

ВІДГУК

На дисертацію Грушки Ярослава Івановича

«Теоретико-множинні методи
в релятивістській кінематиці»

представлену на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.06 — алгебра та теорія чисел; III-математика

Визначальними темами дослідження дисертанта п. Ярослава Грушки вибрані теорія так званих мінливих множин, її застосування до кінематичних проблем класичної релятивістської теорії, а також певні аспекти теорії трансляційно-інваріантних операторів в гільбертових просторах, важливі для обґрунтування багатьох результатів сучасних квантової теорії поля та статистичної фізики і глибоко пов'язаних із обчислювальними розбіжностями певних фізичних характеристик. Зокрема, автором були з'ясовані питання строгого означення поняття мінливої множини, як множини об'єктів, здатних еволюціонувати довільним чином і картина еволюції яких може залежати від способу спостереження, тобто від системи відліку.

Основні математичні об'єкти автором прописано дуже чітко з дотриманням максимальної математичної строгості. Фактично, ця робота є спробою строгої математичної формалізації динаміки і створення відповідної мови, яка відповідає сучасним стандартам математичної строгості (що використовує теоретико-множинну мову). Тобто, користуючись цією мовою можна відповідно математизувати певні розділи теоретичної фізики, щоб вони стали доступними математикам. Створюється теж можливість переформулювати деяких задач про неможливість та неіснування відповідного типу фізичних об'єктів, а саме такого типу задачі вимагають строгості базових означень, щоб адекватно зрозуміти, що саме не повинно, чи може не існувати, оскільки їхнє існування може суперечити певним чітко виписаним аксіомам. Тут відзначу, що в праці поняття мінливої множини виписане цілком чітко і зрозуміло, а також досліджено основні властивості введених математичних об'єктів, причому за допомогою означення *орієнтованої множини* (тобто реляційної системи з одним рефлексивним бінарним відношенням — напрямним відношенням змін) запропоновано найпримітивнішу математичну модель сукупності мінливих об'єктів. Для аргументованості цих результатів автором отримано узагальнення принципу максимальності Гаусдорфа, а саме теорему про те що будь-який ланцюг орієнтованої множини можна вкласти в максимальний ланцюг. Певні результати автора стосуються введенню поняття часового параметра на орієнтованих множинах, а також введено допоміжне поняття примітивної мінливої множини, тобто орієнтованої множини із заданим на ній часом, або ж хронологізацією. Останнє цілком природним чином асоціюється із добре знаним в релятивістській кінематиці математичним поняттям *арифметизації* просторово-часових подій, параметризованих часовим параметром і розглядуваних автором як певні ланцюгово-орієнтовані множини. У зв'язку з цим автором доведено твердження, що будь-яку ланцюгову орієнтовану множину можна точково хронологізувати, зокрема, будь-яку орієнтовану множину можна хронологізувати квазіточково. Також доведено для певного класу синхронізацій орієнтованих множин теорему про існування і єдиність внутрішнього часу, що породжує відповідну синхронізацію.

Напевно, варто було б в дисертації дещо детальніше уточнити, що введення нового математичного поняття як, наприклад, "мінливої множини", чи концепцій, як от "часонезворотності" тощо, мають бути певним чином виправдані щодо існуючого стану опису явищ релятивістської кінематики наявними методами математичної фізики. Тобто їх слід піддати перевірці на відповідність "принципу достатньої причини Ляйбніца" (Sufficient Reason Leibnitz Principle), доповнений відомим в логіці принципом Окками про не аргументоване множення сутностей. Цей принцип говорить, зокрема, що будь-яка нова концепція має бути абсолютно необхідною з певної обгрунтованої причини, тобто є необхідною, щоб коректно пояснити нові фізичні явища, щодо котрих існуючі поняття та концепції своєї задачі не виконують задовільно.

В праці також дано означення системи абстрактних траєкторій (частинними випадками котрих є траєкторії руху матеріальних точок) і встановлено, що довільна система абстрактних траєкторій природним чином породжує примітивну мінливу множину. Автор на конкретному прикладі показує, що для того, щоб описати еволюцію елементарно-часових станів у примітивних мінливих множинах, що моделюють певні фізичні процеси, недостатньо інформації про еволюцію її елементарних станів, що задається напрямним відношенням змін. У зв'язку із чим вводяться поняття бази елементарних процесів (яка є певним рефлексивним і асиметричним бінарним відношенням на множині елементарно-часових станів примітивної мінливої множини) та поняття базової мінливої множини, тобто примітивної мінливої множини із заданою на ній базою елементарних процесів. З інтуїтивної точки зору довільна базова мінлива множина являє собою сукупність мінливих об'єктів, спостереження за якою ведеться в рамках однієї усталеної системи відліку. Також автор доводить, що довільна система абстрактних траєкторій природним чином породжує базову мінливу множину. Автором також наводяться деякі приклади мінливих множин, котрі демонструють, що математичний апарат відповідної теорії володіє достатнім запасом гнучкості.

В дисертації п. Я. Грушки введені також так звані *чітко видимі мінливі множини*, тобто мінливі множини, всі компоненти котрих є цілком видимими в кожній системі відліку. Причому саме поняття «видимості, чи невидимості» компонентів множин сформульовано математично не зовсім чітко. Тим не менше, автором в межах прийнятих визначень встановлено, що «в чітко видимих мінливих множинах відображення уніфікації породжуються бієктивними відображеннями між множинами елементарно-часових станів відповідних систем відліку».

Певні результати дисертації п. Я. Грушки стосуються кінематичних мінливих множин, система відліку котрих є оснащена своїм власним так званим «*геометричним оточенням*», яке може бути метричним, топологічним, лінійним, топологічним векторним або іншим простором. На основі введеного автором означення *реального і універсального перетворення координат* між системами відліку у кінематичних множинах встановлюється необхідна і достатня ознака існування універсального перетворення координат у кінематичній множині, котра є в певному сенсі дещо тавтологічна. Як наслідок автором формулюється дещо контroversійний висновок, що у випадку існування *універсального перетворення координат* у кінематичній множині, то воно, взагалі кажучи, не єдине, дещо заперечуючи його універсальності.

Розумування ж дисертанта на тему релятивістської зворотності руху в часі та причиновості подій, змодельованих базовими мінливими множинами, асоційованими із різними системами відліку, на жаль, залишились досить мало інформативними поза їхнім формально-математичним описом, - попри те, що ці проблеми в сучасній математичній фізиці є досить давно, причому математично строго розв'язані в межах математичної теорії фоліацій та відповідних диференціально-геометричних структур на них.

Більше того, тут варто пригадати відому нетривіальну проблему з початку ХХ століття щодо адекватного опису одно-часової взаємодії кількох різних фізичних об'єктів, *кожен з котрих характеризується своєю лоренцівською системою відліку із власним часовим*

параметром, котра була ефективно розв'язана ще в 1932 році в відомих публікаціях нобелівського лауреата з фізики П. Дірака та В. Фока, і має фундаментально важливе застосування в сучасній математичній фізиці. На жаль, про її можливе "мінливе" моделювання дисертант не згадує, хоч в певному сенсі формально математичне обґрунтування цієї проблеми було б добрим результатом застосувань теоретико-множинних результатів автора!

Певна частина дисертації присвячена кінематичним аспектам теорії множин та їхніх відповідних *тахіонових розширень*, в яких дозволяється *надсвітловий рух* для матеріальних об'єктів відносно інерційних систем відліку. Автором побудовано приклади кінематичних множин, які є математично строгими моделями еволюції фізичних систем в рамках *кінематики Лоренца-Пуанкаре* та її *тахіонових розширень* на основі узагальнених перетворень Лоренца-Пуанкаре в сенсі Е. Рекамі, В. Ольховського та Р. Голдоні. Зокрема доведено, що в таких кінематичних множинах не існує універсального перетворення координат поза тривіальними випадками. Дано також опис універсальних кінематик, тобто кінематичних множин із заданим універсальним перетворенням координат, а також побудовані приклади універсальних кінематик, котрі є математично строгими моделями еволюції фізичних систем в рамках згаданої вище кінематики Лоренца-Пуанкаре та її *тахіонових розширень*. Автором, зокрема, введено операції еволюційного об'єднання та диз'юнктного еволюційного об'єднання для універсальних кінематик, а також встановлен, що коли диз'юнктне еволюційне об'єднання двох універсальних кінематик існує, то воно збігається з їхнім еволюційним об'єднанням. Також доведено, що довільні дві диз'юнктні універсальні кінематики мають диз'юнктне еволюційне об'єднання і що диз'юнктне еволюційне об'єднання *еволюційно видимих* універсальних кінематик є еволюційно видимим.

Автором також реалізована цікава спроба за допомогою методів теорії універсальних кінематик дослідити питання про "*часові парадокси*", пов'язані з гіпотезою про існування матеріальних об'єктів та інерційних систем відліку, що рухаються зі швидкістю більшою за швидкість світла.

Було встановлено достатні ознаки умовної часозворотності та безумовної часонезворотності універсальних кінематик. Зокрема проаналізовано на безумовну *часонезворотність* універсальних кінематик, котрі є математично строгими моделями еволюції фізичних систем в рамках відповідних *тахіонових розширень* кінематики типу Лоренца-Пуанкаре, та доведено існування *тахіонових кінематик*, в яких дозволяється *рух тіл та інерційних систем відліку* з довільною швидкістю, відмінною від швидкості світла. Останнє твердження, як є встановлено в сучасній релятивістській механіці, є дещо не точним, а в певній частині щодо *тахіонного руху* локалізованих тіл в просторі часі Мінковського є не зовсім чітко сформульованим.

А саме, прийнято, що умовиводи, котрі ґрунтуються в межах виключно кінематичних термінів, не дають можливості стверджувати про відповідні фізичні наслідки динаміки асоційованих з ними фізичних об'єктів. Наприклад, на сьогодні в математичній фізиці є добре знане фундаментальне релятивістське алгебраїчне співвідношення $E = mc^2 [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$, де E означає енергію

фізичної частинки, а m - її так звану *локалізовану масу спокою*. Вважається, що так звані *тахіони* (якщо вони дійсно існують) мають швидкість $v > c$, де величина $c > 0$ позначає швидкість світла. А це означає, що маса спокою частинки буде рівна $|m| \sqrt{-1}$, тобто стає уявною! Поклавши тепер масу спокою m уявною, при цьому пригадавши, що імпульс p частинки задається відомою релятивістською формулою $p = mv [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$, то відповідне релятивістське співвідношення прийме класичний вигляд: $E^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4$, котре у випадку уявної маси спокою, тобто коли $m = \sqrt{-1} |m|$, переписується як $E^2 - c^2 p^2 = -|m|^2 c^4$, або ж як $E^2 + |m|^2 c^4 = c^2 p^2$.

Оскільки енергія та імпульс *тахіона* повинні задовольнити це співвідношення, ми отримуємо, що вони прискорюються, (тобто величина $|v|^2$ зростає), якщо *тахіони* втрачають енергію,

(тобто E^2 зменшується). Крім того, тахіон з нульовою енергією є просто «трансцендентним», тобто рухається із нескінченною швидкістю!

Це все разом веде як до фізичних, так і математичних поважних наслідків. А саме, припустимо, що ці тахіони є заряджені. Оскільки вони будуть рухатися швидше, ніж швидкість світла у вакуумі, вони повинні, як відомо з релятивістської фізики, *обов'язково випромінювати* так зване черенковське промінювання. А це, відповідно, знизить його енергію, змушуючи цей тахіон прискорюватися ітеративно ще більше! Іншими словами, заряджені тахіони, ймовірно, призведуть до реакції спонтанного утворення тахіон-антитахіонної квантової пари, котра ініціює ланцюгову реакцію у вакуумі, роблячи цей квантовий вакуум фізично нестійким. Подальший аналіз цього явища вимагає стандартного використання вже квантової теорії поля, що є окремою вже не кінематичною релятивістською проблемою.

Але з кінематичної точки зору тахіони, хоч вони гіпотетично рухаються швидше світла, вони *не можуть бути цілком невидимими*, що в певній мірі мало б бути описано в межах *чітко видимих мінливих множин*, тобто мінливі множини, всі компоненти котрих є цілком видимими в кожній системі відліку, при умові чітко прописаного визначення самого поняття «видимості» з точки зору відповідної теорії вимірювання. Можна собі, для прикладу, уявити, що вони з'явилися як продукт певної ядерної реакції. Оскільки вони прискорюються і витрачають енергію, ми можемо «побачити» їх, виявляючи згадане вже вище черенковське світло, яке вони випромінюють у простір, невпинно збільшуючи свою швидкість. Що цікаво, такі експерименти були вже багатократно виконані і не було там знайдено жодних тахіонів. Навіть так звані *нейтральні тахіони*, володіючи імпульсом, можуть розсіюватися на звичайній речовині, що може бути теж експериментально спостережене. Але жодних тахіонів теж не було знайдено.

Тепер щодо так званого використання тахіонів для передачі інформації швидше, ніж швидкість світла в порушення спеціальної теорії відносності. Тут варто зазначити, що коли врахувати елементарну релятивістську квантову механіку тахіонів в (3+1)-вимірному просторі Мінковського M^4 , то питання про те, чи вони «дійсно» можуть рухатися швидше, ніж швидкість світла, стає математично набагато гострішим! У цьому випадку треба взяти до уваги, що тахіони, - це перш за все *квантові пучки хвиль*, котрі задовольняють класичне хвильове рівняння в (3+1)- вимірному просторі Мінковського M^4 .

А саме, давайте розглянемо звичайну еволюцію в просторі-часі Мінковського M^4 з координатами $(x,t) \in M^4$ для локалізованого *безспінного тахіона*, поклавши для зручності швидкість світла $c=1$, щоб зробити ситуацію більш прозорою. Тоді, як відомо, квантово-механічна хвильова функція одного такого тахіона має задовольняти звичайне хвильове рівняння для спін-нульових частинок, інваріантне відносно класичної групи симетрії Лоренца – Пуанкаре, тобто відоме хвильове рівняння Кляйна-Гордона: $(\square - m^2)\phi = 0$, де $\phi \in L_2(R^3;C)$ та $\square$ - це добре знаний оператор д'Аламберта, який в випадку (3+1)-виміру має такий вигляд: $\square = \partial^2/\partial t^2 - \partial^2/\partial x^2 - \partial^2/\partial y^2 - \partial^2/\partial z^2$, причому ми вже врахували, що величина $m^2 < 0$, тобто є негативною, а сама маса спокою частинки m є, як було вже сказано вище, уявною. Будь-який розв'язок рівняння Кляйна-Гордона - це лінійна комбінація або суперпозиція розв'язків у формі $\phi(t,x) = \exp(-iEt + i(p|x))$, $i=\sqrt{-1}$, де беремо до уваги, що $E^2 - p^2 = -|m|^2$ (при $c=1$). Ми тут маємо два відмінні випадки: або $|p| \geq |E|$ і ми отримуємо розв'язок, який виглядає як хвиля, гребені котрої рухаються в просторі зі швидкістю $|E|/|p| \leq 1$, тобто повільніше швидкості світла, або ж $|p| < |E|$, і в цьому випадку енергія тахіона E стає уявною, і ми отримаємо розв'язок, що виглядає як просторова структура, амплітуда котрої зростає *експоненціально в часі*, і як функція, перестає бути квадратично інтегрованою!

Ми повинні взяти до уваги обидва ці випадки. Для цього треба вивчити еволюцію розв'язків рівняння Клейна-Гордона з будь-якими розумними початковими даними Коші - тобто будь-які розумні значення функції $\phi_0 \in L_2(R^3;C)$ та її перших похідних при $t=0$. Щодо розв'язків для таких хвильових рівнянь, можна легко встановити наступне.

1). Для розв'язків першого випадку: якщо початкові дані, тобто функція $\phi_0 \in L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ та її часткова похідна по змінній $x \in \mathbb{R}^3$ є фінітною, тобто нулем за межами інтервалу $\{x \in \mathbb{R}^3: |x| \leq L\}$ при $t=0$, - то відповідні розв'язки рівняння (5) матимуть носій лише в межах інтервалу $\{x \in \mathbb{R}^3: |x| \leq L+t\}$ в будь-який інший момент часу $t > 0$. Іншими словами, *локалізовані частинко-подібні розв'язки не поширюються швидше, ніж швидкість світла!* Це, здається, ніби якось суперечить нашим уявленням, що тахіони завжди *"рухаються швидше, ніж швидкість світла"*, але результат вище - це строгий математичний факт, добре відомий як *"швидкість поширення точкового носія функції"* гіперболічних рівнянь математичної фізики. Як додатковий наслідок із цього результату отримуємо також, що *локалізовані тахіонні поля не порушують також принципу причинності*, оскільки передача інформації за їхньою допомогою може бути не швидше, ніж із швидкістю світла, що дещо не корелює із висновком дисертації про те, що автором насправді доведено існування тахіонових кінематик, в яких дозволяється рух тіл та інерційних систем відліку з довільною швидкістю, відмінною від швидкості світла.

2. Для розв'язків другого випадку: виявляється, що тепер ми не можемо розв'язати рівняння Клейна-Гордона для всіх розумних початкових умов, але лише для таких, для яких перетворення Фур'є повністю зануляються в інтервалі $\{x \in \mathbb{R}^3: |x| \leq |m|\}$ при $t=0$. Але згідно відомої теореми Пелі-Вінера, ця умова має такий нефізичний наслідок: розв'язати рівняння Клейна-Гордона (5) для так званих локалізованих частинко-подібних початкових даних, що зануляються за межами деякого інтервалу $\{x \in \mathbb{R}^3: |m| \leq |x| \leq L\}$ при $t=0$ є не можливо! Іншими словами, ми більше не можемо *«локалізувати»* наш тахіон в будь-якій обмеженій частині простору. Звичайно, гребені «хвилі» $\phi(t, x) = \exp(-iEt + i(p|x|))$ формально рухаються швидше, ніж швидкість світла, але ці хвилі ніколи не були і не можуть бути локалізовані в просторі, тобто ці хвилі як локалізовані частинки із певною фіксованою швидкістю - просто не існували раніше, а тим більше не можуть існувати взагалі ніколи.

Важлива суть вказаного аналізу полягає в тому, що не можливо ніяким чином використати ці вказані вище не локалізовані в просторі тахіони для передачі інформації швидше, ніж швидкість світла від одного просторового пункту до іншого. Адже для цього потрібно буде створити повідомлення, закодоване певним чином в локалізованій формі в область тахіонного поля і відправити його із надсвітловою швидкістю до передбачуваного приймача. Але як ми вже бачили вище, цього зробити ніяк не вдасться - бо локалізовані тахіонні поля - є субсвітлові, а надсвітлові тахіонні поля - є строго просторово нелокальними. Додатковим висновком із вказаних вище міркувань буде твердження, що тахіони як частинки повинні бути відкинуті не на підставі принципу причинності, а на підставі звичайної локалізації частинок в просторово-часовому вакуумі та відповідної його математичної стабільності.

Останній розділ праці дисертант присвятив дещо відмінній темі, хоч своєрідним чином теж пов'язаний із кінематичними властивостями руху кластерів локалізованих частинок в просторі-часі, а саме певному узагальненню операторів з обмеженим проєкційним слідом над заданим гільбертовим простором і дослідженню властивостей цього простору. Автором є введено поняття абстрактного трансляційно інваріантного оператора в гільбертовому просторі та доведено, що звичайний слід від трансляційно інваріантних операторів в загальному випадку є розбіжним. На основі цього спостереження дисертант ввів поняття узагальненого проєкційного сліду, попередньо збудувавши лінійний нормований простір лінійних неперервних операторів з обмеженим проєкційним слідом і встановлена його неповнота. Грунтуючись на відомій теорії оснащених просторів, розвинуті в працях Ю.М. Березанського та його учнів, будується поповнений простір узагальнених операторів з обмеженим проєкційним слідом та визначається поняття проєкційного сліду для таких узагальнених операторів. Додатково автор доводить, що простір узагальнених операторів із обмеженим проєкційним слідом можна вкласти в більш широкий банаховий простір псевдо-операторів з обмеженим слідом. Автором встановлено, що на ньому можуть бути

сконструйовані інші групи операторів, тісно пов'язані із описом еволюції багаточастинкових квантових систем. Як зауваження до цієї конструкції операторів було б добре представити кілька нетривіальних прикладів таких трансляційно-інваріантних операторів відносно заданих на гільбертовім просторі функцій і чий проєкційний слід скінченний.

Варто також відзначити цікаві розумування дисертанта щодо різних алгебраїчних числових множин та деяких логарифмічних розширень ножини дійсних чисел і гіперболічного зображення узагальнених перетворень Лоренца. Щодо вказаних автором аналогій та відповідних ізоморфізмів між алгебраїчними системами, варто тут зауважити, що більшість з них вписуються канонічним чином в поняття групової системи та відповідної їй лінійної Лі-алгебраїчної системи, не відзначених явно автором.

Підсумовуючи сказане вище щодо основних результатів дисертанта п. Я. Грушки, необхідно відзначити наповненість дисертації значною кількістю як нових теоретико-множинних, алгебраїчних та операторно-функційних математичних понять, пов'язаних як із актуальними проблемами коректного опису кінематики релятивістських систем, так і з обчислювальними проблемами еволюційних трансляційно-інваріантних систем багаточастинкових операторів в гільбертових просторах. Поминаючи місця із дещо надлишковою теоретико-множинною заформалізованістю отриманих автором результатів, їхня формульна частина доведень в більшості випадків є достатньо прозора та адекватна поставленим проблемам, а сформульовані вище деякі зауваження до кількох отриманих в дисертації результатів стосуються виключно їх авторських інтерпретацій і не піддають сумніву зміст відповідних доведень, проведених виключно по модулю прийнятих означень та понять разом із накладеними на них спеціальних алгебро-топологічних структур.

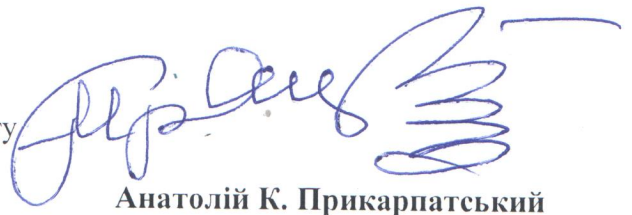
Виконаний дисертантом аналіз математичних проблем, пов'язаних із теоретико-множинними аспектами релятивістської кінематики та теорії трансляційно-інваріантних систем операторів математичної фізики представляє собою достатньо неординарне, якісне і глибоко професійне дослідження, котре в цілості є значним і високо кваліфікованим вкладом в сучасні алгебру та загальну теоретико-множинну математику.

Вважаю, що дисертація п. Ярослава Івановича Грушки «Теоретико-множинні методи в релятивістській кінематиці», представлена на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук, відповідає всім вимогам 7,8 та 9 «Порядку присудження та позбавлення наукового ступеня доктора наук», затвердженого постановою Кабінету міністрів України від 17 листопада 2021 р., № 1197, а її автор заслуговує на присвоєння йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 - алгебра і теорія чисел; 111-математика.

Доктор фізико-математичних наук, професор

математичної фізики Національного університету

«Львівська Політехніка» (тел. 097-07-84-256)


Анатолій К. Прикарпатський

Підпис д.ф.-м.н., проф. А. К. Прикарпатського засвідчую:

Вчений секретар Національного університету

«Львівська Політехніка», ктн доц

Роман Б. Брилинський



Карпишів до атестації
виної рари Р 26.06.03
18.06.2024р.
Учений секретар
Інституту математики НАН України

Горько