно з (1.67), отримаємо

$$\|f_{14}(\cdot)\|_{S^{\Omega}_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)} \asymp \sup_{\boldsymbol{s}\in\Delta^*(n)} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-1} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_{14},\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n}) 2^{-n\left(1-\frac{1}{p}\right)} \sup_{\boldsymbol{s}\in\Delta^*(n)} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-1} \left\| \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho^*_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp$$

$$\asymp 2^{-n\left(1-\frac{1}{p}\right)} \sup_{\boldsymbol{s}\in\Delta^*(n)} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)} \ll 1.$$

Далі, нехай $\mathcal{L}$ — така довільна множина векторів $\boldsymbol{s} = (s_1,\ldots,s_d)$ з цілими невід'ємними координатами, що для $\mathfrak{M} = \bigcup_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{L}} Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}}$ виконується співвідношення $\operatorname{mes}\mathfrak{M} \leqslant M$. У подальших міркуваннях будемо вважати, що числа M і n пов'язані співвідношеннями

$$\operatorname{mes}\tilde{Q}_n \leqslant 4\operatorname{mes}\mathfrak{M} < \operatorname{mes}\tilde{Q}_{n+1}. \tag{4.47}$$

У такому випадку можемо записати

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \geqslant e_M^{\mathfrak{F}}\big(f_{13}\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} =$$
$$= \inf_{\mathcal{L}\colon \text{mes } \mathfrak{M}\leqslant M} \|f_{13}(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f_{13},\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \geqslant$$
$$\geqslant \inf_{\mathcal{L}\colon \text{mes } \mathfrak{M}\leqslant M} \big|\|f_{13}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} - \|S_{\mathfrak{M}}(f_{13},\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}\big|. \tag{4.48}$$

Зауважимо, що в $S_{\mathfrak{M}}(f_{13},\cdot)$, за рахунок вибору функції f_{13}, будуть входити лише ті доданки $\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_9,\cdot)$, для яких $\boldsymbol{s} \in \mathcal{L} \cap \Delta^*(n)$. Зазначимо також, що має місце оцінка (2.37), яку в даних позначеннях можна записати таким чином

$$\Bigg\| \sum_{\boldsymbol{s}\in\Delta^*(n)} \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho^*_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot)\Bigg\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^n n^{d-1}. \tag{4.49}$$

Скориставшись (4.49) та (4.47), оцінку (4.48) можемо продовжити наступним чином

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \geqslant \omega(2^{-n})2^{-n\left(1-\frac{1}{p}\right)} n^{-\frac{d-1}{\theta}}(2^n n^{d-1} - M) \gg$$
$$\gg \omega(2^{-n})2^{-n\left(1-\frac{1}{p}\right)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} 2^n n^{d-1} = \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Аналогічно, як і для f_{13}, у випадку $\theta=\infty$, отримуємо

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \geqslant e_M^{\mathfrak{F}}\big(f_{14}\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} =$$
$$= \inf_{\mathcal{L}\colon \text{mes } \mathfrak{M}\leqslant M} \|f_{14}(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f_{14},\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \gg \omega(2^{-n})2^{-\frac{n}{p}} n^{d-1}.$$

Оцінки знизу в теоремі 4.18 встановлено.

Теореми 4.17 і 4.18 доведено.

Зауваження 4.19. Відзначимо, що результат теореми 4.17 доповнює оцінки величини $\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ у випадку $q=\infty$. Для ряду інших співвідношень між параметрами p і q оцінки даної апроксимаційної характеристики встановлено в [113, 144] і наведено у твердженнях 4.3, 4.4. Крім цього, оцінку (4.42) у випадку $\Omega(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{r}} = t^{r_1}\cdot\ldots\cdot t^{r_1}$, $0<r_1<l$, тобто коли класи $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ збігаються з класами $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ встановлено у теоремі 2.15.

Зауваження 4.20. Питанням знаходження точних за порядком оцінок наближення класів періодичних функцій багатьох змінних з домінуючою мішаною похідною $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ та їхніх узагальнень (класів Нікольського–Бєсова і типу Нікольського–Бєсова) у рівномірній метриці східчасто–гіперболічними сумами Фур'є (див., наприклад, (3.5)) присвячені роботи [109, 120, 198, 217].

Зауваження 4.21. Порядкові оцінки величини $e^{\mathfrak{F}}_M\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}$ у випадку, коли $\Omega(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{r}} = t^{r_1} \cdot \ldots \cdot t^{r_1}$, $0 < r_1 < l$, $j = \overline{1,d}$, встановлено у теоремі 2.21.

Зауваження 4.22. Для класів періодичних функцій багатьох змінних з домінуючою мішаною похідною $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ та їхніх узагальнень величина (1.49), аналогом якої, як уже відмічалося, є (1.29), у рівномірній метриці досліджувалася у роботах [45, 201].

4.4.2. Наближення цілими функціями експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є на множинах породженими поверхнями рівня функції $\boldsymbol{\Omega}$

Встановимо порядкові за параметром N оцінки величини $\mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}$, де, відповідно до (1.68), $\kappa(N)$ задається таким чином:

$$\kappa(N) = \left\{ \boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d) \in \mathbb{Z}^d_+ \colon \Omega(2^{-\boldsymbol{s}})2^{\frac{\|\boldsymbol{s}\|_1}{p}} \geqslant \frac{1}{N} \right\},$$

Теорема 4.23. *Нехай $1 < p < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $\Omega(\boldsymbol{t}) \in \Phi_{\alpha,l}$, з деяким $\alpha > \frac{1}{p}$, тоді справедлива порядкова оцінка*

$$\mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp \frac{1}{N}\left|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\right|^{1-\frac{1}{\theta}}. \tag{4.50}$$

Доведення. Спочатку встановимо у (4.50) оцінку зверху. Нехай $f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$. Використавши нерівність Мінковського та нерівність

(4.41), одержимо

$$\mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\big(f\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} = \Bigg\| f(\cdot) - \sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa(N)} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\Bigg\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \Bigg\| \sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\Bigg\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \ll \sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} 2^{\frac{\|\boldsymbol{s}\|_1}{p}} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.51}$$

Далі, щоб продовжити оцінку (4.51), розглянемо два випадки.

Нехай $1 \leqslant \theta < \infty$. Тоді, застосувавши до (4.51) нерівність Гельдера (з відповідною модифікацією при $\theta = 1$), а також врахувавши співвідношення (4.8) з урахуванням того, що $\Omega(\boldsymbol{t}) \in \Phi_{\alpha,l}$ з $\alpha > \frac{1}{p}$, отримаємо

$$\mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\big(f\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \ll \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)} \big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \times$$

$$\times \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \Big(2^{\frac{\|\boldsymbol{s}\|_1}{p}} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) \Big)^{\frac{\theta}{\theta-1}} \right)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \|f(\cdot)\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \frac{1}{N} \big|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\big|^{1-\frac{1}{\theta}} \asymp \frac{1}{N} \big|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\big|^{1-\frac{1}{\theta}}.$$

Якщо ж $\theta = \infty$, то для $f \in S^{\Omega}_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)$, згідно з (1.67), має місце співвідношення $\|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \ll \Omega(2^{-\boldsymbol{s}})$. Тому, використовуючи (4.8), маємо

$$\mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\big(f\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \ll \sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} 2^{\frac{\|\boldsymbol{s}\|_1}{p}} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) \ll \frac{1}{N} \big|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\big|.$$

Оцінку зверху в теоремі встановлено.

Перейдемо до встановлення оцінки знизу. Для цього розглянемо кілька випадків у залежності від значень параметра θ та побудуємо функції $f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, для яких оцінки знизу величин $\mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\big(f\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}$ співпадають за порядком з оцінками знизу величин $\mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}$ в (4.50). Ці функції також будемо будувати на основі функції $D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$, яка означена згідно з формулою (2.23).

Розглянемо функцію

$$f_{15}(\boldsymbol{x}) = C_{17}\bigl|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\bigr|^{-\frac{1}{\theta}} \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(\kappa^{\perp}(N))} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}})2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)} \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+^*(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}),$$

при $1 \leqslant \theta < \infty$ та

$$f_{16}(\boldsymbol{x}) = C_{18} \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(\kappa^{\perp}(N))} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}})2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)} \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+^*(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}),$$

при $\theta = \infty$.

Покажемо, що для певного вибору сталих $C_{17} > 0$ та $C_{18} > 0$ дані функції належать до класу $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ та $S^{\Omega}_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)$ відповідно.

Для f_{15}, скориставшись означенням норми (1.66) та використовуючи співвідношення (2.26), отримаємо

$$\|f_{15}(\cdot)\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(\kappa^{\perp}(N))} \bigl(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\bigr)^{-\theta} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_{15},\cdot)\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \bigl|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\bigr|^{-\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(\kappa^{\perp}(N))} \bigl(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\bigr)^{-\theta} \bigl(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\bigr)^{\theta} \times \right.$$

$$\left. \times 2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1\theta\left(1-\frac{1}{p}\right)} \left\| \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+^*(\tilde{\boldsymbol{s}})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot) \right\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \bigl|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\bigr|^{-\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(\kappa^{\perp}(N))} 2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1\theta\left(1-\frac{1}{p}\right)} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\theta\left(1-\frac{1}{p}\right)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 1.$$

Отже, $f_{15} \in S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$.

Для f_{16}, скориставшись означенням норми (1.67) та використовуючи оцінку (2.26), можемо записати

$$\|f_{16}(\cdot)\|_{S^{\Omega}_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)} \asymp \sup_{\boldsymbol{s}\in\Theta(\kappa^{\perp}(N))} \frac{\|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_{16},\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}}{\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})} =$$

$$= \sup_{\boldsymbol{s}\in\Theta(\kappa^{\perp}(N))} C_{18} \frac{\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\theta\left(1-\frac{1}{p}\right)}\left\|\sum\limits_{\boldsymbol{k}\in\rho_+^*(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}}{\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})} \leqslant C_{19}, \quad C_{19}>0,$$

і тому $f_{16} \in S^{\Omega}_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)$.

Враховуючи, що $S_{Q(\kappa(N))}(f_{15},\cdot)=0$, одержуємо

$$\mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \geqslant \mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\big(f_{15}\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} = \|f_{15}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}. \qquad (4.52)$$

Перш ніж продовжити оцінку (4.52), покажемо, що

$$\mathcal{I} = \left\| \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(\kappa^{\perp}(N))} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}})2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)} \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+^*(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp$$

$$\asymp \frac{1}{N}\big|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\big|. \qquad (4.53)$$

Встановимо спочатку оцінку зверху. Згідно з нерівністю Мінковського, (2.26) та (4.8) отримуємо

$$\mathcal{I} \leqslant \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(\kappa^{\perp}(N))} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}})2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)} \left\| \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+^*(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \ll$$

$$\ll \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(\kappa^{\perp}(N))} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}})2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)}2^{\|\boldsymbol{s}\|_1} \ll \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(\kappa^{\perp}(N))} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}})2^{\frac{\|\boldsymbol{s}\|_1}{p}} \asymp$$

$$\asymp \frac{1}{N}\big|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\big|.$$

Відповідно для оцінки знизу маємо

$$\mathcal{I} = \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d} \left| \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(\kappa^{\perp}(N))} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}})2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)} \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+^*(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})\right| =$$

$$= \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d} \left| \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(\kappa^{\perp}(N))} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}})2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)} \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin 2^{s_j}x_j - \sin\eta(s_j)2^{s_j-1}x_j}{x_j} \right| \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(\kappa^{\perp}(N))} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}})2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)} \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin 1 - \sin\frac{\eta(s_j)}{2}}{2^{-s_j}}$$

$$\gg \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(\kappa^{\perp}(N))} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}})2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)}2^{\|s\|_1} \asymp \frac{1}{N}\bigl|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\bigr|.$$

З урахуванням оцінки (4.53), для (4.52) можемо записати

$$\mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\bigl(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\bigr)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \geqslant \bigl|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\bigr|^{-\frac{1}{\theta}}\frac{1}{N}\bigl|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\bigr| \asymp$$

$$\asymp \frac{1}{N}\bigl|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\bigr|^{1-\frac{1}{\theta}}.$$

Оскільки, згідно з побудовою функції f_{16}, маємо $S_{Q(\kappa(N))}(f_{16},\cdot) = 0$, то, беручи до уваги оцінку (4.53), одержуємо

$$\mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\bigl(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\bigr)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \geqslant \mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\bigl(f_{16}\bigr)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \|f_{16}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp \frac{1}{N}\bigl|\Theta(\kappa^{\perp}(N))\bigr|.$$

Оцінки знизу в (4.50) встановлено.

Теорему 4.23 доведено.

Зауваження 4.24. Скориставшись співвідношенням (4.3), отримані в теоремі 4.23 оцінки можна переписати таким чином

$$\mathcal{E}_{Q(\kappa(N))}\bigl(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\bigr)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp \frac{1}{N}\bigl(\log_2 N\bigr)^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Висновки до розділу 4

У даному розділі:

1. Встановлено точні за порядком оцінки наближення функцій з узагальнених класів з домінуючою мішаною похідною $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є на множинах, які породжуються поверхнями рівня функції $\Omega(\boldsymbol{t})$ і похибка наближення оцінюється у метриці простору $L_q(\mathbb{R}^d)$, а параметри p та q задовольняють таким співвідношенням: $1 < p \leqslant q < \infty$; $1 < p < \infty$, $q = \infty$.

2. Знайдено точні за порядком оцінки наближення функцій із класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ у рівномірній метриці за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті.

3. Одержано точні за порядком оцінки величини наближення функцій із класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ за допомогою цілих функцій зі спектром на множинах скінченної міри у метриці просторі $L_q(\mathbb{R}^d)$ при певних співвідношеннях між параметрами p і q. При цьому виявлено, що у деяких ситуаціях величини $e^{\mathfrak{F}}_M\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ і $\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ мають різні порядки.

Основні результати даного розділу опубліковано у працях [9, 11, 12, 14, 16] зі списку публікацій і, відповідно, [70, 154, 218, 245, 249] зі списку використаних джерел, а також опубліковані у тезах конференцій [30, 31, 36, 38] і, відповідно, [114, 143, 153, 240].

Розділ 5

Апроксимаційні характеристики функцій з ізотропних та анізотропних класів Нікольського–Бєсова

У даному розділі досліджуються апроксимаційні характеристики функцій багатьох змінних із ізотропних та анізотропних класів Нікольського–Бєсова. Для ізотропних класів функцій знайдено точні за порядком оцінки наближення сумами типу Валле Пуссена у рівномірній та інтегральній метриках. Також для даних класів функцій одержано точні за порядком оцінки наближення за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носієм їхнього перетворення Фур'є на множинах скінченної міри. Для анізотропних класів Нікольського–Бєсова функцій багатьох змінних встановлено точні за порядком оцінки найкращого наближення у просторі Лебега $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, за допомогою цілих функцій з носіями їхнього перетворення Фур'є у d-вимірних "паралелепіпедах". У випадку, коли похибка наближення оцінюється у рівномірній метриці одержано точні за порядком оцінки відхилення функцій з даних класів від їхніх відрізків інтеграла Фур'є.

5.1. Допоміжні означення та твердження

Зазначимо, що відповідно до позначень п. 1.4.2 величини (1.83) і (1.85) в ізотропному випадку будемо позначати $\mathcal{E}_{D_{2^n}}(\,\cdot\,)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ і $E_{D_{2^n}}(\,\cdot\,)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ з урахуванням того, що множина $D_{\boldsymbol{a}^s}$ визначається, як уже відмічалося, наступним чином:

$$D_{2^s} = D_{2^s,\dots,2^s} = \Big\{\boldsymbol{\lambda}\colon |\lambda_j| < 2^s, \quad j = \overline{1,d}, \quad s \geqslant 0\Big\}.$$

Так, для ізотропних класів $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ має місце таке твердження.

Твердження 5.1. *Нехай* $1 \leqslant p \leqslant q < \infty$, $q \neq 1$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. *Тоді, якщо* $r > d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, *то справедливе порядкове співвідношення*

$$\mathcal{E}_{D_{2^n}}\big(B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp E_{D_{2^n}}\big(B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{-n\left(r-d\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)}. \tag{5.1}$$

У випадку $1 < p \leqslant q < \infty$ співвідношення (5.1) встановлене в [149], а при $p = 1$, $1 < q < \infty$, — в [67].

5.2. Наближення функцій з ізотропних класів Нікольського–Бєсова у рівномірній та інтегральній метриках

У цьому пункті встановлено точні за порядком оцінки наближенням функцій з ізоторопних класів $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ частинними сумами типу Валле Пуссена для величини (1.98). Справджується наступне твердження.

Теорема 5.2. *Нехай* $1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. *Якщо* $r > \frac{d}{p}$, *то має місце порядкове співвідношення*

$$\mathcal{E}_n\big(B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{-n\left(r-\frac{d}{p}\right)}. \tag{5.2}$$

Доведення. Перш ніж безпосередньо перейти до доведення теореми зауважимо, що виконання умови $r > \frac{d}{p}$, згідно з твердженням 1.32, забезпечує належність функцій f з класу $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ і до простору $L_\infty(\mathbb{R}^d)$.

Встановимо спочатку оцінку зверху. Оскільки для $1 \leqslant p < \infty$, згідно з (1.74), має місце вкладення $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d) \subset H^r_p(\mathbb{R}^d)$, то шукану оцінку достатньо отримати для $\mathcal{E}_n\big(H^r_p(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}$. Далі для $f \in H^r_p(\mathbb{R}^d)$, згідно з (1.89), можемо записати $\|q_s(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \ll 2^{-sr}$. Тому, використавши нерівність Мінковського та нерівність "різних метрик" для цілих функцій експоненціального типу (див. (4.41)), отримаємо

$$\left\| f(\cdot) - \sum_{s=0}^{n-1} q_s(\cdot) \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} = \left\| \sum_{s=n}^{\infty} q_s(\cdot) \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \ll \sum_{s=n}^{\infty} 2^{\frac{sd}{p}} \|q_s(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \ll$$

$$\ll \sum_{s=n}^{\infty} 2^{\frac{sd}{p}} 2^{-sr} \leqslant 2^{-n\left(r-\frac{d}{p}\right)}.$$

Оцінку зверху встановлено.

Перейдемо до встановлення в (5.2) оцінки знизу. Оскільки $B^r_{p,1}(\mathbb{R}^d) \subset B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, то шукану оцінку достатньо отримати для $\mathcal{E}_n\big(B^r_{p,1}(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}$.

Розглянемо функцію, яка побудована на основі неперіодичного ядра Валле Пуссена (1.90)

$$v_{n+1}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} \big(V_{2^{n+1}}(x_j) - V_{2^n}(x_j)\big), \quad n \in \mathbb{N}, \ x_j \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1,d}.$$

Оцінимо попередньо $\|v_{n+1}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}$. Маємо

$$\|v_{n+1}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} = \left\| \prod_{j=1}^{d} \big(V_{2^{n+1}}(x_j) - V_{2^n}(x_j)\big) \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \prod_{j=1}^{d} \|V_{2^{n+1}}(x_j) - V_{2^n}(x_j)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \prod_{j=1}^{d} \left\| \frac{\cos 2^{n+1} x_j - \cos 2^{n+2} x_j}{2^{n+1} x_j^2} - \frac{\cos 2^{n} x_j - \cos 2^{n+1} x_j}{2^{n} x_j^2} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \prod_{j=1}^{d} \left\| \frac{\sin 3 \cdot 2^{n} x_j \sin 2^{n} x_j}{2^{n} x_j^2} - \frac{\sin 3 \cdot 2^{n-1} x_j \sin 2^{n-1} x_j}{2^{n-1} x_j^2} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \prod_{j=1}^{d} \left\| \frac{\sin 3 \cdot 2^{n-1} x_j \sin 2^{n-1} x_j}{2^{n-1} x_j^2} \left(2 \cos 3 \cdot 2^{n-1} x_j \cos 2^{n-1} x_j - 1\right) \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \prod_{j=1}^{d} \sup_{x_j} \left| 2^{n-1} \frac{\sin 3x_j \sin x_j}{x_j^2} \left(2\cos 3x_j \cos x_j - 1\right) \right| =$$

$$= 2^{(n-1)d} \prod_{j=1}^{d} \sup_{x_j} \left| \frac{\sin 3x_j \sin x_j}{x_j^2} \left(2\cos 3x_j \cos x_j - 1\right) \right|. \tag{5.3}$$

Для того, щоб продовжити (5.3) оцінимо спочатку $\sup_{x_j}$ зверху. Маємо

$$\sup_{x_j} \left| \frac{\sin 3x_j \sin x_j}{x_j^2} \left(2\cos 3x_j \cos x_j - 1\right) \right| \leqslant \sup_{x_j} \left| 3 \, \frac{\sin 3x_j \sin x_j}{x_j^2} \right| \leqslant$$

$$\leqslant 3 \sup_{x_j} \left| \frac{\sin 3x_j \sin x_j}{x_j^2} \right| \leqslant 9. \tag{5.4}$$

Тепер оцінимо $\sup_{x_j}$ в (5.3) знизу:

$$\sup_{x_j} \left| \frac{\sin 3x_j \sin x_j}{x_j^2} \left(2\cos 3x_j \cos x_j - 1\right) \right| \geqslant$$

$$\geqslant \left| \frac{\sin 3\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \left(2\cos 3\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - 1\right) \right| = \frac{4}{\pi^2}. \tag{5.5}$$

На підставі оцінок (5.3), (5.4) та (5.5) робимо висновок, що

$$\|v_{n+1}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{nd}. \tag{5.6}$$

Зауважимо, що для $\|v_{n+1}(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}$ при $1 \leqslant p < \infty$ в [67] встановлено оцінку

$$\|v_{n+1}(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{nd\left(1-\frac{1}{p}\right)}. \tag{5.7}$$

Об'єднуючи оцінки (5.6) та (5.7) можемо записати

$$\|v_{n+1}(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{nd\left(1-\frac{1}{p}\right)}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{5.8}$$

Розглянемо тепер функцію

$$f_1(\boldsymbol{x}) = C_1 2^{-nd\left(\frac{r}{d}+1-\frac{1}{p}\right)} v_{n+1}(\boldsymbol{x}), \quad C_1 > 0, \tag{5.9}$$

і переконаємося, що при певному виборі сталої C_1 вона належить класу $B^r_{p,1}(\mathbb{R}^d)$.

Оскільки носій перетворення Фур'є функції v_{n+1} міститься на множині

$$\left\{\boldsymbol{\lambda}\colon\, 2^n \leqslant \max_{j=\overline{1,d}} |\lambda_j| \leqslant 2^{n+2}\right\},$$

то згідно з зазначеним вище, щодо носія перетворення Фур'є функцій $q_s(f)$, $s=0,1,\ldots$, отримаємо, що всі функції $q_s(v_{n+1})$ окрім, можливо, $q_n(v_{n+1})$, $q_{n+1}(v_{n+1})$ та $q_{n+2}(v_{n+1})$, тотожно дорівнюють нулеві.

Отже, згідно з (1.94) будемо мати

$$\|f_1(\cdot)\|_{B^r_{p,1}(\mathbb{R}^d)} \asymp \sum_{s\in\mathbb{Z}_+} 2^{sr}\|q_s(f_1,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= C_1 2^{-nd\left(\frac{r}{d}+1-\frac{1}{p}\right)} \sum_{s\in\mathbb{Z}_+} 2^{sr}\|q_s(v_{n+1})\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= C_1 2^{-nd\left(\frac{r}{d}+1-\frac{1}{p}\right)} \Big(2^{nr}\|q_n(v_{n+1})\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} + 2^{(n+1)r}\|q_{n+1}(v_{n+1})\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} +$$

$$+ 2^{(n+2)r}\|q_{n+2}(v_{n+1})\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}\Big)\,. \tag{5.10}$$

Оцінимо кожний із доданків правої частини (5.10).

Виходячи з означення $q_s(f)$ та формули (1.91), враховуючи співвідношення (5.8), властивість згортки (3.8) і властивість 4) для V_{2^s}, одержуємо

$$\|q_n(v_{n+1})\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} = \|\sigma_{2^n}(v_{n+1}) - \sigma_{2^{n-1}}(v_{n+1})\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \left\|\big(V_{2^n}(\cdot) - V_{2^{n-1}}(\cdot)\big) * v_{n+1}(\cdot)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \|V_{2^n}(\cdot) - V_{2^{n-1}}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} \|v_{n+1}(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_2 2^{nd\left(1-\frac{1}{p}\right)}. \tag{5.11}$$

Аналогічні оцінки отримаємо і для $\|q_{n+1}(v_{n+1})\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}$ та $\|q_{n+2}(v_{n+1})\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}$.

Тоді (5.10) можна продовжити таким чином

$$\|f_1(\cdot)\|_{B^r_{p,1}(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_1 2^{-nd\left(\frac{r}{d}+1-\frac{1}{p}\right)} \Big(C_2 2^{nr} 2^{nd\left(1-\frac{1}{p}\right)} + C_3 2^{(n+1)r} 2^{nd\left(1-\frac{1}{p}\right)} +$$

$$+\ C_4 2^{(n+2)r} 2^{nd\left(1-\frac{1}{p}\right)}\Big) \leqslant C_5.$$

Отже, при відповідному виборі сталої C_1 функція f_1 належить класу $B^r_{p,1}(\mathbb{R}^d)$.

Далі, згідно з вибором функції f_1 і властивостями функції v_{n+1} для $\mathbf{V}_{n-1}(f_1,\cdot)$, що означеється формулою (1.96), маємо $\mathbf{V}_{n-1}(f_1,\cdot)=0$. Тому, враховуючи (5.6), отримаємо

$$\mathcal{E}_n\big(B^r_{p,1}(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \geqslant \mathcal{E}_n\big(f_1\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} = \|f_1(\cdot)-\mathbf{V}_{n-1}(f_1,\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \|f_1(\cdot)\|_{L_\infty} \asymp 2^{-nd\left(\frac{r}{d}+1-\frac{1}{p}\right)}\|v_{n+1}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{-n\left(r-\frac{d}{p}\right)}.$$

Оцінки знизу отримано.

Теорему 5.2 доведено.

Далі розглянемо випадок, коли параметри p і q в задачі про оцінку величин $\mathcal{E}_n\big(B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ приймають крайні значення, тобто 1 або ∞.

Теорема 5.3. *Нехай $r>0$, $1\leqslant\theta\leqslant\infty$. Тоді, для $(p,q)\in\big\{(1,1),(\infty,\infty)\big\}$ має місце порядкове співвідношення*

$$\mathcal{E}_n\big(B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{-nr}. \tag{5.12}$$

Доведення. Оскільки має місце вкладення (1.74), то оцінку зверху достатньо встановити для класів $B^r_{p,\infty}(\mathbb{R}^d)\equiv H^r_p(\mathbb{R}^d)$. Як зазначалося, для довільної функції $f\in H^r_p(\mathbb{R}^d)$ з (1.95) випливає співвідношення $\|q_s(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}\ll 2^{-sr}$. Тоді, використавши нерівність Мінковського, можемо записати

$$\mathcal{E}_n\big(f\big)_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \left\|f(\cdot)-\sum_{s=0}^{n-1}q_s(\cdot)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} = \left\|\sum_{s=n}^{\infty}q_s(\cdot)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \ll$$

$$\ll \sum_{s=n}^{\infty}\|q_s(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \sum_{s=n}^{\infty}2^{-sr} \leqslant 2^{-nr}.$$

Оцінку зверху в (5.12) встановлено.

Оцінку знизу в (5.12), як і у попередній теоремі, достатньо встановити для класу $B^r_{p,1}(\mathbb{R}^d)$. Розглянемо функції:

$$f_2(\boldsymbol{x}) = C_6 2^{-nd\left(\frac{r}{d}+1\right)}v_{n+1}(\boldsymbol{x}), \quad C_6>0, \quad \text{при} \quad p=\infty$$

і
$$f_3(\boldsymbol{x}) = C_7 2^{-nr} v_{n+1}(\boldsymbol{x}), \quad C_7 > 0, \quad \text{при} \quad p = 1. \tag{5.13}$$

Як і при доведенні теореми 5.2, з урахуванням зауваження щодо носія перетворення Фур'є $q_s(v_{n+1})$ і оцінки (5.11), можна показати, що дані функції належать класу $B^r_{p,1}(\mathbb{R}^d)$ при певному виборі сталих C_6 та C_7. Окрім того, $\mathbf{V}_{n-1}(f_2, \cdot) = 0$ і $\mathbf{V}_{n-1}(f_3, \cdot) = 0$. Тому, враховуючи (5.8), маємо

$$\mathcal{E}_n\big(B^r_{\infty,1}(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \geqslant \mathcal{E}_n\big(f_2\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} = \|f_2(\cdot) - \mathbf{V}_{n-1}(f_2, \cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} =$$
$$= \|f_2(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{-nd\left(\frac{r}{d}+1\right)} \|v_{n+1}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{-nr}.$$

Аналогічно

$$\mathcal{E}_n\big(B^r_{1,1}(\mathbb{R}^d)\big)_{L_1(\mathbb{R}^d)} \geqslant \mathcal{E}_n\big(f_3\big)_{L_1(\mathbb{R}^d)} = \|f_3(\cdot) - \mathbf{V}_{n-1}(f_3, \cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} =$$
$$= \|f_3(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{-nr} \|v_{n+1}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{-nr}.$$

Оцінки знизу встановлено.

Теорему 5.3 доведено.

Зробимо декілька коментарів стосовно одержаних результатів.

Проаналізувавши одержані у даному підпункті оцінки (5.2) і (5.12) бачимо, що вони не залежать від значення параметра θ, тобто є однаковими як для ізотропних класів Нікольського, так і для ізотропних класів Бєсова.

Як уже відмічалося в одновимірному випадку ($d = 1$) ізотропні класи Нікольскього–Бєсова $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R})$ збігаються з класами з домінуючою мішаною гладкість $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R})$. Відповідно оцінка встановлена у теоремі 5.2 співпадає з оцінкою наслідку 2.13 при $1 < p < \infty$, а у випадку $p = 1$ — з оцінкою наслідку 2.18. Крім цього, оцінка теореми 5.3 у випадку $p = q = 1$, $\theta = \infty$, співпадає з оцінкою для класів $S^r_1 H(\mathbb{R})$ і наведена у твердженні 1.8.

Встановлені в теоремах 5.2, 5.3 оцінки доповнюють результати по знаходженню точних за порядком оцінок апроксимаційних характеристик класів $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, що наведені у твердженні 5.1. Ізотропні класи типу Нікольського–Бєсова також досліджувалися в [66, 67].

Відмітимо також, що ізотропні класи типу Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних з точки зору знаходження точних за порядком оцінок деяких апроксимаційних характеристик досліджувалися, зокрема, у роботах [65, 85, 95, 101].

5.3. Наближення функцій з ізотропних класів Нікольського–Бєсова цілими функціями спеціального вигляду

Для функцій з ізотропних класів Нікольського–Бєсова $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ також будемо розглядати величину типу (1.27) відповідним чином, з урахуванням специфіки досліджуваних класів функцій, модифікувавши агрегат наближення (1.28).

Нехай $\mathcal{L}$ позначає довільний скінченний набір чисел $s \in \mathbb{Z}_+$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathcal{L}) = \bigcup\limits_{s\in\mathcal{L}} \Gamma_{2^s}$. Для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, покладемо

$$S_{\mathfrak{M}}(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{s\in\mathcal{L}} f_{(s)}(\boldsymbol{x}). \tag{5.14}$$

Зауважимо, що у цьому випадку $S_{\mathfrak{M}}(f, \boldsymbol{x})$ є цілою функцією, яка належить простору $L_q(\mathbb{R}^d)$ і носій її перетворення Фур'є зосереджений на множині $\mathfrak{M}$, тобто

$$\operatorname{supp} S_{\mathfrak{M}}(f, \boldsymbol{x}) \subseteq \mathfrak{M} = \bigcup_{s\in\mathcal{L}} \Gamma_{2^s}.$$

Якщо функція $f \in B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, то покладемо

$$e^{\mathfrak{F}}_M\big(B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} := \sup_{f\in B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)} e^{\mathfrak{F}}_M\big(f\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}, \tag{5.15}$$

де

$$e_M^{\mathfrak{F}}(f)_{L_q(\mathbb{R}^d)} := \inf_{\mathcal{L}:\ \mathrm{mes}\ \mathfrak{M}\leqslant M} \|f(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f,\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)},$$

mes $\mathfrak{M}$ — лебегова міра множини $\mathfrak{M}$, $M > 0$.

Аналогічно до (1.30), згідно з наведеними означеннями величин можемо записати таке співвідношення

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \ll \mathcal{E}_{D_{2^n}}\big(B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}. \tag{5.16}$$

Справедливе наступне твердження.

Теорема 5.4. *Нехай* $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, $(p,q) \notin \big\{(1,1),(\infty,\infty)\big\}$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. *Тоді, якщо* $r > d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, *то має місце порядкове співвідношення*

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp M^{-\frac{r}{d}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \tag{5.17}$$

Доведення. Спочатку зауважимо, що виконання умови $r > d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, згідно з твердженням 1.32, забезпечує належність функцій f з класу $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ також і до простору $L_q(\mathbb{R}^d)$.

Встановимо спочатку в (5.17) оцінку зверху. Оскільки має місце вкладення $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d) \subset H^r_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant \theta < \infty$, то шукану оцінку достатньо отримати для $e_M^{\mathfrak{F}}\big(H^r_p(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$. Розглянемо кілька випадків у залежності від співвідношень між параметрами p і q.

Нехай $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$. Тоді за даним числом $M \in \mathbb{N}$ підберемо число $n(M)$ із співвідношення $2^n \asymp M^{\frac{1}{d}}$ і для $f \in H^r_p(\mathbb{R}^d)$ розглянемо наближення сумою виду

$$S_n(f,\boldsymbol{x}) = \sum_{s=0}^{n} f_{(s)}(\boldsymbol{x}).$$

Нехай q_0 — деяке число, яке задовольняє умову $p < q_0 < q$. Оскільки для $f \in H^r_p(\mathbb{R}^d)$ виконується співвідношення $\|q_s(f,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \ll 2^{-sr}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то, скориставшись нерівністю Мінковського та двічі "нерівністю різних метрик" Нікольського (1.1), запишемо

$$e_M^{\mathfrak{F}}(f)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \ll \|f(\cdot) - S_n(f,\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} = \left\| \sum_{s=n+1}^{\infty} f_{(s)}(\cdot) \right\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=n+1}^{\infty} \|f_{(s)}(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \ll \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{sd\left(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q}\right)} \|f_{(s)}(\cdot)\|_{L_{q_0}(\mathbb{R}^d)} \asymp$$

$$\asymp \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{sd\left(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q}\right)} \|q_s(\cdot)\|_{L_{q_0}(\mathbb{R}^d)} \ll \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{sd\left(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q}\right)} 2^{sd\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q_0}\right)} \|q_s(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{sd\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|q_s(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{sd\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} 2^{-sr} =$$

$$= \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{-sd\left(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} \ll 2^{-nd\left(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} \asymp M^{-\frac{r}{d}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Розглянемо випадок $1 < p = q < \infty$. Тоді для $f \in H_p^r(\mathbb{R}^d)$, з урахуванням (1.89) та нерівності Мінковського маємо

$$e_M^{\mathfrak{F}}(f)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \ll \|f(\cdot) - S_n(f,\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} = \left\| \sum_{s=n+1}^{\infty} f_{(s)}(\cdot) \right\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=n+1}^{\infty} \|f_{(s)}(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \leqslant \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{-sr} \ll 2^{-nr} \asymp M^{-\frac{r}{d}}.$$

Оцінки зверху для величини $e_M^{\mathfrak{F}}\left(B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)\right)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ встановлені.

Отримаємо тепер в (5.17) оцінки знизу. Оскільки має місце вкладення $B_{p,1}^r(\mathbb{R}^d) \subset B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)$, $1 < \theta \leqslant \infty$, то шукану оцінку достатньо отримати для величини $e_M^{\mathfrak{F}}\left(B_{p,1}^r(\mathbb{R}^d)\right)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$.

Для функцій $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$ і $g \in L_{q'}(\mathbb{R}^d)$ ми будемо використовувати співвідношення (4.30), яке для зручності нагадаємо

$$\|f(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} = \sup_{\|g(\cdot)\|_{L_{q'}(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1} \int_{\mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{x})\, g(\boldsymbol{x})| d\boldsymbol{x}, \text{де } \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Розглянемо спочатку випадок $1 < p \leqslant q < \infty$.

Нехай $f \in B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)$ і $S_{\mathfrak{M}}(f,\boldsymbol{x})$ — ціла функція, носій перетворення Фур'є якої зосереджений на множині $\mathfrak{M} = \bigcup\limits_{s \in \mathcal{L}} \Gamma_{2^s}$ і $\operatorname{mes} \mathfrak{M} \leqslant M$.

Згідно з наведеним співвідношенням, можемо записати

$$\|f(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f,\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} = \sup_{\|g(\cdot)\|_{L_q'(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \big(f(\boldsymbol{x}) - S_{\mathfrak{M}}(f,\boldsymbol{x})\big) g(\boldsymbol{x}) \right| d\boldsymbol{x}. \quad (5.18)$$

Щоб скористатися (5.18), побудуємо відповідні функції. За заданим $M \in \mathbb{N}$ підберемо $n(M) \in \mathbb{N}$ так, щоб виконувалися нерівності

$$2^{d(n-2)} \leqslant M < 2^{d(n-1)}. \tag{5.19}$$

Розглянемо функцію

$$F_n(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} \sum_{k_j=2^n}^{2^{n+1}-1} D_{k_j}(x_j),$$

де $D_{k_j}(x_j)$ визначається згідно з формулою (2.24), а саме

$$D_{k_j}(x_j) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(2 \sin \frac{x_j}{2} \cos \frac{2k_j+1}{2} x_j\right) \cdot x_j^{-1}.$$

Оцінимо спочатку норму функції F_n в метриці простору $L_q(\mathbb{R}^d)$ при $1 < q < \infty$. Маємо

$$\left\| \prod_{j=1}^{d} \sum_{k_j=2^n}^{2^{n+1}-1} D_{k_j}(x_j) \right\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} = \left\| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin 2^{n+1} x_j - \sin 2^n x_j}{x_j} \right\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| \frac{\sin 2^{n+1} x_j - \sin 2^n x_j}{x_j} \right|^q dx_j \right)^{\frac{1}{q}} \asymp$$

$$\asymp \left(\prod_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin 2^{n-1} x_j}{x_j} \right|^q dx_j \right)^{\frac{1}{q}} \asymp$$

$$\asymp 2^{nd\frac{q-1}{q}} \left(\prod_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin x_j}{x_j} \right|^q dx_j \right)^{\frac{1}{q}} \asymp 2^{nd\left(1-\frac{1}{q}\right)} = 2^{\frac{nd}{q'}}. \tag{5.20}$$

Відповідно на основі (5.20) отримаємо

$$\|F_n(\cdot)\|_{B^r_{p,1}(\mathbb{R}^d)} \asymp \sum_s 2^{sr} \|(F_n)_{(s)}(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{(n+1)r} \|F_n(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp$$

$$\asymp 2^{(n+1)r} 2^{nd\left(1-\frac{1}{p}\right)} \asymp 2^{nd\left(\frac{r}{d}+1-\frac{1}{p}\right)}. \tag{5.21}$$

Враховуючи (5.21), отримаємо, що функція

$$f_4(\boldsymbol{x}) = C_8 \ 2^{-nd\left(\frac{r}{d}+1-\frac{1}{p}\right)} F_n(\boldsymbol{x}),$$

з деякою константою $C_8 > 0$ належить класу $B^r_{p,1}(\mathbb{R}^d)$.

Далі, згідно з (5.21) маємо, що функція

$$g_1(\boldsymbol{x}) = C_9 2^{-\frac{nd}{q}} F_n(\boldsymbol{x}),$$

з деякою константою $C_9 > 0$ задовольняє нерівність $\|g_1(\cdot)\|_{L_{q'}(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1$.

Отже, використовуючи (5.18) і (5.20), а також врахувавши співвідношення (5.19), отримуємо

$$e^{\mathfrak{F}}_M\big(B^r_{p,1}(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \geqslant e^{\mathfrak{F}}_M\big(f_4\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \inf_{\mathcal{L}\colon \text{mes } \mathfrak{M} \leqslant M} \|f_4(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f_4, \cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \inf_{\mathcal{L}\colon \text{mes } \mathfrak{M} \leqslant M} \ \sup_{\|g_1(\cdot)\|_{L_{q'}(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \Big| \big(f_4(\boldsymbol{x}) - S_{\mathfrak{M}}(f_4, \boldsymbol{x})\big) g_1(\boldsymbol{x}) \Big| d\boldsymbol{x} \gg$$

$$\gg \inf_{\mathcal{L}\colon \text{mes } \mathfrak{M} \leqslant M} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \Big| \big(2^{-nd(\frac{r}{d}+1-\frac{1}{p})} F_n(\boldsymbol{x}) - S_{\mathfrak{M}}(f_4, \boldsymbol{x})\big) 2^{-\frac{nd}{q}} F_n(\boldsymbol{x}) \Big| d\boldsymbol{x} =$$

$$= 2^{-nd\left(\frac{r}{d}+1-\frac{1}{p}\right)} 2^{-\frac{nd}{q}} \inf_{\mathcal{L}\colon \text{mes } \mathfrak{M} \leqslant M} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \Big| \big(F_n(\boldsymbol{x}) - S_{\mathfrak{M}}(F_n, \boldsymbol{x})\big) F_n(\boldsymbol{x}) \Big| d\boldsymbol{x} \gg$$

$$\gg 2^{-nd\left(\frac{r}{d}+1-\frac{1}{p}\right)} 2^{-\frac{nd}{q}} \inf_{\mathcal{L}\colon \text{mes } \mathfrak{M} \leqslant M} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \big|F_n(\boldsymbol{x})\big|^2 d\boldsymbol{x} - \int\limits_{\mathbb{R}^d} \big|S_{\mathfrak{M}}(F_n, \boldsymbol{x}) F_n(\boldsymbol{x})\big| d\boldsymbol{x} \right) \gg$$

$$\gg 2^{-nd\left(\frac{r}{d}+1-\frac{1}{p}\right)} 2^{-\frac{nd}{q}} \left(\|F_n(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} - M \right) \gg$$

$$\gg 2^{-nd\left(\frac{r}{d}+1-\frac{1}{p}\right)} 2^{\frac{nd}{q}} (2^{nd} - M) \geqslant 2^{-nd\left(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} 2^{nd} \left(1 - \frac{1}{2^d}\right) \asymp$$

$$\asymp 2^{-nd\left(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} \asymp M^{-\frac{r}{d}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Оцінку знизу в даному випадку встановлено.

Тепер розглянемо випадок $1 \leqslant p < \infty$, $q = \infty$. За числом M підберемо число $n(M) \in \mathbb{N}$ так, щоб $2^{nd} \asymp M$ і $2^{nd} \geqslant 4M$. У цьому випадку для встановлення оцінки знизу будемо використовувати функцію $f_1(\boldsymbol{x})$ (див. (5.9)) з теореми 5.2, яка, як показано, належить класу $B^r_{p,1}(\mathbb{R}^d)$, а саме

$$f_1(\boldsymbol{x}) = C_1 2^{-nd\left(\frac{r}{d}+1-\frac{1}{p}\right)} v_{n+1}(\boldsymbol{x}), \quad C_1 > 0.$$

Далі, нехай $S_{\mathfrak{M}}(f_1, \boldsymbol{x})$ ціла функція вигляду (5.14). Оскільки при $p = \infty$ згідно з (5.6) $\|v_{n+1}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{nd}$, то

$$e^{\mathfrak{F}}_M\big(B^r_{p,1}(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \geqslant e^{\mathfrak{F}}_M\big(f_1\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} =$$
$$= \inf_{\mathcal{L}\colon \mathrm{mes}\ \mathfrak{M}\leqslant M} \|f_1(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f_1,\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \geqslant$$
$$\geqslant \Big|\|f_1(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} - \|S_{\mathfrak{M}}(f_1,\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}\Big| \gg 2^{-nd\left(\frac{r}{d}+1-\frac{1}{p}\right)}\big(2^{nd} - M\big) \asymp$$
$$\asymp 2^{-nd\left(\frac{r}{d}+1-\frac{1}{p}\right)} 2^{nd} = 2^{-nd\left(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}\right)} \asymp M^{\frac{r}{d}+\frac{1}{p}}.$$

Останнє співвідношення доводить оцінку знизу в цьому випадку.

На завершення розглянемо випадок $p = 1$ і $1 < q < \infty$. У цьому випадку знову будемо використовувати співвідношення (5.18) і у якості функцій $f(\boldsymbol{x})$ і $g(\boldsymbol{x})$ виберемо функції $f_3(\boldsymbol{x})$ (5.13), а саме

$$f_3(\boldsymbol{x}) = C_7 2^{-nr} v_{n+1}(\boldsymbol{x}), \quad C_7 > 0,$$

і

$$g_2(\boldsymbol{x}) = C_{10} 2^{-\frac{nd}{q}} v_{n+1}(\boldsymbol{x}), \quad C_{10} > 0.$$

При цьому також вважаємо, що виконуються співвідношення $2^{nd} \asymp M$ і $2^{nd} \geqslant 4M$.

Покажемо, що при відповідному виборі сталої C_{10} функція $g_2(\boldsymbol{x})$ задовольняє умові співвідношення (5.18) для функції $g(\boldsymbol{x})$. З урахуванням оцінки (5.8) і того, що $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, маємо

$$\|g_2(\cdot)\|_{L_{q'}(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{-\frac{nd}{q}} \|v_{n+1}(\cdot)\|_{L_{q'}(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{-nd\left(1-\frac{1}{q'}\right)} 2^{nd\left(1-\frac{1}{q'}\right)} = 1.$$

Таким чином, застосувавши співвідношення (5.18) до функцій $f_3(\boldsymbol{x})$ і $g_2(\boldsymbol{x})$, аналогічно як і для $f_4(\boldsymbol{x})$ та $g_1(\boldsymbol{x})$, отримаємо

$$e^{\mathfrak{F}}_M\big(B^r_{p,1}(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \geqslant e^{\mathfrak{F}}_M\big(f_3\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \inf_{\mathcal{L}\colon \operatorname{mes}\, \mathfrak{M}\leqslant M} \|f_3(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f_3,\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \inf_{\mathcal{L}\colon \operatorname{mes}\, \mathfrak{M}\leqslant M} \sup_{\|g_2(\cdot)\|_{L_{q'}(\mathbb{R}^d)}\leqslant 1} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \Big|\big(f_3(\boldsymbol{x}) - S_{\mathfrak{M}}(f_3,\boldsymbol{x})\big)g_2(\boldsymbol{x})\Big| d\boldsymbol{x} \gg$$

$$\gg 2^{-nr}2^{-\frac{nd}{q}}\left(\|v_{n+1}\|_2^2 - M\right) \gg 2^{-nd\left(\frac{r}{d}+\frac{1}{q}\right)}2^{nd} \asymp M^{\frac{r}{d}+1-\frac{1}{q}}.$$

Оцінку знизу встановлено.

Теорему 5.4 доведено.

На завершення даного підпункту зробимо деякі коментарі, щодо одержаних результатів.

Як уже зазначалося, у випадку $d = 1$ ізотропні класи Нікольського–Бєсова $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R})$ тотожні класам функцій з домінуючою мішаною похідною $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R})$. Відповідно оцінки величин $e^{\mathfrak{F}}_M\big(B^r_{p,\theta}(\mathbb{R})\big)_{L_q(\mathbb{R})}$ з даної теореми збігаються з оцінками величини $e^{\mathfrak{F}}_M\big(S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R})\big)_{L_q(\mathbb{R})}$ у випадках $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$ і $1 < p = q \leqslant 2$ (твердження 1.10, 1.11 і наслідки 2.24, 2.28). Варто зауважити, що в одновимірному випадку при $2 < p = q < \infty$ отримана в теоремі 5.4 оцінка величини (5.15) є новою й для класів $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R})$.

Порівнявши оцінки величини $e^{\mathfrak{F}}_M\big(B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ — (5.17) з оцінками величини $\mathcal{E}_{D_{2^n}}\big(B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$, які наведені в твердженні 5.1 та теоремі 5.2, у всіх досліджуваних випадках робимо висновок, що на відміну від класів функцій з домінуючою мішаною похідною $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, вони однакові за порядком. Крім того оцінки величини $e^{\mathfrak{F}}_M\big(B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ також не залежать від значення параметра θ.

Для ізотропних класів Нікольського–Бєсова періодичних функцій багатьох змінних найкраще ортогональне наближення, аналогом якого, у певному сенсі, є величина $e^{\mathfrak{F}}_M(\,\cdot\,)$, досліджувалося у [85, 199].

5.4. Порядкові оцінки апроксимаційних характеристик функцій з анізотропних класів Нікольського–Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$

Для невід'ємного вектора $\boldsymbol{r} = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1,d}$, введемо величину

$$g(\boldsymbol{r}) = \left(\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}\frac{1}{r_j}\right)^{-1}. \tag{5.22}$$

Зауважимо, що при $r_1 = r_2 = \ldots = r_d = r$ маємо $g(\boldsymbol{r}) = r$, крім того, як видно з самого означення, $g(\boldsymbol{r})$ змінюється пропорційно до $\boldsymbol{r}$, якщо $\boldsymbol{\rho} = k\boldsymbol{r}$, то $g(\boldsymbol{\rho}) = kg(\boldsymbol{r})$.

Наші дослідження анізотропних класів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ будемо проводити у випадку, коли в означеннях норми (1.81) і (1.82) маємо $b = 2^{g(\boldsymbol{r})}$, тобто $a_j = 2^{g(\boldsymbol{r})/r_j}$, $j = \overline{1,d}$. Таким чином можемо записати

$$\|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)} \asymp \left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{g(\boldsymbol{r})s\theta}\|f_{\boldsymbol{a}^s}(\cdot)\|^{\theta}_{L_p(\mathbb{R}^d)}\right)^{\frac{1}{\theta}} < 1, \tag{5.23}$$

при $1 \leqslant \theta < \infty$,

$$\|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^d)} \asymp \sup_{s\geqslant 0} 2^{g(\boldsymbol{r})s}\|f_{\boldsymbol{a}^s}(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} < 1. \tag{5.24}$$

5.4.1. Найкраще наближення функцій з анізотропних класів Нікольського–Бєсова

Наведемо одержані результати щодо оцінок величин (1.84) і (1.86) з урахуванням того, що при $1 < q < \infty$ виконується співвідношення (1.87). Має місце наступна теорема.

Теорема 5.5. *Нехай* $1 < p \leqslant q < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. *Тоді для* $g(\boldsymbol{r}) > d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, *виконуються порядкові співвідношення*

$$\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}\left(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)\right)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp E_{\boldsymbol{a}^n}\left(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)\right)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{-n\left(g(\boldsymbol{r})-d\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)}, \tag{5.25}$$

де $a_j = 2^{g(\boldsymbol{r})/r_j}$, $j = \overline{1, d}$.

Доведення. Перш ніж безпосередньо перейти до доведення теореми зауважимо, що виконання умови $g(\boldsymbol{r}) > d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, згідно з твердженням 1.32, забезпечує належність функцій f з класу $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ до простору $L_q(\mathbb{R}^d)$.

Спочатку встановимо в (5.25) оцінки зверху. Оскільки $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d) \subset \subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^d) \equiv H^{\boldsymbol{r}}_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant \theta < \infty$, то шукану оцінку достатньо отримати для величини $\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}\left(H^{\boldsymbol{r}}_p(\mathbb{R}^d)\right)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$. У залежності від співвідношення між параметрами p і q розглянемо два випадки.

1) Нехай $1 < p = q < \infty$. Оскільки для $f \in H^{\boldsymbol{r}}_p(\mathbb{R}^d)$ згідно з (5.24) маємо $\|f_{\boldsymbol{a}^s}(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \ll 2^{-sg(\boldsymbol{r})}$, то, скориставшись нерівністю Мінковського, будемо мати

$$\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}\left(f\right)_{L_p(\mathbb{R}^d)} = \|f(\cdot) - S_{\boldsymbol{a}^{n-1}}(f, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \left\| \sum_{s=0}^{\infty} f_{\boldsymbol{a}^s}(\cdot) - S_{\boldsymbol{a}^{n-1}}(f, \cdot) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} = \left\| \sum_{s=n}^{\infty} f_{\boldsymbol{a}^s}(\cdot) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}$$

$$\leqslant \sum_{s=n}^{\infty} \|f_{\boldsymbol{a}^s}(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \sum_{s=n}^{\infty} 2^{-sg(\boldsymbol{r})} \ll 2^{-ng(\boldsymbol{r})}.$$

2) Нехай тепер $1 < p < q < \infty$. Тоді для $f \in H^{\boldsymbol{r}}_p(\mathbb{R}^d)$, врахувавши (5.24) та скориставшись нерівностями Мінковського і різних метрик Нікольського (твердження 1.1), можемо записати

$$\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}\left(f\right)_{L_q(\mathbb{R}^d)} = \|f(\cdot) - S_{\boldsymbol{a}^{n-1}}(f, \cdot)\|_q = \left\| \sum_{s=n}^{\infty} f_{\boldsymbol{a}^s}(\cdot) \right\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=n}^{\infty} \|f_{\boldsymbol{a}^s}(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \ll \sum_{s=n}^{\infty} 2^{sd\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|f_{\boldsymbol{a}^s}(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \ll$$

$$\ll \sum_{s=n}^{\infty} 2^{sd\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} 2^{-sg(\boldsymbol{r})} = \sum_{s=n}^{\infty} 2^{-s\left(g(\boldsymbol{r}) - d\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\right)} \ll 2^{-n\left(g(\boldsymbol{r}) - d\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)}.$$

Оцінку зверху для величини $\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}\big(H^{\boldsymbol{r}}_p(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ і, таким чином, згідно з (1.87) для $E_{D_{\boldsymbol{a}^n}}\big(H^{\boldsymbol{r}}_p(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ встановлено.

Встановимо тепер в (5.25) оцінки знизу. Оскільки має місце вкладення $B^{\boldsymbol{r}}_{p,1}(\mathbb{R}^d) \subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, $1 < \theta \leqslant \infty$, то шукану оцінку достатньо отримати для величини $\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}\big(B^{\boldsymbol{r}}_{p,1}(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$. Іншими словами, достатньо оцінити знизу величину $\|f(\cdot) - S_{\boldsymbol{a}^{n-1}}(f,\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ для деякої функції $f \in B^{\boldsymbol{r}}_{p,1}(\mathbb{R}^d)$.

З цією метою розглянемо функцію $F_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$, на основі якої побудуємо функцію, для якої досягається оцінка (5.25).

Нехай $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^d$, $\boldsymbol{k} = (k,\ldots,k)$,

$$F_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin a_j^k x_j}{x_j} - \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin a_j^{k-1} x_j}{x_j} \tag{5.26}$$

$$F_0(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin x_j}{x_j}. \tag{5.27}$$

Тоді для перетворення Фур'є функції $F_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$ має місце співвідношення

$$\mathfrak{F} F_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \chi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{\lambda}) = \prod_{j=1}^{d} \chi_k(\lambda_j),$$

де

$$\chi_k(\lambda_j) = \begin{cases} 1, & a_j^{k-1} < |\lambda_j| < a_j^k, \\ \frac{1}{2}, & |\lambda_j| = a_j^{k-1} \text{ або } |\lambda_j| = a_j^k, \\ 0 & \text{— в інших випадках,} \end{cases}$$

$$\chi_0(x_j) = \begin{cases} 1, & |\lambda_j| < 1; \\ \frac{1}{2}, & |\lambda_j| = 1; \\ 0, & |\lambda_j| > 1. \end{cases}$$

Відповідно для оберненого перетворення Фур'є будемо мати

$$\mathfrak{F}^{-1} \chi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{\lambda}) = F_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}).$$

Покажемо, справедливість останніх рівностей для $\chi_{k_j}(\lambda_j)$ і $\chi_0(\lambda_j)$. Для спрощення розглянемо випадок $d = 1$, тобто

$$F_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin a^k x}{x} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin a^{k-1} x}{x}$$

та

$$F_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin x}{x}.$$

Знайдемо перетворення Фур'є для функції $F_k(x)$.

Оскільки дана функція парна, то для знаходження її перетворення Фур'є будемо застосовувати формулу косинус-перетворення Фур'є. Отримаємо

$$\mathfrak{F}F_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty F_k(x)\cos\lambda x\,dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin a^k x}{x} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin a^{k-1} x}{x}\right)\cos\lambda x\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^\infty \frac{\sin a^k x}{x}\cos\lambda x\,dx - \int\limits_0^\infty \frac{\sin a^{k-1} x}{x}\cos\lambda x\,dx\right). \tag{5.28}$$

Для того, щоб продовжити (5.28) спочатку проведемо підрахунок для першого інтегралу

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin a^k x}{x}\cos\lambda x dx = \int\limits_0^\infty \frac{1}{2}\frac{\sin{(a^k+\lambda)x} + \sin{(a^k-\lambda)x}}{x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\sin{(a^k+\lambda)x}}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\sin{(a^k-\lambda)x}}{x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathrm{sign}(a^k+\lambda)\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx + \mathrm{sign}(a^k-\lambda)\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}\left(\mathrm{sign}(a^k+\lambda) + \mathrm{sign}(a^k-\lambda)\right). \tag{5.29}$$

Відповідно для другого інтегралу в (5.28) цілком аналогічно отримаємо

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin a^{k-1}x}{x}\cos\lambda x\,dx = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\left(\mathrm{sign}(a^{k-1}+\lambda)+\mathrm{sign}(a^{k-1}-\lambda)\right). \qquad (5.30)$$

Тоді, підставивши (5.29) і (5.30) в (5.28) та врахувавши означення функції sign, простим підрахунком одержуємо

$$\mathfrak{F}F_k(x) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathrm{sign}(a^k+\lambda)+\mathrm{sign}(a^k-\lambda)-\mathrm{sign}(a^{k-1}+\lambda)-\mathrm{sign}(a^{k-1}-\lambda)\right) =$$

$$= \begin{cases} 1, & a^{k-1} < |\lambda| < a^k, \\ \frac{1}{2}, & |\lambda| = a^k \text{ або } |\lambda| = a^{k-1}, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Для $F_0(x)$ отримаємо

$$\mathfrak{F}F_0(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{sign}(1+\lambda)+\mathrm{sign}(1-\lambda)\right) = \chi_0(x) = \begin{cases} 1, & |\lambda| < 1; \\ \frac{1}{2}, & |\lambda| = 1; \\ 0, & |\lambda| > 1. \end{cases}$$

Покажемо тепер, що виконується співвідношення

$$\mathfrak{F}^{-1}\chi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{\lambda}) = F_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}),$$

яке нам також достатньо встановити у випадку $d = 1$. Рівність для $\mathfrak{F}^{-1}\chi_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{\lambda})$ встановлюється аналогічно.

Знайдемо обернене перетворення Фур'є для функції $\chi_k(\lambda)$

$$\mathfrak{F}^{-1}\chi_k(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\chi_k(t)e^{itx}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-a^k}^{-a^{k-1}} e^{i\lambda x}d\lambda + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{a^{k-1}}^{a^k} e^{i\lambda x}d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\lambda x}}{ix}\Big|_{-a^k}^{-a^{k-1}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\lambda x}}{ix}\Big|_{a^{k-1}}^{a^k} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-ia^{k-1}x} - e^{-ia^k x}}{ix} + \frac{e^{ia^k x} - e^{ia^{k-1}}x}{ix} \right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\cos(-a^{k-1}x) + i\sin(-a^{k-1}x) - (\cos(-a^k x) + i\sin(-a^k x))}{ix} + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos(a^k x) + i\sin(a^k x) - (\cos(a^{k-1}x) + i\sin(a^{k-1}x))}{ix} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\left(\sin(a^k x) - \sin(a^{k-1}x)\right)}{x} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a^k x}{x} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a^{k-1} x}{x} = F_k(x)$$

Зазначимо, що таким чином $F_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$ — ціла функція з $L_p(\mathbb{R}^d)$, носій перетворення Фур'є якої зосереджений в $\Gamma_{\boldsymbol{a^k}}$.

Перш ніж безпосередньо перейти до встановлення оцінки знизу в (5.25), одержимо порядок величини

$$\|F_{\boldsymbol{k}}(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} = \left\| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a_j^k x_j}{x_j} - \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a_j^{k-1} x_j}{x_j} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}. \tag{5.31}$$

Для оцінки зверху будемо мати

$$\|F_{\boldsymbol{k}}(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} = \left\| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a_j^k x_j}{x_j} - \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a_j^{k-1} x_j}{x_j} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a_j^k x_j}{x_j} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} + \left\| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a_j^{k-1} x_j}{x_j} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a_j^k x_j}{x_j} \right|^p \prod_{j=1}^{d} dx_j \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a_j^{k-1} x_j}{x_j} \right|^p \prod_{j=1}^{d} dx_j \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \prod_{j=1}^{d} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\sin a_j^k x_j}{x_j} \right|^p dx_j \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \prod_{j=1}^{d} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\sin a_j^{k-1} x_j}{x_j} \right|^p dx_j \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \prod_{j=1}^{d} \left(a_j^{k(p-1)} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\sin x_j}{x_j} \right|^p dx_j \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \prod_{j=1}^{d} \left(a_j^{(k-1)(p-1)} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\sin x_j}{x_j} \right|^p dx_j \right)^{\frac{1}{p}} \ll$$

$$\ll \prod_{j=1}^{d} a_j^{\frac{k(p-1)}{p}} + \prod_{j=1}^{d} a_j^{\frac{(k-1)(p-1)}{p}} \ll \prod_{j=1}^{d} a_j^{k\left(1-\frac{1}{p}\right)} = \prod_{j=1}^{d} a_j^{\frac{k}{p'}}. \tag{5.32}$$

Врахувавши, що $a_j = 2^{g(\boldsymbol{r})/r_j}$, та співвідношення (5.22), оцінку (5.32) продовжимо таким чином

$$\|F_{\boldsymbol{k}}(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \ll \prod_{j=1}^{d} a_j^{\frac{k}{p'}} = \prod_{j=1}^{d} 2^{k\frac{g(\boldsymbol{r})}{r_j p'}} = 2^{\frac{kg(\boldsymbol{r})}{p'} \sum\limits_{j=1}^{d} \frac{1}{r_j}} =$$

$$= 2^{\frac{kg(\boldsymbol{r})}{p'} \frac{d}{g(\boldsymbol{r})}} = 2^{\frac{dk}{p'}}. \tag{5.33}$$

При оцінці норми $\|F_{\boldsymbol{k}}(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}$ знизу отримаємо

$$\|F_{\boldsymbol{k}}(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} = \left\| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin a_j^k x_j}{x_j} - \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin a_j^{k-1} x_j}{x_j} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \geqslant$$

$$\geqslant \left| \left\| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin a_j^k x_j}{x_j} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} - \left\| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin a_j^{k-1} x_j}{x_j} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \right| =$$

$$= \left| \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin a_j^k x_j}{x_j} \right|^p \prod_{j=1}^{d} dx_j \right)^{\frac{1}{p}} - \right.$$

$$\left. - \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin a_j^{k-1} x_j}{x_j} \right|^p \prod_{j=1}^{d} dx_j \right)^{\frac{1}{p}} \right| =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \left| \prod_{j=1}^{d} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\sin a_j^k x_j}{x_j} \right|^p dx_j \right)^{\frac{1}{p}} - \prod_{j=1}^{d} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\sin a_j^{k-1} x_j}{x_j} \right|^p dx_j \right)^{\frac{1}{p}} \right| \gg$$

$$\gg \left| \prod_{j=1}^{d} a_j^{\frac{k(p-1)}{p}} - \prod_{j=1}^{d} a_j^{\frac{(k-1)(p-1)}{p}} \right| \gg (2^{\frac{dk}{p'}} - 2^{\frac{d(k-1)}{p'}}) \gg 2^{\frac{dk}{p'}} \tag{5.34}$$

Співставивши (5.33) і (5.34), для $\|F_{\boldsymbol{k}}(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}$ можемо записати порядкове співвідношення

$$\|F_{\boldsymbol{k}}(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{\frac{dk}{p'}}. \tag{5.35}$$

Далі розглянемо функцію

$$f_5(\boldsymbol{x}) = C_{11} 2^{-n\left(g(\boldsymbol{r}) + \frac{d}{p'}\right)} F_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}),$$

де $\boldsymbol{n} = (n, \ldots, n) \in \mathbb{N}^d$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $C_{11} > 0$.

Покажемо, що з деякою сталою $C_{11} > 0$ функція f_5 належить класу $B^{\boldsymbol{r}}_{p,1}(\mathbb{R}^d)$. Згідно з (5.23) та (5.35) маємо

$$\|f_5(\cdot)\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,1}(\mathbb{R}^d)} \asymp \sum_{s} 2^{sg(\boldsymbol{r})} \|f_{\boldsymbol{a}^s}(f_5)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp$$

$$\asymp \sum_{s} 2^{sg(\boldsymbol{r})} 2^{-n\left(g(\boldsymbol{r}) + \frac{d}{p'}\right)} \|F_{\boldsymbol{n}}(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{-n\left(g(\boldsymbol{r}) + \frac{d}{p'}\right)} \sum_{s} 2^{sg(\boldsymbol{r})} 2^{\frac{dn}{p'}} \ll$$

$$\ll 2^{-n\left(g(\boldsymbol{r}) + \frac{d}{p'}\right)} 2^{ng(\boldsymbol{r})} 2^{\frac{dn}{p'}} = 1.$$

Оскільки за вибором функції f_5 для неї має місце співвідношення $S_{\boldsymbol{a}^{n-1}}(f_5, \cdot) = 0$, то

$$\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}} \left(B^{\boldsymbol{r}}_{p,1}(\mathbb{R}^d)\right)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \geqslant \mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}} \left(f_5\right)_{L_q(\mathbb{R}^d)} = \|f_5(\cdot) - S_{\boldsymbol{a}^{n-1}}(f_5, \cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \|f_5(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \gg 2^{-n\left(g(\boldsymbol{r}) + \frac{d}{p'}\right)} \|F_{\boldsymbol{n}}(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \gg 2^{-n\left(g(\boldsymbol{r}) + \frac{d}{p'}\right)} 2^{\frac{dn}{q'}} =$$

$$= 2^{-n\left(g(\boldsymbol{r}) - d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\right)}.$$

Оцінку знизу в (5.25) встановлено.

Теорему 5.5 доведено.

На завершення даного підпункту зробимо деякі коментарі.

Нехай $g(\boldsymbol{r}) = r = r_1 = \ldots = r_d$, тобто у вектора $\boldsymbol{r}$ усі координати рівні між собою. Тоді оцінку (5.25) можемо записати у такій формі

$$\mathcal{E}_{D_{2^n}}\left(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)\right)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp E_{D_{2^n}}\left(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)\right)_{L_q(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{-n\left(r-d\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)}, \tag{5.36}$$

де $1 < p \leqslant q < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$.

У цьому випадку також маємо, що анізотропні класи Нікольського–Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ збігаються з ізотропними класами Нікольського–Бєсова $B^{r}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ і бачимо, що оцінка (5.36) при відповідних значеннях параметрів збігається з оцінкою (5.1), яка наведена у твердженні 5.1.

В одновимірному випадку ($d = 1$) оцінка (5.25) буде мати вигляд:

$$\mathcal{E}_{D_{2^n}}\left(B^{r}_{p,\theta}(\mathbb{R})\right)_{L_q(\mathbb{R})} \asymp E_{D_{2^n}}\left(B^{r}_{p,\theta}(\mathbb{R})\right)_{L_q(\mathbb{R})} \asymp 2^{-n\left(r-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)}, \tag{5.37}$$

де множина D_{2^n}, як об'єднання множин Γ_{2^s}, $s = \overline{0,n}$, які є об'єднанням напівінтервалів $(-2^s, -2^{s-1}]$ та $[2^{s-1}, 2^s)$, $s \in \mathbb{Z}_+$, з відповідною модифікацією при $s = 0$, буде інтервалом $(-2^n, 2^n)$ і збігається з множиною $\tilde{Q}^1_n$ (2.18), в яку вироджується східчастий гіперболічний хрест. Відповідно анізотропні класи Нікольського–Бєсова, як й ізотропні класи, збігаються з класами з домінуючою мішаною гладкістю $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R})$. Оцінка (5.37), при відповідних значеннях параметрів, збігається з оцінками, які встановлені Sun Yongsheng та Wang Heping для класів $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R})$ і наведені у твердженнях 1.5, 1.6.

5.4.2. Відхилення функцій з анізотропних класів Нікольського–Бєсова від їхніх відрізків інтеграла Фур'є

Справедливе таке твердження.

Теорема 5.6. *Нехай* $1 < p < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. *Тоді для* $g(\boldsymbol{r}) > \frac{d}{p}$ *має місце порядкове співвідношення*

$$\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}\left(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)\right)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{-n\left(g(\boldsymbol{r})-\frac{d}{p}\right)}, \tag{5.38}$$

де $a_j = 2^{g(\boldsymbol{r})/r_j}$, $j = \overline{1,d}$.

Доведення. Перш ніж безпосередньо перейти до доведення теореми зауважимо, що виконання умови $g(\boldsymbol{r}) > \frac{d}{p}$, згідно з твердженням 1.32, забезпечує належність функцій $f \in B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ до простору $L_\infty(\mathbb{R}^d)$.

Спочатку отримаємо в (5.38) оцінку зверху. Оскільки згідно з (1.74) $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d) \subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^d) \equiv H^{\boldsymbol{r}}_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant \theta < \infty$, то шукану оцінку, як і при встановленні оцінки зверху у теоремі 5.5, достатньо отримати для величини $\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}\big(H^{\boldsymbol{r}}_p(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}$.

Згідно з (5.24) для $f \in H^{\boldsymbol{r}}_p(\mathbb{R}^d)$ маємо $\|f_{\boldsymbol{a}^s}(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \ll 2^{-sg(\boldsymbol{r})}$. Тому, скориставшись нерівністю Мінковського, нерівністю різних метрик (4.41), враховуючи, що $a_j = 2^{g(\boldsymbol{r})/r_j}$ та беручи до уваги (5.22), отримаємо

$$\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}\big(f\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} = \|f(\cdot) - S_{\boldsymbol{a}^{n-1}}(f,\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \left\| \sum_{s=0}^{\infty} f_{\boldsymbol{a}^s}(\cdot) - S_{\boldsymbol{a}^{n-1}}(f,\cdot) \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} = \left\| \sum_{s=n}^{\infty} f_{\boldsymbol{a}^s}(\cdot) \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=n}^{\infty} \|f_{\boldsymbol{a}^s}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \sum_{s=n}^{\infty} 2^d \left(\prod_{j=1}^{d} a_j^s\right)^{\frac{1}{p}} \|f_{\boldsymbol{a}^s}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \ll$$

$$\leqslant \sum_{s=n}^{\infty} 2^d \left(\prod_{j=1}^{d} 2^{\frac{sg(\boldsymbol{r})}{r_j}}\right)^{\frac{1}{p}} \|f_{\boldsymbol{a}^s}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} = \sum_{s=n}^{\infty} 2^d \left(2^{\sum\limits_{j=1}^{d} \frac{sg(\boldsymbol{r})}{r_j}}\right)^{\frac{1}{p}} \|f_{\boldsymbol{a}^s}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \ll$$

$$\ll \sum_{s=n}^{\infty} 2^{\frac{sg(\boldsymbol{r})}{p} \sum\limits_{j=1}^{d} \frac{1}{r_j}} \|f_{\boldsymbol{a}^s}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \ll \sum_{s=n}^{\infty} 2^{\frac{sd}{p}} \|f_{\boldsymbol{a}^s}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \ll$$

$$\ll \sum_{s=n}^{\infty} 2^{\frac{sd}{p}} 2^{-sg(\boldsymbol{r})} = \sum_{s=n}^{\infty} 2^{-s\left(g(\boldsymbol{r}) - \frac{d}{p}\right)} \ll 2^{-n\left(g(\boldsymbol{r}) - \frac{d}{p}\right)}.$$

Оцінку зверху для величини $\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}\big(H^{\boldsymbol{r}}_p(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}$ встановлено.

Отримаємо тепер в (5.38) оцінку знизу. Оскільки $B^{\boldsymbol{r}}_{p,1}(\mathbb{R}^d) \subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, $1 < \theta \leqslant \infty$, то шукану оцінку, як і при доведенні теореми 5.5, достатньо отримати для величини $\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}\big(B^{\boldsymbol{r}}_{p,1}(\mathbb{R}^d)\big)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}$. Іншими словами достатньо оцінити знизу величину $\|f(\cdot) - S_{\boldsymbol{a}^{n-1}}(f,\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}$ для деякої функції $f \in B^{\boldsymbol{r}}_{p,1}(\mathbb{R}^d)$.

З цією метою також будемо розглядати функцію

$$f_5(\boldsymbol{x}) = C_{11} 2^{-n\left(g(\boldsymbol{r})+\frac{d}{p'}\right)} F_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}),$$

яка, як показано у процесі доведення теореми 5.5, з деякою константою $C_{11} > 0$ належить класу $B^{\boldsymbol{r}}_{p,1}(\mathbb{R}^d)$, при цьому $\boldsymbol{n} = (n, \ldots, n) \in \mathbb{N}^d$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ і

$$F_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin a_j^n x_j}{x_j} - \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin a_j^{n-1} x_j}{x_j}$$

та

$$F_0(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin x_j}{x_j}.$$

Перш ніж перейти до встановлення оцінки знизу в (5.38), одержимо порядок величини

$$\|F_{\boldsymbol{n}}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} = \left\| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin a_j^n x_j}{x_j} - \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin a_j^{n-1} x_j}{x_j} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}. \tag{5.39}$$

Попередньо зауважимо, що оскільки $a_j = 2^{g(\boldsymbol{r})/r_j}$, то виконується така рівність

$$\prod_{j=1}^{d} a_j^k = \prod_{j=1}^{d} 2^{k\frac{g(\boldsymbol{r})}{r_j}} = 2^{kg(\boldsymbol{r})\sum\limits_{j=1}^{d}\frac{1}{r_j}} = 2^{kg(\boldsymbol{r})\frac{d}{g(\boldsymbol{r})}} = 2^{dk}.$$

Для оцінки зверху, з урахуванням вище сказаного, будемо мати

$$\|F_{\boldsymbol{n}}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} = \left\| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin a_j^n x_j}{x_j} - \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin a_j^{n-1} x_j}{x_j} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin a_j^n x_j}{x_j} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} + \left\| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin a_j^{n-1} x_j}{x_j} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d} \left| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin a_j^n x_j}{x_j} \right| + \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d} \left| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin a_j^{n-1} x_j}{x_j} \right| =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \prod_{j=1}^{d} \sup_{x_j\in\mathbb{R}} \left|\frac{\sin a_j^n x_j}{x_j}\right| + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \prod_{j=1}^{d} \sup_{x_j\in\mathbb{R}} \left|\frac{\sin a_j^{n-1} x_j}{x_j}\right| \ll$$

$$\ll \left(\prod_{j=1}^{d} a_j^n + \prod_{j=1}^{d} a_j^{n-1}\right) = \left(2^{dn} + 2^{d(n-1)}\right) \ll 2^{dn}. \tag{5.40}$$

Оцінюючи $\|F_{\boldsymbol{n}}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}$ знизу, одержуємо

$$\|F_{\boldsymbol{n}}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} = \left\| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin a_j^n x_j}{x_j} - \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin a_j^{n-1} x_j}{x_j} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \geqslant$$

$$\geqslant \left| \left\| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin a_j^n x_j}{x_j} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} - \left\| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin a_j^{n-1} x_j}{x_j} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \right| \gg$$

$$\gg \left| \prod_{j=1}^{d} a_j^n - \prod_{j=1}^{d} a_j^{n-1} \right| \gg \left(2^{dn} - 2^{d(n-1)}\right) \gg 2^{dn}. \tag{5.41}$$

Співставляючи (5.40) і (5.41), можемо записати порядкове співвідношення

$$\|F_{\boldsymbol{n}}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{dn}. \tag{5.42}$$

Оскільки, згідно з побудовую функції f_5, має місце співвідношення $S_{\boldsymbol{a}^{n-1}}(f_5,\cdot) = 0$, то скориставшись (5.42) приходимо до шуканої оцінки знизу

$$\mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}\left(B^{\boldsymbol{r}}_{p,1}(\mathbb{R}^d)\right)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \geqslant \mathcal{E}_{D_{\boldsymbol{a}^n}}\left(f_5\right)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \|f_5(\cdot) - S_{\boldsymbol{a}^{n-1}}(f_5,\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} = \|f_5(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \gg$$

$$\gg 2^{-n\left(g(\boldsymbol{r})+\frac{d}{p'}\right)} \|F_{\boldsymbol{n}}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \gg 2^{-n\left(g(\boldsymbol{r})+\frac{d}{p'}\right)} 2^{dn} = 2^{-n\left(g(\boldsymbol{r})-\frac{d}{p}\right)}.$$

Оцінку знизу в (5.38) встановлено.

Теорему 5.6 доведено.

Прокоментуємо одержаний результат.

У випадку $g(\boldsymbol{r}) = r = r_1 = \ldots = r_d$, тобто для ізотропних класів Нікольського–Бєсова $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, з оцінки (5.38) отримуємо

$$\mathcal{E}_{D_{2^n}}\left(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)\right)_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \asymp 2^{-n\left(r-\frac{d}{p}\right)}, \tag{5.43}$$

де $1 < p < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. Зауважимо, що оцінка (5.43) буде реалізовуватися аналогом функції f_5, якщо певним чином модифікувати відповідно до ізотропного випадку “ядро” F_n. Окрім того, при відповідних значеннях параметрів дана оцінка збігається з оцікою, яка отримана у теоремі 5.2 і реалізується сумами типу Валле Пуссена.

В одновимірному випадку, як уже зазначалося, анізотропні класи Нікольського–Бєсова збігаються з класами $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R})$ і відповідна оцінка збігається з оцінкою, яка наведена у наслідку 2.18, а саме маємо:

$$\mathcal{E}_{D_{2^n}}\left(B^r_{p,\theta}(\mathbb{R})\right)_{L_\infty(\mathbb{R})} \asymp \mathcal{E}_{\tilde{Q}^1_n}\left(S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R})\right)_{L_\infty(\mathbb{R})} \asymp 2^{-n\left(r-\frac{1}{p}\right)}.$$

Як видно з оцінок (5.25) і (5.38), в анізотропному випадку, так само як і в ізотропному, вони не залежать від параметра θ для усіх $d \geqslant 1$, на відміну від відповідних оцінок для класів функцій з домінуючою мішаною похідною, в яких при $d \geqslant 2$ проявляється залежність від θ.

На завершення пункту 5.4 зауважимо, що класи типу анізотропних класів Нікольського–Бєсова неперіодичних функцій багатьох змінних, які визначені на $\mathbb{R}^d$ з точки зору знаходження точних за порядком значень деяких апроксимаційних характеристик досліджувалися, зокрема, у роботах [177, 178], а у періодичному випадку в роботах [68, 69, 173].

Висновки до розділу 5

У даному розділі:

1. Одержано точні за порядком оцінки наближення функцій багатьох змінних із ізотропних класів Нікольського–Бєсова $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ сумами типу Валле Пуссена у рівномірній та інтегральній метриках. Також для функцій з даних класів знайдено точні за порядком оцінки наближення у метриці простору Лебега $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 < q < \infty$, за допомогою цілих функцій експоненціального типу з певними обмеженнями на їхній спектр.

2. Для функцій багатьох змінних із анізотропних класів Нікольського–Бєсова встановлено точні за порядком оцінки найкращого наближення у просторі $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, за допомогою цілих функцій з носіями їхнього перетворення Фур'є у d-вимірних "паралелепіпедах".

3. Одержано точні за порядком оцінки відхилення функцій з анізотропних класів Нікольського–Бєсова $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ у рівномірній метриці від їхніх відрізків інтеграла Фур'є.

Основні результати даного розділу опубліковано у працях [5, 8, 10, 13] зі списку публікацій і, відповідно, [239, 244, 246, 248] зі списку використаних джерел, а також опубліковані у тезах конференцій [20, 24, 28, 32, 33, 34] і, відповідно, [137, 146–148, 151, 238].

Основні результати та висновки

Основні результати дисертації можна сформулювати таким чином:

- Для класів функцій з домінуючою мішаною похідною $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p < \infty$, одержано точні за порядком оцінки наближення у просторі Лебега $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 < q \leqslant \infty$, за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті. Також встановлено точні за порядком оцінки наближення функцій з даних класів за допомогою цілих функцій експоненціального типу зі спектром спеціального вигляду (зосередженим на множинах лебегова міра яких є скінченною), похибка наближення оцінюється у рівномірній метриці.
- Встановлено точні за порядком оцінки наближення функцій з класів $S^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ за допомогою цілих функцій експоненціального типу зі спектром спеціального вигляду у метриці простору $L_2(\mathbb{R}^d)$ та показано, що у випадку $1 \leqslant \theta < 2$ ці оцінки є кращими від відповідних оцінок наближення за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті.
- Одержано оцінки норми "блоків" Валле Пуссена, які є аналогами сум Валле Пуссена періодичних функцій багатьох змінних, у просторі Лебега.
- Для класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, $d \geqslant 2$, періодичних функцій з домінуючою мішаною гладкістю у метриці простору квазінеперервних функцій $QC(\mathbb{T}^d)$ знайдено точні за порядком оцінки M-вимірного колмогоровського поперечника та ентропійних чисел у випадку $2 \leqslant p \leqslant \infty$, $2 \leqslant \theta < \infty$, $r_1 > \frac{1}{2}$.

- Встановлено точні за порядком оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, у просторі $B_{\infty,1}(\mathbb{T}^d)$, $d \geqslant 1$. Крім того, у багатовимірному випадку, $d \geqslant 2$, встановлено точні за порядком оцінки наближень класів функцій $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ їхніми східчасто-гіперболічними сумами Фур'є у цьому ж просторі, а також знайдено порядки ортопоперечників досліджуваних класів функцій. У деяких випадках досліджено поведінку відповідних апроксимаційних характеристик класів Соболєва $W^{\boldsymbol{r}}_{1,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$ при $d \in \{1,2\}$.
- Одержано точні за порядком оцінки ортопоперечників і близьких до них апроксимаційних характеристик класів Соболєва $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}(\mathbb{T}^d)$ та класів Нікольського–Бєсова $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ періодичних функцій однієї та багатьох змінних з домінуючою мішаною похідною у просторі $B_{1,1}(\mathbb{T}^d)$.
- Встановлено, що у багатовимірному випадку, на противагу одновимірному, послідовність норм лінійних операторів, які реалізують порядкові значення найкращого наближення класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{T}^d)$ у просторі $B_{1,1}(\mathbb{T}^d)$ за допомогою тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів, є необмеженою.
- Одержано точні за порядком оцінки наближення функцій з узагальнених класів з домінуючою мішаною похідною $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є на множинах, які породжуються поверхнями рівня функції $\Omega(\boldsymbol{t})$ і при цьому похибка наближення оцінюється у метриці простору $L_q(\mathbb{R}^d)$, а параметри p та q задовольняють таким співвідношенням: $1 < p \leqslant q < \infty$; $1 < p < \infty$, $q = \infty$.
- Знайдено точні за порядком оцінки наближення функцій із класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ у рівномірній метриці за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті.

- Одержано точні за порядком оцінки величини наближення функцій із класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ за допомогою цілих функцій спеціального вигляду у просторі $L_q(\mathbb{R}^d)$ при деяких співвідношеннях між параметрами p і q, а саме: $1 < p < q < \infty$; $1 < p = q \leqslant 2$; $1 < p < \infty$, $q = \infty$. При цьому виявлено, що існують ситуації, коли величина $e^{\mathfrak{F}}_M\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ і найкраще наближення функцій із даних класів за допомогою цілих функцій з носієм їхнього перетворення Фур'є у східчастому гіперболічному хресті — $\mathcal{E}_{\tilde{Q}_n}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)\big)_{L_q(\mathbb{R}^d)}$ мають різні порядки.
- Для функцій багатьох змінних із ізотропних класів Нікольського–Бєсова $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ одержано точні за порядком оцінки наближення сумами типу Валле Пуссена у рівномірній та інтегральній метриках. Крім того, знайдено точні за порядком оцінки наближення за допомогою цілих функцій спеціального вигляду.
- Для функцій багатьох змінних із анізотропних класів Нікольського–Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ встановлено точні за порядком оцінки найкращого наближення за допомогою цілих функцій з носіями їхнього перетворення Фур'є у d-вимірних "паралелепіпедах", похибка наближення при цьому вимірюється у метриці просторів Лебега $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$. Також для даних класів функцій одержано точні за порядком оцінки відхилення функцій від їхніх відрізків інтеграла Фур'є у рівномірній метриці.

Список використаних джерел

1. Аманов Т. И. Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. Алма-Ата: Наука, 1976, 224 с.
2. Аманов Т. И. Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^{(r)}_{p,\theta}B(\mathbb{R}_n)$ и $S^{(r)*}_{p,\theta}B$, $(0 \leqslant x_j \leqslant 2\pi;\ j = 1, \ldots, n)$. Тр. Мат. ин-та АН СССР 1965, **77**, 5 – 34.
3. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965, 408 с.
4. Бабенко К. И. О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами. Докл. АН СССР 1960, **132** (5), 982 – 985.
5. Бабенко К. И. О приближении периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами. Докл. АН СССР 1960, **132** (2), 247 – 250.
6. Бабенко В. Ф. О поперечниках некоторых классов сверток. Укр. мат. журн. 1983, **35** (5), 603 – 607.
7. Базарханов Д. Б. Приближение всплесками и поперечники Фурье классов периодических функций многих переменных. II. Anal. Math. 2012, **38** (4), 249 – 289.
8. Бари Н. К., Стечкин С. Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций. Тр. Моск. мат. о-ва. 1956, **5**, 483 – 522.
9. Бахвалов Н. С. Оценки снизу асимптотических характеристик классов функций с доминирующей смешанной производной. Мат. заметки 1972, **12** (6), 655 – 664.

10. Белинский Э. С. Асимптотические характеристики классов функций с условиями на смешанную производную (смешанную разность). Исследования по теории функций многих вещественных переменных. Ярославль: Ярослав. ун-т., 1990, 22 – 37.

11. Белинский Э. С. Приближение "плавающей" системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной. Исследования по теории функций многих вещественных переменных. Ярославль: Ярослав. ун-т, 1988, 16 – 33.

12. Березанський Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г. Функціональний аналіз. Львів: І. Е. Чижиков [вид.], 2014, 558 с.

13. Бернштейн С. Н. Конструктивная теория функций (1931–1953): Собрание сочинений. М.: Изд. АН СССР 1954, Т. 2, 626 с.

14. Бесов О. В. Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения. Тр. Мат. ин-та АН СССР 1961, **60**, 42 – 81.

15. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975, 480 с.

16. Бесов О. В., Кудрявцев Л. Д., Лизоркин П. И., Никольский С. М. Исследования по теории пространств дифференцируемых функций многих переменных. Тр. Мат. ин-та АН СССР 1988, **182**, 68 – 127.

17. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Кусочно-полиномиальные приближения классов W_p^α. Мат. сборник 1967, **73** (3), 331 – 355.

18. Боденчук В. В., Сердюк А. С. Точні оцінки колмогоровських поперечників класів аналітичних функцій. I. Укр. мат. журн. 2015, **67** (6), 719 – 738.

19. Боденчук В. В., Сердюк А. С. Точні оцінки колмогоровських поперечників класів аналітичних функцій. II. Укр. мат. журн. 2015, **67** (8), 1011 – 1018.

20. Бугров Я. С. Приближение класса функций с доминирующей смешанной производной. Мат. сборник 1964, **64** (106(3)), 410 – 418.

21. Буренков В. И. Об оценках преобразований Фурье и сверток в пространствах Никольского–Бесова. Тр. Мат. ин-та АН СССР 1989, **187**, 31 – 38.

22. Вакарчук С. Б., Доронин В. Г. Наилучшие среднеквадратические приближения целыми функциями конечной степени на прямой и точные значения средних поперечников функциональных классов. Укр. мат. журн. 2010, **62** (8), 1032 – 1043.

23. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981, 512 с.

24. Галеев Э. М. Поперечники по Колмогорову классов периодических функций одной и нескольких переменных. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990, **54** (2), 418 – 430.

25. Галеев Э. М. Порядки ортопроекционных поперечников классов периодических функций одной и нескольких переменных. Мат. заметки 1988, **43** (2), 197 – 211.

26. Галеев Э. М. Приближение классов периодических функций нескольких переменных ядерными операторами. Мат. заметки 1990, **47** (3), 32 – 41.

27. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М.: Гос.из-во физ.-мат. лит. 1958, Вып. 3, 470 с.

28. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Гос.из-во физ.-мат. лит. 1959, Вып. 1, 470 с.

29. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Пространства основных и обобщенных функций. М.: Гос.из-во физ.-мат. лит. 1958, Вып. 2., 307 с.

30. Гембарський М. В., Гембарська С. Б. Поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі $B_{1,1}$. Укр. мат. вісн. 2018, **15** (1), 43 – 57.

31. Гембарський М. В., Гембарська С. Б. Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій однієї та багатьох змінних. Укр. мат. вісн. 2019, **16** (1), 88 – 104.

32. Гольдман М. Л.О вложении обобщенных гельдеровых классов. Мат. заметки 1972, **12** (3), 325 – 336.

33. Гольдман М. Л. О следах функций с ограничениями на спектр. Тр. Мат. ин-та АН СССР 1989, **187**, 69 – 77.

34. Гольдман М. Л. Описание следов для некоторых функциональных пространств. Тр. Мат. ин-та АН СССР 1979, **150**, 99 – 127.

35. Дерев'янко Н. В. Наближення класів H^{Ω}_{p} періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_p. Укр. мат. журн. 2014, **66** (5), 634 – 644.

36. Джафаров А. С. Теоремы вложения классов функций с диффреренциальными свойствами в нормах специальных пространств. Докл. АН АзербССР 1965, **21** (2), 10 – 14.

37. Динь Зунг. Приближение функций многих переменных на торе тригонометрическими полиномами. Мат. сборник 1986, **131 (173)** (2), 251 – 271.

38. Ибрагимов И. И. Экстремальные свойства целых функций конечной степени. Баку: Изд-во АН АзербССР, 1962, 315 с.

39. Ибрагимов И. И., Насибов Ф. Г. Об оценке наилучшего приближения суммируемой функции на вещественной оси посредством целых функций конечной степени. Докл. АН СССР 1970, **194** (5), 1013 – 1016.

40. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.

41. Калябин Г. А. Описание следов для анизотропных пространств типа Трибеля–Лизоркина. Тр. Мат. ин-та АН СССР 1979, **150**, 160 – 173.

42. Калябин Г. А. Описания функций из классов типа Бесова–Лизоркина–Трибеля. Тр. Мат. ин-та АН СССР 1980, **156**, 82 – 109.

43. Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М. ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах. Успехи мат. наук. 1959, **14** (2), 3 – 86.

44. Конограй А. Ф. Приближение классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных линейными методами. Anal. Math. 2013, **39** (3), 217 – 233.

45. Конограй А. Ф., Стасюк С. А. Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних. Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України 2007, **4** (1), 151 – 171.

46. Корнейчук Н. П. О поперечниках классов непрерывных функций в пространстве L_p. Мат. заметки 1971, **10** (5), 493 – 500.

47. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука, 1976, 320 с.

48. Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987, 424 с.

49. Лигун А. А. О поперечниках некоторых классов дифференцируемых периодических функций. Мат. заметки 1980, **27** (1), 61 – 75.

50. Лизоркин П. И. Обобщенные гельдеровы пространства $B^{(r)}_{p,\theta}$ и их соотношения с пространствами Соболева $L^{(r)}_p$. Сиб. мат. журн. 1968, **9** (5), 1127 – 1152.

51. Лизоркин П. И. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций. Тр. Мат. ин-та АН СССР 1969, **105**, 89 – 167.

52. Лизоркин П. И. Предельные случаи теорем о $\mathfrak{F}L_p$ – мультипликаторах. Тр. Мат. ин-та АН СССР 1986, **173**, 164 – 180.

53. Лизоркин П. И. Свойства функций из пространств $\Lambda^r_{p,\theta}$. Тр. Мат. ин-та АН СССР 1974, **131**, 158 – 181.

54. Лизоркин П. И. Теорема типа Литтльвуда–Палея для кратных интегралов Фурье. Тр. Мат. ин-та АН СССР 1967, **89**, 214 – 230.

55. Лизоркин П. И., Никольский С. М. Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения. Тр. Мат. ин-та АН СССР 1989, **187**, 143 – 161.

56. Лозинский С. М. Обращение теорем Джексона. Докл. АН СССР 1952, **83** (5), 645 – 647.

57. Магарил-Ильяев Г. Г. Неравенства типа Бернштейна–Никольского и приближение обобщенных соболевских классов. Тр. Мат. ин-та АН СССР 1986, **173**, 190 – 204.

58. Магарил-Ильяев Г. Г. О наилучших приближениях соболевских классов функций на $\boldsymbol{R}^n$. Тр. Мат. ин-та АН СССР 1987, **180**, 154 – 155.

59. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. О некоторых вопросах гармонического анализа на $\mathbb{T}^{n'} \times \mathbb{R}^{n''}$. В кн. Некоторые вопросы современного анализа. М.: Изд-во МГУ 1984, 57 – 81.

60. Майоров В. Е. Кратные кусочно полиномиальные приближения на классах функций с доминирующей смешанной производной. Мат. сборник 1975, **98 (140)** (2 (10)), 288 – 318.

61. Майоров В. Е. О наилучшем приближении классов $W^r_1(I^s)$ в пространстве $L_\infty(I^s)$. Мат. заметки 1976, **19** (5), 699 – 707.

62. Маковоз Ю. И. Поперечники некоторых функциональных классов в пространстве L. Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. 1969, (4), 19 – 28.

63. Маковоз Ю. И. Поперечники соболевских классов и сплайны, наименее уклоняющиеся от нуля. Мат. заметки 1979, **26** (5), 805 – 812.

64. Миронюк В. В. Колмогоровські поперечники анізотропних класів Бєсова періодичних функцій багатьох змінних. Укр. мат. журн. 2016, **68** (5), 634 – 643.

65. Миронюк В. В. Наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних сумами Фур'є у просторі L_p при $p = 1, \infty$. Укр. мат. журн. 2012, **64** (8), 1204 – 1213.

66. Миронюк В. В. Наближення функцій багатьох змінних із класів $B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ цілими функціями експоненціального типу. Укр. мат. журн. 2014, **66** (2), 244 – 258.

67. Миронюк В. В. Наближення функцій з ізотропних класів $B^{\Omega}_{1,\theta}(\mathbb{R}^d)$ цілими функціями експоненціального типу. Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України 2013, **10** (1), 169 – 183.

68. Миронюк В. В., Поперечники анізотропних класів Бєсова періодичних функцій багатьох змінних. Укр. мат. журн. 2016, **68** (8), 1080 – 1091.

69. Миронюк В. В. Тригонометричні наближення та колмогоровські поперечники анізотропних класів Бєсова періодичних функцій багатьох змінних. Укр. мат. журн. 2014, **66** (8), 1117 – 1132.

70. Миронюк В. В., Янченко С. Я. Наближення функцій з узагальнених класів Нікольського–Бєсова цілими функціями у просторах Лебега. Мат. Студії 2013, **39** (2), 190 – 202.

71. Моторный В. П., Рубан В. И. Поперечники некоторых классов дифференцируемых периодических функций в пространстве L. Мат. заметки 1975, **17** (4), 531 – 543.

72. Насибов Ф. Г. О приближении в L_2 целыми функциями. Докл. АН АзССР 1986, **42** (4), 3 – 7.

73. Никольская Н. С. Приближение дифференцируемых функций многих переменных суммами Фурье в метрике L_p. Сиб. мат. журн. 1974, **15** (2), 395 – 412.

74. Никольская Н. С. Приближение периодических функций класса $SH^r_{p^*}$ суммами Фурье. Сиб. мат. журн. 1975, **16** (4), 761 – 780.

75. Никольский С. М. Интегральное представление и изоморфизм классов дифференцируемых функций многих переменных. Третья летняя метематическая школа (Конструктивная теория функциий). Кацивели, июнь-июль 1966, Наукова думка, 1966, 135 – 238.

76. Никольский С. М. Об одном семействе функциональных пространств. Успехи мат. наук. 1956, **11** (6 (72)), 203 – 212.

77. Никольский С. М. Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных. Тр. Мат. ин-та АН СССР 1951, **38**, 244 – 278.

78. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969, 480 с.

79. Никольский С. М. Теоремы вложения для классов обобщенных функций. Сиб. мат. журн. 1968, **9** (5), 1107 – 1126.

80. Никольский С. М. Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера. Сиб. мат. журн. 1963, **4** (6), 1342 – 1364.

81. Пич А. Операторные идеалы. М.: Мир, 1982, 536 с.

82. Пожарська К. В. Оцінки ентропійних чисел класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у рівномірній метриці. Укр. мат. журн. 2019, **70** (9), 1249 – 1263.

83. Пустовойтов Н. Н. Ортопоперечники классов многомерных периодических функций, мажоранта смешанных модулей непрерывности

которых содержит как степенные, так и логарифмические множители. Anal. Math. 2008, **34** (3), 187 – 224.

84. Пустовойтов Н. Н. Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности. Anal. Math. 1994, **20** (1), 35 – 48.

85. Романюк А. С. Аппроксимативные характеристики изотропных классов периодических функций многих переменных. Укр. мат. журн. 2009, **61** (4), 513 – 523.

86. Романюк А. С. Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных. Праці Інституту математики НАН України 2012, **93**, 352 с.

87. Романюк А. С. Билинейные приближения и колмогоровские поперечники периодических классов Бєссова. Теорія операторів, диференціальні рівняння і теорія функцій: Зб. праць Ін-ту математики НАН України 2009, **6** (1), 222 – 236.

88. Романюк А. С. Энтропийные числа и поперечники классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных. Укр. мат. журн. 2016, **68** (10), 1403 – 1417.

89. Романюк А. С. Колмогоровські поперечники і білінійні наближення класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних. Укр. мат. журн. 2018, **70** (2), 224 – 235.

90. Романюк А. С. Колмогоровские поперечники классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ в метрике пространства L_∞. Укр. мат. вісн. 2005, **2** (2), 201 – 218.

91. Романюк А. С. О наилучших тригонометрических приближениях и колмогоровских поперечниках классов Бесова периодических функций многих переменных. Укр. мат. журн. 1993, **5** (8), 1097 – 1111.

92. Романюк А. С. О приближении классов периодических функций многих переменных. Укр. мат. журн. 1992, **44** (5), 662 – 672.

93. Романюк А. С. Оценки энтропийных чисел и колмогоровских поперечников классов Никольського–Бесова периодических функций многих переменных. Укр. мат. журн. 2015, **67** (11), 1540 – 1556.

94. Романюк А. С. Поперечники и наилучшее приближение классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных. Anal. Math. 2011, **37** (3), 181 – 213.

95. Романюк А. С. Приближение изотропных классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q. Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України 2008, **5** (1), 263 – 278.

96. Романюк А. С. Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q. Укр. мат. журн. 1991, **43** (10), 1398 – 1408.

97. Романюк А. С. Приближение классов функций многих переменных их ортогональными проекциями на подпространства тригонометрических полиномов. Укр. мат. журн. 1996, **48** (1), 80 – 89.

98. Романюк А. С., Романюк В. С. Апроксимаційні характеристики і властивості операторів найкращого наближення класів функцій з просторів Соболєва та Нікольського–Бєсова. Укр. мат. вісн. 2020, **17** (3), 372 – 395.

99. Романюк А. С., Романюк В. С. Апроксимаційні характеристики класів періодичних функцій багатьох змінних у просторі $B_{\infty,1}$. Укр. мат. журн. 2019, **71** (2), 271 – 282.

100. Романюк А. С., Романюк В. С. Оцінки деяких апроксимаційних характеристик класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних. Укр. мат. журн. 2019, **71** (8), 1102 – 1115.

101. Романюк А. С., Романюк В. С. Тригонометрические и ортопроекционные поперечники классов периодических функций многих переменных. Укр. мат. журн. 2009, **61** (10), 1348 – 1366.

102. Романюк А., Янченко С. Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів періодичних функцій з домінуючою мішаною похідною. Міжнародна конференція "Теорія наближення функцій та її застосування", присвячена 80-річчю з дня народження члена–кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942–2007), 6 – 10 червня 2022 р., Луцьк, УКРАЇНА: Тези доповідей, Луцьк, 2022, С. 42 – 43.

103. Романюк В. С. Колмогоровские поперечники и энтропийные числа в пространствах Орлича с нормой Люксембурга. Укр. мат. журн. 2017, **69** (5), 682 – 694.

104. Сердюк А. С. Оцінки поперечників за Колмогоровим класів нескінченно диференційовних періодичних функцій. Укр. мат. журн. 1997, **49** (12), 1700 – 1706.

105. Сердюк А. С. Поперечники та найкращі наближення класів згорток періодичних функцій. Укр. мат. журн. 1999, **51** (5), 674 – 687.

106. Сердюк А. С., Степанюк Т. А. Порядкові оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів згорток періодичних функцій невеликої гладкості. Укр. мат. журн. 2015, **67** (7), 916 – 936.

107. Смоляк С. А. ϵ-энтропия классов $E_s^{\alpha,k}(B)$ и $W_s^{\alpha}(B)$ в метрике L_2. Докл. АН СССР. 1960, **131** (1), 30 – 33.

108. Стасюк С. А. Колмогоровские поперечники аналогов классов Никольского–Бесова с логарифмической гладкостью. Укр. матем. журн. 2015, **67** (11), 1640 – 1645.

109. Стасюк С. А. Наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у рівномірній метриці. Укр. мат. журн. 2002, **54** (11), 1551 – 1559.

110. Стасюк С. А. Найкращі M-членні ортогональні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатох змінних. Укр. мат. журн. 2008, **60** (5), 647 – 656.

111. Стасюк С. А. Приближение классов $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ суммами Валле Пуссена в равномерной метрике. Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Ін-ту математики НАН України 2014, **11** (4), 308 – 317.

112. Стасюк С. А., Федуник О. В. Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних. Укр. мат. журн. 2006, **58** (5), 692 – 704.

113. Стасюк С. А., Янченко С. Я. Найкраще наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ функцій багатьох змінних у просторі $L_p(\mathbb{R}^d)$. Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН Україн 2008, **5** (1), 367 – 384.

114. Стасюк С. А., Янченко С. Я. Наближення функцій з узагальнених класів мішаної гладкості типу Нікольського–Бєсова. Міжнародна математична конференція "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки" до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Георгія Миколайовича, 23–24 квітня 2014 р., Київ, Україна: Матеріали конференції. — Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2014, С. 285.

115. Степанец А. И. Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье. Изв. АН СССР. Сер. мат. 1986, **50** (1), 101 – 136.

116. Степанец А. И. Методы теории приближений: Київ: Ін-т математики НАН України, 2002, Т. 2, 468 с.

117. Степанец А. И., Сердюк А. С. Оценки снизу поперечников классов сверток периодических функций в метриках C и L. Укр. мат. журн. 1995, **47** (8), 1112 – 1121.

118. Стечкин С. Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций. Изв. АН СССР, Сер. мат. 1951, **15** (3), 219 – 242.

119. Темляков В. Н. О поведение частных сумм по гиперболическим крестам рядов Фурье периодических функций многих переменных. Тр. Мат. ин-та АН СССР 1990, **192**, 197 – 206.

120. Темляков В. Н. Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью. Тр. Мат. ин-та АН СССР 1989, **189**, 138 – 168.

121. Темляков В. Н. Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных. Докл. АН СССР 1982, **267** (2), 314 – 317.

122. Темляков В. Н. Приближение периодических функций нескольких переменных тригонометрическими полиномами и поперечники некоторых классов функций. Изв. АН СССР, Сер. Матем. 1985, **49** (5), 986 – 1030.

123. Темляков В. Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной. Тр. Мат. ин-та АН СССР 1986, **178**, 1 – 112.

124. Темляков В. Н. Приближение функций с ограниченной смешанной разностью тригонометрическими полиномами и поперечники некоторых классов функций. Изв. АН СССР, Сер. Матем. 1982, **46** (1), 171 – 186.

125. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз 1960, 624 с.

126. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. Изд-во Моск. ун–та 1976, 307 с.

127. Тихомиров В. М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений. Успехи мат. наук 1960, **15** (3), 81 – 120.

128. Тихомиров В. М. Теория приближений. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР 1987, **14**, 103 – 260.

129. Трибель Х. Интерполяционные свойства ϵ-энтропии и поперечников. Геометрические характеристики вложения пространств функций типа Соболева–Бесова. Мат. сборник 1975, **98** (1), 27 – 41.

130. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980, 664 с.

131. Федоренко О. С. Про найкращі m-членні тригонометричні та ортогональні тригонометричні наближення функцій класів $L^{\psi}_{\beta,p}$. Укр. мат. журн. 1999, **51** (12), 1719 – 1721.

132. Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит. 1948, 456 с.

133. Шидліч А. Л. Порядкові оцінки для деяких апроксимативних характеристик. Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України 2013, **10** (1), 304 – 327.

134. Шидліч А. Л. Порядкові оцінки найкращих m-членних ортогональних тригонометричних наближень класів функцій $F^{\psi}_{q,\infty}$ в просторах $L_p(T^d)$. Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України 2011, **8** (1), 302 – 317.

135. Шидліч А. Л. Порядкові оцінки функціоналів, у термінах яких виражаються найкращі n-членні наближення класів $F^{\psi}_{q,r}$. Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України 2014, **11** (3), 287 – 314.

136. Шкапа В. В. Оцінки найкращих m-членних та ортогональних тригонометричних наближень функцій із класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у рівномірній метриці. Диференціальні рівняння та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України 2014, **11** (2), 305 – 317.

137. Янченко С. Апроксимаційні характеристики ізотропних класів $B^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$. Конференція молодих учених "Підстригачівські читання — 2022", 25–27 травня 2022 р., Львів; http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2022/abstracts/Yanchenko.pdf

138. Янченко С. Я. Апроксимативні характеристики класів функцій Нікольського–Бєсова з домінуючою мішаною похідною. Міжнародна конференція "Функціональні методи в теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV" присвячена 100-річчю з дня народження В. К. Дзядика (1919–1998). 20 – 26 червня 2019 р., Світязь, Україна: Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2019, С. 65 – 66.

139. Янченко С. Я. Апроксимативні характеристики класів функцій Нікольського–Бєсова $S^r_{1,\theta}B$. Міжнародна конференція молодих математиків. 6 – 8 червня 2019 р., Київ, Україна: Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2019, С. 116.

140. Янченко С. Я. Апроксимативні характеристики класів функцій типу Нікольського–Бєсова. Міжнародна математична конференція "Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування" присвячена 60-річчю В. І. Рукасова (1953 – 2009), 21–24 травня 2014 р., Слов'янськ: Матеріали конференції. — Слов'янськ: ДДПУ, 2014, С. 87.

141. Янченко С. Я. Апроксимативні характеристики класів функцій типу Нікольського–Бєсова. Міжнародна математична конференція "Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, 23–30 червня 2013 р., Севастополь, Україна: Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2013, С. 285.

142. Янченко С. Я. Апроксимативні характеристики функцій з класів Нікольського-Бєсова $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)$. Всеукраїнська наукова конференція "Теорія наближень і її застосування" з нагоди 70-річчя Владислава Федоровича Бабенка. 3 – 5 жовтня 2019 р., Дніпро, Україна: Тези доповідей. — ПП "Ліра ЛТД", 2019, С. 47.

143. Янченко С. Я. Наближення класів $B^r_{p,\theta}$ функцій багатьох змінних

у просторі $L_q(\mathbb{R}^d)$. IV міжнародна ганська конференція присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана. 30 червня – 5 липня 2014 р., Чернівці, Україна: Тези доповідей. — Чернівецький національний університет, 2014, С. 219 – 220.

144. Янченко С. Я. Наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ функцій багатьох змінних цілими функціями у просторі $L_q(\mathbb{R}^d)$. Укр. мат. журн. 2010, **62** (1), 123 – 135.

145. Янченко С. Я. Наближення класів $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ функцій багатьох змінних цілими функціями спеціального вигляду. Укр. мат. журн. 2010, **62** (8), 1124 – 1138.

146. Янченко С. Я. Наближення функцій багатьох змінних з ізотропних класів Нікольського–Бєсова. II Всеукраїнська наукова конференція "Теорія наближень і її застосування". Дніпропетровськ (Україна) 8 – 11 жовтня 2015 р.: Тези доповідей. — Дніпропетровськ, 2015, С. 94.

147. Янченко С. Я. Наближення функцій з анізотропних класів Нікольського–Бєсова. Міжнародна наукова конференція "Теорія наближень і її застосування" присвячена 100-річчю з дня народження Миколи Павловича Корнєйчука. 16 – 19 жовтня 2020 р., Дніпро, Україна: Тези доповідей. — ПП "Ліра ЛТД", 2020, С. 79.

148. Янченко С. Я. Наближення функцій з ізотропних класів Нікольського–Бєсова сумами типу Валле Пуссена. Міжнародна конференція молодих математиків. 3 – 6 червня 2015 р., Київ, Україна: Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2015, С. 92.

149. Янченко С. Я. Наближення функцій з класів Бєсова цілими функціями у просторі $L_q(\mathbb{R}^d)$. Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України 2010, **7** (1), 380 – 391.

150. Янченко С. Я. Наближення функцій з класів Нікольського–Бєсова цілими функціями. Міжнародна конференція "Теорія наближення функцій та її застосування" присвячена 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942–2007): Тези доповідей (Україна, Слов'янськ, 28 травня – 3 червня 2017 р.), С. 100.

151. Янченко С. Я. Найкраще наближення функцій з анізотропних класів Нікольського–Бєсова. Міжнародна конференція молодих математиків присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського (1917–2008). 7 – 10 червня 2017 р., Київ, Україна: Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2017, С. 50.

152. Янченко С. Я. Оцінки апроксимативних характеристик класів функцій $S^{r}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ у рівномірній метриці. Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України 2013, **10** (1), 328 – 340.

153. Янченко С. Я. Порядкові оцінки апроксимативних характеристик функцій з класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності у рівномірній метриці. Конференція молодих учених "Підстригачівські читання — 2016", 25–27 травня 2016 р., Львів; http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Yanchenko.pdf

154. Янченко С. Я. Порядкові оцінки апроксимативних характеристик функцій з узагальнених класів мішаної гладкості типу Нікольського–Бєсова. Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України 2014, **11** (3), 330 – 343.

155. Akishev G. A. On orders of approximation functions of generalized mixed smoothness in Lorenz spasec. Sarajevo J. Math. 2019, **15 (28)** (1), 81 – 96.

156. Andrianov A. V., Temlyakov V. N. On two methods of generalization of properties of univariate function systems to their tensor product. Proc. Steklov Inst. Math. 1997, **219** (4), 25 – 35.

157. Babenko V. F., Parfinovich N. V. On the exact values of the best approximations of classes of differentiable periodic functions by splines. Math. Notes 2010, **87** (5), 623 – 635. https://doi.org/10.1134/S0001434610050032

158. Bazarkhanov D. B. Estimates of the Fourier widths of classes of Nikol'skii–Besov and Lizorkin–Triebel types of periodic functions of several variables. Math. Notes 2010, **87** (2), 281 – 284. https://doi.org/10.1134/S0001434610010359

159. Balgimbayeva Sh. A., Smirnov T. I. Estimates of the Fourier widths of the classes of periodic functions with given majorant of the mixed modulus of smoothness. Sib. Math. J. 2018, **59** (2), 217 – 230.

160. Bekmaganbetov K. A., Toleugazy Je. Order of the orthoprojection widths of the anisotropic Nikol'skii–Besov classes in the anisotropic Lorentz space. Eurasian Math. J. 2016, **7** (3), 8 – 16.

161. Belinskii E. S. Approximation of functions of several variables by trigonometric polinomials with given number of harmonics, and estimates of ε-entropy. Anal. Math. 1989, **15** (2), 67 – 74.

162. Belinskii E. S. Estimates of entropy numbers and Gaussian measures for classes of functions with bounded mixed derivative. J. Approx. Theory 1998, **93** (1), 114 – 127.

163. Butzer P. L. and Nessel R. J. Fourier analysis and approximation. Vol. I One-dimensional theory. Birkhauser Verlag Basel und Stuttgart 1971, 553 p.

164. Carl B. Entropy numbers, s-numbers, and eigenvalue problems. J. Funct. Anal. 1981, **41**, 290 – 306.

165. Dahmen W., Görlich E. A conjecture of M. Golomb on optimal and nearly-optimal linear approximation. Bull. Amer. Math. Soc. 1974, **80** (6), 1199 – 1202.

166. Dai F., Prymak A., Shadrin A., Temlyakov V., Tikhonov S. Entropy numbers and Marcinkiewicz-type discretization. J. Funct. Anal. 2021, **281** (6), 109090.

167. DeVore R. A. and Temlyakov V. N. Nonlinear approximation by trigonometric sums. J. Fourier Anal. Appl. 1995, **2** (1), 29 – 48.

168. Dung D. Non-linear approximations using sets of finite cardinality or finite pseudo-dimension. J. Complexity 2001, **17** (2), 467 – 492.

169. Dũng D., Temlyakov V. N., and Ullrich T. Hyperbolic Cross Approximation. Advanced Courses in Mathematics, CRM Barselona, Birkhäuser/Springer, Cham, 2018.

170. Dunker T., Linde W., Kühn T. and Lifshits M. Metric entropy of integration operator and small ball probabilities for the Brownian sheet. J. Approx. Theory 1999, **101** (1), 63 – 77.

171. Fedunyk-Yaremchuk O. V., Hembars'ka S. B. Estimates of approximative characteristics of the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of several variables with given majorant of mixed moduli of centinuity in the space L_q. Carpathian Math. Publ. 2019, **11** (2), 281 – 295.

172. Galeev E. M. Linear widths of Hölder–Nikol'skii classes of periodic functions of several variables. Math. Notes 1996, **59** (2), 133 – 140

173. Gensun Fang, Fred J. Hickernell, Huan Li. Approximation on anisotropic Besov classes with mixed norms by standard information. J. Complexity 2005, **21** (3), 294 – 313.

174. Haroske D., Triebel H. Entropy numbers in weighted function spaces and eigenvalue distributions of some degenerate pseudodifferential operators I. Math. Nachr. 1994, **167** (1), 131 – 156.

175. Haroske D., Triebel H. Entropy numbers in weighted function spaces and eigenvalue distributions of some degenerate pseudodifferential operators II. Math. Nachr. 1994, **168** (1), 109 – 137.

176. Höllig K. Diameters of classes of smooth functions. Quant. Approxim. New York: Acad. Press. 1980, 163 – 176.

177. Jiang Yanjie, Liu Yongping. Average widths and optimal recovery of multivariate Besov classes in $L_p(\mathbb{R}^d)$. J. Approx. Theory 2000, **102** (1), 155 – 170.

178. Jiang Yanjie. Optimal recovery of anisotropic Besov–Wiener classes. Anal. Math. 2002, **28** (1), 77 – 88.

179. Kashin B. S., Temlyakov V. N. On a norm and approximate characteristics of classes of multivariable functions. J. Math. Sci. 2008, **155** (1), 57 – 80.

180. Kashin B. S., Temlyakov V. N. On a certain norm and related applications. Math Notes 1998, **64** (4), 551 – 554.

181. Kashin B. S., Temlyakov V. N. On best m-term approximations and the entropy of sets in the space L_1. Math. Notes 1994, **56** (5), 1137 – 1157.

182. Kashin B. S., Temlyakov V. N. Estimate of approximate characteristics for classes of functions with bounded mixed derivative. Math. Notes 1995, **58** (6), 1340 – 1342. https://doi.org/10.1007/BF02304894

183. Kolmogoroff A. Über die beste Annäherung von Functionen einer gegeben Functionenclasse. Ann. Math. 1936, **37** (1), 107 – 110.

184. Kuelbs J., Li W. V. Metric entropy and the small ball problem for Gaussian measures. J. Funct. Anal. 1993, **116** (1), 133 – 157.

185. Li W. V., Linde W., et al. Approximation, metric entropy and small ball estimates for Gaussian measures. Ann. Probab. 1999, **27** (3), 1556 – 1578.

186. Liqin Duan. The best m-term approximations on generalized Besov classes $\boldsymbol{MB}^{\boldsymbol{\Omega}}_{\boldsymbol{q,\theta}}$ with regard to orthogonal dictionaries. J. Approx. Theory 2010, **162** (11), 1964 – 1981.

187. Marcinkiewicz J. Quelgues remargues sur l'interpolation. Acta Math. (Szeged) 1937, **8** (2-3), 127 – 130.

188. Mayer S., Ullrich T. Entropy numbers of finite dimensional mixed-norm balls and function space embeddings with small mixed smoothness. Constr. Approx. 2020, **53** (2), 249 – 279. https://doi.org/10.1007/s00365-020-09510-5

189. Pinkus A. On n-widths of periodic functions. J. Anal. Math. 1979, **35**, 209 – 235.

190. Pinkus A. n-widths in approximation theory. Springer-Verlag, 1985, 291 p.

191. Pisier G. The volume of convex bodies and Banach space geometry. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989.

192. Pozharska K. V. Entropy numbers of the Nikol'skii–Besov-type classes of periodic functions of many variables. J. Math. Sci. 2019, **241** (1), 64 – 76.

193. Pustovoitov N. N. Approximation of periodic functions in the classes H^{Ω}_{q} by linear methods. Sb. Math. 2012, **203** (1), 88 – 110.

194. Pustovoitov N. N. Approximation of multidimensional functions with a given majorant of mixed moduli of continuity. Math. Notes 1999, **65** (1), 89 – 98.

195. Radomskii A. O. On nonequivalence of the C– and QC–norms in the space of trigonometric polynomials. Sb. Math. 2016, **207** (12), 1729 – 1742.

196. Radomskii A. O. Some trigonometric polynomials with extremely small uniform norm and their applications. Izv. Math. 2020, **84** (2), 361 – 391.

197. Romanyuk A. S. Approximation of classes of periodic functions in several variables. Math. Notes 2002, **71** (1), 98 – 109.

198. Romanyuk A. S. Approximability of the classes $B^r_{p,\theta}$ of periodic functions of several variables by linear methods and best approximations. Sb. Math. 2004, **195** (2), 237 – 261.

199. Romanyuk A. S. Best trigonometric and bilinear approximations of classes of functions of several variables. Math. Notes 2013, **94** (3), 379 – 391.

200. Romanyuk A. S. Best approximations and widths of classes of periodic functions of several variables. Sb. Math. 2008, **199** (2), 253 – 275.

201. Romanyuk A. S. Best trigonometric approximations for some classes of periodic functions of several variables in the uniform metric. Math. Notes 2007, **82** (2), 216 – 228.

202. Romanyuk A. S. Entropy numbers and widths for the Nikol'skii–Besov classes of functions of many variables in the space L_∞. Anal. Math. 2019, **45** (1), 133 – 151. https://doi.org/10.1007/s10476-018-0611-4.

203. Romanyuk A. S., Yanchenko S. Ya. Approximation of the classes of periodic functions of one and many variables from the Nikol'skii–Besov and Sobolev spaces. Ukrainian Math. J. 2022, **74** (6), 967 – 980, https://doi.org/10.1007/s11253-022-02110-5; translation of Ukrain. Mat. Zh. 2022, **74** (6), 844 – 855, https://doi.org/10.37863/umzh.v74i6.7141.

204. Romanyuk A., Yanchenko S. Entropy numbers of the Nikol'skii–Besov classes in the space of quasi-continuous functions. International Conference Mathematical Analysis, Differential Equation and Applications (MADEA–9), Kyrgyz–Turkish Manas University, Bishkek, Kyrgyz Republic, June 21–25. Abstracts — Bishkek: KTMU, 2021, P. 65 – 66.

205. Romanyuk A. S., Yanchenko S. Ya. Estimates for the entropy numbers of the Nikol'skii–Besov classes in the space of quasi-continuous functions.

International Online Workshop on Approximation Theory, March 19–21, 2021, Ivano-Frankivsk, Ukraine: ABSTRACTS. 2021, P. 29 – 30.

206. Romanyuk A. S., Yanchenko S. Ya. Estimates for the entropy numbers of the Nikol'skii–Besov classes of functions with mixed smoothness in the space of quasi-continuous functions. Math. Nachr. 2023, **296** (6), 2575 – 2587. https://doi.org/10.1002/mana.202100202.

207. Romanyuk A. S., Yanchenko S. Ya. Estimates of approximating characteristics and the properties of the operators of best approximation for the classes of periodic functions in the space $B_{1,1}$. Ukrainian Math. J. 2022, **73** (8), 1278 – 1298, https://doi.org/10.1007/s11253-022-01990-x; translation of Ukrain. Mat. Zh. 2021, **73** (8), 1102 – 1119, https://doi.org/10.37863/ umzh.v73i8.6755.

208. Romanyuk A. S., Yanchenko S. Ya. Estimates of approximating characteristics for the classes of periodic functions in the space $B_{1,1}$. International Workshop "Current Trends in Analysis and Approximation Theory", July 18, 2023, the International Telematic University UNINETTUNO, Roma, Italy: Book of Proceedings. 2023, P. 30 – 31.

209. Romanyuk A. S., Yanchenko S. Ya. Kolmogorov widths of classes of periodic functions with mixed smoothness of many variables in the space of quasi-continuous functions. The International Online Conference "Current Trends in Abstract and Applied Analysis", May 12–15, 2022, Ivano-Frankivsk, Ukraine: Book of Abstracts. 2022, P. 67.

210. Romanyuk A. S., Yanchenko S. Ya. Kolmogorov widths of the Nikol'skii–Besov classes of periodic functions of many variables in the space of quasicontinuous functions. Ukrainian Math. J. 2022, **74** (2), 251 – 265, https://doi.org/10.1007/s11253-022-02061-x; translation of Ukrain. Mat. Zh. 2022, **74** (2), 220 – 232, https://doi.org/10.37863/umzh.v74i2.6932.

211. Schmeisser H.-J., Sickel W. Spaces of functions of mixed smoothness and approximation from hyperbolic crosses. J. Approx. Theory 2004, **128** (2), 115 – 150.

212. Sickel W., Ullrich T.Tensor products of Sobolev–Besov spaces and applications to approximation from the hyperbolic cross. J. Approx. Theory 2009, **161** (2), 748 – 786.

213. Serdyuk A. S., Bodenchuk V. V. Exact values of Kolmogorov widths of classes of Poisson integrals. J. Approx. Theory 2013, **173** (9), 89 – 109.

214. Soboleff S. Methode nouvelle a resoudre le probleme de Cauchy pour les equations lineaires hyperboliques normales. Матем. сб. 1936, **1(43)** (1), 39 – 72.

215. Stasyuk S. A. Approximation by Fourier sums and Kolmogorov widths for classes $\boldsymbol{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of several variables. Trudy Inst. Mat. Mekh. 2014, **20** (1), 247 – 257.

216. Stasyuk S. A. Best approximations of periodic functions of several variables from the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$. Math. Notes 2010, **87** (1), 102 – 114.

217. Stasyuk S. A. Best approximation of periodic functions of several variables from the classes $MB^{\omega}_{p,\theta}$ in the uniform metric. Trudy Inst. Mat. Mekh. 2012, **18** (4), 258 – 266.

218. Stasyuk S. A., Yachenko S. Ya. Approximation of functions from Nikolskii–Besov type classes of generalized mixed smoothness. Anal. Math. 2015, **41** (4), 311 – 334, https://doi.org/10.1007/s10476-015-0305-0.

219. Stepanets A. I., Shidlich A. L. Best approximation of integrals by integrals of finite rank. J. of Approx. Theory 2010, **162** (2), 323 – 348.

220. Stepanets A. I. and Shidlich A. L. Extremal problems for integrals of non-negative functions. Izvestiya Math. 2010, **74** (3), 607 – 660.

221. Sun Yongsheng, Liu Yongping, Chen Dirong. Extremal problems in approximation theory for some classes of smooth functions defined on $\mathbb{R}^d$. J. of Beijing Normal University (Natural Science) 1999, **35**, 79 – 144.

222. Sun Yongsheng, Wang Heping. Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness. Proc. Steklov Inst. Math. 1997, **219**, 350 – 371

223. Talagrand M. The small ball problem for the Brownian sheet. Ann. Probab. 1994, **22** (3), 1331 – 1354.

224. Temlyakov V. N. An inequality for the entropy numbers and its application. J. Approx. Theory 2013, **173**, 110 – 121.

225. Temlyakov V. N. An inequality for trigonometric polynomials and its application for estimating the Kolmogorov widths. East J. Approx. 1996, **2**, 89 – 98.

226. Temlyakov V. N. An inequality for trigonometric polynomials and its application for estimating the entropy numbers. J. Complexity 1995, **11** (2), 293 – 307

227. Temlyakov V. N. Approximation of periodic functions. New York: Nova Sci. Publ. Inc. 1993, 419 p.

228. Temlyakov V. N. Multivariate approximation, V. 32 of Cambridge Monographs on Applied and Computation Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2018.

229. Temlyakov V. N. On the entropy numbers of the mixed smoothness function classes. J. Approx. Theory 2017, **217**, 26 – 56.

230. Temlyakov V., Ullrich T. Approximation of functions with small mixed smoothness in the uniform norm. arXiv:2012.11983, 2020.

231. Trigub R. M., Belinsky E. S. Fourier Analysis and Approximation of Functions. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004.

232. Vakarchuk S. B. K-Functionals and Exact Values of n-Widths of Certain Classes in the Spaces $C(2\pi)$ and $L_1(2\pi)$. Math. Notes 2002, **71** (4), 477 – 485. https://doi.org/10.1023/A:1014823613463

233. Vybiral J. Function spaces with dominanting mixed smoothness. Dissertationes Math., **436** (2006), 73 pp.

234. Wang Heping. Average width of Holder–Nikolskii–Wiener classes with mixed smoothness in $L_q(\mathbb{R}^d)$. Advances in Mathematics 2002, **31** (3), 249 – 256.

235. Wang Heping. Quadrature formulas for classes of functions with bounded mixed derivative or difference. Science in China (Series A) 1997, **40** (5), 449 – 458.

236. Wang Heping, Sun Yongsheng. Approximation of functions in $\widetilde{S_1^r L}$, $S_1^r H$ by entire functions. Approx. Theory and its Appl. 1999, **11** (4), 88 – 93.

237. Wang Heping, Sun Yongsheng. Approximation of multivariate functions with certain mixed smoothness by entire functions. Northeast. Math. J. 1995, **11** (4), 454 – 466.

238. Yanchenko S. Ya. Approximation of functions from the isotropic Nikol'skii–Besov classes. Third conference "Mathematics for Life Sciences". Rivne, September 15–19, 2015: Book of Abstracts. — Kyiv: Institute of Mathematics of NASU, 2015, P. 22.

239. Yanchenko S. Ya. Approximation of functions from the isotropic Nikol'skii–Besov classes in the uniform and integral metrics. Ukrainian Math. J. 2016, **67** (10), 1599 – 1610, https://doi.org/10.1007/s11253-016-1175-8; translation of Ukrain. Mat. Zh. 2015, **67** (10), 1423 – 1433.

240. Yanchenko S. Ya. Approximation of functions from Nikol'skii–Besov type classes of generalized mixed smoothness. AMMODIT and final EUMLS Workshop "Mathematics for Life Sciences". Hasenwinkel, March 7–11, 2016, P. 39.

241. Yanchenko S. Ya. Approximation of functions from the classes $S^{r}_{p,\theta}B$ in the uniform metric. Ukrainian Math. J. 2013, **65** (5), 771 – 779, https://doi.org/10.1007/s11253-013-0813-7; translation of Ukrain. Mat. Zh. 2013, **65** (5), 698 – 705.

242. Yanchenko S. Ya. Approximation of the Nikol'skii-Besov Functional Classes by Entire Functions of a Special Form. Carpathian Math. Publ. 2020, **12** (1), 148 – 156, https://doi.org/10.15330/cmp.12.1.148-156.

243. Yanchenko Sergiy. Approximation of the Nikol'skii–Besov classes with dominating mixed smoothness by entire functions of a spacial form. Mecklenburg Workshop "Approximation Methods and Function Spaces". Hasenwinkel, March 16 – 20, 2015, P. 18 – 19.

244. Yanchenko S. Ya. Best approximation of the functions from anisotropic Nikol'skii–Besov classes defined in $\mathbb{R}^d$. Ukrainian Math. J. 2018, **70** (4), 661 – 670; translation of Ukrain. Mat. Zh. 2018, **70** (4), 574 – 582, https://doi.org/10.1007/s11253-018-1523-y.

245. Yanchenko S. Ya. Order estimates for the approximative characteristics of functions from the classes $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ with a given majorant of generalized mixed modules of smoothness in the uniform metric. Ukrainian Math. J. 2017, **68** (12), 1975 – 985, https://doi.org/10.1007/s11253-017-1342-6; translation of Ukrain. Mat. Zh. 2016, **68** (12), 1705 – 1714.

246. Yanchenko S. Ya. Order estimates of approximation characteristics of functions from the anisotropic Nikol'skii–Besov classes. J. of Math. Sci. (N. Y.) 2018, **234** (1), 98 – 105, https://doi.org/10.1007/s10958-018-3984-9; translated of Ukr. Mat. Visn. 2017, **14** (4), 595 – 604.

247. Yanchenko S. Ya., Radchenko O. Ya. Approximating characteristics of the Nikol'skii–Besov classes $S^{r}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)$. Ukrainian Math. J. 2020, **71** (10), 1608 – 1626, https://doi.org/10.1007/s11253-020-01734-9; translation of Ukrain. Mat. Zh. 2019, **71** (10), 1405 – 1421.

248. Yanchenko S. Ya., Radchenko O. Ya. Approximation characteristics of the isotropic Nikol'skii-Besov functional classes. Carpathian Math. Publ. 2021, **13** (3), 851 – 861, https://doi.org/10.15330/cmp.13.3.851-861.

249. Yanchenko S. Ya., Stasyuk S. A. Approximative characteristics of functions from the classes $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ with a given majorant of mixed moduli of continuity. J. Math. Sci. (N. Y.) 2018, **235** (1), 103 – 115, https://doi.org/10.1007/s10958-018-4062-z; translated of Ukr. Mat. Visn. 2018, **15** (1), 132 – 148.

Додаток А

Список публікацій і апробація результатів

Цей додаток містить список публікацій здобувача по темі дисертації, а також відомості про апробацію результатів дисертаційної роботи.

Результати дисертації висвітлено у 17 наукових публікаціях. Основні результати опубліковано у наукових фахових виданнях України і наукових періодичних виданнях інших держав, пороіндексваних у міжнародних наукометричних базах Scopus або Web of Science [1 –13, 15]. Результати дисертації додатково відображено у 22 тезах доповідей і матеріалах міжнародних наукових конференцій.

Наукові праці, у яких опубліковані наукові результати дисертації:

1. Romanyuk A. S., Yanchenko S. Ya. Estimates for the entropy numbers of the Nikol'skii–Besov classes of functions with mixed smoothness in the space of quasi-continuous functions. Math. Nachr. 2023, **296** (6), 2575–2587, https://doi.org/10.1002/mana.202100202. (SJR — **Q2**).

2. Romanyuk A. S., Yanchenko S. Ya. Approximation of the classes of periodic functions of one and many variables from the Nikol'skii–Besov and Sobolev spaces. Ukrainian Math. J. 2022, **74** (6), 967 – 980, https://doi.org/10.1007/s11253-022-02110-5; translation of Ukrain. Mat. Zh. 2022, **74** (6), 844 – 855, https://doi.org/10.37863/umzh.v74i6.7141. (SJR — **Q3**).

3. Romanyuk A. S., Yanchenko S. Ya. Kolmogorov widths of the Nikol'skii–Besov classes of periodic functions of many variables

in the space of quasicontinuous functions. Ukrainian Math. J. 2022, **74** (2), 251 – 265, https://doi.org/10.1007/s11253-022-02061-x; translation of Ukrain. Mat. Zh. 2022, **74** (2), 220 – 232, https://doi.org/10.37863/umzh.v74i2.6932. (SJR — **Q3**).

4. Romanyuk A. S., Yanchenko S. Ya. Estimates of approximating characteristics and the properties of the operators of best approximation for the classes of periodic functions in the space $B_{1,1}$. Ukrainian Math. J. 2022, **73** (8), 1278 – 1298, https://doi.org/10.1007/s11253-022-01990-x; translation of Ukrain. Mat. Zh. 2021, **73** (8), 1102 – 1119, https://doi.org/10.37863/ umzh.v73i8.6755. (SJR — **Q3**).

5. Yanchenko S. Ya., Radchenko O. Ya. Approximation of the Nikol'skii-Besov functional classes by entire functions of a special form. Carpathian Math. Publ. 2021, **13** (3), 851 – 861, https://doi.org/10.15330/cmp.13.3.851-861. (SJR — **Q2**).

6. Yanchenko S. Ya., Radchenko O. Ya. Approximating characteristics of the Nikol'skii–Besov classes $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)$. Ukrainian Math. J. 2020, **71** (10), 1608 – 1626, https://doi.org/10.1007/s11253-020-01734-9; translation of Ukrain. Mat. Zh. 2019, **71** (10), 1405 – 1421. (SJR — **Q3**).

7. Yanchenko S. Ya. Approximation of the Nikol'skii-Besov functional classes by entire functions of a special form. Carpathian Math. Publ. 2020, **12** (1), 148 – 156, https://doi.org/10.15330/cmp.12.1.148-156. (SJR — **Q2**).

8. Yanchenko S. Ya. Best approximation of the functions from anisotropic Nikol'skii–Besov classes defined in $\mathbb{R}^d$. Ukrainian Math. J. 2018, **70** (4), 661 – 670; translation of Ukrain. Mat. Zh. 2018, **70** (4), 574 – 582, https://doi.org/10.1007/s11253-018-1523-y. (SJR — **Q3**).

9. Yanchenko S. Ya., Stasyuk S. A. Approximative characteristics of functions from the classes $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ with a given majorant of mixed moduli of continuity. J. Math. Sci. (N. Y.) 2018, **235** (1), 103 – 115, https://doi.org/10.1007/s10958-018-4062-z; translated of Ukr. Mat. Visn. 2018, **15** (1), 132 – 148. (SJR — **Q3**).

10. Yanchenko S. Ya. Order estimates of approximation characteristics of functions from the anisotropic Nikol'skii–Besov classes. J. of Math. Sci. (N. Y.) 2018, **234** (1), 98 – 105, https://doi.org/10.1007/s10958-018-3984-9; translated of Ukr. Mat. Visn. 2017, **14** (4), 595 – 604. (SJR — **Q3**).

11. Yanchenko S. Ya. Order estimates for the approximative characteristics of functions from the classes $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ with a given majorant of generalized mixed modules of smoothness in the uniform metric. Ukrainian Math. J. 2017, **68** (12), 1975 – 985, https://doi.org/10.1007/s11253-017-1342-6; translation of Ukrain. Mat. Zh. 2016, **68** (12), 1705 – 1714. (SJR — **Q3**).

12. Stasyuk S. A., Yachenko S. Ya. Approximation of functions from Nikolskii–Besov type classes of generalized mixed smoothness. Anal. Math. 2015, **41** (4), 311 – 334, https://doi.org/10.1007/s10476-015-0305-0. (SJR — **Q4**).

13. Yanchenko S. Ya. Approximation of functions from the isotropic Nikol'skii–Besov classes in the uniform and integral metrics. Ukrainian Math. J. 2016, **67** (10), 1599 – 1610, https://doi.org/10.1007/s11253-016-1175-8; translation of Ukrain. Mat. Zh. 2015, **67** (10), 1423 – 1433. (SJR — **Q3**).

14. Янченко С. Я. Порядкові оцінки апроксимативних характеристик функцій з узагальнених класів мішаної гладкості типу Нікольського–Бєсова. Теорія наближення функцій та суміжні пи-

тання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України 2014, **11** (3), 330 – 343. https://trim.imath.kiev.ua/index.php/trim/article/view/84

15. Yanchenko S. Ya. Approximation of functions from the classes $S^r_{p,\theta}B$ in the uniform metric. Ukrainian Math. J. 2013, **65** (5), 771 – 779, https://doi.org/10.1007/s11253-013-0813-7; translation of Ukrain. Mat. Zh. 2013, **65** (5), 698 – 705. (SJR — **Q3**).

16. Миронюк В. В., Янченко С. Я. Наближення функцій з узагальнених класів Нікольського–Бєсова цілими функціями у просторах Лебега. Мат. Студії 2013, **39** (2), 190 – 202.

17. Янченко С. Я. Оцінки апроксимативних характеристик класів функцій $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ у рівномірній метриці. Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України 2013, **10** (1), 328 – 340.
https://trim.imath.kiev.ua/index.php/trim/article/view/96

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. Romanyuk A. S., Yanchenko S. Ya. Estimates of approximating characteristics for the classes of periodic functions in the space $B_{1,1}$. International Workshop "Current Trends in Analysis and Approximation Theory", July 18, 2023, the International Telematic University UNINETTUNO, Roma, Italy: Book of Proceedings. 2023, P. 30 – 31.

   Форма участі – online, слухач.

2. Романюк А., Янченко С. Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів періодичних функцій з домінуючою мішаною похідною. Міжнародна конференція "Теорія наближення функцій та її застосування", присвячена 80-річчю з дня народження члена–кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942–

2007), 6 – 10 червня 2022 р., Луцьк, УКРАЇНА: Тези доповідей, Луцьк, 2022, С. 42 – 43.

Форма участі – online, доповідь.

3. Янченко Сергій. Апроксимаційні характеристики ізотропних класів $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$. Конференція молодих учених "Підстригачівські читання — 2022", 25–27 травня 2022 р., Львів; http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2022/abstracts/Yanchenko.pdf

   Форма участі – online, заочно.

4. Romanyuk A. S., Yanchenko S. Ya. Kolmogorov widths of classes of periodic functions with mixed smoothness of many variables in the space of quasi-continuous functions. The International Online Conference "Current Trends in Abstract and Applied Analysis", May 12–15, 2022, Ivano-Frankivsk, Ukraine: Book of Abstracts. 2022, P. 67.

   Форма участі – online, слухач.

5. Romanyuk Anatolii, Yanchenko Sergii. Entropy numbers of the Nikol'skii–Besov classes in the space of quasi-continuous functions. International Conference Mathematical Analysis, Differential Equation and Applications (MADEA–9), Kyrgyz–Turkish Manas University, Bishkek, Kyrgyz Republic, June 21–25. Abstracts — Bishkek: KTMU, 2021, P. 65 – 66.

   Форма участі – online, слухач.

6. Romanyuk A. S., Yanchenko S. Ya. Estimates for the entropy numbers of the Nikol'skii-Besov classes in the space of quasi-continuous functions. International Online Workshop on Approximation Theory, March 19–21, 2021, Ivano-Frankivsk, Ukraine: ABSTRACTS. 2021, P. 29 – 30.

   Форма участі – online, слухач.

7. Янченко С. Я. Наближення функцій з анізотропних класів Нікольського-Бєсова. Міжнародна наукова конференція "Теорія наближень і її застосування" присвячена 100-річчю з дня народження Миколи Павловича Корнєйчука. 16 – 19 жовтня 2020 р., Дніпро, Україна: Тези доповідей. — ПП "Ліра ЛТД", 2020, С. 79.

   Форма участі – заочно.

8. Янченко С. Я. Апроксимативні характеристики функцій з класів Нікольського-Бєсова $S^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}B(\mathbb{R}^d)$. Всеукраїнська наукова конференція "Теорія наближень і її застосування" з нагоди 70-річчя Владислава Федоровича Бабенка. 3 – 5 жовтня 2019 р., Дніпро, Україна: Тези доповідей. — ПП "Ліра ЛТД", 2019, С. 47.

   Форма участі – очно, доповідь.

9. Янченко С. Я. Апроксимативні характеристики класів функцій Нікольського-Бєсова з домінуючою мішаною похідною. Міжнародна конференція "Функціональні методи в теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV" присвячена 100-річчю з дня народження В. К. Дзядика (1919–1998). 20 – 26 червня 2019 р., Світязь, Україна: Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2019, С. 65 – 66.

   Форма участі – очно, доповідь.

10. Янченко С. Я. Апроксимативні характеристики класів функцій Нікольського–Бєсова $S^r_{1,\theta}B$. Міжнародна конференція молодих математиків. 6 – 8 червня 2019 р., Київ, Україна: Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2019, С. 116.

    Форма участі – очно, доповідь.

11. Янченко С. Я. Найкраще наближення функцій з анізотропних класів Нікольського–Бєсова. Міжнародна конференція молодих математиків присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН Укра-

їни Ю. О. Митропольського (1917–2008). 7 – 10 червня 2017 р., Київ, Україна: Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2017, С. 50.

Форма участі – очно, доповідь.

12. Янченко С. Я. Наближення функцій з класів Нікольського–Бєсова цілими функціями. Міжнародна конференція "Теорія наближення функцій та її застосування" присвячена 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942–2007): Тези доповідей (Україна, Слов'янськ, 28 травня – 3 червня 2017 р.), С. 100.

    Форма участі – очно, доповідь.

13. Янченко С. Я. Порядкові оцінки апроксимативних характеристик функцій з класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності у рівномірній метриці. Конференція молодих учених "Підстригачівські читання — 2016", 25–27 травня 2016 р., Львів; http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Yanchenko.pdf

    Форма участі – заочно.

14. Yanchenko S. Ya. Approximation of functions from Nikol'skii–Besov type classes of generalized mixed smoothness. AMMODIT and final EUMLS Workshop "Mathematics for Life Sciences". Hasenwinkel, March 7–11, 2016, P. 39.

    Форма участі – очно, доповідь.

15. Янченко С. Я. Наближення функцій багатьох змінних з ізотропних класів Нікольського–Бєсова. II Всеукраїнська наукова конференція "Теорія наближень і її застосування". Дніпропетровськ (Україна) 8 – 11 жовтня 2015 р.: Тези доповідей. — Дніпропетровськ, 2015, С. 94.

    Форма участі – заочно.

16. Yanchenko S. Ya. Approximation of functions from the isotropic Nikol'skii–Besov classes. Third conference "Mathematics for Life Sciences". Rivne, September 15–19, 2015: Book of Abstracts. — Kyiv: Institute of Mathematics of NASU, 2015, P. 22.

Форма участі – очно, доповідь.

17. Янченко С. Я. Наближення функцій з ізотропних класів Нікольського–Бєсова сумами типу Валле Пуссена. Міжнародна конференція молодих математиків. 3 – 6 червня 2015 р., Київ, Україна: Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2015, С. 92.

Форма участі – очно, слухач.

18. Yanchenko Sergiy. Approximation of the Nikol'skii–Besov classes with dominating mixed smoothness by entire functions of a spacial form. Mecklenburg Workshop "Approximation Methods and Function Spaces". Hasenwinkel, March 16 – 20, 2015, P. 18 – 19.

Форма участі – очно, доповідь.

19. Янченко С. Я. Наближення класів $B^r_{p,\theta}$ функцій багатьох змінних у просторі $L_q(\mathbb{R}^d)$. IV міжнародна ганська конференція присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана. 30 червня – 5 липня 2014 р., Чернівці, Україна: Тези доповідей. — Чернівецький національний університет, 2014, С. 219 – 220.

Форма участі – очно, доповідь.

20. Янченко С. Я. Апроксимативні характеристики класів функцій типу Нікольського–Бєсова. Міжнародна математична конференція "Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування" присвячена 60-річчю В. І. Рукасова (1953 – 2009), 21–24 травня 2014 р., Слов'янськ: Матеріали конференції. — Слов'янськ: ДДПУ, 2014, С. 87.

Форма участі – заочно.

21. Стасюк С. А., Янченко С. Я. Наближення функцій з узагальнених класів мішаної гладкості типу Нікольського–Бєсова. Міжнародна математична конференція "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки" до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Георгія Миколайовича, 23–24 квітня 2014 р., Київ, Україна: Матеріали конференції. — Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2014, С. 285.

Форма участі – очно, доповідь.

22. Янченко С. Я. Апроксимативні характеристики класів функцій типу Нікольського–Бєсова. Міжнародна математична конференція "Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, 23–30 червня 2013 р., Севастополь, Україна: Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2013, С. 285.

Форма участі – очно, доповідь.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Основні результати дисертації доповідалися й обговорювалися на:

- Workshop "From Modeling and Analysis to Approximation and Fast Algorithms", Hasenwinkel, Germany, September 02 – 06, 2023;
- Міжнародній конференції "Теорія наближення функцій та її застосування", присвячена 80-річчю з дня народження члена–кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942–2007), 6 – 10 червня 2022 р., Луцьк, Україна;
- Всеукраїнській науковій конференції "Теорія наближень і її застосування" з нагоди 70-річчя Владислава Федоровича Бабенка. 3 – 5 жовтня 2019 р., Дніпро, Україна;

- Міжнародній конференції "Функціональні методи в теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV" присвячена 100-річчю з дня народження В. К. Дзядика (1919–1998). 20 – 26 червня 2019 р., Світязь, Україна;
- Міжнародній конференції молодих математиків. 6 – 8 червня 2019 р., Київ, Україна;
- Міжнародній конференції молодих математиків присвяченій 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського (1917–2008). 7 – 10 червня 2017 р., Київ, Україна;
- Міжнародній конференції "Теорія наближення функцій та її застосування" присвяченій 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942–2007). Україна, Слов'янськ, 28 травня – 3 червня 2017 р.;
- AMMODIT and final EUMLS Workshop "Mathematics for Life Sciences". Hasenwinkel, Germany, March 7 – 11, 2016;
- Third conference "Mathematics for Life Sciences". Rivne, September 15 – 19, 2015;
- Mecklenburg Workshop "Approximation Methods and Function Spaces". March 16 – 20, 2015, Hasenwinkel, Germany;
- IV міжнародній ганській конференції присвяченій 135 річниці від дня народження Ганса Гана. 30 червня – 5 липня 2014 р., Чернівці, Україна;
- Міжнародній математичній конференції "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки" до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Георгія Миколайовича, 23 – 24 квітня 2014 р., Київ, Україна;

- Міжнародній математичній конференції "Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, 23 – 30 червня 2013 р., Севастополь, Україна;

- засіданнях Вченої ради Інституту математики НАН України (23.06.2020, 01.12.2020, 16.02.2021, 19.04.2022 — усі online);

- семінарах відділу теорії функцій Інституту математики НАН України, керівник семінару – доктор фіз.-мат. наук, проф. А. С. Романюк (01.03.2019, 01.11.2021, 29.09.2023 – online, 20.10.2023 – online);

- семінарі Інституту математики НАН України, керівники семінару – чл.-кор. НАН України С. І. Максименко, доктор фіз.-мат. наук, проф. А. Ю. Пилипенко (12.03.2024 – online);

- семінарі Інституту математики Університету м. Любек, Німеччина, керівник семінару — проф. Ю. Престін (11.03.2014);

- семінарі кафедри математичного аналізу та оптимізації Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, керівник семінару – проф. Н. В. Парфінович (8.12.2023 – online);

- семінарі "Сучасний аналіз" в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, керівники семінару – чл.-кор. НАН України І. О. Шевчук, доктор фіз.-мат. наук, проф. О. О. Курченко, доктор фіз.-мат. наук, проф. В. М. Радченко (29.02.2024 – online);

- семінарі з теорії аналітичних функцій Львівського національного університету імені Івана Франка, керівник семінар – доктор фіз.-мат. наук, проф. О. Б. Скасків (25.01.2024 – online);

- семінарах молодих вчених Інституту математики НАН України (14.04.2016, 24.11.20204 – online).