Національна академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

ГРУШКА Ярослав Іванович

УДК 510.22 + 512.562 + 51-71 + 517.982

Теоретико-множинні методи в релятивістській кінематиці

01.01.06 — алгебра та теорія чисел
111 — математика

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. _____ Я.І. Грушка

Науковий консультант
доктор фіз.-мат. наук, професор,
член-кореспондент НАН України,
ДРОЗД Юрій Анатолійович

Київ — 2023

Анотація

Грушка Я.І. Теоретико-множинні та функціональні методи в релятивістській кінематиці. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 — алгебра та теорія чисел" (111 — математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2023.

Дисертаційна робота присвячена розробці нового математичного апарату для математичної формалізації деяких фізичних теорій, перш за все релятивістської кінематики, та математичного моделювання еволюції складних систем, зокрема багаточастинкових систем. Основним, базовим, поняттям зазначеного математичного апарату є поняття мінливої множини, тобто множини об'єктів, що можуть еволюціонувати, і картина еволюції яких може залежати від способу спостереження (тобто системи відліку).

В роботі дано строге означення поняття мінливої множини і досліджено властивості мінливих множин. Визначено поняття системи абстрактних траєкторій і доведено, що довільна система абстрактних траєкторій породжує певну базову мінливу множину. Встановлено, що довільна базова мінлива множина може бути породжена системою абстрактних траєкторій, які утворені максимальними ланцюгами на множині її елементарно-часових станів. Введено класифікацію видимості систем відліку в мінливих множинах. Доведено, що за певних умов множина систем відліку мінливої множини може розпадатись на класи видимості, які попарно не перетинаються і будь-який клас видимості є цілком невидимим з інших класів видимості. Доведено, що в мінливих множинах, всі компоненти яких є цілком видимими в кожній системі відліку, відображення уніфікації породжуються бієктивними відображеннями між множинами елементарно-часових станів відповідних систем відліку.

Досліджено властивості кінематичних множин, тобто мінливих множин, оснащених різноманітними геометричними та топологічними структурами. Введено поняття реального і універсального перетворення координат між системами відліку у кінематичних множинах. Доведено необхідну і достатню ознаку існування універсального перетворення координат.

Досліджено властивості — універсальних кінематик, тобто кінематичних множин із заданим універсальним перетворенням координат. Побудовано приклади універсальних кінематик, які є математично строгими моделями еволюції фізичних систем в рамках кінематики Лоренца-Пуанкаре та її тахіонових розширень, а також побудовано нетривіальний клас кінематичних множин, що не допускають універсального перетворення координат.

Введено аналоги теоретико-множинного відношення включення та теоретико-множинної операції об'єднання для базових мінливих множин, кінематичних множин та універсальних кінематик. Доведено, що операція еволюційного об'єднання має багато властивостей, схожих з операцією об'єднання звичайних множин. Доведено теорему теорему про еволюційне розширення для універсальних кінематик. Очікується, що доведена теорема дасть змогу аксіоматично сформулювати основи спеціальної теорії відносності в рамках теорії універсальних кінематик. Є сподівання, що така аксіоматика виявиться більш природною з фізичної та інтуїтивної точки зору, в порівнянні з існуючими математичними аксіоматизаціями теорії відносності, і дозволить відмовитись від певних інтуїтивно-неприродних постулатів, присутніх в цих аксіоматизаціях.

Методами теорії універсальних кінематик досліджено питання про порушення принципу причинності, пов'язане з гіпотезою про існування матеріальних об'єктів та інерційних систем відліку, що рухаються зі швидкістю, більшою за швидкість світла. Встановлено достатні ознаки умовної часозворотності та безумовної часонезворотності. Побудова-

но приклади безумовно часонезворотних тахіонових універсальних кінематик на базі узагальнених перетворень Лоренца в сенсі Е. Рекамі, В. Ольховського та Р. Голдоні, в яких дозволяється рух матеріальних об'єктів та інерційних систем відліку з довільною швидкістю, відмінною від швидкості світла.

Досліджено властивості одностайно-поступальних систем відліку у векторних універсальних кінематиках. Встановлено необхідну і достатню умову одностайної поступальності однієї системи відліку відносно іншої у векторній універсальній кінематиці.

Побудовано простір узагальнених операторів з обмеженим проекційним слідом над заданим гільбертовим простором і встановлено його властивості. Доведено існування проекційного сліду для довільного узагальненого оператора з обмеженим проекційним слідом над заданим гільбертовим простором. Встановлено, що простір узагальнених операторів з обмеженим проекційним слідом вкладається в більш широкий банаховий простір псевдооператорів. Над простором псевдооператорів побудовано групу унітарних операторів, пов'язану з описом еволюції багаточастинкових квантових систем.

Ключові слова: рух, еволюція, час, шоста проблема Гільберта, мінливі множини, релятивістська кінематика, інерційні системи відліку, тахіони, порушення принципу причинності, часонезворотність, моделювання еволюції багаточастинкових систем, трансляційно інваріантні оператори, узагальнені оператори, проекційний слід.

Abstract

Grushka Ya.I. Set-theoretic and functional methods in relativistic kinematics. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, specialty 01.01.06 "Algebra and Number Theory" (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2023.

The thesis, is devoted to the development of new mathematical apparatus intended for mathematical formalization of some physical theories (first of all — relativistic kinematics) as well as for mathematical simulation of the evolution of complex systems (in particular many-particle systems). The main, basic, notion of this apparatus is the notion of changeable set, that is the set of elements, which can evolve, and, which can change their evolution picture in dependence of the way of observation (that is the reference frame).

In the paper the rigorous definition of changeable set notion is given and properties of changeable sets are investigated. The notion of system of abstract trajectories is defined and it is proven that every system of abstract trajectories generates some base changeable set. It is established that arbitrary base changeable set can be generated by the system of abstract trajectories, which are created by maximal chains on the set of its elementary-time states. The classification of visibility of reference frames in changeable sets is introduced. It is proven that, under some conditions, the set of all reference frames of changeable set can be decomposed into the visibility classes, which are pairwise disjoint and, moreover, every visibility class is fully invisible from each another class. It is proven that in changeable sets, all components of which are completely visible in each reference frame, the unification mappings are generated by bijective mappings between the sets of elementary-time states of the corresponding reference frames.

The properties of kinematic sets are investigated, where kinematic sets are changeable sets, equipped by different geometrical or topological structures. The notions of actual and universal coordinate transform between reference frames of kinematic sets are defined. The necessary and sufficient condition of existence of universal coordinate transform is proven.

The properties of universal kinematics (that is kinematic sets with given universal coordinate transform) are investigated. The examples of universal kinematics, representing mathematically strict models of evolution of physical systems in the framework of the Lorentz-Poincare kinematics as well as its tachyon extensions are constructed. Also it is constructed the non-trivial class of kinematic sets, which do not allow universal coordinate transform.

The analogues of set-theoretic inclusion relation and set-theoretic operation of union are introduced for base changeable sets, kinematic sets and universal kinematics. It is proven that the evolution union operation has many properties similar with the properties of the union operation for ordinary sets. Theorem on evolutional extension for universal kinematics is proven. It is expected that the last theorem will allow to formulate axiomatically the foundations of the special relativity within the framework of the theory of universal kinematics. It is hoped that that such axiomatics will be more natural from the physical and intuitive point of view, in comparison with existing mathematical axiomatizations of the theory of relativity, and will allow to abandon certain intuitively non-natural postulates, presented in these axiomatizations.

Using the methods of the theory of universal kinematics, it is investigated the question of violations of causality principle, connected with the hypothesis on the existence of material objects and inertial reference frames moving at speeds greater than the speed of light. The sufficient conditions of certainly time irreversibility and conditionally time reversibility are established. The examples of certainly time irreversible tachyon universal

kinematics were constructed based on the generalized Lorentz transforms in the sense of E.Recami, V. Olkhovsky and R. Goldoni. In these kinematics it is allowed the motion with any velocity, different from velocity of light for material objects and inertial reference frames.

The properties of self-consistently translational reference frames in vector universal kinematics were investigated. The necessary and sufficient condition of self-consistently translationality of one reference frame relatively to another is established for vector universal kinematics.

The space of generalized operators with bounded projection trace over given Hilbert space is constructed and the properties of this space are investigated. The existence of projection trace for arbitrary generalized operator with bounded projection trace is proven. It is established that the space of generalized operators with bounded projection trace can be embedded into more wide space of pseudo-operators. Over the space of pseudo-operators it is constructed the group of unitary operators related to the description of the evolution of many-particle quantum systems.

Key words: movement, evolution, time, sixth Hilbert's problem, changeable sets, relativistic kinematics, inertial reference frames, tachyons, violation of the principle of causality, irreversibility of time, simulation of the evolution of multiparticle systems, translation-invariant operators, generalized operators, projection trace.

Список публікацій

1. Grushka Ya.I., Spaces of generalized operators with bounded projection trace, *Ukrainian Mathematical Journal* **63**, (2011), no. 1, 27–48; DOI: 10.1007/s11253-011-0486-z (перекладено з: *Укр. мат. журн.* **63**, (2011), no. 1, 24–39).
2. Hrushka Ya.I., Base Changeable Sets and Mathematical Simulation of the Evolution of Systems, *Ukrainian Mathematical Journal* **65**, (2014), no. 9, 1332–1353; DOI: 10.1007/s11253-014-0862-6 (перекладено з: *Укр. мат. журн.* **65**, (2013), no. 9, 1198–1218).
3. Grushka Ya.I., Tachyon generalization for Lorentz transforms, *Methods Funct. Anal. Topology* **19**, (2013), no. 2, 127–145; `http://mfat.imath.kiev.ua/article/?id=682`.
4. Grushka Ya.I., On Universal Coordinate Transform in Kinematic Changeable Sets, *Methods Funct. Anal. Topology* **23**, (2017), no. 2, 133–154; `http://mfat.imath.kiev.ua/article/?id=968`.
5. Grushka Ya.I., Self-consistently Translational Motion of Reference Frames and Sign- definiteness of Time in Universal Kinematics. *Methods Funct. Anal. Topology* **24**, (2018), no. 2, 107–119; `http://mfat.imath.kiev.ua/article/2018/02/mfat_2018_02_1052.pdf`.
6. Grushka Ya.I., On Monotonous Separately Continuous Functions. *Applied General Topology* **20**, (2019), no. 1, 75–79; DOI: 10.4995/agt.2019.9817 .
7. Grushka Ya.I., On some properties of Hassani transforms. *Matematychni Studii* **57**, (2022), no. 1, 79–91; DOI: 10.30970/ms.57.1.79-91.
8. Грушка Я.І., Простори операторів з обмеженим проекційним слідом, *Математичний вісник НТШ* **6**, (2009), 73–86; `https://www.researchgate.net/publication/267123133`.
9. Грушка Я.І., Трансляційно інваріантні оператори та операторний аналог сліду за різницевою змінною, *Доповіді Національної академії наук України* (2010), no. 3, 13–18; `http://www.researchgate.net/publication/236120894`.
10. Grushka Ya.I., Translation-invariant Operators and Generalized Difference Variable Trace, *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія "Фізико-математичні науки"* (2010), no. 3, 24–27; `http://www.researchgate.net/publication/236121509`.
11. Грушка Я.І., Мінливі множини та їх властивості, *Доповіді Національної академії наук України* (2012), no. 5, 12–18; `https://www.researchgate.net/publication/236120448`.

12. Грушка Я.І., Примітивні мінливі множини та їх властивості, *Математичний вісник НТШ* **9**, (2012), 52–80; https://www.researchgate.net/publication/236120647.

13. Грушка Я.І., Видимість у мінливих множинах, *Збірник праць Інституту математики НАН України* **9**, (2012), no. 2, 122–145; https://www.researchgate.net/publication/236217050.

14. Грушка Я.І., Алгебраїчні властивості тахіонних перетворень Лоренца, *Збірник праць Інституту математики НАН України* **10**, (2013), no. 2, 138–169; https://www.researchgate.net/publication/257933423.

15. Грушка Я.І., Мінливі множини та їх застосування для побудови кінематики тахіонів, *Збірник праць Інституту математики НАН України* **11**, (2014), no. 1, 192–227; https://www.researchgate.net/publication/268069239.

16. Грушка Я.І., Еволюційні розширення та аналоги операції об'єднання для базових мінливих множин, *Збірник праць Інституту математики НАН України* **11**, (2014), no. 2, 66–99; https://www.researchgate.net/publication/270686197.

17. Грушка Я.І., Критерій існування універсального перетворення координат у кінематичних мінливих множинах, *Буковинський математичний журнал* **2**, (2014), no. 2-3, 59–71; https://www.researchgate.net/publication/270647695.

18. Грушка Я.І., Перетворення координат у кінематичних мінливих множинах, *Доповіді Національної академії наук України* (2015), no. 3, 24–31; DOI: 10.15407/dopovidi2015.03.024.

19. Грушка Я.І., Кінематичні мінливі множини із заданим універсальним перетворенням координат, *Збірник праць Інституту математики НАН України* **12**, (2015), no. 1, 74–118; https://www.researchgate.net/publication/317369478.

20. Грушка Я.І., Теорема про еволюційне розширення для універсальних кінематик, *Буковинський математичний журнал* **3**, (2015), no. 3-4, 67–77; https://www.researchgate.net/publication/317429219.

21. Грушка Я.І., Еволюційні розширення кінематичних множин та універсальних кінематик, *Збірник праць Інституту математики НАН України* **12**, (2015), no. 2, 139–204; https://www.researchgate.net/publication/317428774.

22. Грушка Я.І., Про часонезворотність універсальних кінематик, *Доповіді Національної академії наук України* (2016), no. 7, 14–21; DOI: 10.15407/dopovidi2016.07.014.

23. Грушка Я.І., Про часозворотність тахіонових кінематик, *Збірник праць Інституту математики НАН України* **13**, (2016), no. 2, 125–174; https://www.researchgate.net/publication/317429152.

24. Грушка Я.І., Одностайно-поступальний рух систем відліку в універсальних кінематиках, *Буковинський математичний журнал* **5**, (2017), no. 3-4, 56–70; https://www.researchgate.net/publication/322685969.

25. Грушка Я.І., Критерій одностайної поступальності систем відліку в універсальних кінематиках, *Вісник Черкаського університету: Серія фізико-математичні науки*, (2017), no 1, 122–137; https://www.researchgate.net/publication/326234926.

26. Грушка Я.І., Необхідна і достатня ознака існування точкового часу на орієнтованій множині, *Доповіді НАН України*, (2019), no 8, 9-15, DOI: 10.15407/dopovidi2019.08.009.

27. Грушка Я.І., Критерій трансляційної одностайної поступальності для операторів перетворення координат та систем відліку в універсальних кінематиках, *Буковинський математичний журнал* **9**, (2021), no 1, 128-139, DOI: 10.31861/bmj2021.01.10.

28. Грушка Я.І., Про точкову хронологізацію орієнтованих множин, *Збірник праць Інституту математики НАН України* **19**, (2022), 42-87, https://www.researchgate.net/publication/375640660.

29. Grushka Ya.I., On time irreversibility of generalized Hassani kinematics, *Прикл. проблеми механіки і математики* **20**, (2022), 88-108, DOI: 10.15407/apmm2022.20.88-108.

30. Grushka Ya. I., Notes on Extended Lorentz Transformations for Superluminal Reference Frames, *Progress in Physics* **13**, (2017), no. 4, 200–201.

31. Grushka Ya.I., Logarithmic extension of real numbers and hyperbolic representation of generalized Lorentz transforms, *International Journal of Algebra* **11**, (2017), no. 4, 159–170, DOI: 10.12988/ija.2017.7315.

32. Grushka Ya.I., Theorem of Non-Returning and Time Irreversibility of Tachyon Kinematics, *Progress in Physics* **13**, (2017), no. 4, 218–228.

33. Грушка Я.І., Групи унітарних операторів в просторах псевдооператорів з обмеженим проекційним слідом, *Збірник праць II Всеукраїнського наукового семінару "Українська школа групового аналізу диференціальних рівнянь: здобутки і перспективи"*, Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка, 2012. 13–23; https://www.researchgate.net/publication/236121509.

34. Grushka Ya.I., Abstract concept of changeable set, 2012, Preprint: arXiv:1207.3751v1, 1–54.

35. Grushka Ya.I., Abstract Coordinate Transforms in Kinematic Changeable Sets and their Properties, 2015, Preprint: arXiv:1504.02685v2, 1–31.

36. Grushka Ya.I., Comment on the Article "Extended Linear and Nonlinear Lorentz Transformations and Superluminality", 2015, Preprint: ResearchGate, 1–3; `https://www.researchgate.net/publication/279060370`.

37. Grushka Ya.I., Draft introduction to abstract kinematics. (Version 2.0), 2017, Preprint: ResearchGate, 1–208; DOI: 10.13140/RG.2.2.28964.27521.

38. Grushka Ya.I., On Monotonous Separately Continuous Functions, 2018, Preprint: arXiv:1801.03538v1, 1–5.

39. Грушка Я.І., Простори узагальнених трансляційно інваріантних операторів та операторний аналог сліду за різницевою змінною, *Міжнародна конференція до 100-річчя М.М. Боголюбова та 70-річчя М.І. Нагнибіди: Тези доповідей*, Чернівці, 2009, с. 34–36.

40. Grushka Ya.I., Translation-invariant operators and abstract difference variable trace, *Bogolubov Kyiv Conference "Modern Problems of Theoretical and Mathematical Physics": Book of Abstracts*, Kyiv, 2009, p. 128.

41. Grushka Ya.I., Translation-invariant operators and abstract difference variable trace, *Humbolt-Kolleg for Research Fellows and Awardees "Humboldt Cosmos: Science and Society": Book of Abstracts*, Kyiv, 2009, p. 27–28.

42. Grushka Ya.I., The constancy problem of projection trace, *Humbolt-Kolleg "Mathematics and Life Sciencies": Book of Abstracts*, Kyiv, 2010, p. 36.

43. Грушка Я.І., Проблема сталості проекційного сліду трансляційно інваріантного оператора, *Міжнародна конференція "Сучасні проблеми аналізу": Тези доповідей*, Чернівці, 2010, с. 27.

44. Grushka Ya.I., Changeable sets and mathematical modeling of the evolution of systems, *Workshop on Mathematics for Life Sciences. Book of Abstracts*, Kyiv, 2012, p. 34.

45. Grushka Ya.I., Changeable sets and mathematical modeling of the evolution of systems, *International Conference dedicated to 120-th anniversary of STEFAN BANACH. Abstracts of Reports*, Lviv, 2012, p. 192.

46. Грушка Я.І., Мінливі множини та математичне моделювання еволюції систем, *Четверта Міжнародна конференція молодих математиків з диференціальних*

рівнянь та їх застосувань, присвячена Я.Б. Лопатинському. Тези доповідей, Донецьк, 2012, с. 37–38.

47. Grushka Ya.I., Generalized Lorentz transforms and application of changeable sets for mathematically strict foundation of tachyon kinematics, *2nd EUMLS Conference "Mathematics for Life Sciences". Book of Abstracts*, Kyiv, 2013, p. 11.

48. Грушка Я.І., Узагальнені перетворення Лоренца і застосування теорії мінливих множин для математично строгого обґрунтування тахіонної кінематики, *Крымская международная математическая конференция КММК-2013. Сборник тезисов. Том 1*, Судак, 2013, с. 28.

49. Грушка Я.І., Еволюційні розширення та аналоги операції об'єднання для базових мінливих множин, *П'ятнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука. Матеріали конференції. Том 2*, Київ, 2014, с. 76.

50. Grushka Ya.I., Changeable sets and their application to investigation of abstract kinematics, *Humboldt Kolleg "The Education and Science and their Role in Social and Industrial Progress of Society". Book of Abstracts*, Kyiv, 2014, p. 15.

51. Грушка Я.І., Мінливі множини та їх застосування до дослідження абстрактних кінематик, *IV Міжнародна Ганська конференція. Тези доповідей*, Чернівці, 2014, с. 46–47.

52. Грушка Я.І., Еволюційні розширення та аналоги операції об'єднання для кінематичних мінливих множин, *Міжнародна конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К.М.Фішмана та М.К.Фаґе. Тези доповідей*, Чернівці, 2015, с. 35–36.

53. Grushka Ya.I., Evolutional extensions and analogues of the operation of union for kinematic sets, *3rd EUMLS Conference "Mathematics for Life Sciences". Book of Abstracts*, Rivne, 2015, p. 16.

54. Грушка Я.І., Проблема часонезворотності тахіонових кінематик, *Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Тези доповідей*, Ворохта, 2016, с. 72–73.

55. Grushka Ya.I., Problem of the Irreversibility of Time for Tachyon Kinematics, *International Conference on Differential Equations Dedicated to the 110th Anniversary of Ya.B. Lopatynsky. Book of Abstrfcts*, Lviv, 2016.

56. Grushka Ya.I., Changeable Sets and their Possible Applications, *International conference dedicated to the 120th anniversary of Kazimierz Kuratowski. Abstracts of Reports*, Lviv, 2016.

57. Грушка Я.І., Про перетворення координат у кінематичних мінливих множинах, *Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Тези доповідей*, Ворохта, 2017, с. 64.

58. Грушка Я.І., Мінливі множини та породжені ними математичні об'єкти, *XII-та літня школа "Алгебра, топологія, аналіз". Тези доповідей*, село Колочава, Закарпатська обл., Міжгірський район, 2017, с. 1.

59. Grushka Ya.I., Theorem of non returning for universal kinematics, *International Conference Differential Equations, Mathematical Physics and Applications. Book of Abstracts*, Cherkasy, Ukraine, 2017, p. 119–120.

60. Grushka Ya.I., Changeable sets and their possible applications to the foundations of physics, *3rd conference "Logic, Relativity and Beyond" honoring Hajnal Andreka's 70th birthday*, Alfred Renyi Institute of Mathematics, Budapest, Hungary, 2017, `https://www.renyi.hu//conferences/lrb17/pdf/Grushka.pdf`.

61. Грушка Я.І., Узагальнення теореми Юнга і його застосування в теорії універсальних кінематик, *Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Тези доповідей*, Ворохта, 2018, с. 48–49.

62. Грушка Я.І., Про неперервність нарізно неперервного і одностайно поступального перетворення координат, *Збірник наукових праць "Сучасні проблеми механіки та математики"*, **Т 3**, Львів, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2018, с. 195–196.

63. Грушка, Я.І., Узагальнені перетворення Лоренца та їх застосування для математичного обґрунтування тахіонової кінематики, *Міжнародна наук. конфер. "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях". Матеріали конференції*, Чернівці, 2018, с. 175.

64. Грушка Я.І., Про орієнтовані множини та хронологізацію, *Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Тези доповідей*, Ворохта, 2019, с. 4–5.

65. Grushka Ya.I., Necessary and sufficient condition for the existence of one-point time on an oriented set, *XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky. Abstracts*, Vinnytsia, Ukraine, 2019, p. 39–40.

66. Grushka Ya.I., On the Existence of One-point Time on an Oriented Set, *Winter School in Abstract analysis – WS2020*, Czech Republic, Prague-Hejnice, 2020, `https://www.researchgate.net/publication/339029265`.

67. Грушка Я.І., Траєкторно регулярні та одностайно поступальні оператори перетворення координат, *Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні пробл. теорії ймовірностей та матем. аналізу". Тези доповідей*, Ворохта, 2020.

68. Грушка Я.І., Про часонезворотність узагальнених кінематик Хассані, *Міжнародна наукова конференція "Прикладна математика та інформаційні технології". Тези доповідей*, Чернівці, 2022, с. 162.

69. Грушка Я.І., Теорема про неповернення для універсальних кінематик та деякі її застосування, *Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики – 2023": збірник наукових праць.* Львів, 2023, с. 407–408.

70. Grushka Ya.I., On the Existence of Internal Time on an Oriented Set, *18th Triennial Conference of the International Society for the Study of Time (ISST)*, Japan, Yamaguchi, 2023, `http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.19916.59529`.

71. Грушка Я.І., Необхідна і достатня ознака існування внутрішнього часу на орієнтованій множині, *Міжнародна наукова конференція "Математика та інформаційні технології". Тези доповідей*, Чернівці, 2023, с. 182–184.

ЗМІСТ

Перелік умовних позначень **20**

Вступ **32**

Розділ 1
Основи теорії мінливих множин **44**

1.1. Вступні зауваження та огляд літератури 44
1.2. Орієнтовані множини та їхні властивості 48
1.3. Час на орієнтованих множинах. Примітивні мінливі множини. 52
1.4. Точковий та монотонний час. Теореми про хронологізацію 53
1.5. Час і одночасність. Внутрішній час 59
1.6. Система позначень для примітивних мінливих множин 69
1.7. Системи абстрактних траєкторій і примітивні мінливі множини, породжені ними 70
1.8. Елементарно-часові стани та базові мінливі множини 71
1.8.1 Елементарно-часові стани примітивних мінливих множин та їхні властивості. 71
1.8.2 База елементарних процесів та базові мінливі множини. 73
1.8.3 Про систему позначень для базових мінливих множин. 75
1.8.4 Приклади базових мінливих множин. 76
1.8.5 Про інший спосіб визначення базових мінливих множин. 77
1.9. Ланцюги у множині елементарно-часових станів та лінії долі базових мінливих множин 80
1.10. Мінливі системи і процеси 88
1.11. Аналоги деяких теоретико-множинних операцій для базових мінливих множин 90
1.11.1 Мотивація. 90
1.11.2 Означення і властивості еволюційного розширення та еволюційного об'єднання. 91
1.11.3 Про існування еволюційних розширень базових мінливих множин. 104
1.12. Багатоликість та уніфікація сприймання. Загальне означення мінливої множини 106
1.12.1 Мотивація. Загальне означення мінливої множини. 106
1.12.2 Зауваження про термінологію і позначення. 108
1.12.3 Елементарні властивості мінливих множин. 109
1.13. Приклади мінливих множин 111

1.13.1 Мінлива множина, породжена системами базових мінливих множин та відображень. 111
1.13.2 Мінливі множини, породжені мультиобразом базової мінливої множини. 112
1.13.3 Інші приклади мінливих множин. 117
1.14. Видимість у мінливих множинах 119
1.14.1 Градації видимості. 119
1.14.2 Класи видимості. 126
1.14.3 Чітко видимі мінливі множини. 129

Розділ 2
Кінематичні мінливі множини та їх властивості 134
2.1. Вступ до розділу 134
2.2. Мінливі множини і кінематика 135
2.2.1 Координатні простори. 135
2.2.2 Кінематичні мінливі множини. 136
2.2.3 Система позначень для базових кінематичних множин. 136
2.2.4 Система позначень для кінематичних множин. 137
2.3. Перетворення координат у кінематичних множинах 140
2.4. Теорема про мультиобраз для кінематичних множин 146
2.5. Кінематичні множини, породжені спеціальною теорією відносності та її узагальненнями 150
2.6. Кінематичні множини, що не допускають універсального перетворення координат 153

Розділ 3
Кінематичні мінливі множини із заданим універсальним перетворенням координат 164
3.1. Вступ до розділу 164
3.2. Означення і основні властивості універсальних кінематичних множин 164
3.2.1 Означення універсальних кінематик 164
3.2.2 Система позначень для універсальних кінематик 165
База еволюції 165
Позначення, індуковані з теорії кінематичних множин 165
Власні позначення для універсальних кінематик 166
Скорочені варіанти позначень 166
3.2.3 Деякі базові елементарні властивості універсальних кінематик . 166
3.3. Теорема про мультиобраз для універсальних кінематик 168
3.4. Універсальні кінематики, породжені спеціальною теорією відносності та її узагальненнями 175

3.4.1 Універсальні кінематики, пов'язані з узагальненими перетвореннями Лоренца в сенсі E. Recami, В. Ольховського та R. Goldoni 175
3.4.2 Зауваження про деякі інші тахіонові кінематики 179
3.5. Про еквівалентність універсальних кінематик відносно перетворення координат 179
3.5.1 Зауваження про системи відліку та їхні індекси. 179
3.5.2 Еквівалентність універсальних кінематик відносно перетворення координат. 180
3.6. Еволюційні розширення універсальних кінематик та їхні властивості . 182
3.6.1 Еволюційні розширення базових кінематичних множин. 182
3.6.2 Еволюційні розширення кінематичних множин. 185
3.6.3 Еволюційні розширення універсальних кінематик 189
3.7. Еволюційне об'єднання універсальних кінематик 193
3.7.1 Означення еволюційного об'єднання. 193
3.7.2 Диз'юнктне еволюційне об'єднання універсальних кінематик. . 194
3.7.3 Про еволюційно видимі універсальні кінематики та їхнє диз'юнктне еволюційне об'єднання. 208
3.8. Теорема про еволюційне розширення для універсальних кінематик . . . 212
3.9. Про часонезворотність універсальних кінематик 212
3.9.1 Вступні зауваження. 212
3.9.2 Елементарно-часові стани і мінливі системи чітко видимих мінливих та кінематичних множин. 213
3.9.3 Ланцюгові шляхи універсальних кінематик і означення часонезворотності. 217
3.9.4 Про напрямок часу між системами відліку універсальних кінематик. 219
3.9.5 Теорема про неповернення. 226
3.9.6 Безумовна часонезворотність. Підсилений варіант теореми про неповернення. 231
3.9.7 Про фізичну інтерпретацію теореми про неповернення. 233
3.9.8 Достатня ознака умовної часозворотності. 234
3.9.9 Проблема часонезворотності і тахіонові кінематики. 245
3.9.10 Деякі висновки. 252
3.10. Одностайно-поступальні системи відліку в універсальних кінематиках 253
3.10.1 Вступні зауваження 253
3.10.2 Різні варіанти означень одностайно-поступальних систем відліку. 253
Векторні універсальні кінематики та їх властивості. 253

Перетворення координат в універсальних кінематиках та оператори перетворення координат. 254
Траєкторії для систем відліку в універсальних кінематиках. . . 256
Означення одностайно-поступальних систем відліку в універсальних кінематиках 257
Трансляційно-одностайні системи відліку в універсальних кінематиках. Співвідношення між одностайністю і трансляційною одностайністю. 262
3.10.3 Одностайна поступальність і часознаковизначеність систем відліку. 272
Часознаковизначеність зумовлює траєкторну регулярність. . . . 272
Допоміжні поняття і факти з теорії лінійно упорядкованих топологічних просторів. 275
Деякі відомості з теорії нарізно неперервних відображень. . . . 276
Умови, при яких траєкторна регулярність зумовлює часознаковизначеність. 278
3.10.4 Критерій одностайної поступальності систем відліку в універсальних кінематиках. 281
Одностайна поступальність і оператори перетворення координат. 281
Критерії одностайної поступальності для операторів перетворень координат та систем відліку. 282

Розділ 4
Простори узагальнених операторів з обмеженим проекційним слідом 289
4.1. Вступні зауваження 289
4.2. Простір лінійних неперервних операторів з обмеженим проекційним слідом над гільбертовим простором та його неповнота 290
4.2.1 Трансляційно інваріантні оператори. Теорема про слід трансляційно інваріантного оператора. 290
4.2.2 Слід за різницевою змінною. Простір операторів з обмеженим проекційним слідом. 293
4.2.3 Висновки і зауваження 299
4.3. Простір узагальнених операторів з обмеженим проекційним слідом . . 300
4.3.1 Мотивація 300
4.3.2 “Позитивний” простір $\mathfrak{H}^{+}_{P,\mu}$. 301
4.3.3 “Негативний” простір $\mathfrak{H}^{-}_{P,\mu}$. 302
4.3.4 Простір $\mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^{-}_{P,\mu}\right)$. Продовження операторів з простору $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ в $\mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^{-}_{P,\mu}\right)$. 305

4.3.5 Продовження спектральної міри $P(\Delta)$. 306
4.3.6 Простір $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ як розширення простору $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$. 308
4.3.7 Узагальнені проекційні сліди операторів з простору $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ . . 311
4.4. Групи унітарних операторів в просторах псевдооператорів з обмеженим проекційним слідом 315
4.4.1 Вступні зауваження. 315
4.4.2 Дія унітарних операторів в позитивних і негативних просторах, породжених спектральною мірою. 315
4.4.3 Простори псевдооператорів, породжені спектральними мірами. 318
4.4.4 Унітарні перетворення псевдооператорів. 321

Висновки **324**

Додаток А
Узагальнені перетворення Лоренца в сенсі E. Recami, В. Ольховського та R. Goldoni для гільбертового простору **328**
А.1. Означення і класифікація узагальнених перетворень Лоренца над гільбертовим простором 329
А.1.1 Абстрактні перетворення координат в просторі Мінковського над гільбертовим простором та їхні властивості. 329
А.1.2 Загальна група Лоренца в гільбертовому просторі 333
А.1.3 Узагальнені перетворення Лоренца для скінченних швидкостей 337
А.1.4 Узагальнені перетворення Лоренца для нескінченних швидкостей 347
А.1.5 Загальне зображення тахіонних перетворень Лоренца 350
А.1.6 Деякі підкласи узагальнених перетворень Лоренца 354
А.1.7 Логарифмічне розширення множини дійсних чисел і гіперболічне зображення узагальнених перетворень Лоренца 361
А.2. Алгебраїчні властивості узагальнених перетворень Лоренца 367
А.2.1 Композиція узагальнених перетворень Лоренца з паралельними напрямками руху 369
А.2.2 Композиція узагальнених перетворень Лоренца з перпендикулярними напрямками руху 376
А.2.3 Деякі зауваження щодо перетворень Галілея в гільбертовому просторі 385

Додаток Б
Побудова тахіонових кінематик в сенсі M. Hassani **389**

Додаток В
Доведення теореми про еволюційне розширення **392**

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

Позначення	**Пояснення**	**сторінки**
$\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$	множина всіх елементарних станів $\mathcal{M}$,	49,
	де $\mathcal{M}$ – орієнтована множина	▷ 49,
	або примітивна мінлива множина	▷ 69,
	або базова мінлива множина	▷ 75,
	або система відліку	▷ 108,
	або базова кінематична множина	▷ 136
$\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}$, $\leftarrow$	напрямне відношення змін $\mathcal{M}$,	49,
	де $\mathcal{M}$ – орієнтована множина	▷ 49,
	або примітивна мінлива множина	▷ 69,
	або базова мінлива множина	▷ 75,
	або система відліку	▷ 108,
	або базова кінематична множина	▷ 136
$\mathsf{diag}(M)$	$\mathsf{diag}(M) = \{(x,x) \mid x \in M\}$	54
$\overline{k,n}$	$\overline{k,n} = \{k,\ldots,n\}\ \ (k,n \in \mathbb{Z},\ k \leq n)$	55
Y_ψ	множина одночасних станів, породжена часом ψ	59
$\mathcal{H}_1 \upuparrows \mathcal{H}_2$	еквівалентність хронологізацій $\mathcal{H}_1$ і $\mathcal{H}_2$ заданої орієнтованої множини	61
$U^{[-1]}$	відображення, обернене до відображення U	111, 114
$\mathbf{card}(M)$	потужність множини M	62, 321
$B \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}(+)\, A$, $B \leftarrow(+)\, A$	позначення для монотонно послідовних множин	62
$B \overset{\mathcal{Q}}{\underset{\mathcal{M}}{\twoheadleftarrow}}(+)\, A$, $B \overset{\mathcal{Q}}{\twoheadleftarrow}(+)\, A$	позначення для транзитивно монотонно послідовних множин	62
$\mathbf{Tm}(\mathcal{P})$	множина моментів часу $\mathcal{P}$,	69,
	де $\mathcal{P}$ — примітивна мінлива множина	▷ 69,
	або базова мінлива множина	▷ 75,
	або система відліку	▷ 108,
	або базова кінематична множина	▷ 136

$\leq_{\mathcal{P}}, <_{\mathcal{P}}, \geq_{\mathcal{P}}, >_{\mathcal{P}}$	різні відношення часового порядку на $\mathcal{P}$,	69,
	де $\mathcal{P}$ — примітивна мінлива множина	▷ 69,
	або базова мінлива множина	▷ 75,
	або система відліку	▷ 108,
	або базова кінематична множина	▷ 136
$\psi_{\mathcal{P}}$	час на $\mathcal{P}$,	69,
	де $\mathcal{P}$ — примітивна мінлива множина	▷ 69,
	або базова мінлива множина	▷ 75,
	або система відліку	▷ 108
$\mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathcal{P})$	$\mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathcal{P}) = (\mathbf{Tm}(\mathcal{P}), \leq_{\mathcal{P}})$,	69,
	де $\mathcal{P}$ — примітивна мінлива множина	▷ 69,
	або базова мінлива множина	▷ 75,
	або система відліку	▷ 108,
	або базова кінематична множина	▷ 136
$\mathfrak{D}(r)$	область визначення відображення r	70
$\mathfrak{R}(r)$	область значень відображення r	70
$\times$	знак декартового добутку множин	70
$\mathcal{A}tp(\mathbb{T}, \mathcal{R})$	примітивна мінлива множина, породжена системою абстрактних траєкторій $\mathcal{R}$	71
$\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$	множина елементарно-часових станів $\mathcal{P}$,	71,
	де $\mathcal{P}$ — примітивна мінлива множина	▷ 71,
	або базова мінлива множина	▷ 75,
	або система відліку	▷ 108,
	або базова кінематична множина	▷ 136,
	або чв-об'єкт	▷ 215
$\mathsf{bs}\,(\omega)$	другий елемент упорядкованої пари	72
$\mathsf{tm}\,(\omega)$	перший елемент упорядкованої пари	72
$\omega_2 \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow} (\mathrm{f})\,\omega_1$ або $\omega_2 \leftarrow (\mathrm{f})\,\omega_1$	позначення для формально послідовних елементарно-часових станів	72
$\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}}, \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\leftarrow}, \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}, \leftarrow$	база елементарних процесів $\mathcal{B}$,	75,
	де $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина	▷ 75,
	або система відліку	▷ 108,
	або базова кінематична множина	▷ 136
$\mathcal{A}t(\mathbb{T}, \mathcal{R})$	базова мінлива множина, породжена системою абстрактних траєкторій $\mathcal{R}$	77
$\mathbb{L}l(\mathcal{B})$	множина всіх ланцюгів у множині	80,

	елементарно-часових станів $\mathcal{B}$,	
	де $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина	$\triangleright$ 80,
	або система відліку	$\triangleright$ 108,
	або базова кінематична множина	$\triangleright$ 136
$\mathbb{L}d(\mathcal{B})$	множина всіх ліній долі $\mathcal{B}$,	80,
	де $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина	$\triangleright$ 80,
	або система відліку	$\triangleright$ 108,
	або базова кінематична множина	$\triangleright$ 136
$\subsetneq$	знак еволюційного включення	
	базових мінливих множин	91,
	або базових кінематичних множин	$\triangleright$ 182,
	або кінематичних мінливих множин	$\triangleright$ 186,
	або універсальних кінематик	$\triangleright$ 189
$\sqsubsetneq$	знак супереволюційного включення	
	базових мінливих множин	91
	або базових кінематичних множин	$\triangleright$ 183,
	або кінематичних мінливих множин	$\triangleright$ 186,
	або універсальних кінематик	$\triangleright$ 189
$\mathbb{R}_{ord}$	$\mathbb{R}_{ord} = (\mathbb{R}, \leq)$	92
$M^{\times 2}$	декартовий квадрат множини M	92
$\overleftarrow{\bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}}} \mathcal{B}_\alpha$	еволюційне об'єднання сім'ї	
	базових мінливих множин	95,
	або універсальних кінематик	$\triangleright$ 194
$\overleftarrow{\bigcup\limits_{k=1}^{n}} \mathcal{B}_k$,	еволюційне об'єднання скінченної сім'ї	
$\mathcal{B}_1 \overleftarrow{\cup} \cdots \overleftarrow{\cup} \mathcal{B}_n$	базових мінливих множин	96,
	або універсальних кінематик	$\triangleright$ 194
$\overleftarrow{\bigvee\limits_{\alpha\in\mathcal{A}}} \mathcal{B}_\alpha$	супереволюційне об'єднання сім'ї	100
	базових мінливих множин	
$\overleftarrow{\bigvee\limits_{k=1}^{n}} \mathcal{B}_k$,	супереволюційне об'єднання скінченної	100
$\mathcal{B}_1 \overleftarrow{\vee} \cdots \overleftarrow{\vee} \mathcal{B}_n$	сім'ї базових мінливих множин	
$\mathcal{I}nd\,(\mathcal{Z})$	множина індексів $\mathcal{Z}$,	108
	де $\mathcal{Z}$ — мінлива множина	108,
	або кінематична мінлива множина	$\triangleright$ 137,
	або універсальна кінематика	$\triangleright$ 165
$\mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$	множина всіх систем відліку $\mathcal{Z}$,	108

	де $\mathcal{Z}$ — мінлива множина	108,
	або кінематична мінлива множина	▷ 137,
	або універсальна кінематика	▷ 165
$\mathtt{ind}\,(\mathfrak{l})$	індекс системи відліку $\mathfrak{l}$	108
$\mathfrak{l}\hat{}$	базова мінлива множина, породжена системою відліку $\mathfrak{l}$	108
$\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{Z} \rangle$, $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle$	відображення уніфікації між системами відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}$ в $\mathcal{Z}$,	109
	де $\mathcal{Z}$ — мінлива множина	109,
	або кінематична мінлива множина	▷ 137,
	або універсальна кінематика	▷ 166
$\mathcal{Z}\mathsf{pv}\left(\overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{W}\right)$	мінлива множина, породжена системою базових мінливих множин $\overleftarrow{\mathcal{B}}$ та системою відображень $\overleftarrow{W}$	111
$U\,[\mathcal{B}, \mathbb{T}]$	образ базової мінливої множини $\mathcal{B}$ відносно трансформуючого відображення U і часової шкали $\mathbb{T}$	113
$U\,[\mathcal{B}]$	$U\,[\mathcal{B}] = U\,[\mathcal{B}, \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})]$	113
$\mathcal{Z}\mathsf{im}\,[\mathfrak{P}, \mathcal{B}]$	еволюційний мультиобраз базової мінливої множини $\mathcal{B}$	115
$\mathcal{Z}\mathsf{im}\,(\mathbb{U}, \mathcal{B})$	багатоликий образ базової мінливої множини $\mathcal{B}$	117
$\mathcal{Z}\mathsf{nv}\left(\overleftarrow{\mathcal{B}}\right)$	повністю невидима мінлива множина, породжена системою базових мінливих множин $\overleftarrow{\mathcal{B}}$	118
$\mathfrak{l} \succ \mathfrak{m}\,(\mathcal{Z})$, $\mathfrak{l} \succ \mathfrak{m}$	система відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ є видимою з системи відліку $\mathfrak{m}$	121
$\mathfrak{l} \succ! \mathfrak{m}\,(\mathcal{Z})$ $\mathfrak{l} \succ! \mathfrak{m}$	система відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ є нормально видимою з системи відліку $\mathfrak{m}$	121
$\mathfrak{l} \succ!! \mathfrak{m}\,(\mathcal{Z})$, $\mathfrak{l} \succ!! \mathfrak{m}$	система відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ є чітко видимою з системи відліку $\mathfrak{m}$	121
$\mathfrak{l} \equiv! \mathfrak{m}\,(\mathcal{Z})$, $\mathfrak{l} \equiv! \mathfrak{m}$	системи відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ еквівалентні відносно чіткої видимості	128
$\mathfrak{l} \prec\!\succ \mathfrak{m}\,(\mathcal{Z})$, $\mathfrak{l} \prec\!\succ \mathfrak{m}$	системи відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ безпосередньо зв'язані видимістю	128
$\mathfrak{l} \widehat{\equiv} \mathfrak{m}\,(\mathcal{Z})$, $\mathfrak{l} \widehat{\equiv} \mathfrak{m}$	системи відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ зв'язані видимістю	128

$\langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \, \mathcal{Z} \rangle$,	відображення чіткої уніфікації	132
$\langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle$	між системами відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}$ в $\mathcal{Z}$,	
	де $\mathcal{Z}$ — чітко видима мінлива множина	132,
	або кінематична мінлива множина	▷ 138,
	або універсальна кінематика	▷ 166
$\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$	множина значень координат $\mathfrak{Q}$,	135
	де $\mathfrak{Q}$ — координатний простір	135,
	або базова кінематична множина	▷ 137
$\mathcal{T}p(\mathfrak{Q})$	топологія $\mathfrak{Q}$,	135
	де $\mathfrak{Q}$ — координатний простір	135,
	або базова кінематична множина	▷ 137
$\mathbb{L}s(\mathfrak{Q})$	лінійна структура $\mathfrak{Q}$,	135
	де $\mathfrak{Q}$ — координатний простір	135,
	або базова кінематична множина	▷ 137
$\big(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\big)_{\mathfrak{Q}}$,	лінійні алгебраїчні операції на $\mathfrak{Q}$,	136
$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$	де $\mathfrak{Q}$ — координатний простір	136,
	або базова кінематична множина	▷ 137
$\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$	база евоюції базової	137
	кінематичної множини $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$	
$\mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$	база геометрії базової	137
	кінематичної множини $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$	
$\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}(x)$, $\mathfrak{q}(x)$	координата елементарного стану x	137
	в базовій кінематичній множині $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$	
$\mathbb{BE}\,(\mathfrak{C})$	база еволюції $\mathfrak{C}$,	137
	де $\mathfrak{C}$ — кінематична множина	137,
	або універсальна кінематика	▷ 165
$\mathfrak{C} \restriction \mathfrak{l}$	образ $\mathfrak{C}$ в системі відліку $\mathfrak{l}$,	138
	де $\mathfrak{C}$ — кінематична множина	138,
	або універсальна кінематика	▷ 166
$\mathbf{Zk}(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C})$, $\mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$	множина значень координат системи	138
	відліку $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{C}$,	
	де $\mathfrak{C}$ — кінематична множина	138,
	або універсальна кінематика	▷ 165
$\mathcal{T}p(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C})$, $\mathcal{T}p(\mathfrak{l})$	топологія системи відліку $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{C}$,	138
	де $\mathfrak{C}$ — кінематична множина	138,
	або універсальна кінематика	▷ 165
$\mathbb{L}s(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C})$, $\mathbb{L}s(\mathfrak{l})$	лінійна структура системи відліку $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{C}$,	138

	де $\mathfrak{C}$ — кінематична множина	138,
	або універсальна кінематика	▷ 165
$(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)_{\mathfrak{l},\mathfrak{C}}$,	лінійні алгебраїчні операції відносно	138
$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$	системи відліку $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{C}$,	
	де $\mathfrak{C}$ — кінематична множина	138,
	або універсальна кінематика	▷ 165
$\mathsf{BE}(\mathfrak{l})$	база евоюції системи відліку $\mathfrak{l}$	138
$\mathsf{BG}(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C})$, $\mathsf{BG}(\mathfrak{l})$	база геометрії системи відліку $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{C}$,	138
	де $\mathfrak{C}$ — кінематична множина	138,
	або універсальна кінематика	▷ 165
$\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\,(x;\, \mathfrak{C})$, $\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\,(x)$, $\mathfrak{q}(x)$	координата елементарного стану x	138
	відносно системи відліку $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{C}$,	
	де $\mathfrak{C}$ — кінематична множина	138,
	або універсальна кінематика	▷ 166
$\mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$	множина Мінковського базової	140
	кінематичної множини $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$	
$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}} \rangle}(\omega)$	координати Мінковського	140
	елементарно-часового стану ω	
	в базовій кінематичній множині $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$	
$\mathbb{M}k(\mathfrak{l};\mathfrak{C})$, $\mathbb{M}k(\mathfrak{l})$	множина Мінковського	140
	системи відліку $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{C}$,	
	де $\mathfrak{C}$ — кінематична множина	140,
	або універсальна кінематика	▷ 166
$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega;\mathfrak{C})$, $\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega)$	координати Мінковського	140
	елементарно-часового стану ω	
	в системі відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$,	
	де $\mathfrak{C}$ — кінематична множина	140,
	або універсальна кінематика	▷ 166
$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle}(\omega;\mathfrak{C})$,	реальне перетворення координат	140
$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle}(\omega)$	з системи відліку $\mathfrak{l}$ в систему відліку $\mathfrak{m}$	
	відносно $\mathfrak{C}$,	
	де $\mathfrak{C}$ — кінематична множина	140,
	або універсальна кінематика	▷ 166
$\mathfrak{trj}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}\,[A]$	траєкторія мінливої системи A	143
	базової кінематичної множини $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$	
$\mathbb{T}\mathbf{rj}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$	загальна траєкторія	144
	базової кінематичної множини $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$	

$\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$	доповнення загальної траєкторії базової кінематичної множини $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$	144
$\mathfrak{tr}\mathfrak{j}_{\mathfrak{l}}\left[A;\,\mathfrak{C}\right]$, $\mathfrak{tr}\mathfrak{j}_{\mathfrak{l}}\left[A\right]$	траєкторія мінливої системи A в системі відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$,	144
	де $\mathfrak{C}$ — кінематична множина	144,
	або універсальна кінематика	▷ 212
$\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C})$, $\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l})$	загальна траєкторія системи відліку $\mathfrak{l}$ в кінематичній множині $\mathfrak{C}$	144
$\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C})$, $\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{l})$	доповнення загальної траєкторії системи відліку $\mathfrak{l}$ в кінематичній множині $\mathfrak{C}$	144
$\mathfrak{Kim}\left[\mathfrak{P},\mathcal{B}\right]$	кінематичний мультиобраз базової мінливої множини $\mathcal{B}$	148
$\mathfrak{Kim}\left(\mathbb{U},\mathcal{B},\mathfrak{Q}\right)$	багатоликий кінематичний образ базової мінливої множини $\mathcal{B}$	149
$\mathcal{L}\left(\mathfrak{H}\right)$	простір лінійних неперервних операторів над гільбертовим простором $\mathfrak{H}$	150, 290
$\mathcal{L}^{\times}\left(\mathfrak{H}\right)$	простір операторів афінних перетворень гільбертового простору $\mathfrak{H}$	150
$\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}\right)$	простір Мінковського над $\mathfrak{H}$	150, 329
$\mathbf{Pk}\left(\mathfrak{H}\right)$	множина операторів афінного перетворення координат над гільбертовим простором $\mathfrak{H}$	150
$\mathbf{W}_{\lambda,c}\left[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}\right]$	узагальнені перетворення Лоренца-Пуанкаре	150, 385
$\mathfrak{PT}\left(\mathfrak{H},c\right), \mathfrak{PT}_{+}\left(\mathfrak{H},c\right)$, $\mathfrak{P}\left(\mathfrak{H},c\right), \mathfrak{P}_{+}\left(\mathfrak{H},c\right)$	різні класи узагальнених перетворень Лоренца-Пуанкаре над гільбертовим простором $\mathfrak{H}$	151
$\mathfrak{Kim}\left(\mathbb{S},\mathcal{B};\,\mathfrak{H}\right)$	багатоликий кінематичний образ базової мінливої множини $\mathcal{B}$ відносно класу афінних перетворень координат	152
$\mathfrak{KPT}_{0}\left(\mathfrak{H},\mathcal{B},c\right)$, $\mathfrak{KPT}\left(\mathfrak{H},\mathcal{B},c\right)$, $\mathfrak{KP}_{0}\left(\mathfrak{H},\mathcal{B},c\right)$, $\mathfrak{KP}\left(\mathfrak{H},\mathcal{B},c\right)$	кінематичні множини, породжені різними класами узагальнених перетворень Лоренца-Пуанкаре	152
$\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}$	.....	153
$\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}\right)$	простір Мінковського із заданою множиною заборонених швидкостей	153

$\mathbf{W}_{\lambda;\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]$	аналоги перетворень Лоренца-Пуанкаре для простору $\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}\right)$	154
$\mathfrak{PT}(\mathfrak{H};\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}})$, $\mathfrak{PT}_{+}(\mathfrak{H};\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}})$	певні класи перетворень, задані на $\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}\right)$	155
$\mathfrak{KPT}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B};\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}})$, $\mathfrak{KPT}(\mathfrak{H},\mathcal{B};\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}})$	кінематичні множини, породжені класами перетворень $\mathfrak{PT}(\mathfrak{H};\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}})$ та $\mathfrak{PT}_{+}(\mathfrak{H};\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}})$	155
$[\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l},\mathcal{F}]$, $[\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}]$	універсальне перетворення координат між системами відліку $\mathfrak{l}$ і $\mathfrak{m}$ універсальної кінематики $\mathcal{F}$	166
$\mathfrak{Ku}\left[\mathfrak{P},\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right]$	універсальний кінематичний мультиобраз базової кінематичної множини $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$ відносно мультипроектора $\mathfrak{P}$	173
$\mathfrak{Ku}(\mathbb{U},\mathcal{B},\mathfrak{Q})$	універсальний кінематичний мультиобраз базової мінливої множини $\mathcal{B}$ відносно трансформуючої множини бієкцій $\mathbb{U}$	176
$\mathfrak{Ku}(\mathbb{S},\mathcal{B};\,\mathfrak{H})$	універсальний кінематичний мультиобраз базової мінливої множини $\mathcal{B}$ відносно деякого класу операторів $\mathbb{S}\subseteq\mathbf{Pk}(\mathfrak{H})$	177
$\mathfrak{UPT}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$, $\mathfrak{UPT}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$, $\mathfrak{UP}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$, $\mathfrak{UP}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$	універсальні кінематики, породжені різними класами узагальнених перетворень Лоренца-Пуанкаре	178
$\mathbf{lk}_{\alpha}(\mathcal{Y})$	система відліку з індексом α	179
$\mathcal{F}_1\,[\equiv]\,\mathcal{F}_2$	універсальні кінематики $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ еквівалентні відносно перетворення координат	180
$\mathfrak{l}\mid_{\mathcal{F}_1}$	система відліку, споріднена з системою відліку $\mathfrak{l}\in\mathcal{L}k(\mathcal{F})$, в в універсальній кінематиці (або кінематичній чи мінливій множині) $\mathcal{F}_1$	195
$\mathcal{F}_1\overset{\leftarrow}{\sqcup}\mathcal{F}_2$	диз'юнктне еволюційне об'єднання універсальних кінематик $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$	201
$\omega^{\{\mathfrak{l},\mathcal{Z}\}}$, $\omega^{\{\mathfrak{l}\}}$	елементарно-часовий стан чв-об'єкта $\mathcal{Z}$, породжений елементарним станом ω у системі відліку $\mathfrak{l}$	213
$\hat{\omega}_{\{\mathfrak{l},\mathcal{Z}\}}$, $\hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}\}}$	образ елементарно-часового стану $\hat{\omega}\in\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$ у системі відліку $\mathfrak{l}\in\mathcal{L}k(\mathcal{Z})$	215
$\widehat{\mathbf{A}}_{\{\mathfrak{l},\mathcal{Z}\}}$, $\widehat{\mathbf{A}}_{\{\mathfrak{l}\}}$	образ загальної мінливої системи	216

	$\widehat{\mathbf{A}} \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$ у системі відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$	
$A^{\{\mathfrak{l},\mathcal{Z}\}}$, $A^{\{\mathfrak{l}\}}$	загальна мінлива система, породжена мінливою системою $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$	216
$\mathsf{po}\,(\mathcal{A},\mathcal{Z})$, $\mathsf{po}\,(\mathcal{A})$	початковий елемент ланцюгового шляху $\mathcal{A}$ чв-об'єкта $\mathcal{Z}$	219
$\mathsf{ki}\,(\mathcal{A},\mathcal{Z})$, $\mathsf{ki}\,(\mathcal{A})$	кінцевий елемент ланцюгового шляху $\mathcal{A}$ чв-об'єкта $\mathcal{Z}$	219
$\mathfrak{m} \Uparrow_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$, $\mathfrak{m} \Uparrow^{+}_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$ $\mathfrak{m} \Downarrow_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$, $\mathfrak{m} \Downarrow^{-}_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$	позначення для різних напрямків часу між системами відліку універсальних кінематик	219
$\mathbb{P}\mathbf{k}\,(\mathbb{T}_1,\mathfrak{Q}_1;\mathbb{T}_2,\mathfrak{Q}_2)$	множина всіх операторів перетворення координат з $(\mathbb{T}_1,\mathfrak{Q}_1)$ в $(\mathbb{T}_2,\mathfrak{Q}_2)$	254
$\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m},\mathcal{F}]}\,(\mathrm{x})$, $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}\,(\mathrm{x})$	траєкторія точки $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{m})$ при русі системи відліку $\mathfrak{m}$ відносно системи відліку $\mathfrak{l}$ у кінематиці $\mathcal{F}$	256
$A^{\langle+\mathrm{x};\,\mathfrak{l}\rangle}$, $A^{\langle+\mathrm{x}\rangle}$	паралельний зсув множини $A \subseteq \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l})$ на вектор $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l})$ в системі відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ універсальної кінематики $\mathcal{F}$	257
$A \parallel^{\mathcal{F}}_{\mathfrak{l}} B$, $A \parallel_{\mathfrak{l}} B$	множина $A \subseteq \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l})$ паралельна множині $B \subseteq \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l})$ відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$	258
$\widehat{\mathbb{R}^d}$ $(d \in \mathbb{N})$	координатний простір, породжений $\mathbb{R}^d$	259
$\widehat{\mathbb{R}}$	$\widehat{\mathbb{R}} := \widehat{\mathbb{R}^1}$	259
$\mathfrak{l} \Updownarrow^{\pm}_{\mathcal{F}} \mathfrak{m}$	система відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ є часознаковизначеною відносно системи відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ в універсальній кінематиці $\mathcal{F}$	272
$\mathfrak{Tpi}\,[\mathbb{T}]$	внутрішня порядкова топологія лінійно упорядкованої множини $\mathbb{T}$	275
$\mathfrak{Tpi}\,(\mathfrak{l})$	$\mathfrak{Tpi}\,(\mathfrak{l}) := \mathfrak{Tpi}\,[\mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathfrak{l})]$	275
$\mathbf{C}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$	множина всіх неперервних відображень з з $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$, де $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ — топологічні простори	
$\boldsymbol{f}^x(y)$, $\boldsymbol{f}_y(x)$	$\boldsymbol{f}^x(y) := \boldsymbol{f}_y(x) := \boldsymbol{f}(x,y)$	276
$\mathbf{CC}\,(\mathcal{X}\times\mathcal{Y},\mathcal{Z})$	множина всіх нарізно неперервних відображень $\boldsymbol{f} : \mathcal{X}\times\mathcal{Y} \mapsto \mathcal{Z}$	277
$\mathbf{trj}_{\mathcal{U}}\,(\mathrm{x})$	траєкторія точки x відносно оператора перетворення координат $\mathcal{U}$	281
$\mathbf{A}^{\langle+\mathrm{x};\,\mathfrak{Q}\rangle}$	паралельний зсув множини $\mathbf{A}$ відносно координатного простору $\mathfrak{Q}$	281

$\mathbf{A} \parallel_{(\mathbb{T};\mathfrak{Q})} \mathbf{B}$	множина $\mathbf{A}$ $(\mathbb{T}, \mathfrak{Q})$-паралельна множині $\mathbf{B}$	281
$\mathcal{L}(\mathfrak{H})$	простір лінійних неперервних операторів	290
$\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$	простір операторів з обмеженим слідом над гільбертовим простором $\mathfrak{H}$	290
$\mathbf{Tr}(A)$	позначати *слід* оператора A.	290
$\sigma(B)$, $\sigma_p(B)$	спектр та точковий спектр оператора B	290
$E_B(\cdot)$	спектральна міра оператора B	290
$\mathfrak{B}(\mathbb{R})$	σ-алгебра борелівських підмножин числової прямої $\mathbb{R}$	290
$\mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$	підкільце σ-алгебри $\mathcal{R}$, породжене множинами скінченної міри μ	294
$\lVert A \rVert_{P,\mu}$	норма проекційного сліду для оператора A	294, 311
$\mathfrak{Tb}_{P(\cdot),\mu}(\mathfrak{H})$	Простір операторів з обмеженим проекційним слідом	294
$\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$	"позитивний" простір над гільбертовим простором $\mathfrak{H}$, породжений спектральною мірою	301
$x_n \underset{n\to\infty}{\overset{(P,\mu)^+}{\to}} x$	збіжність в "позитивному" просторі	301
$\mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^+_{P,\mu}\right)$	простір лінійних неперервних операторів над простором $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$	302
$\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$	"негативний" простір над гільбертовим простором $\mathfrak{H}$, породжений $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$	302
$l_n \underset{n\to\infty}{\overset{(P,\mu)^-}{\to}} l$	збіжність в "негативному" просторі	303
$\mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^-_{P,\mu}\right)$	простір лінійних неперервних операторів над простором $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$	305
A_-	продовження оператора $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ на простір $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$	305
A_+	звуження оператора $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ на простір $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$	305
$\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$	простір лінійних неперервних операторів, що діють з простору $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ в простір $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$	308
$A_n \underset{n\to\infty}{\overset{(P,\mu)}{\rightrightarrows}} A$	рівномірна збіжність послідовності операторів $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ до оператора A в просторі $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$.	309
$\mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$	Простір узагальнених операторів	311

	з обмеженим проекційним слідом	
$\widetilde{\mathbf{Tr}}_{P,\mu}[A]$	узагальненй проекційнй слід оператора $A \in \mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$	314
$\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$	"стартовий" простір псевдооператорів	318
$\|\mathcal{A}\|_{[P],\mu}$	норма проекційного сліду для псевдооператора $\mathcal{A}$	320, 321
$\mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$	"стартовий" простір псевдооператорів з обмеженим проекційним слідом	320
$\mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]$	"остаточний" простір псевдооператорів з обмеженим проекційним слідом	321
$V_{\odot}$	ізометричний оператор над простором $\mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]$, породжений унітарним оператором $V \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$	322
$V \odot \mathcal{A}$	асиметричний добуток унітарного оператора V і псевдооператора $\mathcal{A} \in \mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]$	322
$\mathbf{e}_0$	одиничний часовий вектор простору Мінковського над гільбертовим простором	330
$\widehat{\mathbf{T}}$, $\mathbf{X}$	часовий та просторовий ортопроектори в просторі Мінковського над гільбертовим простором	330
$\mathcal{T}(\mathrm{w})$	часова компоненна вектора $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ простору Мінковського $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$	330
$\mathfrak{H}_1[V]$, $\mathfrak{H}_{1\perp}[V]$	.....	331
$\mathbf{X}_1[V]$, $\mathbf{X}_1^{\perp}[V]$	.....	331
$\mathsf{M}_c(\mathrm{w})$	псевдо-метрика Лоренца-Мінковського	333
$\mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$	Загальна група Лоренца над гільбертовим простором $\mathfrak{H}$	333
$\mathfrak{O}\mathfrak{T}_{\mathbf{fin}}(\mathfrak{H}, c)$	множина узагальнених перетворень Лоренца для скінченних швидкостей	337
$\mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J]$	узагальнені перетворення Лоренца:	
	при $0 \leq \lambda < \infty$	347,
	при $\lambda = \infty$ ($\mathbf{W}_{\infty,c}[s, \mathbf{n}, J] = \mathbf{W}_{\infty,c}[\mathbf{n}, J]$)	▷ 348
	при довільних значеннях $\lambda : 0 \leq \lambda \leq \infty$	▷ 350, 385
$\mathfrak{O}\mathfrak{T}_{\infty}(\mathfrak{H}, c)$	множина узагальнених перетворень Лоренца для нескінченних швидкостей	348
$\mathfrak{O}\mathfrak{T}(\mathfrak{H}, c)$	$\mathfrak{O}\mathfrak{T}(\mathfrak{H}, c) = \mathfrak{O}\mathfrak{T}_{\mathbf{fin}}(\mathfrak{H}, c) \cup \mathfrak{O}\mathfrak{T}_{\infty}(\mathfrak{H}, c)$	349
$\varphi_0(\theta), \varphi_1(\theta)$	.....	352

$\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J]$	інша форма позначення узагальнених перетворень Лоренца	353
$\mathfrak{O}_{+}(\mathfrak{H},c)$	повна група Лоренца над гільбертовим простором $\mathfrak{H}$	357
$\mathfrak{O}\mathfrak{T}_{+}(\mathfrak{H},c)$	.....	360
$\mathfrak{O}\mathfrak{T}_{-}(\mathfrak{H},c)$	.....	360
$\mathbb{R}^{\widehat{+}}$	логарифмічне розширення множини дійсних чисел	363
$\ln^{\widehat{+}}(x)$	узагальнена логарифмічна функція	363
$x \widehat{+} y$	операція додавання в полі $\mathbb{R}^{\widehat{+}}$	364
$x \widehat{\times} y$	операція множення в полі $\mathbb{R}^{\widehat{+}}$	364
$0^{\widehat{+}}$	нульовий елемент поля $\mathbb{R}^{\widehat{+}}$	364
$1^{\widehat{+}}$	одиничний елемент поля $\mathbb{R}^{\widehat{+}}$	364
$\operatorname{sign}^{\widehat{+}} x$	аналог функції $\operatorname{sign}(x)$ в полі $\mathbb{R}^{\widehat{+}}$	366
$\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]$	елементарні узагальнені перетворення Лоренца	367
$\mathfrak{S}(\xi,\eta)$	$\mathfrak{S}(\xi,\eta)=\frac{1}{2}(\operatorname{sign}\xi+1)(\operatorname{sign}\eta+1)-1$	369
$\mathbb{I}_{\sigma,\mu}[\mathbf{n}]$	.....	369
$\mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s,\mathbf{n},J]$	узагальнені перетворення Галілея в гільбертовому просторі	385
$\mathfrak{O}(\mathfrak{H},\infty)$	загальна група Галілея над гільбертовим простором $\mathfrak{H}$	387
$\mathfrak{O}_{+}(\mathfrak{H},\infty)$	повна група Галілея над гільбертовим простором $\mathfrak{H}$	388

Вступ

Актуальність теми. Незважаючи на величезні успіхи сучасної теоретичної фізики і потужність математичного апарату, який вона застосовує, основи цієї науки залишаються нечіткими. Відому шосту проблему Гільберта стосовно математично строгого обґрунтування основ теоретичної фізики, поставлену ще в 1900 році [1], на сьогодні не можна вважати остаточно розв'язаною [2, 3]. На сьогодні існує величезна кількість наукових публікацій, які можна вважати так чи інакше пов'язаними із шостою проблемою Гільберта (див, наприклад [4–26]).

Існуючі наукові дослідження, пов'язані з шостою проблемою гільберта умовно можна розділити на два напрямки:

- В роботах першого напрямку робляться спроби формалізації або аксіоматизації тих чи інших фізичних теорій. Серед перелічених вище робіт до першого напрямку можна віднести [4, 5, 11–18, 20–26].

- В роботах другого напрямку автори намагаються поставити і розв'язати математично строгими методами ту чи іншу математичну задачу, яка виникає у теоретичній фізиці або, хоча б, побудувати математичний апарат для її розв'язання. Серед перелічених вище робіт до другого напрямку можна віднести роботи [4, 6–10, 19].

Отже, тематика, пов'язана з застосуванням математично строгих методів для розв'язання конкретних фізичних задач і математичної формалізації фізичних теорій на сьогодні є дуже актуальною. І саме цій тематиці присвячена дана дисертаційна робота.

В силу складності і багатогранності сучасної теоретичної фізики, шосту проблему гільберта неможливо розв'язати "одним ударом". Для її розв'язання, скоріш за все, потрібна напружена праця не одного покоління математиків та фізиків-теоретиків. Саме тому обидва зазначені вище напрямки наукових досліджень, на сьогодні є дуже актуальні і важливі, оскільки математичний апарат, напрацьований в роботах, пов'язаних з другим напрямком може виявитись корисним і для першого напрямку.

Перші три розділи даної дисертаційної роботи пов'язаний саме з першим напрямком досліджень, тоді як останній, четвертий — з другим. В перших трьох розділах побудовано новий математичний апарат, призначений для формалізації деяких фізичних теорій (перш за все теорій, пов'язаних з фізикою макросвіту). Зазначений

математичний апарат базується на теорії мінливих множин. З формальної точки зору теорія мінливих множин є надбудовою над класичною теорією множин. Мінливі множини є новим абстрактним класом математичних об'єктів (подібним до груп, кілець, полів, решіток, банахових просторів та ін.). На основі теорії мінливих множин побудовано ієрархію нових абстрактних класів математичних об'єктів, в рамках якої можна математично строго формулювати певні фізичні теорії, а також показано, що напрацьований математичний апарат може бути застосований для математичної формалізації спеціальної теорії відносності та деяких її узагальнень. В четвертому розділі дисертації розвинуто математичний апарат, призначений для опису еволюції багаточастинкових квантових систем за допомогою операторів з трансляційно інваріантним ядром, зокрема побудовано простір узагальнених операторів з обмеженим проекційним слідом над заданим гільбертовим простором.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Роботу над дисертацією розпочато у відділі диференціальних рівнянь з частинними похідними, а завершено у відділі нелінійного аналізу Інституту математики НАН України. Дисертацію було виконано в рамках наступних тем та програм: "Еволюційні та спектральні задачі для диференціальних рівнянь у банаховому просторі" (номер держреєстрації 0111U001027), "Розробка операторних підходів до розв'язування еволюційних і спектральних задач для диференціальних рівнянь" (номер держреєстрації 0116U000032), "Спектральні задачі, дробово-диференціальні та неархімедові моделі сучасної математичної фізики" (номер держреєстрації 0120U100169), цільова наукова програма Відділення математики НАН України "Розробка математичних моделей та чисельно-аналітичних методів сучасних задач фізико-технічних і медико-біологічних наук і інформаційних технологій" (номер держреєстрації 0112U002104) та цільова програма наукових досліджень Відділення математики НАН України "Розробка та дослідження сучасних математичних моделей у галузі фізико-технічних та медико-біологічних наук" (номер держреєстрації 0117U002119).

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є розробка нового математичного апарату для формалізації деяких фізичних теорій (перш за все релятивістської кінематики), а також опису еволюції багаточастинкових систем.

Об'єктом дослідження є мінливі множини і породжені ними математичні об'єкти (а саме кінематичні множини та універсальні кінематики), а також простори узагальнених операторів з обмеженим проекційним слідом над заданим гільбертовим простором.

Предметом дослідження є властивості мінливих множин, кінематичних множини та універсальних кінематик (зокрема можливість їхнього застосування для математичної формалізації спеціальної теорії відносності та деяких її узагальнень), а також структура просторів узагальнених операторів з обмеженим проекційним слідом над заданим гільбертовим простором та їхні властивості (зокрема повнота, існування проекційного сліду, можливість визначення груп операторів, пов'язаних з описом еволюції багаточастинкових квантових систем).

Методи дослідження. В дисертації використовуються методи загальної теорії множин, теорії лінійно упорядкованих множин, лінійної алгебри, загальної топології, функціонального аналізу, теорії операторів над банаховими та гільбертовими просторами.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, такі:

1. Введено поняття базових мінливих множин та мінливих множин і досліджено їхні властивості.
2. Визначено поняття системи абстрактних траєкторій, зокрема траєкторій які є траєкторіями руху певної системи матеріальних точок. Доведено, що довільна система абстрактних траєкторій породжує певну базову мінливу множину.
3. Встановлено, що довільна базова мінлива множина може бути породжена системою абстрактних траєкторій, які утворені максимальними ланцюгами на множині її елементарно-часових станів.
4. Введено аналоги теоретико-множинного відношення включення та теоретико-множинної операції об'єднання для базових мінливих множин. Доведено, що операція еволюційного об'єднання має багато властивостей, схожих з операцією об'єднання звичайних множин.
5. Введено класифікацію видимості систем відліку в мінливих множинах. Доведено, що за певних умов множина систем відліку мінливої множини може розпадатись на класи видимості, які попарно не перетинаються і будь-який клас видимості є цілком невидимим з інших класів видимості.
6. Доведено, що в мінливих множинах, всі компоненти яких є цілком видимими в кожній системі відліку, відображення уніфікації породжуються бієктивними відображеннями між множинами елементарно-часових станів відповідних систем відліку.
7. Досліджено властивості кінематичних множин, тобто мінливих множин, оснащених різноманітними геометричними та топологічними структурами.

8. Введено поняття реального і універсального перетворення координат між системами відліку у кінематичних множинах. Доведено необхідну і достатню ознаку існування універсального перетворення координат.
9. Досліджено властивості — універсальних кінематик, тобто кінематичних множин із заданим універсальним перетворенням координат.
10. Побудовано приклади універсальних кінематик, які є математично строгими моделями еволюції фізичних систем в рамках кінематики Лоренца-Пуанкаре та її тахіонових розширень, а також побудовано нетривіальний клас кінематичних множин, що не допускають універсального перетворення координат.
11. Введено поняття еволюційного розширення та операцію еволюційного об'єднання для кінематичних множин та універсальних кінематик. Доведено теорему теорему про еволюційне розширення для універсальних кінематик.
12. Методами теорії універсальних кінематик досліджено питання про існування "часових парадоксів". Встановлено достатні ознаки умовної часозворотності та безумовної часонезворотності.
13. Досліджено властивості одностайно-поступальних систем відліку у векторних універсальних кінематиках. Встановлено необхідну і достатню умову одностайної поступальності однієї системи відліку відносно іншої у векторній універсальній кінематиці.
14. Побудовано простір узагальнених операторів з обмеженим проекційним слідом над заданим гільбертовим простором і встановлено його властивості.
15. Доведено існування проекційного сліду для довільного узагальненого оператора з обмеженим проекційним слідом над заданим гільбертовим простором. Встановлено, що простір узагальнених операторів з обмеженим проекційним слідом вкладається в більш широкий банаховий простір псевдооператорів. Над простором псевдооператорів побудовано групу унітарних операторів, пов'язану з описом еволюції багаточастинкових квантових систем.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати та розвинуті методи можна використати у подальших дослідженнях абстрактних кінематичних множин та універсальних кінематик, а також моделей сучасної математичної та теоретичної фізики (зокрема астрофізики).

Особистий внесок здобувача. Усі результати, що виносяться на захист, одержано здобувачем самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися на таких міжнародних та всеукраїнських конференціях:

- Міжнародна конференція до 100-річчя М.М. Боголюбова та 70-річчя М.І. Нагнибіди (Чернівці, 8-13 червня, 2009).
- Український Математичний Конгрес – 2009 (до 100-річчя від дня народження М.М. Боголюбова) (Київ, 27-29 серпня, 2009).
- Bogolubov Kyiv Conference "Modern Problems of Theoretical and Mathematical Physics" (Kyiv, September 15-18, 2009).
- Humboldt-Kolleg for Research Fellows and Awardees "Humboldt Cosmos: Science and Society" (Kyiv, November 19-22, 2009).
- Humbolt-Kolleg "Mathematics and Life Sciencies" (Kyiv, August 05-08, 2010).
- Міжнародна конференція "Сучасні проблеми аналізу" (Чернівці, 30 вересня – 3 жовтня, 2010).
- II всеукраїнський семінар "Українська школа групового аналізу диференціальних рівнянь" (Полтава, 19-20 жовтня, 2011).
- Workshop on Mathematics for Life Sciences (Kyiv, September 3 -14, 2012).
- International Conference dedicated to 120-th anniversary of Stefan Banach (Lviv, September 17-21, 2012).
- Четверта Міжнародна конференція молодих математиків з диференціальних рівнянь та їх застосувань, присвячена Я.Б. Лопатинському (Донецьк, 14-17 листопада 2012).
- 2nd EUMLS Conference "Mathematics for Life Sciences" (Crimea, Olenivka, September 5-10, 2013).
- Кримська міжнародна математична конференція КММК-2013 (Крим, Судак, 23 вересня – 4 жовтня, 2013).
- П'ятнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука (Київ, 15-17 травня 2014).
- Humboldt Kolleg "The Education and Science and their Role in Social and Industrial Progress of Society" (Kyiv, 12-15 June, 2014).
- IV Міжнародна Ганська конференція (Чернівці, 30 червня – 5 липня 2014 року).
- Міжнародна конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К.М.Фішмана та М.К.Фаґе (Чернівці, 1-4 липня, 2015).
- 3rd EUMLS Conference "Mathematics for Life Sciences" (Rivne, September 15-19, 2015).

- Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (м. Ворохта Івано-Франківської області, 24-27 лютого, 2016).
- International Conference on Differential Equations Dedicated to the 110th Anniversary of Ya.B. Lopatynsky (Lviv, September 20-24, 2016).
- International conference dedicated to the 120th anniversary of Kazimierz Kuratowski (Lviv, September 27 – October 1, 2016).
- Міжнародний семінар "Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики", присвячений Вільгельму Іллічу Фущичу (Київ, 17-20 грудня, 2016).
- Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (м. Ворохта Івано-Франківської області, 22-25 лютого 2017).
- XII-та літня школа “Алгебра, топологія, аналіз” (село Колочава Закарпатської обл. Міжгірського району, 10-23 липня, 2017).
- International Conference “Differential Equations, Mathematical Physics and Applications” (Cherkasy, October 17-19, 2017).
- 3rd International Conference “Logic, Relativity and Beyond” (Budapest, August 23-27, 2017).
- Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (м. Ворохта Івано-Франківської області, 27 лютого — 2 березня 2018).
- Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми механіки та математики”, присвячена 90-річчю від дня народження академіка НАН України Я.С. Підстригача (Львів, 22-25 травня, 2018).
- Міжнародна наук. конфер. “Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях” (Чернівці, 17–19 вересня 2018).
- Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (м. Ворохта Івано-Франківської області, 25 лютого – 1 березня 2019).
- XII Міжнародна алгебраїчна конференція, присвячена 215-й річниці з дня народження В. Буняковського (Вінниця, 2–6 липня 2019).
- Winter School in Abstract analysis – WS2020 (Czech Republic, Prague-Hejnice, Jan 25 – Feb 1 2020).

- Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (м. Ворохта Івано-Франківської області, 26 лютого – 1 березня, 2020).
- Міжнародна наукова конференція “Прикладна математика та інформаційні технології” (Чернівці, 22–24 вересня 2022).
- Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми механіки та математики - 2023” (Львів, 23–25 травня 2023).
- 18th Triennial Conference of the International Society for the Study of Time (ISST) “Time and Measure” (Japan, Yamaguchi, July 2–7 2023).
- Міжнародна наукова конференція “Математика та інформаційні технології” (Чернівці, 28–30 вересня 2023).

Також результати дисертації обговорювались на засіданнях Київського семінару з функціонального аналізу 30.03.2011, 15.11.2017, 29.11.17 та 10.05.2018, (керівники семінару — академік НАН України Ю.М. Березанський, член-кореспондент НАН України А.Н. Кочубей, академік НАН України Ю.С. Самойленко, 2017), семінарі відділу математичної фізики Інституту математики НАН України 29.05.2018 (керівник семінару — член-кореспондент НАН України, професор А.Г. Нікітін), семінарі кафедри математичної фізики Київського національного університету ім. Тараса Шевченка 06.06.2018 (керівники семінару — професор Т.А. Мельник, професор В.Г. Самойленко).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в роботах [1–71] (див. список публікацій на с. 8–14). Всі роботи опубліковано без співавторів. Повні тексти більшості наведених нижче наукових робіт (за вийнятком тез конференцій) можна знайти на web-сторінці: `https://www.researchgate.net/profile/Yaroslav_Grushka/contributions`.

- Роботи [1–29] відповідають вимогам до публікації результатів дисертаційних робіт у фахових виданнях із фізико-математичних наук.
- Роботи [1–7] надруковані у виданнях, внесених до наукометричних баз Scopus або Web of Science.
- Роботи [1–32] надруковано у виданнях, що включені до міжнародних наукометричних баз MathSciNet, Zentralblatt MATH, Google Scholar та ін.
- Роботи [33–38] — публікації в збірниках праць конференцій та препринти.
- Роботи [39–71] — тези конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі змісту, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 253 найменування. Повний обсяг дисертації становить 425 стор.

Короткий зміст основної частини роботи. Основну частину роботи складають 4 розділи. На початку першого, другого і четвертого розділів подано стислий огляд літератури та опис основних результатів, що містяться в них. Третій розділ фактично є продовженням другого розділу, а тому цей розділ починається лише з коротенького мотиваційного вступу.

Перший розділ дисертації присвячено викладу теорії мінливих множин. На початку розділу проведено детальний огляд літератури з цього та суміжних питань. Зокрема на основі аналізу переваг і недоліків існуючих на даний час підходів до формалізації фізичних теорій ставиться проблема математично строгого означення поняття мінливої множини, як множини об'єктів, що здатні еволюціонувати довільним чином і картина еволюції яких може залежати від способу спостереження, тобто від системи відліку. У підрозділах 1.2–1.11 побудовано ієрархію допоміжних математичних понять та об'єктів, необхідних для формулювання математично строгого означення мінливих множин, а також досліджено основні властивості зазначених об'єктів. Зокрема у підрозділі 1.2 за допомогою означення орієнтованої множини (тобто реляційної системи з одним рефлексивним бінарним відношенням — напрямним відношенням змін) описано найпримітивнішу математичну модель сукупності мінливих об'єктів. Крім того отримано узагальнення принципу максимальності Хаусдорфа, а саме теорему про те що будь-який ланцюг орієнтованої множини можна вкласти в максимальний ланцюг. У підрозділі 1.2 дано означення часу на орієнтованих множинах, а також введено поняття примітивної мінливої множини, тобто орієнтованої множини із заданим на ній часом (хронологізацією). Враховуючи, що можливостей визначити час на довільній орієнтованій множині (тобто її хронологізувати) існує нескінченно багато, у підрозділі 1.4, досліджується питання про існування на орієнтованій множині часу із заданими додатковими властивостями. Зокрема введено поняття ланцюгової орієнтованої множини і доведено, що будь-яку ланцюгову орієнтовану множину можна точково хронологізувати, а також доведено, що будь-яку орієнтовану множину можна хронологізувати квазіточково. У підрозділі 1.5 досліджується питання про існування часу на орієнтованих множинах із заданою синхронізацією. Зокрема доведено, що на довільній орієнтованій множині із заданою синхронізацією можна визначити час таким чином, що відповідна синхронізація породжується цим часом. Також для певного класу синхронізацій орієнтованих множин отримано теорему про існування і єдиність внутрішнього часу (тобто часу, який можна "спостерігати зсередини" орієнтованої множини), що породжує відповідну синхронізацію. У підрозділі 1.6 вводиться система стандартних позначень для примітивних мінливих множин. У підрозділі 1.7 формулюється означення системи абстрактних траєкторій (частинними випадками

абстрактних траєкторій є траєкторії руху матеріальних точок) і доводиться, що довільна система абстрактних траєкторій природним чином породжує примітивну мінливу множину. У підрозділі 1.8 вводиться поняття елементарно-часового стану примітивної мінливої множини і на конкретному прикладі показується, що для того, щоб описати еволюцію елементарно-часових станів у примітивних мінливих множинах, що моделюють певні фізичні процеси, недостатньо інформації про еволюцію її елементарних станів, що задається напрямним відношенням змін. У зв'язку із зазначеним фактом вводяться поняття бази елементарних процесів (яка є певним рефлексивним і асиметричним бінарним відношенням на множині елементарно-часових станів примітивної мінливої множини) та поняття базової мінливої множини, тобто примітивної мінливої множини із заданою на ній базою елементарних процесів. З інтуїтивної точки зору довільна базова мінлива множина являє собою сукупність мінливих об'єктів, спостереження за якою ведеться в рамках однієї (фіксованої) системи відліку. Також у зазначеному підрозділі доводиться, що довільна система абстрактних траєкторій природним чином породжує базову мінливу множину. У підрозділі 1.9 доводиться, що довільна базова мінлива множина може бути породжена системою абстрактних траєкторій, які утворені її лініями долі, тобто максимальними ланцюгами на множині її елементарно-часових станів. У підрозділі 1.10 вводиться поняття мінливої системи базової мінливої множини $\mathcal{B}$ як довільної підмножини множини $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ її елементарно-часових станів. З інтуїтивної точки зору на поняття мінливої системи можна дивитись, як на абстрактне узагальнення поняття фізичного тіла, склад якого, взагалі кажучи, не є постійним і може змінюватись довільним чином протягом часу в процесі еволюції цього тіла. У підрозділі 1.11 введено аналоги теоретико-множинних відношення включення та операції об'єднання для базових мінливих множин (а саме відношення еволюційного та супереволюційного включення та операції еволюційного та супереволюційного об'єднання). Також доведено, що операція еволюційного об'єднання має багато властивостей, схожих з операцією об'єднання звичайних множин. У підрозділі 1.12 вводиться поняття (загальної) мінливої множини як індексованої сім'ї базових мінливих множин, між якими діють відображення уніфікації. Відображення уніфікації визначаються як відображення з множини всіх мінливих систем однієї базової мінливої множини у множину всіх мінливих систем іншої базової мінливої множини, що задовольняють певні додаткові умови. Також дається означення системи відліку довільної мінливої множини і вводиться система стандартних позначень теорії мінливих множин. У підрозділі 1.13 наводяться деякі приклади мінливих множин, які демонструють, що математичний апарат відповідної теорії володіє достатнім запасом гнучкості. У підрозділі 1.14 введено класифікацію видимості систем відліку у мінливих множинах,

зокрема доведено, що за певних умов множина систем відліку мінливої множини може розпадатись на класи видимості, які попарно не перетинаються і будь-який клас видимості є цілком невидимим з інших класів видимості. Також досліджено чітко видимі мінливі множини, тобто мінливі множини, всі компоненти яких є цілком видимими в кожній системі відліку. Доведено, що в чітко видимих мінливих множинах відображення уніфікації породжуються бієктивними відображеннями між множинами елементарно-часових станів відповідних систем відліку.

У **другому** розділі досліджуються кінематичні мінливі множини, тобто мінливі множини, кожна система відліку яких оснащена своїм власним геометричним оточенням, яке може бути метричним, топологічним, лінійним, топологічним векторним або іншим простором. У підрозділі 2.1 зроблено огляд літератури за тематикою розділу, сформульовано основні задачі наступних досліджень і анонсовано найвагоміші результати, отримані в другому розділі. У підрозділі 2.2 дається математично строге означення кінематичних мінливих множин (кінематичних множин), а також вводиться система стандартних позначень теорії кінематичних множин і встановлюються найелементарніші основні властивості таких множин. У підрозділі 2.3 формулюються означення реального і універсального перетворення координат між системами відліку у кінематичних множинах, а також доводиться необхідна і достатня ознака існування універсального перетворення координат у кінематичній множині. Крім того доводиться, що у випадку, коли універсальне перетворення координат у кінематичній множині існує, то воно, взагалі кажучи, не єдине. У підрозділі 2.4 доведено теорему про мультиобраз для кінематичних множин, яка необхідна для побудови математично строгих моделей кінематики спеціальної теорії відносності, а також її тахіонових розширень, в яких дозволяється надсвітловий рух для матеріальних об'єктів та інерційних систем відліку. У підрозділі 2.5, використовуючи теорему про мультиобраз, побудовано приклади кінематичних множин, які є математично строгими моделями еволюції фізичних систем в рамках кінематики Лоренца-Пуанкаре та її тахіонових розширень на основі узагальнених перетворень Лоренца-Пуанкаре в сенсі Е. Рекамі, В. Ольховського та Р. Голдоні. У підрозділі 2.6 побудовано один цікавий клас кінематичних множин, в яких кожна частинка в кожен момент часу може мати свою власну "швидкість світла" і доведено, що в таких кінематичних множинах не існує універсального перетворення координат в нетривіальних випадках.

Третій розділ присвячено дослідженню універсальних кінематик, тобто кінематичних множин із заданим універсальним перетворенням координат. Після коротенького вступу, розміщеного в підрозділі 3.1, у підрозділі 3.2 формулюється означення універсальних кінематик, вводиться система стандартних позначень теорії універсальних кінематик і встановлюються найелементарніші базові властивості універ-

сальних кінематик. У підрозділі 3.3 доводиться теорема про мультиобраз для універсальних кінематик. У підрозділі 3.4, використовуючи теорему про мультиобраз для універсальних кінематик, будуються приклади універсальних кінематик, які є математично строгими моделями еволюції фізичних систем в рамках кінематики Лоренца-Пуанкаре та її тахіонових розширень в сенсі Е. Рекамі, В. Ольховського та Р. Голдоні. У підрозділі 3.5 вводиться поняття еквівалентності універсальних кінематик відносно перетворення координат та встановлюються деякі властивості цього поняття. У підрозділі 3.6 введено відношення еволюційного та супереволюційного включення для кінематичних множин та універсальних кінематик. Доведено, що відношення еволюційного та супереволюційного включення кінематичних множин та універсальних кінематик мають властивості відношення порядку. У підрозділі 3.7 введено операції еволюційного об'єднання та диз'юнктного еволюційного об'єднання для універсальних кінематик. Доведено, що якщо диз'юнктне еволюційне об'єднання двох універсальних кінематик існує, то воно збігається з їхнім еволюційним об'єднанням. Також доведено, що довільні дві диз'юнктні універсальні кінематики мають диз'юнктне еволюційне об'єднання і що диз'юнктне еволюційне об'єднання еволюційно видимих універсальних кінематик є еволюційно видимим. У підрозділі 3.8 доводиться теорема про еволюційне розширення для універсальних кінематик, яка математично обґрунтовує процедуру долучення до вихідної універсальної кінематики нових, "віртуальних" еволюціонуючих компонентів за припущення, що долучення цих, нових, компонентів не впливає на еволюцію старих (вихідних) компонентів кінематики. У підрозділі 3.8 методами теорії універсальних кінематик досліджується питання про "часові парадокси", пов'язані з гіпотезою про існування матеріальних об'єктів та інерційних систем відліку, що рухаються зі швидкістю, більшою за швидкість світла. Встановлено достатні ознаки умовної часозворотності та безумовної часонезворотності універсальних кінематик. Використовуючи зазначені достатні ознаки проаналізовано на безумовну часонезворотність універсальні кінематики, які є математично строгими моделями еволюції фізичних систем в рамках тахіонових розширень кінематики Лоренца-Пуанкаре в сенсі Е. Рекамі, В. Ольховського та Р. Голдоні. Зокрема доведено існування часонезворотних тахіонових кінематик, в яких дозволяється рух тіл та інерційних систем відліку з довільною швидкістю, відмінною від швидкості світла. У підрозділі 3.10 досліджуються властивості одностайно-поступальних систем відліку у векторних універсальних кінематиках. Зокрема, встановлено необхідну і достатню умову одностайної поступальності однієї системи відліку відносно іншої у векторній універсальній кінематиці.

У **четвертому** розділі будується простір узагальнених операторів з обмеженим проекційним слідом над заданим гільбертовим простором і досліджуються властиво-

сті цього простору. У підрозділі 4.1 зроблено огляд літератури за тематикою розділу, та сформульовано мету досліджень, розміщених в розділі. У підрозділі 4.2 введено поняття абстрактного трансляційно інваріантного оператора в гільбертовому просторі та доведено, що звичайний слід від трансляційно інваріантних операторів в загальному випадку розбіжний. Далі вводиться аналог сліду для таких операторів — узагальнений проекційний слід. При цьому будується лінійний нормований простір лінійних неперервних операторів з обмеженим проекційним слідом і доводиться його неповнота. В зв'язку з цим ставиться задача опису поповнення зазначеного простору з теоретико-операторної точки зору. В наступному підрозділі 4.3, використовуючи метод оснащених просторів, розвинутий в працях академіка Ю.М. Березанського та його учнів, будується повний простір узагальнених операторів з обмеженим проекційним слідом та визначається поняття проекційного сліду для таких узагальнених операторів. У підрозділі 4.4 доводиться, що простір узагальнених операторів з обмеженим проекційним слідом можна вкласти в більш широкий банаховий простір псевдооператорів з обмеженим проекційним слідом і визначити на цьому більш широкому банаховому просторі деякі важливі групи операторів, пов'язані з описом еволюції багаточастинкових квантових систем.

Подяки. Автор щиро вдячний науковому консультанту, доктору фізико-математичних наук, професору, члену-кореспонденту НАН України Дрозду Юрію Анатолійовичу, покійному доктору фізико-математичних наук, професору, члену-кореспонденту НАН України Горбачуку Мирославу Львовичу за постійну увагу і допомогу в роботі. Також автор висловлює щиру вдячність завідувачу відділу нелінійного аналізу, члену-кореспонденту НАН України, доктору фізико-математичних наук Кочубею Анатолію Наумовичу, провідному науковому співробітнику відділу нелінійного аналізу, доктору фізико-математичних наук, професору Герасименку Віктору Івановичу, співробітникам відділу нелінійного аналізу та колишнього відділу диференціальних рівнянь з частинними похідними за плідну довголітню співпрацю.

Окремо хочеться подякувати моєму першому науковому наставнику покійному доктору фізико-математичних наук, професору, завідувачу кафедри математичного аналізу Чернівецького Національного університету Маслюченку Володимиру Кириловичу за цінні наукові консультації та моральну підтримку, а також українському письменнику-фантасту, поету, філософу та політв'язню Берднику Олесю Павловичу за те, що своїми творами (зокрема твором "Зоряний Корсар") надихнув автора розпочати розробку теорії мінливих множин.

Автор щиро вдячний **Simons Foundation** за благодійну допомогу науковцям, що працюють в Україні, у складний воєнний час.

Розділ 1

Основи теорії мінливих множин

1.1. Вступні зауваження та огляд літератури

Як вже було сказано у вступі до дисертації, незважаючи на величезні успіхи сучасної теоретичної фізики, відому шосту проблему Гільберта стосовно математично строгого обґрунтування основ цієї науки на сьогодні не можна вважати остаточно розв'язаною, не дивлячись на те, що існує досить велика кількість наукових публікацій, які є так чи інакше пов'язаними із шостою проблемою Гільберта. На думку автора дисертації, однією з причин недостатньої продуктивності багатьох спроб розв'язання шостої проблеми Гільберта є відсутність єдиного абстрактного математичного апарату, призначеного для строгого формулювання основ різних фізичних теорій. Наприклад, в роботах [13–15, 18] автори намагались, використовуючи існуючі математичні структури і поняття, запропонувати математичні об'єкти, призначені для формалізації досить великого діапазону фізичних теорій. В результаті такого підходу в роботах цих авторів з'являються досить складні і громіздкі математичні конструкції (див., наприклад [13, definition 4.1], [14, Definition 6.1], [15, 18, Definition 5]). Для того, щоб зрозуміти мотивацію, яка привела авторів до цих математичних конструкцій необхідно добре знати сучасну теоретичну фізику. Взагалі, на нашу думку, головною особливістю багатьох існуючих математично строгих моделей теоретичної фізики є те, що дослідники — творці цих моделей спочатку намагаються, виходячи з інтуїтивних міркувань, підібрати необхідний математичний апарат для опису фізичних явищ, що розглядаються в цих моделях, а вже потім намагаються математично формалізувати опис цих явищ, ототожнюючи фізичні об'єкти з відповідними математичними конструкціями, породженими цим математичним апаратом (наприклад з розв'язками деяких систем диференціальних рівнянь на деякому просторі або многовиді). Але, в той же час, математично строге визначення і формулювання найбільш елементарних (базових) фізичних понять та постулатів, отриманих на основі дослідів, життєвого досвіду або ж здорового глузду (які і привели до появи зазначених математичних конструкцій) залишається нерозв'язаною задачею. В роботах

російського біофізика, Олександра Лєвіча [27–30], висловлюється думка, що загальне розв'язання цієї задачі в рамках існуючих на даний час математичних теорій — неможливе і ставиться проблема побудови теорії "динамічних множин" — нових абстрактних математичних структур, у рамках яких можна було б строго математично моделювати різноманітні процеси в фізичних, біологічних та інших складних системах. В даному розділі дисертації викладаються основи математичної теорії мінливих множин. Теорію мінливих множин можна трактувати як спробу дати розв'язання проблеми, поставленої в зазначених вище роботах О. Лєвіча.

Інший підхід до формалізації фізичних теорій полягає в застосуванні аксіоматичного методу. В цьому напрямку працювали і працюють досить багато математиків та інших вчених (див., напр. [5, 11, 12, 20–24, 31–42]) див. також оглядову роботу [43] про різні аксіоматизації простору-часу. Особливо серед прихильників аксіоматичного підходу слід відзначити досить велику і потужну групу угорських математиків (Hajnal Andreka, Judit Madarasz, Istvan Nemeti, Gergely Szekely та ін.; див., напр. [21–24, 42]). Слід зазначити, що аксіоматичний метод часто дозволяє уникнути введення складних і громіздких математичних структур в основи теорії. В той же час головним недоліком робіт, в яких застосовується чисто-аксіоматичний метод для формалізації фізичних теорій є їхня недостатня загальність, оскільки існуючі роботи "аксіоматичного" типу дозволяють викласти математично строго якийсь фрагмент тої чи іншої фізичної теорії. Крім цього аксіоматичний підхід часто приводить до появи певних штучних аксіом, котрі викликають у читачів зайві розмірковування і дискусії "філософського" типу. Наприклад, аксіома AxPh в роботі [24, page 18] вимагає існування світлової сфери в кожній точці простору-часу. Ця аксіома необхідна авторам роботи лише як певний технічний постулат, необхідний для отримання перетворень Лоренца-Пуанкаре між інерційними системами відліку. В той же час дана аксіома викликає зайві "філософські" розмірковування на тему "чи справді реальний світ в кожній точці простору і в кожен момент часу пронизаний фотонами, що рухаються в усіх можливих напрямках?". Зрозуміло, що для розв'язання більшості задач, пов'язаних із спеціальною теорією відносності ця аксіома не є конче необхідною, оскільки, отримавши перетворення Лоренца-Пуанкаре їх далі можна прийняти за "аксіому" для інерційних систем відліку. Слід зазначити, що аналогічний недолік мають також і роботи [12, 39], в яких є свій "аналог" аксіоми AxPh. Таким чином, ми бачимо, що конкретна задача виведення перетворень Лоренца-Пуанкаре між інерційними системами відліку в роботах "аксіоматичного типу", присвячених кінематиці спеціальної теорії відносності, приводить до необхідності формулювання штучних аксіом типу AxPh. Можна зробити, навіть, більш загальний висновок, про те, що аксіоматичний підхід вимагає побудови власної системи аксіом для кожної

окремої конкретної фізичної задачі. Причина такої ситуації полягає в тому, що, на відміну від шкільного курсу геометрії (де евклідова площина або евклідовий простір є "універсальним вмістилищем" всіх можливих геометричних фігур), побудова або аксіоматичне означення єдиного "універсального вмістилища" для всіх варіантів еволюції фізичних систем є досить складною задачею. І будь-які спроби розв'язання цієї задачі неминуче мусять приводити до складних і досить штучних математичних або логічних конструкцій. В зв'язку із вищесказаним, пропозиція, висловлена в [22, page 210] застосувати апарат модальної логіки для розв'язання поставленого завдання також виглядає недостатньо ефективною.

Підсумовуючи вищесказане, можна виділити наступні головні причини недостатньої продуктивності тих підходів до формалізації фізичних теорій, які застосовувались в роботах, розглянутих вище:

1) Застосування існуючих математичних структур та абстрактних класів об'єктів (наприклад категорій, розшарувань та многовидів) для визначення фізичних понять.

2) Застосування чисто-аксіоматичного методу.

3) Відсутність єдиного абстрактного математичного апарату, призначеного для строгого формулювання основ різних фізичних теорій.

Саме тому вихід із ситуації, на думку автора, полягає в побудові нових абстрактних математичних класів об'єктів, спеціально адаптованих для строгого математично моделювання різноманітних процесів в фізичних та інших складних системах. Причому нові математичні класи краще визначати "з нуля", не опираючись на вже відомі в математиці абстрактні структури. Взагалі кажучи, різні абстрактні математичні класи об'єктів (такі як групи, кільця, поля, решітки, лінійні, метричні або топологічні простори та ін.), відомі в математиці вже досить давно. При цьому розвиток математики, як правило, йшов "від конкретного до абстрактного", тобто, наприклад, поняття групи, кільця або поля виникло після того, як конкретні приклади груп кілець або полів вже були відомі в математиці. Але, для побудови абстрактних математичних класів об'єктів, спеціально адаптованих до теоретичної фізики, необхідно вводити нові абстрактні математичні структури, конкретні приклади яких ще не відомі в математиці. Тому, головною особливістю даної роботи є те, що дуже часто доведеться рухатись "за зворотньою схемою — від абстрактного до конкретного", коли спочатку вводяться означення нових абстрактних математичних класів, а вже потім наводяться конкретні приклади цих класів.

В даній роботі пропонується новий абстрактний математичний апарат для формалізації фізичних теорій, що базується на теорії мінливих множин. Головною осо-

бливістю даного підходу є те, що цей підхід дозволяє будувати починаючи з найпростіших математичних структур, а далі вводити більш складні математичні об'єкти на основі простіших. Взагалі кажучи, ідея застосування теорії множин як математичного апарату для розв'язання шостої проблеми Гільберта виглядає цілком природною, оскільки довільну картину нашої оточуючої реальності можна уявляти як множину певних об'єктів. Напевне, саме це мав на увазі академік П.С. Алєксандров, коли в підручнику [44] говорив про множину зайців, що проживають в лісах Московської області. Погоджуючись з автором підручника [44], варто уточнити певні особливості, які відрізняють "множини", які ми зустрічаємо в реальності від тих, що зустрічаються в класичній теорії множин. Наприклад, множина всіх горобців Київської області є множиною в сенсі класичної теорії множин лише тоді, коли ми спостерігаємо цю множину в певний, фіксований, момент часу. Проте, коли ми поглянемо на цю множину протягом певного проміжку часу, то зауважимо, що ця множина не має сталого складу елементів зі сталими властивостями. Справді, кожен горобець протягом життя може переміщуватись в просторі, змінювати свою вагу хімічний склад та інші параметри, перетинати межі Київської області. Крім того, горобці можуть народжуватись або помирати. Множини подібного типу природно назвати мінливими множинами. *З інтуїтивної точки зору мінливі множини це — сукупності об'єктів, які, на відміну від елементів звичайних (статичних) множин, можуть перебувати в процесі постійних трансформацій, тобто — змінювати свої властивості, з'являтись чи зникати, розпадатись на декілька частин чи, навпаки, декілька об'єктів можуть зливатись в один. Крім того картина еволюції мінливої множини може залежати від способу спостереження, тобто від системи відліку.*

Слід зазначити, що незавершені спроби побудови теорій, дещо схожих на теорію мінливих множин можна знайти в роботах [45, 46]. В порівнянні з мінливими множинами, в цих роботах було запропоновано більш примітивні математичні об'єкти. Наприклад об'єкти, для яких в роботі [45], використано назву "variable sets" можуть лише змінювати свій склад з плином часу, проте самі елементи цих "змінних" множин не можуть еволюціонувати. Аналогічне можна сказати про категорії $\mathbf{Bun}(X)$ (розшарувань над X) та $\mathbf{Shv}(X)$ з [46]. Елементи категорії $\mathbf{Biv}$ з [46] можуть еволюціонувати лише шляхом одного "стрибка" між двома фіксованими моментами часу. Крім того, автори робіт [45,46] не просунулись далі філософських роздумів і формулювання деяких означень або аксіом.

Окрему увагу також варто звернути на так звані каузальні множини — абстрактні математичні об'єкти, що з'являються в певних сучасних роботах фізичного та філософського спрямування (див., напр. [47–51]). Каузальні множини призначені для математичного опису дискретного простору-часу. Фізики очікують, що досліджен-

ня таких математичних структур дасть просування у вирішенні проблеми побудови математичних основ квантової теорії гравітації [50, 51]. З формально-математичної точки зору каузальні множини є частинним випадком добре відомих частково упорядкованих множин, а саме — локально-скінченними частково упорядкованими множинами [48,50]. В свою чергу, частково упорядковані множини є частинним випадком орієнтованих множин, що розглядаються в підрозділі 1.2 даної дисертаційної роботи. Отже, в даній роботі розглядаються набагато більш загальні математичні об'єкти, ніж каузальні множини. Проте, сама поява каузальних множин свідчить, про те, що математичні поняття, що вводяться і вивчаються в даній роботі вже давно назріли.

Даний розділ роботи присвячений теорії мінливих множин, а в наступних розділах на основі теорії мінливих множин будується ієрархія нових абстрактних класів математичних об'єктів, а саме вводяться і досліджуються кінематичні мінливі множини та універсальні кінематики. Дослідження розпочинаються з найбільш простих математичних об'єктів — орієнтованих множин та примітивних мінливих множин (підрозділи 1.2–1.7 розділу 1). Далі досліджуються більш складні математичні об'єкти — базові мінливі множини (див. підрозділи 1.8–1.10 розділу 1) та (загальні) мінливі множини (див. підрозділи 1.12–1.14 розділу 1).

1.2. Орієнтовані множини та їхні властивості

Коли спробувати подивитися з найбільш абстрактної точки зору на на будь-яку картину реальної дійсності (область реальності), то можна лише сказати, що така картина в кожну мить свого існування складається з певних предметів (об'єктів). В процесі наукового дослідження заданої області реальності предмети з яких вона складається розбивають на дрібніші, елементарні, об'єкти, які ми будемо називати елементарними станами. Спосіб розбиття заданої області реальності на елементарні стани залежить від рівня наших знань про цю область, від необхідного для практики рівня деталізації досліджень, або ж від рівня фізико-математичної ідеалізації досліджуваної системи. В залежності від зазначених факторів елементарними станами можуть, бути, наприклад, положення матеріальної точки чи елементарної частинки в заданий момент часу, значення скалярного, векторного чи тензорного поля в заданій точці простору-часу, стан особини того чи іншого біологічного виду в заданий момент часу (в математичних моделях біології) та ін. І якщо б картина реальної дійсності не змінювалася з часом, то для опису такої картини реальної дійсності (в найбільш абстрактній формі) цілком би вистачило класичної теорії множин, коли елементарні стани ототожнюються з елементами певної множини. Проте, реальна дійсність мінлива. Елементарні стани в процесі еволюції можуть змінювати свої властивості, а

отже втрачати свою формально-математичну самототожність. Також елементарні стани можуть зникати або народжуватись, розпадатися на декілька елементарних станів, або ж, навпаки, декілька елементарних можуть зливатись в один. Але здоровий глузд підказує, що завжди, коли є можливість прослідкувати "лінії еволюції" досліджуваної системи, можна чітко відповісти на питання, чи є елементарний стан "y" результатом трансформацій (тобто "трансформаційним нащадком") елементарного стану "x". Отже, найпримітивнішу (стартову) модель сукупності мінливих об'єктів можна описати з допомогою наступного означення.

Означення 1.1. Нехай, M — довільна непорожня множина ($M \neq \emptyset$).

Довільне рефлексивне бінарне відношення $\lessdot\!\!-$ на M (тобто таке, що $\forall x \in M\ x \lessdot\!\!- x$) будемо називати **орієнтацією**, а пару $\mathcal{M} = (M, \lessdot\!\!-)$ будемо називати **орієнтованою множиною**. При цьому множину M будемо називати **базовою**, або множиною всіх **елементарних станів** орієнтованої множини $\mathcal{M}$ і будемо позначати її через $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, а відношення $\lessdot\!\!-$ будемо називати **напрямним відношенням змін (трансформацій)** $\mathcal{M}$ і будемо позначати його через $\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}$. Елементи множини $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ будемо називати **елементарними станами** орієнтованої множини $\mathcal{M}$.

У випадку, коли відомо, про яку орієнтовану множину $\mathcal{M}$ йде мова, в позначенні $\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}$ символ $\mathcal{M}$ будемо опускати, вживаючи позначення "$\leftarrow$". Для елементів $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ запис $y \leftarrow x$ слід розуміти, як "елементарний стан y є результатом трансформацій, або "трансформаційним нащадком" елементарного стану x".

Зауваження 1.2. 1. Певні спроби побудови абстрактних математичних структур для моделювання фізичних систем зроблено в роботах Піменова [16, 17, 52]. В цих роботах в якості базової абстрактної моделі запропоновано розглядати пару виду $(M, \prec)$, де M деяка множина і $\prec$ — бінарне локального слідування відношення на M, тобто відношення, що задовольняє такі умови:

(Pm1) не існує елементів $x, y \in M$ таких, що $x \prec y$ і $y \prec x$;

(Pm2) для довільного $p \in M$ відношення $\prec$ є транзитивним на множинах, $p_+ = \{x \in M \mid p \prec x\}$, $p_- = \{x \in M \mid x \prec p\}$.

Головним недоліком даного підходу є те, що автор відштовхувався не від абстрактно-філософських міркувань, а від конкретного прикладу відношення порядку, породженого "світловим конусом" у просторі часу Мінковського [17, стор. 15], що в свою чергу породило накладання додаткових штучних аксіом і зробило запропоновану модель недостатньо гнучкою. Зокрема, завдяки топологічним аксіомам TK_1-TK_3 [17], дана модель непридатна для опису процесів з дискретним часом (зазначимо, що дискретними аналогами моделі Піменова [16, 17, 52] можна вважати каузальні множини, розглянуті в підрозділі 1.1). Крім того побудова математичної моделі спеціальної теорії відносності на основі відношення порядку "світлового конусу" робить неможливою (або суттєво ускладнює) математично строгу побудову

тахіонової кінематики в рамках цієї моделі, в той час, як побудова формальної теорії тахіонів є одним з актуальних напрямків сучасної теоретичної і математичної фізики [53–59]. Зазначимо, що між моделями, запропонованими в [16, 17, 52] (разом з їхніми дискретними аналогами — каузальними множинами [47–51]) і нашою моделлю, запропонованою в означенні 1.1 існує відмінність в способі трактування. Справа в тому, що напрямне відношення змін в означенні 1.1, на відміну від відношення локального слідування $\prec$ в роботах [16,17,52] та відношення порядку в каузальних множинах, відображає лише **реальні** трансформації елементарних станів, модельованої системи, а не всі "потенційно можливі", "дозволені" (наприклад, порядком "світлового конусу" в просторі Мінковського). Отже, розглядаючи певну примітивну мінливу множину ми завжди уявляємо конкретну еволюцію якоїсь конкретної системи, а не який-небудь простір, в якому іде час і визначено порядок, який описує всі потенційно можливі напрямки еволюції систем в рамках цього "простору з часом".

Проте, з іншого боку, моделі робіт [16, 17, 52] можна розглядати як частинні випадки орієнтованих множин, визначених в означенні 1.1. Справді, розглянемо наступне бінарне відношення, $\preceq = \prec \cup \{(x,x) \mid x \in M\}$, тобто таке відношення, що для довільних $x, y \in M$ умова $x \preceq y$ має місце тоді і тільки тоді, коли $x \prec y$ або $x = y$. Використовуючи умову (Pm1) нескладно довести, що відношення $\prec$ однозначно відновлюється за відношенням $\preceq$, а саме $\prec = \preceq \setminus \{(x,x) \mid x \in M\}$. Отже, довільна модель виду $(M, \prec)$ з [16, 17, 52] є еквівалентною орієнтованій множині $(M, \preceq)$, але така орієнтована множина $(M, \preceq)$ є лише частинним випадком загальних орієнтованих множин, розглянутих в означенні 1.1.

2. M. Lachowicz в своїх роботах [60–66], розглядаючи загальні принципи побудови дискретночасових математичних моделей складних систем (перш за все біологічних систем) на мікроскопічному рівні опису, вводить до поняття внутрішнього мікроскопічного стану елемента системи, яке можна інтерпретувати як частинний випадок поняття елементарного стану введеного в означенні 1.1.

Нехай, $\mathcal{M}$ — орієнтована множина.

Означення 1.3. Непорожня підмножина $N \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ називається **транзитивною** в $\mathcal{M}$ якщо для довільних $x, y, z \in N$ з умов $z \leftarrow y$ і $y \leftarrow x$ випливає умова $z \leftarrow x$.

Транзитивна множина $N \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ називається **максимально транзитивною** в $\mathcal{M}$, якщо не існує транзитивної множини $N_1 \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, такої, що $N \subset N_1$ (підкреслимо, що тут знак $\subset$ означає строге включення, тобто $N \neq N_1$).

Транзитивна підмножина $L \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ називається **ланцюгом** в $\mathcal{M}$, якщо для довільних $x, y \in L$ має місце хоч одне із співвідношень $y \leftarrow x$ або $x \leftarrow y$. Ланцюг $L \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ називається **максимальним ланцюгом** в $\mathcal{M}$, якщо не існує ланцюга $L_1 \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ такого, що $L \subset L_1$.

Твердження 1.4. *Нехай, $\mathcal{M}$ — орієнтована множина.*

1. *Довільна непорожня підмножина $N \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, яка містить не більше, двох елементів є транзитивною.*
2. *Не більш, ніж двохелементна непорожня підмножина $L = \{x, y\} \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ є ланцюгом тоді і тільки тоді, коли $y \leftarrow x$ або $x \leftarrow y$. Зокрема одноелементна підмножина $L = \{x\} \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ завжди є ланцюгом.*

Доведення твердження 1.4 зводиться до тривіальної перевірки.

Надалі через $2^{\mathbf{M}}$ позначатимемо множину всіх підмножин (довільної) множини $\mathbf{M}$.

Лема 1.5. *Нехай, $\mathcal{M}$ — орієнтована множина.*

1. *Об'єднання довільної сукупності транзитивних множин $\mathcal{M}$, лінійно упорядковане відношенням включення є транзитивною множиною в $\mathcal{M}$.*
2. *Об'єднання довільної сукупності ланцюгів $\mathcal{M}$, лінійно упорядковане відношенням включення, є ланцюгом в $\mathcal{M}$.*

Доведення. **1.** Нехай, $\mathfrak{N} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ — деяка сукупність транзитивних множин в $\mathcal{M}$, лінійно упорядкована відношенням включення. Позначимо, $\widetilde{N} := \bigcup_{N \in \mathfrak{N}} N$. Розглянемо довільні елементарні стани $x, y, z \in \widetilde{N}$ такі, що $z \leftarrow y$ і $y \leftarrow x$. Оскільки $x, y, z \in \widetilde{N} = \bigcup_{N \in \mathfrak{N}} N$, то існують $N_x, N_y, N_z \in \mathfrak{N}$ такі, що $x \in N_x$, $y \in N_y$, $z \in N_z$. Оскільки сім'я множин $\mathfrak{N}$ — лінійно упорядкована відношенням включення, то знайдеться множина $N_0 \in \{N_x, N_y, N_z\} \subseteq \mathfrak{N}$ така, що $N_x, N_y, N_z \subseteq N_0$. Отже, $x, y, z \in N_0$. Оскільки $N_0 \in \{N_x, N_y, N_z\} \subseteq \mathfrak{N}$, то N_0 — транзитивна множина. Отже, з умов $z \leftarrow y$ і $y \leftarrow x$ випливає $z \leftarrow x$. Таким чином, $\widetilde{N}$ — транзитивна множина. **2.** Другий пункт леми доводиться аналогічно. □

Використовуючи лему 1.5 та лему Цорна, отримуємо наступне твердження.

Твердження 1.6.

1. Для довільної транзитивної множини N в орієнтованій множині $\mathcal{M}$ існує максимально транзитивна множина $N_{\max}$ така, що $N \subseteq N_{\max}$.

2. Для довільного ланцюга L в $\mathcal{M}$ існує максимальний ланцюг $L_{\max}$ такий, що $L \subseteq L_{\max}$.

Зауважимо, що на другий пункт твердження 1.6 можна дивитися, як на узагальнення принципу максимальності Хаусдорфа в рамках даної теорії.

З тверджень 1.6 та 1.4 випливають наступні наслідки.

Наслідок 1.7. *Для довільних двох елементів $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ в орієнтованій множині $\mathcal{M}$ існує максимально-транзитивна множина $N \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ така, що $x, y \in N$.*

Наслідок 1.8. *Для довільних елементів $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, таких, що $y \leftarrow x$ в орієнтованій множині $\mathcal{M}$ існує максимальний ланцюг $L \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ такий, що $x, y \in L$.*

Поклавши $x = y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ (нагадаємо, що, за означенням 1.1 $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) \neq \emptyset$), приходимо до висновку, що в довільній орієнтованій множині $\mathcal{M}$ завжди існують максимально-транзитивні множини і максимальні ланцюги.

Основні результати підрозділу 1.2 були анонсовані в роботі [67] і опубліковані в [68, розділ 2], а також представлено на конференціях [69–71].

1.3. Час на орієнтованих множинах. Примітивні мінливі множини.

В теоретичній фізиці звикли вважати моменти часу дійсними числами. Проте абстрактна математика може мати справу з об'єктами довільної потужності, зокрема більшої за континуум. У зв'язку з цим в роботах таких математиків, як Hajnal Andreka, Judit Madarasz, Istvan Nemeti, Gergely Szekely в якості часової шкали розглядається довільне упорядковане поле (див., наприклад, [21–24]), оскільки відомо, що упорядковані поля (зокрема нестандартні розширення поля дійсних чисел в сенсі [72]) можуть мати як завгодно велику потужність. Але, обмежившись упорядкованими полями, ми залишимо поза увагою проблему опису еволюції, наприклад, в дискретних часових шкалах. Тому, в даній абстрактній теорії, ми не будемо обмежуватись дійсночисловими моментами часу або моментами часу з довільного упорядкованого поля. І, як буде видно далі, відсутність умов на існування алгебраїчних операцій на часовій шкалі не заважає отриманню багатьох цікавих абстрактних результатів. В наступному означенні моменти часу є елементами довільної лінійно упорядкованої множини (в сенсі [73, с. 12]). Таке розуміння часу близьке до філософського, уявлення про час, як певний "хронологічний порядок", якось узгоджений з процесами змін (еволюції).

Означення 1.9. Нехай, $\mathcal{M}$ — орієнтована множина і $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — лінійно упорядкована множина. Відображення $\psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ називається **часом** на $\mathcal{M}$, якщо виконуються такі умови:

1) Для довільного елементарного стану $x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ існує елемент $t \in \mathbf{T}$ такий, що $x \in \psi(t)$.

2) Якщо $x_1, x_2 \in \mathcal{M}$, $x_2 \leftarrow x_1$ і $x_1 \neq x_2$, то існують елементи $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ такі, що $x_1 \in \psi(t_1)$, $x_2 \in \psi(t_2)$ і $t_1 < t_2$ (тобто має місце часова роздільність послідовних неоднакових елементарних станів).

При цьому:

- Елементи $t \in \mathbf{T}$ будемо називати **моментами часу**.
- Пару $\mathcal{H} = (\mathbb{T}, \psi) = ((\mathbf{T}, \leq), \psi)$ будемо називати **хронологізацією** $\mathcal{M}$.
- Трійку $\mathcal{P} = (\mathcal{M}, \mathbb{T}, \psi) = (\mathcal{M}, (\mathbf{T}, \leq), \psi)$ будемо називати **примітивною мінливою множиною**.

Будемо говорити, що орієнтовану множину $\mathcal{M}$ ***можна хронологізувати***, якщо існує хоч одна хронологізація $\mathcal{M}$. *Будь-яку орієнтовану множину завжди можна хронологізувати.* Щоб переконатись у цьому досить взяти лінійно-упорядковану множину $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$, що містить не менше двох елементів і покласти:

$$\psi(t) := \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) \qquad (t \in \mathbf{T}).$$

Легко перевірити, що для функції $\psi(\cdot)$ виконуються умови означення 1.9. Більш нетривіальні способи хронологізації орієнтованих множин будуть розглянуті в розділі 1.4. Наступні два твердження є тривіальними наслідками означення часу 1.9.

Твердження 1.10. *Нехай $\mathcal{M}$ і $\mathcal{M}_1$ — орієнтовані множини, причому $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}_1)$ і $\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow} \subseteq \underset{\mathcal{M}_1}{\leftarrow}$ (останнє включення означає, що для $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ з умови $y \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow} x$ випливає, що $y \underset{\mathcal{M}_1}{\leftarrow} x$). Якщо відображення $\psi_1 : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M}_1)}$ (де $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — лінійно упорядкована множина) є часом на $\mathcal{M}_1$, то відображення:*

$$\psi(t) = \psi_1(t) \cap \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) \qquad (t \in \mathbf{T})$$

є часом на $\mathcal{M}$.

Твердження 1.11. *Нехай, $\mathcal{M}$ — орієнтована множина і $\psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ час на $\mathcal{M}$. Тоді:*

(1) Якщо $\mathbf{T}_1 \subseteq \mathbf{T}$, $\mathbf{T}_1 \neq \emptyset$ і $\psi(t) = \emptyset$ для $t \in \mathbf{T} \setminus \mathbf{T}_1$, то звуження $\psi_1 = \psi \restriction \mathbf{T}_1$ відображення ψ на множину $\mathbf{T}_1$ (тобто відображення $\psi_1 : \mathbf{T}_1 \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ таке, що $\psi_1(t) = \psi(t)$, $t \in \mathbf{T}_1$) також є часом на $\mathcal{M}$.

(2) Якщо упорядкована множина $\mathbf{T}$ вкладена в лінійно упорядковану множину $\left(\tilde{\mathbf{T}}, \leq_1\right)$ (зі збереженням порядку)[1.1]*, то відображення $\tilde{\psi} : \tilde{\mathbf{T}} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$, що задається формулою, $\tilde{\psi}(t) = \begin{cases} \psi(t), & t \in \mathbf{T} \\ \emptyset, & t \in \tilde{\mathbf{T}} \setminus \mathbf{T} \end{cases}$ також є часом на $\mathcal{M}$.*

Твердження 1.11 ілюструє, що можна "викидати" моменти "повної смерті" з "хронологічної історії" примітивної мінливої множини, або ж "дописувати" такі моменти до її "хронологічної історії".

Основні результати підрозділу 1.2 були анонсовані в роботі [67] і опубліковані в [68, розділ 3], а також представлено на конференціях [69–71].

1.4. Точковий та монотонний час. Теореми про хронологізацію

Означення 1.12. Нехай $(\mathcal{M}, \mathbb{T}, \psi) = (\mathcal{M}, (\mathbf{T}, \leq), \psi)$ — примітивна мінлива множина.

[1.1] Це означає, що $\mathbf{T} \subseteq \tilde{\mathbf{T}}$ і для довільних $x, y \in \mathbf{T}$ співвідношення $x \leq y$ виконується тоді і тільки тоді, коли $x \leq_1 y$.

1) Час ψ будемо називати **квазіточковим**, якщо для довільного $t \in \mathbf{T}$ множина $\psi(t)$ є одноелементною.

2) Час ψ будемо називати **точковим**, якщо виконуються наступні умови:

(а) час ψ є квазіточковим;

(б) для довільних $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ з умов $x_1 \in \psi(t_1)$, $x_2 \in \psi(t_2)$ і $t_1 \leq t_2$, випливає $x_2 \leftarrow x_1$.

3) Час ψ будемо називати **монотонним**, якщо для будь-яких елементарних станів $x_1 \in \psi(t_1)$ і $x_2 \in \psi(t_2)$ з умов $x_2 \leftarrow x_1$ і $x_1 \not\leftarrow x_2$ випливає $t_1 < t_2$.

Якщо час ψ є квазіточковим (точковим/монотонним), то хронологізацію $(\mathbb{T}, \psi)$ орієнтованої множини $\mathcal{M}$ будемо називати квазіточковою (точковою/монотонною) відповідно.

Приклад 1.13. Розглянемо довільне відображення $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ $(d \in \mathbb{N})$. Таке відображення можна трактувати як рівняння руху деякої матеріальної точки в просторі $\mathbb{R}^d$. Відображення f породжує орієнтовану множину $\mathcal{M} = \left(\mathfrak{Bs}(\mathcal{M}), \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}\right)$, де $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) = \mathfrak{R}(f) = \{f(t) \,|\, t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^d$ і для $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, співвідношення $y \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow} x$ виконується тоді і тільки тоді, коли існують $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ такі, що $x = f(t_1)$, $y = f(t_2)$ і $t_1 \leq t_2$. Легко перевірити, що відображення:

$$\psi(t) = \{f(t)\} \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}), \quad t \in \mathbb{R}$$

є точковим часом на $\mathcal{M}$.

Приклад 1.13 пояснює зміст терміну “точковий час”. Очевидно, що *будь-який точковий час є квазіточковим і монотонним.* Взагалі кажучи квазіточковий час може бути не монотонним, а отже не точковим. Монотонний час також може бути не квазіточковим, а отже і не точковим. Нижче наводяться приклади для підтвердження сказаного.

Приклад 1.14. Розглянемо довільну двохелементну множину $M = \{x_1, x_2\}$ $(x_1 \neq x_2)$. Визначимо орієнтовану множину $\mathcal{M} = \left(\mathfrak{Bs}(\mathcal{M}), \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}\right)$ наступним чином: $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) = M = \{x_1, x_2\}$, $\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow} = \{(x_2, x_1), (x_1, x_1), (x_2, x_2)\}$ (тобто $x_2 \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow} x_1$, $x_1 \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow} x_1$, $x_2 \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow} x_2$). Зауважимо, що напрямне відношення змін, $\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}$ може бути представлене в більш лаконічній формі: $\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow} = \{(x_2, x_1)\} \cup \mathsf{diag}(M)$, де $\mathsf{diag}(M) = \{(x, x) \,|\, x \in M\}$. Розглянемо лінійно упорядковану множину $\mathbb{T} = (\mathbb{R}, \leq)$ (зі звичним порядком на полі дійсних чисел). Час $\psi : \mathbb{R} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ на орієнтованій множині $\mathcal{M}$ визначимо наступним чином: $\psi(t) := \begin{cases} \{x_1\}, & t \notin \mathbb{Q} \\ \{x_2\}, & t \in \mathbb{Q} \end{cases}$, де через $\mathbb{Q}$ позначено поле раціональних чисел. Легко перевірити, що таке відображення $\psi(\cdot)$ справді є часом на $\mathcal{M}$, тобто задовольняє умови означення 1.9. Оскільки для довільного $t \in \mathbb{R}$ множина $\psi(t)$ завжди є одноелементною, то такий час ψ є квазіточковим. Поклавши $t_1 = \sqrt{2}$, $t_2 = 1$, отримаємо $x_1 \in \psi(t_1)$, $x_2 \in \psi(t_2)$, $x_2 \leftarrow x_1$, $x_1 \not\leftarrow x_2$, проте $t_1 > t_2$. Отже, час ψ не є монотонним.

Приклад 1.15. Розглянемо довільну чотириелементну множину $M = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ($x_i \neq x_j$ при $i \neq j$). Побудуємо орієнтовану множину $\mathcal{M} = \left(\mathfrak{Bs}(\mathcal{M}), \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}\right)$, де $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) = M = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow} = \{(x_2, x_1), (x_4, x_3)\} \cup \mathbf{diag}(M)$. Розглянемо лінійно упорядковану множину $\mathbb{T} = (\{1, 2\}, \leq)$ (зі звичним порядком на полі дійсних чисел). Час на орієнтованій множині $\mathcal{M}$ визначимо наступним чином $\psi(t) := \begin{cases} \{x_1, x_3\}, & t = 1 \\ \{x_2, x_4\}, & t = 2 \end{cases}$. Легко перевірити, що $\psi(\cdot)$ є монотонним, але не квазіточковим, часом на $\mathcal{M}$.

Виявляється, що квазіточковий і монотонний час також може бути не точковим. Цей факт можна довести з допомогою наступного прикладу.

Приклад 1.16. Нехай орієнтована множина $\mathcal{M}$ така ж сама, як і в прикладі 1.15. Розглянемо лінійно упорядковану множину $\mathbb{T} = (\{1, 2, 3, 4\}, \leq) = \left(\overline{1, 4}, \leq\right)$ (зі звичним порядком на полі дійсних чисел), де $\overline{k, n} = \{k, \ldots, n\}$ ($k, n \in \mathbb{Z},\ k \leq n$). Час на орієнтованій множині $\mathcal{M}$ визначимо наступним чином, $\psi(t) := \{x_t\}$ $\left(t \in \overline{1, 4}\right)$. Легко перевірити, що відображення $\psi(t)$ є квазіточковим і монотонним часом на $\mathcal{M}$. Поклавши $t_1 := 2$, $t_2 := 3$, отримаємо $x_2 \in \psi(t_1)$, $x_3 \in \psi(t_2)$, $t_1 \leq t_2$, проте $x_3 \not\leftarrow x_2$. Отже, час ψ не є точковим.

Означення 1.17. Орієнтовану множину $\mathcal{M}$ будемо називати **ланцюговою**, якщо вся множина $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ є ланцюгом $\mathcal{M}$ тобто якщо відношення $\leftarrow$ є транзитивним на $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ і для довільних $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ виконується хоча б одна з умов $x \leftarrow y$ або $y \leftarrow x$.

Орієнтовану множину $\mathcal{M}$ будемо називати **циклічною**, якщо для довільних $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ мають місце обидва співвідношення $x \leftarrow y$ і $y \leftarrow x$.

Очевидно, що будь-яка циклічна орієнтована множина є ланцюговою.

Лема 1.18. *Будь-яку циклічну орієнтовану множину можна точково хронологізувати.*

Доведення. Нехай $\mathcal{M}$ — циклічна орієнтована множина. За означенням орієнтованої множини, $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) \neq \emptyset$. Розглянемо довільні дві множини $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$, рівнопотужні множині $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, такі, що $\mathbf{T}_1 \cap \mathbf{T}_2 = \emptyset$. (Такі множини обов'язково існують. Щоб переконатись в цьому досить покласти $\mathbf{T}_1 := \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, а множину $\mathbf{T}_2$ можна побудувати з елементів множини $\tilde{\mathbf{T}} = 2^{\mathbf{T}_1} \setminus \mathbf{T}_1$, оскільки потужність такої множини $\tilde{\mathbf{T}}$ завжди **не** менша за потужність $\mathbf{T}_1$.) Нехай $\trianglelefteq_i$ ($i = 1, 2$) — довільні відношення лінійного порядку на $\mathbf{T}_i$ (такі відношення лінійного порядку існують, оскільки в якості $\trianglelefteq_i$ ($i = 1, 2$) можна взяти відношення повного порядку, які дає теорема Цермело). Позначимо:

$$\mathbf{T} := \mathbf{T}_1 \cup \mathbf{T}_2.$$

На множині $\mathbf{T}$ побудуємо наступне бінарне відношення:

$$\leq = \trianglelefteq_1 \cup \trianglelefteq_2 \cup \{(t, \tau) \mid t \in \mathbf{T}_1,\ \tau \in \mathbf{T}_2)\},$$

тобто, іншими словами, для $t, \tau \in \mathbf{T}$ співвідношення $t \leq \tau$ виконується тоді і тільки тоді, коли виконується хоч одна з наступних умов:

(O1) $t, \tau \in \mathbf{T}_i$ і $t \trianglelefteq_i \tau$ (для деякого $i \in \{1, 2\}$);
(O2) $t \in \mathbf{T}_1$, $\tau \in \mathbf{T}_2$.

Тоді пара $(\mathbf{T}, \leq)$ є порядковою сумою лінійно упорядкованих множин $(\mathbf{T}_1, \trianglelefteq)$ і $(\mathbf{T}_2, \trianglelefteq_2)$. Отже, згідно з [74, стор. 218], $(\mathbf{T}, \leq)$ є лінійно упорядкованою множиною. Нехай $f : \mathbf{T}_2 \to \mathbf{T}_1$ — довільна бієкція (взаємно-однозначна відповідність) між (рівнопотужними) множинами $\mathbf{T}_1$ і $\mathbf{T}_2$. Нехай, також, $g : \mathbf{T}_1 \to \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ — довільна бієкція між (рівнопотужними) множинами $\mathbf{T}_1$ і $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$.

Тоді неважко перевірити, що відображення $\psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$:

$$\psi(t) := \begin{cases} \{g(t)\}, & t \in \mathbf{T}_1; \\ \{g(f(t))\}, & t \in \mathbf{T}_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

є точковим часом на орієнтованій множині $\mathcal{M}$. □

Теорема 1.19. *Будь-яку ланцюгову орієнтовану множину можна точково хронологізувати.*

Доведення. Нехай $\mathcal{M}$ — ланцюгова орієнтована множина. Тоді вся множина $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ є ланцюгом орієнтованої множини $\mathcal{M}$, тобто відношення $\leftarrow = \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}$ є квазі-порядком [1.2] на $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$.

Будемо говорити, що елементи $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ є *циклічно еквівалентними* (позначення $x \overset{\mathbf{o}}{\equiv} y$), якщо $x \leftarrow y$ і $y \leftarrow x$. Згідно з [73, стор. 37], відношення $\overset{\mathbf{o}}{\equiv}$ є відношенням еквівалентності на $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$. Нехай, F_1 і F_2 — довільні два класи еквівалентності, породжені відношенням $\overset{\mathbf{o}}{\equiv}$. Будемо позначати $F_2 \lessdot F_1$, якщо для довільних елементів $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2$ справедливо $x_2 \leftarrow x_1$. Згідно з [73, стор. 37], відношення $\lessdot$ є відношенням порядку на фактор-множині $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})/\overset{\mathbf{o}}{\equiv}$ всіх класів еквівалентності, породжених відношенням $\overset{\mathbf{o}}{\equiv}$. Доведемо, що цей порядок — лінійний. Нехай $F_1, F_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})/\overset{\mathbf{o}}{\equiv}$. Оскільки F_1 і F_2 є класами еквівалентності, то вони непорожні, отже існують елементи $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2$. Оскільки орієнтована множина $\mathcal{M}$ є ланцюговою, то хоч одне із співвідношень $x_2 \leftarrow x_1$ або $x_1 \leftarrow x_2$ повинно мати місце. Проте оскільки будь-які два елементи, що належать до одного і того ж класу еквівалентності є циклічно еквівалентними, у випадку $x_2 \leftarrow x_1$ маємо $F_2 \lessdot F_1$, а у випадку $x_1 \leftarrow x_2$ отримаємо $F_1 \lessdot F_2$. Отже, $(\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})/\overset{\mathbf{o}}{\equiv}, \lessdot)$ є лінійно упорядкованою множиною.

Будь-який клас еквівалентності $F \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})/\overset{\mathbf{o}}{\equiv}$ є циклічною орієнтованою множиною відносно відношення $\leftarrow$ (звуженого на цей клас). Тому, згідно з лемою

[1.2] Нагадаємо, що відповідно до [73] будь-яке рефлексивне і транзитивне бінарне відношення $\preceq$, визначене на деякій множині $\mathbf{X}$ називається квазі-порядком на $\mathbf{X}$.

1.18, кожен такий клас еквівалентності можна точково хронологізувати. Нехай $(\mathbb{T}_F, \psi_F) = ((\mathbf{T}_F, \leq_F), \psi_F)$ — точкова хронологізація довільного класу еквівалентності $F \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})/\overset{\circ}{\equiv}$. Не обмежуючи загальності можна вважати, що $\mathbf{T}_F \cap \mathbf{T}_G = \emptyset$ при $F \neq G$. Справді, в протилежному випадку можна перейти до множин:

$$\tilde{\mathbf{T}}_F = \{(t, F) : t \in \mathbf{T}_F\} \quad \left(F \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})/\overset{\circ}{\equiv}\right),$$

з порядком, $(t_1, F) \lesssim_F (t_2, F) \Longleftrightarrow t_1 \leq_F t_2$ $(t_1, t_2 \in \mathbf{T}_F)$, $(F \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})/\overset{\circ}{\equiv})$ і часами, $\tilde{\psi}_F((t, F)) = \psi_F(t)$ $(t \in \mathbf{T}_F)$, $(F \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})/\overset{\circ}{\equiv})$, які також, очевидно, є точковими.

Отже, будемо вважати, що $\mathbf{T}_F \cap \mathbf{T}_G = \emptyset$, $F \neq G$. Позначимо:

$$\mathbf{T} := \bigcup_{F \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})/\overset{\circ}{\equiv}} \mathbf{T}_F.$$

Відповідно до введеного позначення, для кожного елемента $t \in \mathbf{T}$ існує клас еквівалентності $F(t) \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})/\overset{\circ}{\equiv}$ такий, що $t \in \mathbf{T}_{F(t)}$. І оскільки $\mathbf{T}_F \cap \mathbf{T}_G = \emptyset$ при $F \neq G$, то такий клас еквівалентності $F(t)$ для довільного елемента $t \in \mathbf{T}$ — єдиний, тобто для довільного $t \in \mathbf{T}$ з умови $t \in \mathbf{T}_F$ $(F \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})/\overset{\circ}{\equiv})$ випливає, що $F = F(t)$.

Для довільних елементів $t, \tau \in \mathbf{T}$ будемо позначати $t \leq \tau$ тоді і тільки тоді, коли виконується хоч одна з умов:

(П1) $F(t) \neq F(\tau)$ і $F(\tau) \not\leftarrow F(t)$.

(П2) $F(t) = F(\tau)$ і $t \leq_{F(t)} \tau$.

Пара $(\mathbf{T}, \leq)$ являє собою впорядковану суму (лінійно впорядкованої) сім'ї $(\mathbf{T}_F)_{F \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})/\overset{\circ}{\equiv}}$ лінійно впорядкованих множин $(\mathbf{T}_F, \leq_F)$ (де $F \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})/\overset{\circ}{\equiv}$) в сенсі [74]. Тому, згідно [74, стор. 218], $\leq$ є відношенням лінійного порядку на $\mathbf{T}$.

Покладемо:

$$\psi(t) := \psi_{F(t)}(t), \qquad (t \in \mathbf{T}). \tag{1.2}$$

Безпосередня перевірка показує, що відображення (1.2) є точковим часом на $\mathcal{M}$. $\square$

Проблему існування точкового часу на орієнтованій множині остаточно розв'язано в роботі [75] (див. також [76]). Нижче у теоремі 1.21 викладається основний результат зазначеної роботи без доведення у зв'язку із його громіздкістю.

Означення 1.20. Нехай $\mathcal{M}$ – орієнтована множина. Для довільних $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ будемо позначати $y \overset{+}{\leftarrow} x$ тоді і тільки тоді, коли $y \leftarrow x$ і $x \not\leftarrow y$. Орієнтовану множину $\mathcal{M}$ будемо називати **квазіланцюговою**, якщо для довільних $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ має місце хоча б одне із співвідношень $x_2 \leftarrow x_1$ або $x_1 \leftarrow x_2$ і для довільних $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ з умов $x_3 \overset{+}{\leftarrow} x_2$, $x_2 \leftarrow x_1$, $x_1 \overset{+}{\leftarrow} x_0$ випливає співвідношення $x_3 \overset{+}{\leftarrow} x_0$.

Теорема 1.21 (ZF+AC, [75]). *Для того, щоб орієнтовану множину $\mathcal{M}$ можна було точково хронологізувати необхідно і достатньо, щоб вона була квазіланцюговою.*

Доведення теореми 1.21 можна знайти в роботі [76] та препринті [77].

Теорема 1.22. *Будь-яку орієнтовану множину можна хронологізувати квазіточково.*

Доведення. **1.** Нехай, $\mathcal{M}$ — орієнтована множина. Позначимо через $\mathfrak{L}$ множину всіх максимальних ланцюгів множини $\mathcal{M}$. Згідно з теоремою 1.19, для кожного ланцюга $L \in \mathfrak{L}$ існує деяка точкова хронологізація $((\mathbf{T}_L, \leq_L), \psi_L)$ орієнтованої множини $(L, \leftarrow)$. Як і в доведенні теореми 1.19, не обмежуючи загальності можна вважати, що $\mathbf{T}_L \cap \mathbf{T}_M = \emptyset$, $L \neq M$. Покладемо:

$$\mathbf{T} := \bigcup_{L \in \mathfrak{L}} \mathbf{T}_L. \tag{1.3}$$

Нехай $\trianglelefteq$ — довільний лінійний порядок на множині $\mathfrak{L}$ (існування такого лінійного (і, навіть, повного) порядку гарантує теорема Цермело). Із співвідношення (1.3) випливає, що для довільного елемента $t \in \mathbf{T}$ існує ланцюг $L(t) \in \mathfrak{L}$ такий, що $t \in \mathbf{T}_{L(t)}$. І оскільки $\mathbf{T}_F \cap \mathbf{T}_G = \emptyset$ при $F \neq G$, то такий ланцюг $L(t)$ для елемента $t \in \mathbf{T}$ єдиний, тобто для довільного елемента $t \in \mathbf{T}$ з умови $t \in \mathbf{T}_L$ (де $L \in \mathfrak{L}$) випливає, що $L = L(t)$. Нехай $t, \tau \in \mathbf{T}$. Будемо позначати $t \leq \tau$ тоді і тільки тоді, коли виконується хоч одна з умов:

(П1) $L(t) \neq L(\tau)$ і $L(t) \trianglelefteq L(\tau)$.

(П2) $L(t) = L(\tau)$ і $t \leq_{L(t)} \tau$.

Пара $(\mathbf{T}, \leq)$ являє собою впорядковану суму (лінійно впорядкованої) сім'ї $(\mathbf{T}_L)_{L \in \mathfrak{L}}$ лінійно впорядкованих множин $(\mathbf{T}_L, \leq_L)$ (де $L \in \mathfrak{L}$). Тому, згідно [74, стор. 218], $(\mathbf{T}, \leq)$ є лінійно впорядкованою множиною. Покладемо:

$$\psi(t) := \psi_{L(t)}(t) \qquad (t \in \mathbf{T}). \tag{1.4}$$

2. Нескладно перевірити, що відображення $\psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$, задане (1.4), є часом. Оскільки часи $\{\psi_L | L \in \mathfrak{L}\}$ є точковими, то з (1.4) випливає, що для довільного $t \in \mathbf{T}$ множина $\psi(t)$ є одноелементною. Отже, час ψ є квазіточковим. □

Зрозуміло, що якщо в орієнтованій множині $\mathcal{M}$ існують елементарні стани $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ такі, що $x_2 \not\leftarrow x_1$ і $x_1 \not\leftarrow x_2$, то таку орієнтовану множину точково хронологізувати **неможливо**. Отже, не кожну орієнтовану множину можна точково хронологізувати.

Твердження 1.23. *Якщо в орієнтованій множині $\mathcal{M}$, існують елементарні стани $x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ такі, що $x_2 \leftarrow x_1$, $x_1 \not\leftarrow x_2$, $x_3 \leftarrow x_2$, $x_2 \not\leftarrow x_3$, $x_1 \leftarrow x_3$, $x_1 \neq x_3$, то таку орієнтовану множину неможливо монотонно хронологізувати.*

Доведення. Нехай в орієнтованій множині $\mathcal{M}$, існують елементарні стани x_1, x_2, x_3, що задовольняють умови твердження. Припустимо, що існує монотонна хронологі-

зація $((\mathbf{T}, \leq), \psi)$ цієї орієнтованої множини, тобто, відображення ψ є монотонним часом на $\mathcal{M}$. Оскільки $x_1 \leftarrow x_3$ і $x_1 \neq x_3$, то, за означенням часу, існують моменти часу $t_1, t_3 \in \mathbf{T}$, такі, що $x_1 \in \psi(t_1)$, $x_3 \in \psi(t_3)$ і $t_3 < t_1$. Також, за означенням часу, існує момент часу $t_2 \in \mathbf{T}$, такий, що $x_2 \in \psi(t_2)$. Тоді, за означенням монотонного часу, з умов $x_2 \leftarrow x_1$, $x_1 \not\leftarrow x_2$, $x_3 \leftarrow x_2$, $x_2 \not\leftarrow x_3$ отримуємо, $t_1 < t_2$, $t_2 < t_3$. Отже, $t_1 < t_3$ що суперечить нерівності $t_3 < t_1$. Тому припущення про існування монотонної хронологізації $\mathcal{M}$ — помилкове. □

Основні результати підрозділу 1.4 були анонсовані в роботах [67,75] і опубліковані в [68, розділ 4], [76], а також представлено на конференціях [78–80].

1.5. Час і одночасність. Внутрішній час

Означення 1.24. Нехай $(\mathcal{M}, \mathbb{T}, \psi) = (\mathcal{M}, (\mathbf{T}, \leq), \psi)$ — примітивна мінлива множина. Множину

$$Y_\psi = \{\psi(t) \mid t \in \mathbf{T}\}$$

будемо називати **множиною одночасних станів**, породженою часом ψ.

Безпосередньо з означення часу 1.9 випливає наступне твердження.

Твердження 1.25. *Нехай $(\mathcal{M}, \mathbb{T}, \psi) = (\mathcal{M}, (\mathbf{T}, \leq), \psi)$ — примітивна мінлива множина, а Y_ψ — множина одночасних станів, породжена часом ψ. Тоді $\bigcup_{A \in Y_\psi} A = \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$.*

Означення 1.26. Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина. Довільну сім'ю множин $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ таку, що $\bigcup_{A \in \mathbf{Y}} A = \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ будемо називати **одночасністю** на $\mathcal{M}$.

Нехай $\mathbf{Y}$ — одночасність на орієнтованій множині $\mathcal{M}$ і $A, B \in \mathbf{Y}$. Будемо позначати $B \leftarrow A$ (або $B \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow} A$) тоді і тільки тоді, коли:

$$A = B = \emptyset \quad \text{або} \quad \exists\, x \in A\, \exists\, y \in B\ (y \leftarrow x)\,.$$

Безпосередньо з означень 1.26 та 1.1 випливає наступна лема:

Лема 1.27. *Нехай $\mathbf{Y}$ — одночасність на орієнтованій множний $\mathcal{M}$. Тоді пара $(\mathbf{Y}, \leftarrow)$ також є орієнтованою множиною.*

Теорема 1.28. *Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина і $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ — одночасність на $\mathcal{M}$. Тоді на орієнтованій множині $\mathcal{M}$ існує час ψ такий, що $\mathbf{Y} = Y_\psi$, де Y_ψ — множина одночасних станів, породжена часом ψ.*

Доведення. Нехай, $\mathcal{M}$ — орієнтована множина і $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ — одночасність на $\mathcal{M}$.

a) Спочатку доведемо теорему у випадку, коли одночасність $\mathbf{Y}$ "розділяє" неоднакові послідовні елементарні стани, тобто коли виконується умова:

(Rp) Для довільних $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ таких, що $y \leftarrow x$ і $x \neq y$ існують множини $A, B \in \mathbf{Y}$ такі, що $x \in A$, $y \in B$ і $A \neq B$.

Згідно з лемою 1.27, пара $(\mathbf{Y}, \leftarrow)$ є орієнтованою множиною. За теоремою 1.22, орієнтовану множину $(\mathbf{Y}, \leftarrow)$ можна квазіточково хронологізувати. Нехай $\Psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathbf{Y}}$ — квазіточковий час на $(\mathbf{Y}, \leftarrow)$. За означенням квазіточкового часу, для довільного $t \in \mathbf{T}$ множина $\Psi(t)$ є одноелементною. Це означає, що

$$\forall\, t \in \mathbf{T}\ \exists A_t \in \mathbf{Y} \quad \Psi(t) = \{A_t\}\,. \tag{1.5}$$

Позначимо:

$$\psi(t) := A_t \quad (t \in \mathbf{T}).$$

Доведемо, що ψ — час на $\mathcal{M}$. Оскільки Ψ — час на $(\mathbf{Y}, \leftarrow)$, то $\bigcup_{t \in \mathbf{T}} \Psi(t) = \mathbf{Y}$. Отже, враховуючи, що відповідно до (1.5) $\Psi(t) = \{A_t\}$, $t \in \mathbf{T}$, отримуємо $\{A_t \mid t \in \mathbf{T}\} = \mathbf{Y}$. Тому, оскільки система множин $\mathbf{Y}$ є одночасністю, то $\bigcup_{t \in \mathbf{T}} \psi(t) = \bigcup_{t \in \mathbf{T}} A_t = \bigcup_{A \in \mathbf{Y}} A = \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$. Тобто, для довільного $x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ існує момент часу $t \in \mathbf{T}$ такий, що $x \in \psi(t)$. Таким чином, перша умова означення часу 1.9 — виконується. Доведемо, що виконується і друга умова означення 1.9. Нехай $x, y \in M$, $y \leftarrow x$ і $x \neq y$. Згідно з умовою (Rp) існують множини $A, B \in \mathbf{Y}$ такі, що $x \in A$, $y \in B$ і $A \neq B$. Беручи до уваги, що $x \in A$, $y \in B$ і $y \leftarrow x$, отримуємо $B \leftarrow A$. Оскільки $B \leftarrow A$, $A \neq B$ і Ψ — час на $(\mathbf{Y}, \leftarrow)$, існують моменти часу $t, \tau \in \mathbf{T}$ такі, що $A \in \Psi(t)$, $B \in \Psi(\tau)$ і $t < \tau$. Звідси, враховуючи, що $\Psi(t) = \{A_t\}$, $\Psi(\tau) = \{A_\tau\}$, отримуємо, $A = A_t$, $B = A_\tau$, тобто $A = \psi(t)$, $B = \psi(\tau)$. Отже, оскільки $x \in A$, $y \in B$, то $x \in \psi(t)$, $y \in \psi(\tau)$, де $t < \tau$.

Таким чином, ψ — час на $\mathcal{M}$. Крім того, враховуючи доведене вище, отримуємо, $Y_\psi = \{\psi(t) \mid t \in \mathbf{T}\} = \{A_t \mid t \in \mathbf{T}\} = \mathbf{Y}$.

Отже, у випадку виконання умови (Rp) твердження теореми доведено.

б) Нехай, тепер одночасність $\mathbf{Y}$ не задовольняє умови (Rp). Розглянемо довільний елемент $\tilde{x}$, що не належить до множини $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$. Покладемо:

$$\tilde{M} := \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) \cup \{\tilde{x}\}\,.$$

для елементів $x, y \in \tilde{M}$ будемо позначати $y \widetilde{\leftarrow} x$ і тоді і тільки тоді, коли виконується хоч одна з умов

$$\text{(a) } x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) \text{ і } y \leftarrow x; \qquad \text{(b) } x = y = \tilde{x}.$$

Тобто, бінарне відношення $\widetilde{\leftarrow}$ можна виразити за допомогою формули, $\widetilde{\leftarrow} = \leftarrow \cup \{(\tilde{x}, \tilde{x})\}$. Враховуючи, що для $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ умова $y \widetilde{\leftarrow} x$ рівносильна умові $y \leftarrow x$, надалі для відношень $\widetilde{\leftarrow}$ і $\leftarrow$ будемо використовувати одне і те ж позначення $\leftarrow$, вважаючи, що відношення $\leftarrow$ просто розширено на множину $\tilde{M}$. Легко перевірити, що $\left(\tilde{M}, \leftarrow\right)$ є орієнтованою множиною. Покладемо:

$$\mathbf{Y}_0 := \{B \in \mathbf{Y} \mid \exists x, y \in B :\ x \neq y,\ y \leftarrow x\}\,.$$

Оскільки, за припущенням, умова (Rp) не виконується, то $\mathbf{Y}_0 \neq \emptyset$. Для $B \in \mathbf{Y}_0$ введемо позначення, $\tilde{B} := B \cup \{\tilde{x}\}$. Також покладемо, $\tilde{\mathbf{Y}}_0 := \left\{\tilde{B} \mid B \in \mathbf{Y}_0\right\}$, $\tilde{\mathbf{Y}} := \mathbf{Y} \cup \tilde{\mathbf{Y}}_0$. Оскільки $\mathbf{Y}$ є одночасністю на $\mathcal{M}$, і $\tilde{x} \in \tilde{B}$ для довільної множини $\tilde{B} \in \tilde{\mathbf{Y}}_0$, то $\tilde{\mathbf{Y}}$ є одночасністю на $\left(\tilde{M}, \leftarrow\right)$. Одночасність $\tilde{\mathbf{Y}}$ вже буде задовольняти умову (Rp). Тому, згідно з доведеним в пункті а), існує час $\psi_1 : \mathbf{T} \to 2^{\tilde{M}}$ на $\left(\tilde{M}, \leftarrow\right)$ такий, що $Y_{\psi_1} = \{\psi_1(t) \mid t \in \mathbf{T}\} = \tilde{\mathbf{Y}}$. Покладемо:

$$\psi(t) := \psi_1(t) \cap \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}), \quad t \in \mathbf{T}.$$

Згідно з твердженням 1.10, ψ є часом на $\mathcal{M}$. Крім того, маємо:

$$\begin{aligned} Y_\psi &= \{\psi(t) \mid t \in \mathbf{T}\} = \{\psi_1(t) \cap \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) \mid t \in \mathbf{T}\} = \\ &= \left\{A \cap \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) \mid A \in \tilde{\mathbf{Y}}\right\} = \{A \cap \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) \mid A \in \mathbf{Y}\} \cup \left\{A \cap \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) \mid A \in \tilde{\mathbf{Y}}_0\right\} = \\ &= \{A \mid A \in \mathbf{Y}\} \cup \left\{\tilde{B} \cap \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) \mid B \in \mathbf{Y}_0\right\} = \mathbf{Y} \cup \{B \mid B \in \mathbf{Y}_0\} = \mathbf{Y} \cup \mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}. \end{aligned}$$

□

Означення 1.29. Нехай $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ — довільна одночасність на $\mathcal{M}$. Час ψ на $\mathcal{M}$ будемо називати **породжуючим** для одночасності $\mathbf{Y}$, якщо $\mathbf{Y} = Y_\psi$, де Y_ψ — множина одночасних станів, породжених часом ψ.

Таким чином, теорема 1.28 стверджує, що будь-яка одночасність $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ на довільній орієнтованій множині $\mathcal{M}$ має породжуючий час. Нижче буде розглянуто питання про єдиність (при певних обмеженнях) породжуючого часу одночасності. Для того, щоб постановка питання про таку "єдиність" була коректною, спочатку буде сформульовано означення еквівалентності хронологізацій.

Означення 1.30. Нехай, $\mathcal{M}$ — орієнтована множина і $\psi_1 : \mathbf{T}_1 \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$, $\psi_2 : \mathbf{T}_2 \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ деякі часи для $\mathcal{M}$, визначені на лінійно упорядкованих множинах $(\mathbf{T}_1, \leq_1)$ і $(\mathbf{T}_2, \leq_2)$ відповідно. Хронологізації $\mathcal{H}_1 = ((\mathbf{T}_1, \leq_1), \psi_1)$ та $\mathcal{H}_2 = ((\mathbf{T}_2, \leq_2), \psi_2)$ будемо називати **еквівалентними** (позначення $\mathcal{H}_1 \upuparrows \mathcal{H}_2$), якщо існує взаємно однозначна відповідність $\xi : \mathbf{T}_1 \to \mathbf{T}_2$ така, що:

1) ξ є порядковим ізоморфізмом між $\mathbf{T}_1$ і $\mathbf{T}_2$, тобто $\xi : \mathbf{T}_1 \to \mathbf{T}_2$ — бієкція між $\mathbf{T}_1$ та $\mathbf{T}_2$ і для довільних $t, \tau \in \mathbf{T}_1$ нерівність $t \leq_1 \tau$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\xi(t) \leq_2 \xi(\tau)$.

2) Для довільного $t \in \mathbf{T}_1$ має місце рівність $\psi_1(t) = \psi_2(\xi(t))$.

Використовуючи означення 1.30, нескладно перевірити істинність наступного твердження:

Твердження 1.31. *Нехай, $\mathcal{M}$ — орієнтована множина і $\mathcal{W}$ — довільна множина, що складається з хронологізацій $\mathcal{M}$. Тоді бінарне відношення $\upuparrows$ є відношенням еквівалентності на $\mathcal{W}$.*

Але, якщо, навіть, ставити питання про єдиність породжуючого часу одночасності з точністю до еквівалентності відповідних хронологізацій, то відповідь на поставлене питання є негативною. Так, наприклад, якщо $(\mathbf{T}, \leq)$ — лінійно упорядкована множина і при цьому:

- $\mathbf{T}_1$ — множина така, що $\emptyset \neq \mathbf{T}_1 \subset \mathbf{T} \quad (\mathbf{T}_1 \neq \mathbf{T})$;
- $\psi_1 : \mathbf{T}_1 \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ — час на орієнтованій множині $\mathcal{M}$;
- $t_1 \in \mathbf{T}_1$ — довільний елемент з $\mathbf{T}_1$,

то для часу $\psi(t) := \begin{cases} \psi_1(t), & t \in \mathbf{T}_1 \\ \psi_1(t_1), & t \in \mathbf{T} \setminus \mathbf{T}_1 \end{cases}$ $(t \in \mathbf{T})$ отримаємо $Y_\psi = Y_{\psi_1}$, хоча у випадку, коли лінійно упорядковані множини $\mathbf{T}$ і $\mathbf{T}_1$ не є порядково ізоморфними[1.3], хронологізації $((\mathbf{T}, \leq), \psi)$ і $((\mathbf{T}_1, \leq), \psi_1)$ не є еквівалентними. Тому для того, щоб отримати позитивну відповідь на поставлене питання, нижче будуть накладені додаткові умови як на одночасність, так і на породжуючий її час.

Означення 1.32. Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина.

1) Будемо говорити, що множина $B \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ **монотонно послідовна** множині $A \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ в орієнтованій множині $\mathcal{M}$ (використовуючи позначення $\boxed{B \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}(+)\, A}$), якщо існують такі елементи $x \in A$ і $y \in B$, що $y \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow} x$ і $x \underset{\mathcal{M}}{\not\leftarrow} y$.

2) Нехай $\mathcal{Q} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ — деяка система підмножин $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$. Будемо говорити, що множина $A \in \mathcal{Q}$ **транзитивно монотонно послідовна** множині $B \in \mathcal{Q}$ відносно $\mathcal{Q}$ (використовуючи позначення $\boxed{B \overset{\mathcal{Q}}{\twoheadleftarrow}\underset{\mathcal{M}}{(+)}\, A}$), якщо існує така послідовність множин $C_0, C_1, \cdots, C_n \in \mathcal{Q}$ $(n \in \mathbb{N})$, що $C_0 = A, C_n = B$ і для довільного $k \in \overline{1, n}$ $C_k \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}(+)\, C_{k-1}$.

У випадку, коли наперед відомо, про яку орієнтовану множину $\mathcal{M}$ йде мова, замість позначень $\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}(+)$ і $\overset{\mathcal{Q}}{\twoheadleftarrow}\underset{\mathcal{M}}{(+)}$ будемо вживати позначення $\leftarrow(+)$ і $\overset{\mathcal{Q}}{\twoheadleftarrow}(+)$ відповідно.

Зауваження 1.33. Для довільної системи множин $\mathcal{Q} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ відношення $\overset{\mathcal{Q}}{\twoheadleftarrow}(+)$ є *транзитивним замиканням* відношення $\leftarrow(+)$ в сенсі [81, стор 69] і неважко перевірити, що відношення $\overset{\mathcal{Q}}{\twoheadleftarrow}(+)$ ***є транзитивним*** на $\mathcal{Q}$.

Використовуючи означення 1.32 отримуємо наступне твердження:

Твердження 1.34. *Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина, $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}' \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ — системи підмножин множини $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, причому $\mathfrak{S} \sqsubseteq \mathfrak{S}'$ (тобто для довільної множини $A \in \mathfrak{S}$ існує множина $A' \in \mathfrak{S}'$ така, що $A \subseteq A'$).*

[1.3] упорядковані множини $\mathbf{T}$ і $\mathbf{T}_1$ не є порядково ізоморфними зокрема у випадку, коли $\mathbf{card}\,(\mathbf{T}_1) < \mathbf{card}\,(\mathbf{T})$, де $\mathbf{card}(M)$ — потужність множини M.

Тоді для довільних $A, B \in \mathfrak{S}$ *і* $A', B' \in \mathfrak{S}'$ *таких, що* $A \subseteq A'$, $B \subseteq B'$ *з умови* $B \overset{\mathfrak{S}}{\twoheadleftarrow}(+)\, A$ *випливає, що* $B' \overset{\mathfrak{S}'}{\twoheadleftarrow}(+)\, A'$.

Означення 1.35. Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина.

1) Систему множин $\mathfrak{S} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ будемо називати **неповторною**, якщо не існує множин $A, B \in \mathfrak{S}$ таких, що $A \overset{\mathfrak{S}}{\twoheadleftarrow}(+)\, B$ і $B \overset{\mathfrak{S}}{\twoheadleftarrow}(+)\, A$. Зокрема, якщо одночасність $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ є неповторною системою множин, будемо вживати термін **"неповторна одночасність"**.

2) Одночасність $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ будемо називати **чіткою**, якщо для довільних $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ таких, що $y \leftarrow x$ і $x \neq y$ існують множини $A, B \in \mathbf{Y}$ такі, що $x \in A$, $y \in B$, $A \neq B$ і $B \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(+)\, A$.

3) Одночасність $\mathbf{Y}$ будемо називати **чітко-неповторною**, якщо вона є чіткою і неповторною одночасно.

Твердження 1.36. *Нехай* $\mathcal{M}$ *— орієнтована множина і* $\mathfrak{S} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ *— неповторна система множин. Тоді:*

1) Бінарне відношення $\overset{\mathfrak{S}}{\twoheadleftarrow}(+)$ *є* строгим порядком *(антирефлексивним і транзитивним відношенням) на* $\mathfrak{S}$ *(зокрема для довільних* $A, B \in \mathfrak{S}$ *з умови* $B \overset{\mathfrak{S}}{\twoheadleftarrow}(+)\, A$ *випливає, що* $A \neq B$*).*

2) Якщо $\mathfrak{S}_1 \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ *і* $\mathfrak{S}_1 \sqsubseteq \mathfrak{S}$ *то* $\mathfrak{S}_1$ *також є неповторною, сист. множин.*

Доведення. 1) Нехай $\mathfrak{S} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ — неповторна система множин. Якщо припустити, що $B \overset{\mathfrak{S}}{\twoheadleftarrow}(+)\, A$ і $A = B$ для множин $A, B \in \mathfrak{S}$, то будемо мати, що $B \overset{\mathfrak{S}}{\twoheadleftarrow}(+)\, A$ і $A \overset{\mathfrak{S}}{\twoheadleftarrow}(+)\, B$, що суперечить тому, що система множин $\mathfrak{S}$ є неповторною. Отже, відношення $\overset{\mathfrak{S}}{\twoheadleftarrow}(+)$ є антирефлексивним. Транзитивність відношення $\overset{\mathfrak{S}}{\twoheadleftarrow}(+)$ випливає із зауваження 1.33.

2) Нехай, $\mathfrak{S}_1 \sqsubseteq \mathfrak{S}$. Припустимо, що система множин $\mathfrak{S}_1$ не є неповторною. Тоді існують множини $A_1, B_1 \in \mathfrak{S}_1$ такі, що $A_1 \overset{\mathfrak{S}_1}{\twoheadleftarrow}(+)\, B_1$ і $B_1 \overset{\mathfrak{S}_1}{\twoheadleftarrow}(+)\, A_1$. Оскільки $\mathfrak{S}_1 \sqsubseteq \mathfrak{S}$, то існують множини $A, B \in \mathfrak{S}$ такі, що $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$. Звідси, згідно з твердженням 1.34, отримуємо, $A \overset{\mathfrak{S}}{\twoheadleftarrow}(+)\, B$ і $B \overset{\mathfrak{S}}{\twoheadleftarrow}(+)\, A$, що неможливо, оскільки система множин $\mathfrak{S}$ є неповторною. Тому система множин $\mathfrak{S}_1$ також є неповторною. $\square$

Лема 1.37. *Якщо час* $\psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ *на орієнтованій множині* $\mathcal{M}$ *є монотонним і* Y_ψ *— одночасність, породжена часом* ψ*, то для довільних* $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ *з умови* $\psi(t_2) \overset{Y_\psi}{\twoheadleftarrow}(+)\, \psi(t_1)$ *випливає, що* $t_1 < t_2$.

Доведення. У випадку $\psi(t_2) \leftarrow(+)\, \psi(t_1)$ нерівність $t_1 < t_2$ випливає з означень 1.32 та 1.12. Розглянемо, тепер, загальний випадок, коли $\psi(t_2) \overset{Y_\psi}{\twoheadleftarrow}(+)\, \psi(t_1)$. В цьому випадку, за означенням 1.32, існують моменти часу $\tau_0, \tau_1, \cdots, \tau_n \in \mathbf{T}$ такі, що $\tau_0 = t_1$,

$\tau_n = t_2$ і для довільного $k \in \overline{1,n}$ $\psi(\tau_k) \leftarrow(+) \psi(\tau_{k-1})$. Звідси, згідно з пунктом 1), отримуємо $\tau_{k-1} < \tau_k$, $k \in \overline{1,n}$. Отже, $t_1 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_n = t_2$. $\square$

Означення 1.38. Одночасність $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ на орієнтованій множині $\mathcal{M}$ будемо називати **монотонно зв'язною**, якщо для довільних множин $A, B \in \mathbf{Y}$ таких, що $A \neq B$ має місце хоч одна з умов $A \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(+) B$ або $B \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(+) A$.

Зауваження 1.39. Безпосередньо з означення 1.38 і твердження 1.36 (п.1) випливає, що коли одночасність $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ є неповторною і монотонно-зв'язною, то відношення $\overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(+)$ є *строгим лінійним порядком* на $\mathbf{Y}$.

Означення 1.40. Час $\psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ на орієнтованій множині $\mathcal{M}$ (де $(\mathbf{T}, \leq)$ — лінійно упорядкована множина) будемо називати **невпинним**, якщо не існує моментів часу $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ таких, що $t_1 < t_2$ і для довільного $t \in \mathbf{T}$ такого, що $t_1 \leq t \leq t_2$ має місце рівність $\psi(t) = \psi(t_1)$. Час ψ будемо називати **строго монотонним**, якщо він є одночасно і монотонним і невпинним.

Лема 1.41. *Нехай $\mathbf{Y}$ — чітко-неповторна і монотонно-зв'язна одночасність на орієнтованій множині $\mathcal{M}$ і $\psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ — час, породжуючий $\mathbf{Y}$. Тоді:*

1) Якщо час ψ є строго монотонний, то він є ***неповторним*** *(тобто для довільних $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ з умови $t_1 \neq t_2$ випливає, що $\psi(t_1) \neq \psi(t_2)$).*

2) Час ψ є строго монотонним тоді і тільки тоді, коли для довільних $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ з умови $t_1 < t_2$ випливає, що $\psi(t_2) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(+) \psi(t_1)$.

3) Якщо час ψ є строго монотонний, то строго лінійно упорядковані множини $(\mathbf{T}, >)$ і $\left(\mathbf{Y}, \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(+)\right)$ є порядково ізоморфні, причому відображення $\psi : \mathbf{T} \to \mathbf{Y}$ є порядковим ізоморфізмом між $(\mathbf{T}, >)$ і $\left(\mathbf{Y}, \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(+)\right)$.

Доведення. 1) Нехай виконуються умови леми і час $\psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ є строго монотонний. Припустимо, що існують моменти часу $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ такі, що $t_1 < t_2$ і $\psi(t_1) = \psi(t_2)$. Оскільки час ψ, будучи строго монотонним, є невпинним, то існує момент часу $t_3 \in \mathbf{T}$ такий, що $t_1 < t_3 < t_2$ і $\psi(t_3) \neq \psi(t_1) = \psi(t_2)$. Оскільки $\psi(t_3) \neq \psi(t_1)$ і одночасність $\mathbf{Y}$ є монотонно зв'язною, то мусить мати місце хоч одна з умов $\psi(t_3) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(+) \psi(t_1)$ або $\psi(t_1) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(+) \psi(t_3)$. Проте, оскільки $t_1 < t_3$ то умова $\psi(t_1) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(+) \psi(t_3)$ виконуватись не може, згідно з лемою 1.37. Отже, $\psi(t_3) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(+) \psi(t_1)$. Аналогічно з умов $t_3 < t_2$ і $\psi(t_3) \neq \psi(t_2)$ випливає, що $\psi(t_2) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(+) \psi(t_3)$. Тобто, враховуючи, що $\psi(t_1) = \psi(t_2)$ маємо, $\psi(t_3) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(+) \psi(t_1)$ і $\psi(t_1) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(+) \psi(t_3)$, що суперечить тому, що одночасність $\mathbf{Y} = Y_\psi$ є неповторною.

2.a) Нехай час $\psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ є строго монотонний. Розглянемо моменти часу $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ такі, що $t_1 < t_2$. Згідно з першим пунктом леми $\psi(t_1) \neq \psi(t_2)$. Тому,

оскільки одночасність $\mathbf{Y}$ є монотонно зв'язною, то мусить мати місце хоч одна з умов $\psi(t_2) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(+)\, \psi(t_1)$ або $\psi(t_1) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(+)\, \psi(t_2)$. Але, оскільки $t_1 < t_2$ то умова $\psi(t_1) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(+)\, \psi(t_2)$ виконуватись не може, згідно з лемою 1.37. Отже:

$$\forall t_1, t_2 \in \mathbf{T}\; t_1 < t_2 \Rightarrow \psi(t_2) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(+)\, \psi(t_1)\,. \tag{1.6}$$

2.б) Нехай, тепер виконується умова (1.6). Спочатку доведемо, що час ψ — монотонний. Розглянемо елементарні стани $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ такі, що $x_1 \in \psi(t_1)$, $x_2 \in \psi(t_2)$, $x_2 \leftarrow x_1$ і $x_1 \not\leftarrow x_2$ (де $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$). За означенням 1.32, $\psi(t_2) \leftarrow(+)\, \psi(t_1)$. Тому,

$$\psi(t_2) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(+)\, \psi(t_1)\,. \tag{1.7}$$

Якщо припустити, що $t_1 \geq t_2$, то ми отримаємо

$$\psi(t_1) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(+)\, \psi(t_2) \tag{1.8}$$

(справді, у випадку $t_1 = t_2$ співвідношення (1.8) випливає з (1.7), а у випадку $t_1 > t_2$, (1.8) випливає з умови (1.6)). Отже, у випадку $t_1 \geq t_2$ мусять виконуватись умови (1.7) і (1.8) одночасно, що неможливо, оскільки одночасність $\mathbf{Y}$ є неповторною. Тому єдино можливим є варіант $t_1 < t_2$. Цим доведено монотонність часу ψ.

Отже, залишилось довести, що час ψ — невпинний. Припустимо, що існують моменти часу $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ такі, що $t_1 < t_2$ і для довільного $t \in \mathbf{T}$ такого, що $t_1 \leq t \leq t_2$ має місце рівність $\psi(t) = \psi(t_1)$. Тоді, зокрема, отримаємо $\psi(t_1) = \psi(t_2)$, де $t_1 < t_2$. Оскільки $t_1 < t_2$, то, за умовою (1.6), мусить виконуватись співвідношення (1.7), а оскільки $\psi(t_1) = \psi(t_2)$, то співвідношення (1.8) повинно виконуватись також, що неможливо, оскільки одночасність $\mathbf{Y}$ є неповторною. Отже, припущення — невірне. Тому час ψ є невпинним. Таким чином, час ψ строго монотонний.

3) Припустимо, що час $\psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ є строго монотонним. Згідно з першим пунктом леми, відображення $\psi : \mathbf{T} \to \mathbf{Y}$ є взаємно-однозначною відповідністю між $\mathbf{T}$ і $\mathbf{Y} = Y_\psi = \{\psi(t) \mid t \in \mathbf{T}\}$. Згідно з другим пунктом леми, для довільних $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ з умови $t_2 > t_1$ випливає, що $\psi(t_2) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(+)\, \psi(t_1)$. Нагадаємо, що згідно із зауваженням 1.39, $\left(\mathbf{Y}, \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(+)\right)$ є лінійно упорядкованою множиною (за строгим порядком). Тому відображення ψ є порядковим ізоморфізмом між лінійно упорядкованими (за строгим порядком) множинами $(\mathbf{T}, >)$ і $\left(\mathbf{Y}, \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(+)\right)$. □

Зауваження 1.42. Виявляється, що для довільної чітко-неповторної і монотонно-зв'язної одночасності $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ твердження, обернене до першого пункту леми 1.41, взагалі кажучи, не є правильним. Це буде видно з наступного прикладу.

Приклад 1.43. Розглянемо наступну орієнтовану множину:

$$\mathfrak{Bs}(\mathcal{M}) := \{1,2,3,4\}\,; \qquad \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow} := \{(3,1),(4,2)\} \cup \mathsf{diag}\,(\mathfrak{Bs}(\mathcal{M}))\,,$$

тобто, іншими словами, $3 \leftarrow 1$, $4 \leftarrow 2$, $1 \leftarrow 1$, $2 \leftarrow 2$, $3 \leftarrow 3$, $4 \leftarrow 4$. Також розглянемо на цій орієнтованій множині таку одночасність:

$$\mathbf{Y} := \{\{1,2\}\,,\ \{3,4\}\,,\ \{2,3\}\}\,.$$

Маємо: $\{2,3\} \leftarrow\!(+)\, \{1,2\}$, $\{3,4\} \leftarrow\!(+)\, \{2,3\}$, $\{3,4\} \leftarrow\!(+)\, \{1,2\}$, при цьому $\{2,3\} \not\leftarrow\!(+)\, \{3,4\}$, $\{1,2\} \not\leftarrow\!(+)\, \{2,3\}$, $\{1,2\} \not\leftarrow\!(+)\, \{3,4\}$, і жодна з множин одночасності $\mathbf{Y}$ не є монотонно послідовною сама собі. Тобто, схематично:

$$\begin{array}{ccccc} \{3,4\} & \leftarrow\!(+) & \{2,3\} & \leftarrow\!(+) & \{1,2\} \\ \nwarrow & <-- & \leftarrow\!(+) & <-- & \swarrow \end{array}\,,$$

причому, відношення "$\leftarrow\!(+)$" на множинах одночасності $\mathbf{Y}$ повністю задається зазначеною вище схемою. Тому із зазначеної схеми видно, що одночасність $\mathbf{Y}$ є неповторною і монотонно-зв'язною. Крім того легко бачити, що ця одночасність є чіткою.

Також розглянемо таку лінійно упорядковану множину:

$$\mathbf{T} := \{1,2,3\}\,,$$

зі звичним числовим порядком на множині натуральних чисел ($\leq$). Одночасність $\mathbf{Y}$ може бути породжена часами:

$$\begin{array}{ll} \psi_1: & \psi_1(1) := \{1,2\}\,,\ \psi_1(2) := \{2,3\}\,,\ \psi_1(3) := \{3,4\}\,; \\ \psi_2: & \psi_2(1) := \{1,2\}\,,\ \psi_2(2) := \{3,4\}\,,\ \psi_2(3) := \{2,3\}\,. \end{array}$$

Обидва часи ψ_1 і ψ_2 є, очевидно, неповторними, проте час ψ_2 не є монотонним, оскільки:

$$2 \in \psi_2(3), \quad 4 \in \psi_2(2), \quad 4 \leftarrow 2,\ 2 \not\leftarrow 4, \quad \text{але } 3 \not< 2.$$

Теорема 1.44. *Для довільної чітко-неповторної і монотонно-зв'язної одночасності* $\mathbf{Y}$ *існує єдиний з точністю до еквівалентності хронологізацій строго монотонний час* ψ *такий, що* $\mathbf{Y} = Y_\psi$.

Зауважимо, що єдиність з точністю до еквівалентності хронологізацій в теоремі 1.44 слід розуміти наступним чином:

"Якщо на лінійно упорядкованих множинах $\mathbb{T}_1$ і $\mathbb{T}_2$ визначені (відповідно) строго-монотонні часи ψ_1 і ψ_2 такі, що $\mathbf{Y} = Y_{\psi_1} = Y_{\psi_2}$, то хронологізації $\mathcal{H}_1 = (\mathbb{T}_1, \psi_1)$ і $\mathcal{H}_2 = (\mathbb{T}_2, \psi_2)$ є еквівалентними (тобто $\mathcal{H}_1 \upuparrows \mathcal{H}_2$)".

Доведення. **1**. Нехай $\mathbf{Y}$ — чітко-неповторна і монотонно-зв'язна одночасність на орієнтованій множині $\mathcal{M}$. Згідно із зауваженням 1.39, відношення $\overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}\!(+)$ є строгим лінійним порядком на $\mathbf{Y}$. Тому відношення $\overset{\mathbf{Y}}{(\mathrm{m})\twoheadrightarrow}$, обернене до відношення $\overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}\!(+)$, також є строгим лінійним порядком на $\mathbf{Y}$. Покладемо, $\mathbf{T} := \mathbf{Y}$. Для $t, \tau \in \mathbf{T} = \mathbf{Y}$ будемо вживати запис "$t \leq \tau$" тоді і тільки тоді, коли, $t = \tau$ або $t\,\overset{\mathbf{Y}}{(\mathrm{m})\twoheadrightarrow}\,\tau$. Тобто, відношення

$\leq$ є (нестрогим) лінійним порядком, породженим строгим порядком $\overset{\mathbf{Y}}{(\mathrm{m})}{\twoheadrightarrow}$. Тому для $t, \tau \in \mathbf{T}$ справедлива рівносильність:

$$t < \tau \iff t \overset{\mathbf{Y}}{(\mathrm{m})}{\twoheadrightarrow} \tau, \tag{1.9}$$

де символ "$\iff$" означає логічну еквівалентність ("тоді і тільки тоді") і запис $t < \tau$ означає, що $t \leq \tau$ і $t \neq \tau$. Таким чином, $(\mathbf{T}, \leq)$ — лінійно упорядкована множина. Позначимо:

$$\psi(t) := t, \quad t \in \mathbf{T} = \mathbf{Y}.$$

Оскільки $\mathbf{T} = \mathbf{Y}$, то для $t \in \mathbf{T}$ маємо $\psi(t) = t \in \mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$.

2. Доведемо, що ψ є часом на $\mathcal{M}$.

(а) Оскільки $\mathbf{Y}$ — одночасність, то для довільного $x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ існує множина $t_x \in \mathbf{Y} = \mathbf{T}$ така, що $x \in t_x$. Тоді будемо мати $\psi(t_x) = t_x \ni x$.

(б) Нехай $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, $y \leftarrow x$ і $x \neq y$. Оскільки одночасність $\mathbf{Y}$ є чіткою, то існують $t_x, t_y \in \mathbf{Y} = \mathbf{T}$ такі, що $x \in t_x$, $y \in t_y$ і $t_y \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(+)\, t_x$. Тоді, згідно (1.9), отримаємо $t_x < t_y$. При цьому, оскільки $\psi(t) = t$, $t \in \mathbf{T}$, маємо, $x \in t_x = \psi(t_x)$; $y \in t_y = \psi(t_y)$. Тому друга умова означення 1.9 також виконується, отже відображення ψ є часом.

3. Доведемо, що час ψ є строго монотонним.

(а) Нехай, $x \in \psi(t_x)$, $y \in \psi(t_y)$, $y \leftarrow x$ і $x \not\leftarrow y$. Тоді, $t_y = \psi(t_y) \leftarrow (+)\, \psi(t_x) = t_x$. Тому $t_y \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(+)\, t_x$, тобто, згідно з (1.9), $t_x < t_y$. Отже, час ψ є монотонним.

б) Припустимо, що час ψ не є невпинним. Тоді існують $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ такі, що $t_1 < t_2$ і для довільного $t \in \mathbf{T}$ такого, що $t_1 \leq t \leq t_2$ $\psi(t) = \psi(t_1)$. Зокрема це означає, що $\psi(t_2) = \psi(t_1)$. Тому, оскільки $\psi(\tau) = \tau$, $\tau \in \mathbf{T}$, то маємо $t_2 = t_1$, що суперечить нерівності $t_1 < t_2$. Отже, припущення — хибне, а час ψ є невпинним.

Таким чином, час ψ є строго монотонним.

4. Доведемо, що такий час ψ — єдиний з точністю до еквівалентності хронологізацій. Нехай, $\psi_1 : \mathbf{T}_1 \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ — інший строго монотонний час, такий, що $Y_{\psi_1} = \mathbf{Y}$, де $(\mathbf{T}_1, \leq_1)$ — лінійно упорядкована множина. Тоді, за лемою 1.41, лінійно-упорядковані (за строгим порядком) множини $(\mathbf{T}_1, >_1)$ і $\left(\mathbf{Y}, \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(+)\right)$ — порядково ізоморфні і відображення $\psi_1 : \mathbf{T}_1 \to \mathbf{Y}$ є порядковим ізоморфізмом між цими лінійно упорядкованими множинами, де $>_1$ — відношення, обернене до відношення $<_1$, тобто до строгого порядку, породженого відношенням $\leq_1$. Тому упорядковані множини $(\mathbf{T}_1, \leq_1)$ і $(\mathbf{Y}, \leq) = (\mathbf{T}, \leq)$ також є порядково ізоморфні з порядковим ізоморфізмом ψ_1. Крім того, для довільного $t \in \mathbf{T}_1$ маємо, $\psi_1(t) = \psi(\psi_1(t))$, тобто за означенням 1.30, маємо $((\mathbf{T}_1, \leq_1), \psi_1) \upuparrows ((\mathbf{T}, \leq), \psi)$. $\square$

Означення 1.45. Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина, а $\psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ — час на $\mathcal{M}$. Відображення $\mathbf{h} : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ будемо називати **хронометричним** процесом для

часу ψ, якщо:

1) $\mathbf{h}(t) \subseteq \psi(t)$ для довільного $t \in \mathbf{T}$.

2) Для довільних $t, \tau \in \mathbf{T}$ умова $t < \tau$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{h}(\tau) \overset{\mathbf{h}(\mathbf{T})}{\twoheadleftarrow}(+)\, \mathbf{h}(t)$ і $\mathbf{h}(t) \neq \mathbf{h}(\tau)$, де $\mathbf{h}(\mathbf{T}) = \{\mathbf{h}(t) \mid t \in \mathbf{T}\}$;

Час ψ на орієнтованій множині $\mathcal{M}$ будемо називати **внутрішнім**, якщо для цього часу існує хоч один хронометричний процес.

Зміст терміну "внутрішній час" полягає в тому, що якщо час на примітивній мінливій множині є внутрішнім, його можна "поміряти" в межах цієї примітивної мінливої множини, використовуючи хронометричний процес в якості "годинника", а стани хронометричного процесу в якості індикаторів моментів часу.

Лема 1.46. *Породжуючий час чітко-неповторної і монотонно-зв'язної одночасності є внутрішнім тоді і тільки тоді, коли він є строго монотонним.*

Доведення. Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина, $\mathbf{Y}$ — чітко-неповторна і монотонно-зв'язна одночасність на $\mathcal{M}$ і $\psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ — час, що породжує $\mathbf{Y}$ (тобто $\mathbf{Y} = Y_\psi$).

1) Припустимо, що час ψ є внутрішнім. Тоді для часу ψ існує хронометричний процес $\mathbf{h} : \mathbf{T} \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$.

1.а) Спочатку доведемо, що час ψ є монотонним. Нехай $x_1 \in \psi(t_1)$, $x_2 \in \psi(t_2)$, $x_2 \leftarrow x_1$ і $x_1 \not\leftarrow x_2$. Тоді, $\psi(t_2) \leftarrow (+)\, \psi(t_1)$, тобто $\psi(t_2) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(+)\, \psi(t_1)$. Звідси, оскільки одночасність $\mathbf{Y}$ є неповторною, то за твердженням 1.36, маємо $\psi(t_1) \neq \psi(t_2)$, тобто $t_1 \neq t_2$. Таким чином, можливими є лише два випадки $t_1 < t_2$ або $t_2 < t_1$. Доведемо, що $t_1 < t_2$. Припустимо що, $t_2 < t_1$. Тому, оскільки $\mathbf{h}$ — хронометричний процес, то $\mathbf{h}(t_1) \overset{\mathbf{h}(\mathbf{T})}{\twoheadleftarrow}(+)\, \mathbf{h}(t_2)$. Звідси, враховуючи, що, за означенням 1.45, $\mathbf{h}(\mathbf{T}) \sqsubseteq \mathbf{Y}$ (де $\mathbf{h}(\mathbf{T}) = \{\mathbf{h}(t) \mid t \in \mathbf{T}\}$), використовуючи твердження 1.34, отримуємо $\psi(t_1) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(+)\, \psi(t_2)$, що неможливо, оскільки, одночасність $\mathbf{Y}$ є неповторною, і, за доведеним вище, $\psi(t_2) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(+)\, \psi(t_1)$. Отже, єдино можливою є нерівність $t_1 < t_2$. Монотонність часу ψ — доведено.

1.б) Доведемо, що час ψ є невпинним. Припустимо супротивне. Тоді існують моменти часу $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ такі, що $t_1 < t_2$ і для довільного $t \in \mathbf{T}$ такого, що $t_1 \leq t \leq t_2$ має місце рівність $\psi(t) = \psi(t_1)$. Тоді, зокрема, $\psi(t_2) = \psi(t_1)$. Але, оскільки $\mathbf{h}$ — хронометричний процес і $t_1 < t_2$, то $\mathbf{h}(t_2) \overset{\mathbf{h}(\mathbf{T})}{\twoheadleftarrow}(+)\, \mathbf{h}(t_1)$. Звідси, згідно з твердженням 1.34, маємо $\psi(t_2) \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(+)\, \psi(t_1)$. Отже, згідно з твердженням, 1.36, $\psi(t_2) \neq \psi(t_1)$, що суперечить отриманому вище. Отже, час ψ справді є невпинним. Тобто, враховуючи отримане в пункті 1.а), отримуємо, що час ψ є строго монотонним.

2) Навпаки, припустимо, що час ψ є строго монотонним. За лемою 1.41, строго лінійно упорядковані множини $(\mathbf{T}, >)$ і $\left(\mathbf{Y}, \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(+)\right) = \left(\mathbf{Y}, \overset{Y_\psi}{\twoheadleftarrow}(+)\right)$ є порядково

ізоморфними, і відображення $\psi : \mathbf{T} \to \mathbf{Y}$ є порядковим ізоморфізмом між ними. Тому для довільних $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ умови $t_1 < t_2$ і $\psi(t_2) \overset{Y_\psi}{\twoheadleftarrow}(+)\, \psi(t_1)$ рівносильні (де $Y_\psi = \mathbf{Y} = \psi(\mathbf{T})$). Звідси, з урахуванням пункту 1 твердження 1.36, випливає, що відображення $\mathbf{h}(t) = \psi(t)$ $(t \in \mathbf{T})$ є хронометричним процесом для ψ. Тому час ψ є внутрішнім. $\square$

З леми 1.46 та теореми 1.44 випливає наступна теорема.

Теорема 1.47. *Для довільної чітко-неповторної і монотонно-зв'язної одночасності* $\mathbf{Y}$ *існує єдиний з точністю до еквівалентності хронологізацій внутрішній час* ψ *такий, що* $\mathbf{Y} = Y_\psi$.

Філософський зміст теореми 1.47 полягає в тому, що ця теорема дає достатню ознаку існування "власного", "внутрішнього" часу в деякому "абстрактному світі" $\mathcal{M}$.

Основні результати підрозділу 1.5 були анонсовані в роботі [67] і опубліковані в [68, розділ 5], а також представлено на конференціях [70, 71, 78, 82, 83].

1.6. Система позначень для примітивних мінливих множин

Надалі примітивні мінливі множини будемо позначати каліграфічними великими буквами. Нехай $\mathcal{P} = (\mathcal{M}, \mathbb{T}, \phi)$ — примітивна мінлива множина. Де $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \trianglelefteq)$ — лінійно упорядкована множина. Введемо наступні позначення:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{Bs}(\mathcal{P}) := \mathfrak{Bs}(\mathcal{M}); & \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow} := \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}; & \mathbf{Tm}(\mathcal{P}) := \mathbf{T}; \\ \leq_{\mathcal{P}} := \trianglelefteq; & \psi_{\mathcal{P}} := \phi; & \mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathcal{P}) := (\mathbf{Tm}(\mathcal{P}), \leq_{\mathcal{P}}) = (\mathbf{T}, \trianglelefteq). \end{array}$$

Також будемо використовувати позначення $\geq_{\mathcal{P}}, <_{\mathcal{P}}, >_{\mathcal{P}}$ для позначення оберненого, строгого та строгого оберненого порядку, породженого (нестрогим) порядком $\leq_{\mathcal{P}}$. Множину $\mathfrak{Bs}(\mathcal{P})$ будемо називати *базовою множиною*, або множиною *всіх елементарних станів* примітивної мінливої множини $\mathcal{P}$. Елементи множини $\mathfrak{Bs}(\mathcal{P})$ будемо називати *елементарними станами* $\mathcal{P}$, а відношення $\underset{\mathcal{P}}{\leftarrow}$ будемо називати *напрямним відношенням змін* $\mathcal{P}$. Множину $\mathbf{Tm}(\mathcal{P})$ будемо називати *множиною моментів часу* $\mathcal{P}$. Відношення $\leq_{\mathcal{P}}, <_{\mathcal{P}}, \geq_{\mathcal{P}}, >_{\mathcal{P}}$ будемо називати відповідно відношеннями (нестрогого), строго, нестрогого оберненого і строгого оберненого *часового порядку* на $\mathcal{P}$. Відображення $\psi_{\mathcal{P}} : \mathbf{Tm}(\mathcal{P}) \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{P})}$ будемо називати *часом* на $\mathcal{P}$. У випадку, коли зрозуміло, про яку примітивну мінливу множину $\mathcal{P}$ йде мова в позначеннях $\underset{\mathcal{P}}{\leftarrow}$, $\leq_{\mathcal{P}}$,

$<_{\mathcal{P}}$, $\geq_{\mathcal{P}}$, $>_{\mathcal{P}}$, $\psi_{\mathcal{P}}$ символ $\mathcal{P}$ будемо опускати, вживаючи замість них позначення $\leftarrow$, $\leq$, $<$, $\geq$, $>$, ψ відповідно.

Зауваження 1.48. Згідно з означенням примітивних мінливих множин (означення 1.9), беручи до уваги позначення, введені вище, отримуємо, що для довільної примітивної мінливої множини $\mathcal{P}$ виконується співвідношення, $\mathfrak{Bs}(\mathcal{P}) \neq \emptyset$.

1.7. Системи абстрактних траєкторій і примітивні мінливі множини, породжені ними

Означення 1.49. Нехай M — довільна непорожня множина і $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — довільна лінійно упорядкована множина.

1. Відображення $r : \mathfrak{D}(r) \to M$ будемо називати **абстрактною траєкторією** з $\mathbb{T}$ в M, якщо $\mathfrak{D}(r) \subseteq \mathbf{T}$ і $\mathfrak{D}(r) \neq \emptyset$ (де $\mathfrak{D}(r)$ — область визначення абстрактної траєкторії r).
2. **Системою абстрактних траєкторій** з $\mathbb{T}$ в M будемо називати довільну множину $\mathcal{R}$, елементами якої є абстрактні абстрактні траєкторії з $\mathbb{T}$ в M таку, що $\bigcup_{r\in\mathcal{R}} \mathfrak{R}(r) = M$ (де $\mathfrak{R}(r)$ — область значень абстрактної траєкторії r).

Теорема 1.50. *Для довільної системи $\mathcal{R}$ абстрактних траєкторій з $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ в M існує, причому єдина примітивна мінлива множина $\mathcal{P}$ така, що:*

1) $\mathfrak{Bs}(\mathcal{P}) = M$; $\quad \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{P}) = \mathbb{T}$ *(тобто* $\mathbf{Tm}(\mathcal{P}) = \mathbf{T}$, $\leq_{\mathcal{P}} = \leq$*).*

2) *Для довільних $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{P})$ умова $y \leftarrow x$ має місце тоді і тільки тоді, коли існує абстрактна траєкторія $r = r_{x,y} \in \mathcal{R}$ та елементи $t, \tau \in \mathfrak{D}(r)$ такі, що $x = r(t)$, $y = r(\tau)$ і $t \leq \tau$.*

3) *Для довільних $x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{P})$ і $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{P})$ умова $x \in \psi(t)$ має місце тоді і тільки тоді, коли існує траєкторія $r = r_x \in \mathcal{R}$ така, що $t \in \mathfrak{D}(r)$ і $x = r(t)$.*

Доведення. Нехай $\mathcal{R}$ — довільна система абстрактних траєкторій з $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ в M. На множині M визначимо наступне бінарне відношення:

$$\underset{\mathcal{R}}{\leftarrow} = \{(y, x) \in M \times M \mid \exists r \in \mathcal{R}\, \exists t, \tau \in \mathfrak{D}(r) :\ x = r(t),\ y = r(\tau),\ t \leq \tau\}$$

(де символ "$\times$" означає декартовий добуток множин). Тобто, іншими словами, для $x, y \in M$ співвідношення $y \underset{\mathcal{R}}{\leftarrow} x$ виконується тоді і тільки тоді, коли існує абстрактна траєкторія $r = r_{x,y} \in \mathcal{R}$ та елементи $t, \tau \in \mathfrak{D}(r)$ такі, що $x = r(t)$, $y = r(\tau)$ і $t \leq \tau$. Також визначимо наступне відображення $\varphi_{\mathcal{R}} : \mathbf{T} \to 2^M$:

$$\varphi_{\mathcal{R}}(t) = \bigcup_{r\in\mathcal{R},\, t\in\mathfrak{D}(r)} \{r(t)\} = \{r(t) \mid r \in \mathcal{R},\ t \in \mathfrak{D}(r)\}\,.$$

Зокрема $\varphi_{\mathcal{R}}(t) = \emptyset$, якщо не існує траєкторій $r \in \mathcal{R}$ таких, що $t \in \mathfrak{D}(r)$.

Неважко перевірити, що пара $\mathcal{M} = \left(M, \underset{\mathcal{R}}{\lessdot}\right)$ є орієнтованою множиною, а відображення $\varphi_{\mathcal{R}}$ є часом на $\mathcal{M}$. Отже, трійка:

$$\mathcal{P} = (\mathcal{M}, \mathbb{T}, \varphi_{\mathcal{R}}) = \left(\left(M, \underset{\mathcal{R}}{\lessdot}\right), (\mathbf{T}, \leq), \varphi_{\mathcal{R}}\right)$$

є примітивною мінливою множиною. Також неважко перевірити, що ця примітивна мінлива множина задовольняє умови 1),2),3) даної теореми.

Навпаки, припустимо, що примітивна мінлива множина $\mathcal{P}_1$ задовольняє умови 1),2),3) даної теореми. Тоді, з першої умови випливає, що $\mathfrak{Bs}(\mathcal{P}_1) = M$, $\mathbf{Tm}(\mathcal{P}_1) = \mathbf{T}$, $\leq_{\mathcal{P}_1} = \leq$, а а другої та третьої умов випливають рівності $\underset{\mathcal{P}_1}{\leftarrow} = \underset{\mathcal{R}}{\lessdot}$, $\psi_{\mathcal{P}_1} = \varphi_{\mathcal{R}}$. Отже,

$$\mathcal{P}_1 = \left(\left(\mathfrak{Bs}(\mathcal{P}_1), \underset{\mathcal{P}_1}{\leftarrow}\right), (\mathbf{Tm}(\mathcal{P}_1), \leq_{\mathcal{P}_1}), \psi_{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\left(M, \underset{\mathcal{R}}{\lessdot}\right), (\mathbf{T}, \leq), \varphi_{\mathcal{R}}\right) = \mathcal{P}. \quad \square$$

Означення 1.51. Нехай $\mathcal{R}$ — довільна система абстрактних траєкторій з $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ в M. Примітивну мінливу множину $\mathcal{P}$, яка задовольняє умови 1),2),3) теореми 1.50, будемо називати примітивною мінливою множиною, **породженою системою абстрактних траєкторій** $\mathcal{R}$ і будемо позначати її через $\mathcal{A}tp(\mathbb{T}, \mathcal{R})$:

$$\mathcal{A}tp(\mathbb{T}, \mathcal{R}) := \mathcal{P}.$$

У випадку, коли це не викликає непорозумінь замість позначення $\mathcal{A}tp(\mathbb{T}, \mathcal{R})$ часто будемо використовувати позначення $\mathcal{A}tp(\mathcal{R})$.

Таким чином системи абстрактних траєкторій дають досить простий спосіб конструювання примітивних мінливих множин. Виявляється, що даний спосіб є універсальним, тобто будь-яку примітивну мінливу множину $\mathcal{P}$ можна подати у вигляді $\mathcal{P} = \mathcal{A}tp(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{P}), \mathcal{R})$, де $\mathcal{R}$ — деяка система абстрактних траєкторій. Цей факт випливає з теореми 1.79, яку буде доведено далі (в розділі 1.9).

Основні результати підрозділу 1.7 були анонсовані в роботі [67] і опубліковані в [68, розділ 6].

1.8. Елементарно-часові стани та базові мінливі множини

1.8.1. Елементарно-часові стани примітивних мінливих множин та їхні властивості.

Означення 1.52. Нехай $\mathcal{P}$ — примітивна мінлива множина. Пару (t, x) ($x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{P})$, $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{P})$) будемо називати **елементарно-часовим станом** $\mathcal{P}$, якщо $x \in \psi(t)$. Множину всіх елементарно-часових станів $\mathcal{P}$ будемо позначати через $\mathbb{Bs}(\mathcal{P})$:

$$\mathbb{Bs}(\mathcal{P}) := \{\omega \mid \omega = (t, x), \text{ де } t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{P}),\ x \in \psi(t)\}.$$

Зауваження 1.53. З означень 1.1 та 1.9 випливає, що $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P}) \neq \emptyset$ для довільної примітивної мінливої множини $\mathcal{P}$.

За означенням 1.9, для довільного $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{P})$ маємо, $\psi(t) \subseteq \mathfrak{Bs}(\mathcal{P})$. Тому:

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P}) \subseteq \mathbf{Tm}(\mathcal{P}) \times \mathfrak{Bs}(\mathcal{P})$$

для довільної примітивної мінливої множини $\mathcal{P}$.

Нехай, $\mathbb{T} = (\mathbf{T} \leq)$ — довільна лінійно упорядкована множина, а $\mathcal{X}$ — довільна множина. Для довільної упорядкованої пари $\omega = (\tau, \xi) \in \mathbf{T} \times \mathcal{X}$ введемо такі позначення:

$$\mathsf{bs}\,(\omega) := \xi, \quad \mathsf{tm}\,(\omega) := \tau. \tag{1.10}$$

Отже, для будь-якого $\omega \in \mathbf{T} \times \mathcal{X}$ отримуємо, $\omega = (\mathsf{tm}\,(\omega)\,,\ \mathsf{bs}\,(\omega))$.

Означення 1.54. Будемо вважати, що елементарно-часовий стан $\omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$ **формально послідовний** елементарно-часовому стану $\omega_1 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$ (позначення: $\boxed{\omega_2 \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow} (\mathrm{f})\,\omega_1}$), якщо $\omega_1 = \omega_2$ або $\mathsf{bs}\,(\omega_2) \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow} \mathsf{bs}\,(\omega_1)$ і $\mathsf{tm}\,(\omega_1) <_{\mathcal{P}} \mathsf{tm}\,(\omega_2)$. Коли не виникає непорозумінь замість $\omega_2 \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow} (\mathrm{f})\,\omega_1$ будемо використовувати позначення $\boxed{\omega_2 \leftarrow (\mathrm{f})\,\omega_1}$.

Твердження 1.55.

1) Якщо $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$ і $\omega_2 \leftarrow (\mathrm{f})\,\omega_1$, то $\mathsf{tm}\,(\omega_1) \leq \mathsf{tm}\,(\omega_2)$. Якщо, додатково, $\omega_1 \neq \omega_2$, то $\mathsf{tm}\,(\omega_1) < \mathsf{tm}\,(\omega_2)$.

2) Відношення $\leftarrow (\mathrm{f}) = \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow} (\mathrm{f})$ є асиметричним відношенням на множині $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$, тобто, якщо $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$, $\omega_2 \leftarrow (\mathrm{f})\,\omega_1$ і $\omega_1 \leftarrow (\mathrm{f})\,\omega_2$, то $\omega_1 = \omega_2$.

Доведення. Перший пункт цього твердження є наслідком означення 1.54, а другий пункт випливає з першого пункту. □

Означення 1.56. Орієнтована множина $\mathcal{M}$ називається **антициклічною**, якщо для довільних $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ з умов $x \leftarrow y$ і $y \leftarrow x$ випливає, що $x = y$.

Твердження 1.57. *Нехай $\mathcal{P}$ — примітивна мінлива множина. Тоді:*

1) Пара $\mathcal{Q} = \left(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P}), \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow} (\mathrm{f})\right) = (\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P}), \leftarrow (\mathrm{f}))$ є антициклічною орієнтованою множиною.

2) Відображення

$$\tilde{\psi}(t) = \tilde{\psi}_{\mathcal{P}}(t) := \{\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P}) \mid \mathsf{tm}\,(\omega) = t\} \in 2^{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})}, \quad t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{P}) \tag{1.11}$$

є монотонним часом на $\mathcal{Q}$.

3) При $t_1 \neq t_2$ $\quad \tilde{\psi}\,(t_1) \cap \tilde{\psi}\,(t_2) = \emptyset$.

4) Якщо, додатково, $\psi(t) \neq \emptyset$, $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{P})$, то час $\tilde{\psi}$ є строго монотонним.

Доведення. 1) Перший пункт твердження 1.57 випливає з означення 1.54 та другого пункту твердження 1.55.

2) 2.1) Нехай $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$. Тоді, згідно (1.11), $\omega \in \tilde{\psi}(t)$, де $t = \mathsf{tm}\,(\omega)$.

2.2) Нехай, $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$, $\omega_2 \leftarrow (\mathrm{f})\,\omega_1$ і $\omega_1 \neq \omega_2$. Відповідно до (1.11), для $t_1 = \mathsf{tm}\,(\omega_1)$, $t_2 = \mathsf{tm}\,(\omega_2)$ отримаємо, $\omega_1 \in \tilde{\psi}\,(t_1)$, $\omega_2 \in \tilde{\psi}\,(t_2)$. Оскільки $\omega_2 \leftarrow (\mathrm{f})\,\omega_1$ і $\omega_2 \neq \omega_1$, то, за твердженням 1.55, пункт 1, маємо $t_1 < t_2$.

З пунктів 2.1),2.2) випливає, що $\tilde{\psi}$ є часом на $\mathcal{Q}$.

2.3) Нехай, $\omega_1 \in \tilde{\psi}\,(t_1)$, $\omega_2 \in \tilde{\psi}\,(t_2)$, $\omega_2 \leftarrow (\mathrm{f})\,\omega_1$ і $\omega_1 \not\leftarrow (\mathrm{f})\,\omega_2$. Тоді, за означенням часу $\tilde{\psi}$ (1.11), $\mathsf{tm}\,(\omega_1) = t_1$, $\mathsf{tm}\,(\omega_2) = t_2$. Оскільки $\omega_1 \not\leftarrow (\mathrm{f})\,\omega_2$, то $\omega_1 \neq \omega_2$ (за означенням 1.54). Тому, за твердженням 1.55, пункт 1, отримуємо нерівність $t_1 < t_2$. Отже, час $\tilde{\psi}$ є монотонним.

3) Нехай $t_1, t_2 \in \mathbf{Tm}(\mathcal{P})$. Припустимо, що $\tilde{\psi}\,(t_1) \cap \tilde{\psi}\,(t_2) \neq \emptyset$. Тоді існує елементарно-часовий стан $\omega \in \tilde{\psi}\,(t_1) \cap \tilde{\psi}\,(t_2)$. Звідси, згідно (1.11) отримуємо, $t_1 = \mathsf{tm}\,(\omega) = t_2$.

4) Нехай, додатково, $\psi(t) \neq \emptyset$, $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{P})$. Тоді для довільного $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{P})$ існує елементарний стан $x_t \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{P})$ такий, що $x_t \in \psi(t)$. Тому, елементарно-часовий стан $\omega_t = (t, x_t) \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$ буде задовольняти умову $\mathsf{tm}\,(\omega_t) = t$, тобто $\omega_t \in \tilde{\psi}(t)$. Отже, $\tilde{\psi}(t) \neq \emptyset$, $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{P})$. Звідси, враховуючи пункт 3) даного твердження, отримуємо $\tilde{\psi}\,(t_1) \neq \tilde{\psi}\,(t_2)$ при $t_1, t_2 \in \mathbf{Tm}(\mathcal{P})$, $t_1 \neq t_2$. Таким чином, час $\tilde{\psi}$ є невпинним, тобто, враховуючи пункт 2), — строго монотонним. □

1.8.2. База елементарних процесів та базові мінливі множини.

Як було доведено у твердженні 1.57, для довільної примітивної мінливої множини $\mathcal{P}$ пара $(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P}), \leftarrow (\mathrm{f}))$ є орієнтованою множиною, в якій відношення $\leftarrow (\mathrm{f})$ є напрямним відношенням змін (трансформацій). Проте виявляється, що це відношення не завжди повністю підходить для опису еволюції *елементарно-часових станів*. Інколи це відношення може генерувати такі "трансформації" елементарно-часових станів, яких реально ніколи не було у фізичній системі. Для ілюстрації цієї думки розглянемо наступний приклад.

Приклад 1.58. Розглянемо систему абстрактних траєкторій, що описує рівномірний прямолінійний рух континуальної системи однакових матеріальних точок, рівномірно розподіленої по прямій, вздовж якої вони рухаються. Однаковість всіх матеріальних точок означає, що всі характеристики цих точок визначаються виключно їхніми координатами у певний момент часу (інші характеристики, якщо вони є, — однакові для будь-якої пари точок). Тобто точка, яка має певні координати в певний момент часу повністю математично тотожна тій точці, що мала ці ж самі координати, але в інший момент часу. Таку систему рухомих матеріальних точок можна, наприклад,

задати за допомогою наступної системи абстрактних траєкторій з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{R} = \{r_\alpha \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}\,, \quad \text{де} \quad r_\alpha(t) := t + \alpha \quad (t \in \mathbb{R},\ \mathfrak{D}\,(r_\alpha) = \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R})\,. \tag{1.12}$$

Покладемо, $\mathcal{P} := \mathcal{A}tp((\mathbb{R}, \leq)\,, \mathcal{R})$, де "$\leq$" — стандартний порядок на полі дійсних чисел. Згідно з означенням 1.51 і умовою 1) теореми 1.50, $\mathfrak{Bs}(\mathcal{P}) = \mathbf{Tm}(\mathcal{P}) = \mathbb{R}$. Доведемо, що для елементів $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{P}) = \mathbb{R}$ умова $x_2 \leftarrow x_1$ рівносильна умові $x_1 \leq x_2$. Справді, якщо $x_1 \leq x_2$, то для $t_1 = x_1$, $t_2 = x_2$ маємо $x_1 = r_0\,(t_1)$, $x_2 = r_0\,(t_2)$, де $t_1 \leq t_2$. Отже, згідно за умовою 2) теореми 1.50, отримуємо $x_2 \leftarrow x_1$. Навпаки, якщо $x_2 \leftarrow x_1$, то, за умовою 2) теореми 1.50, існують числа $\alpha, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ такі, що $t_1 \leq t_2$, $x_1 = r_\alpha\,(t_1)$, $x_2 = r_\alpha\,(t_2)$, тобто $x_1 = t_1 + \alpha$, $x_2 = t_2 + \alpha$, де $t_1 \leq t_2$. Звідси $x_1 \leq x_2$.

Доведемо, що $\mathbb{Bs}(\mathcal{P}) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Оскільки $\mathfrak{Bs}(\mathcal{P}) = \mathbf{Tm}(\mathcal{P}) = \mathbb{R}$, то $\mathbb{Bs}(\mathcal{P}) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Отже, залишається довести обернене включення. Нехай, $\omega = (\tau, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Покладемо $\alpha_\omega := x - \tau$. Тоді, $r_{\alpha_\omega}(\tau) = \tau + (x - \tau) = x$. Отже, за умовою 3) теореми 1.50, $x \in \psi_{\mathcal{P}}(\tau)$. А це означає, що $\omega = (\tau, x) \in \mathbb{Bs}(\mathcal{P})$. Рівність $\mathbb{Bs}(\mathcal{P}) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ доведена.

За означенням 1.54 формально послідовних елементарно-часових станів, для $\omega_1 = (t_1, x_1)$, $\omega_2 = (t_2, x_2) \in \mathbb{Bs}(\mathcal{P})$ умова $\omega_2 \leftarrow (\mathrm{f})\,\omega_1$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\omega_1 = \omega_2$ або $t_1 < t_2$ і $x_1 \leq x_2$. Отже, якщо ми виберемо довільні елементарно-часові стани $\omega_1 = (t_1, x_1), \omega_2 = (t_2, x_2) \in \mathbb{Bs}(\mathcal{P})$ таким чином, щоб виконувались умови $t_1 < t_2$ і $x_1 \leq x_2$, то отримаємо $\omega_2 \leftarrow (\mathrm{f})\,\omega_1$. Але, якщо при цьому $x_1 - t_1 \neq x_2 - t_2$, то не існує жодної траєкторії $r_\alpha \in \mathcal{R}$ такої, що $\omega_1, \omega_2 \in r_\alpha$. Це означає, що в реальному фізичному процесі, при умові $x_1 - t_1 \neq x_2 - t_2$, елементарно-часовий стан ω_2 не є результатом трансформацій елементарно-часового стану ω_1. Таким чином, в даному прикладі, відношення $\leftarrow (\mathrm{f})$ породжує безліч "паразитичних трансформаційних зв'язків", які ніколи не мали місце в реальній дійсності.

Існує спосіб виходу із наведеної вище незручної ситуації шляхом введення формальної "ознаки неоднаковості" матеріальних точок, що рухаються по зазначеним траєкторіям. Наприклад, замість системи абстрактних траєкторій (1.12) можна було б розглянути систему абстрактних траєкторій з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^2$ виду:

$$\mathcal{R} = \{r_\alpha \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}\,, \quad \text{де} \quad r_\alpha(t) := (t + \alpha,\, \alpha) \in \mathbb{R}^2, \quad (t \in \mathbb{R},\ \ \alpha \in \mathbb{R}).$$

Підкреслимо, що число α в другій координаті $r_\alpha(t)$ слід розуміти не як просторову координату, а як "номер" траєкторії r_α. Проте такий підхід в абстрактній ситуації є недостатньо загальним. Існує інший (більш гнучкий) спосіб виходу із наведеної вище ситуації — задати "напрямне відношення змін" не лише на множині елементарних станів $\mathfrak{Bs}(\mathcal{P})$, але й на множині елементарно-часових станів $\mathbb{Bs}(\mathcal{P})$ примітивної мінливої множини $\mathcal{P}$. Справді, розглянемо примітивну мінливу множину $\mathcal{P} := \mathcal{A}tp(\mathcal{R})$ з прикладу 1.58. Якщо для довільних $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Bs}(\mathcal{P})$ покласти $\omega_2 \lhd\!\!\leftarrow \omega_1$ тоді і тільки тоді, коли $\mathsf{tm}\,(\omega_1) \leq \mathsf{tm}\,(\omega_2)$ і існує траєкторія $r_\alpha \in \mathcal{R}$ така, що $\omega_1, \omega_2 \in r_\alpha$ (тобто така,

що $\mathsf{bs}\,(\omega_1) = r_\alpha\,(\mathsf{tm}\,(\omega_1))$, $\mathsf{bs}\,(\omega_2) = r_\alpha\,(\mathsf{tm}\,(\omega_2)))$, то таке відношення "$\lhd\!\!\leftarrow$" відображало б лише ті трансформації елементарно-часових станів, які мають місце у реальній дійсності.

Означення 1.59. 1. Нехай, $\mathcal{P}$ — примітивна мінлива множина. Відношення $\lhd\!\!\leftarrow$ на $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$ будемо називати **базою елементарних процесів** на $\mathcal{P}$, якщо:

(1) $\forall\,\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})\ \omega \lhd\!\!\leftarrow \omega$.

(2) Якщо $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$ і $\omega_2 \lhd\!\!\leftarrow \omega_1$, то $\omega_2 \leftarrow (\mathrm{f})\,\omega_1$ (тобто $\lhd\!\!\leftarrow \subseteq \leftarrow (\mathrm{f})$).

(3) Для довільних $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{P})$ таких, що $x_2 \leftarrow x_1$ існують $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$ такі, що $\mathsf{bs}\,(\omega_1) = x_1$, $\mathsf{bs}\,(\omega_2) = x_2$ і $\omega_2 \lhd\!\!\leftarrow \omega_1$.

2. Якщо $\mathcal{P}$ — примітивна мінлива множина і $\lhd\!\!\leftarrow$ — база елементарних процесів на $\mathcal{P}$, то пару $\boxed{\mathcal{B} = (\mathcal{P}, \lhd\!\!\leftarrow)}$ будемо називати **базовою мінливою множиною**.

1.8.3. Про систему позначень для базових мінливих множин.

Надалі базові мінливі множини будемо позначати великими каліграфічними буквами. Нехай, $\mathcal{B} = (\mathcal{P}, \lhd\!\!\leftarrow)$ — базова мінлива множина. Введемо наступні позначення:

$\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) := \mathfrak{Bs}(\mathcal{P})$; $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) := \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$; $\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} := \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow}$; $\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}(\mathrm{f}) := \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow}(\mathrm{f})$; $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}} := \lhd\!\!\leftarrow$; $\mathbf{Tm}(\mathcal{B}){:=}\mathbf{Tm}(\mathcal{P})$; $\leq_{\mathcal{B}}{:=}\leq_{\mathcal{P}}$; $<_{\mathcal{B}}{:=}<_{\mathcal{P}}$; $\geq_{\mathcal{B}}{:=}\geq_{\mathcal{P}}$; $>_{\mathcal{B}}{:=}>_{\mathcal{P}}$; $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) := \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{P}) = (\mathbf{Tm}(\mathcal{B}), \leq_{\mathcal{B}})$; $\psi_{\mathcal{B}} := \psi_{\mathcal{P}}$.

Коли відомо, про яку базову мінливу множину $\mathcal{B}$ йде мова в позначеннях $\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}$, $\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}(\mathrm{f})$, $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}}$ $\leq_{\mathcal{B}}$, $<_{\mathcal{B}}$, $\geq_{\mathcal{B}}$, $>_{\mathcal{B}}$, $\psi_{\mathcal{B}}$ символ $\mathcal{B}$ будемо опускати, вживаючи замість них позначення $\leftarrow$, $\leftarrow(\mathrm{f})$, $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\leftarrow}$, $\leq$, $<$, $\geq$, $>$, ψ відповідно.

Крім того, для довільних елементарно-часових станів $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ часто будемо вживати скорочені позначення $\omega_2 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_1$ або $\omega_2 \leftarrow \omega_1$ замість, відповідно, $\omega_2 \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}} \omega_1$ або $\omega_2 \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\leftarrow} \omega_1$ (у випадках, коли це не приводить до непорозумінь).

З означень 1.59, 1.54 та зауважень 1.48, 1.53, беручи до уваги прийняту систему позначень, отримуємо наступні ***властивості базових мінливих множин***:

Властивості 1.60. *Нехай, $\mathcal{B}$ довільна базова мінлива множина. Тоді:*

1. *Пара $\mathcal{B}_0 = (\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}), \leftarrow) = \left(\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}), \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}\right)$ є орієнтованою множиною.*
2. *$\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \neq \emptyset$ і $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \neq \emptyset$.*
3. *Бінарне відношення $\leq_{\mathcal{B}}$ є (нестрогим) лінійним порядком на $\mathbf{Tm}(\mathcal{B})$ (тобто $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = (\mathbf{Tm}(\mathcal{B}), \leq_{\mathcal{B}})$ є лінійно упорядкованою множиною).*
4. *$\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$.*
5. *Відображення $\psi = \psi_{\mathcal{B}}$ є часом на $\mathcal{B}_0 = (\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}), \leftarrow)$.*

6. $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}}$ *є рефлексивним бінарним відношенням, визначеним на* $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$. *Отже, для довільного елементарно-часового стану* $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ *маємо* $\omega \leftarrow \omega$.

7. *Якщо* $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ *і* $\omega_2 \leftarrow \omega_1$, *то* $\omega_2 \leftarrow (\mathrm{f})\, \omega_1$, *а отже,* $\mathsf{bs}\,(\omega_2) \leftarrow \mathsf{bs}\,(\omega_1)$ *і* $\mathsf{tm}\,(\omega_1) \leq \mathsf{tm}\,(\omega_2)$. *Якщо ж, додатково,* $\omega_1 \neq \omega_2$, *то* $\mathsf{tm}\,(\omega_1) < \mathsf{tm}\,(\omega_2)$.

8. *Для довільних* $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ *умова* $x_2 \leftarrow x_1$ *виконується тоді і тільки тоді, коли існують елементарно-часові стани* $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ *такі, що* $\mathsf{bs}\,(\omega_1) = x_1$, $\mathsf{bs}\,(\omega_2) = x_2$ *і* $\omega_2 \leftarrow \omega_1$.

9. $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) = \{\mathsf{bs}\,(\omega) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})\}$.

1.8.4. Приклади базових мінливих множин.

Приклад 1.61. Нехай, $\mathcal{P}$ — довільна примітивна мінлива множина. Тоді відношення $\leftarrow (\mathrm{f}) = \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow}(\mathrm{f})$ є базою елементарних процесів на $\mathcal{P}$. Справді, умови (1) і (2) означення 1.59 для відношення $\leftarrow (\mathrm{f})$ виконуються тривіальним чином. Перевіримо умову (3). Розглянемо довільні $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{P})$ такі, що $x_2 \leftarrow x_1$. У випадку $x_1 = x_2$, за означенням часу, існує момент часу $t_1 \in \mathbf{Tm}(\mathcal{P})$ такий, що $x_1 \in \psi\,(t_1)$. Отже, для $\omega_1 = \omega_2 = (t_1, x_1) \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$ будемо мати $\mathsf{bs}\,(\omega_1) = \mathsf{bs}\,(\omega_2) = x_1 = x_2$ і $\omega_2 \leftarrow (\mathrm{f})\, \omega_1$. Тому у випадку $x_1 = x_2$ третя умова означення 1.59 виконується. У випадку $x_1 \neq x_2$, за означенням часу, існують моменти часу $t_1, t_2 \in \mathbf{Tm}(\mathcal{P})$ такі, що $x_1 \in \psi\,(t_1)$, $x_2 \in \psi\,(t_2)$ і $t_1 < t_2$. Тому, для $\omega_1 = (t_1, x_1)$, $\omega_2 = (t_1, x_2) \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$ будемо мати $\mathsf{bs}\,(\omega_1) = x_1$, $\mathsf{bs}\,(\omega_2) = x_2$ і $\omega_2 \leftarrow (\mathrm{f})\, \omega_1$. Отже і в цьому випадку третя умова означення 1.59 також виконується. Таким чином, *довільну примітивну мінливу множину завжди можна ототожнити з базовою мінливою множиною* $\mathcal{P}_{(f)} = (\mathcal{P}, \leftarrow (\mathrm{f}))$, *у якій відношення* $\leftarrow (\mathrm{f})$ *є базою елементарних процесів.*

Приклад 1.62. Розглянемо довільну систему абстрактних траєкторій $\mathcal{R}$ з $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ в M. Покладемо, $\mathcal{P} := \mathcal{A}tp(\mathbb{T}, \mathcal{R})$. За теоремою 1.50, маємо $\mathfrak{Bs}(\mathcal{P}) = M$, $\mathbf{Tm}(\mathcal{P}) = \mathbf{T}$. Крім того, згідно з третім пунктом теореми 1.50, для $(t, x) \in \mathbf{T} \times M$ умова $(t, x) \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$ має місце тоді і тільки тоді, коли існує абстрактна траєкторія $r = r_{t,x} \in \mathcal{R}$ така, що $t \in \mathfrak{D}(r)$ і $x = r(t)$, тобто така, що $\omega = (t, x) \in r$. Отже,

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P}) = \bigcup_{r \in \mathcal{R}} r. \tag{1.13}$$

Далі, для $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{P})$ покладемо $\omega_2 \lessdot\!\!\leftarrow [\mathcal{R}]\, \omega_1$ тоді і тільки тоді, коли $\mathsf{tm}\,(\omega_1) \leq \mathsf{tm}\,(\omega_2)$ і існує абстрактна траєкторія $r \in \mathcal{R}$ така, що $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{R}$ (тобто така, що $\mathsf{bs}\,(\omega_1) = r\,(\mathsf{tm}\,(\omega_1))$, $\mathsf{bs}\,(\omega_2) = r\,(\mathsf{tm}\,(\omega_2))$). Нескладно перевірити, що відношення $\lessdot\!\!\leftarrow [\mathcal{R}]$ є базою елементарних процесів на $\mathcal{P}$. Отже, пара:

$$\mathcal{A}t(\mathbb{T}, \mathcal{R}) = (\mathcal{P}, \lessdot\!\!\leftarrow [\mathcal{R}]\,) = (\mathcal{A}tp(\mathbb{T}, \mathcal{R}), \lessdot\!\!\leftarrow [\mathcal{R}]\,)$$

є базовою мінливою множиною.

З властивостей 1.60(8,9) [1.4] випливає, що знаючи $\mathbf{Tm}(\mathcal{B})$, $\leq_{\mathcal{B}}$, $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ та базу елементарних процесів $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}}$ для деякої базової мінливої множини $\mathcal{B}$, можна однозначно відновити множину $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$, напрямне відношення змін $\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}$ та час $\psi_{\mathcal{B}}(t)$ (за формулою $\psi_{\mathcal{B}}(t) = \{x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \mid (t,x) \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})\}$, $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$), а отже і всю базову мінливу множину $\mathcal{B}$. Тому з прикладу 1.62 випливає справедливість наступної теореми.

Теорема 1.63. *Для довільної системи абстрактних $\mathcal{R}$ траєкторій з $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ в M існує, причому єдина, базова мінлива множина $\mathcal{B} = \mathcal{A}t(\mathbb{T}, \mathcal{R})$ така, що:*

1. $\mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathcal{A}t(\mathbb{T}, \mathcal{R})) = \mathbb{T}$ *(тобто* $\mathbf{Tm}\,(\mathcal{A}t(\mathbb{T}, \mathcal{R})) = \mathbf{T}$, $\leq_{\mathcal{A}t(\mathbb{T},\mathcal{R})} = \leq$*);*
2. $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{A}t(\mathbb{T}, \mathcal{R})) = \bigcup_{r \in \mathcal{R}} r$*;*
3. *для довільних $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{A}t(\mathbb{T}, \mathcal{R}))$ умова $\omega_2 \underset{\mathcal{A}t(\mathbb{T},\mathcal{R})}{\leftarrow} \omega_1$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\mathsf{tm}\,(\omega_1) \leq \mathsf{tm}\,(\omega_2)$ і існує траєкторія $r \in \mathcal{R}$ така, що $\omega_1, \omega_2 \in r$.*

Зауваження 1.64. 1. Оскільки базова мінлива множина $\mathcal{A}t(\mathbb{T}, \mathcal{R})$ будується на основі примітивної мінливої множини $\mathcal{A}tp\,(\mathbb{T}, \mathcal{R})$, то для довільної базової мінливої множини виду $\mathcal{B} = \mathcal{A}t(\mathbb{T}, \mathcal{R})$ (де $\mathcal{R}$ — система абстрактних траєкторій з $(\mathbf{T}, \leq)$ в M) залишаються вірними пункти 1),2),3) теореми 1.50 (з заміною символу $\mathcal{P}$ на $\mathcal{B}$ і $\mathcal{A}tp\,(\mathbb{T}, \mathcal{R})$ на $\mathcal{A}t\,(\mathbb{T}, \mathcal{R})$).

2. Надалі, коли лінійно упорядкована множина $\mathbb{T}$ є наперед відомою, замість позначення $\mathcal{A}t(\mathbb{T}, \mathcal{R})$ будемо використовувати позначення $\mathcal{A}t\,(\mathcal{R})$.

1.8.5. Про інший спосіб визначення базових мінливих множин.

Наступна теорема демонструє інший, більш лаконічний, хоча й більш штучний, шлях для визначення поняття базової мінливої множини.

Теорема 1.65. ***Нехай***, *$\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — довільна лінійно упорядкована множина, $\mathcal{X}$ — довільна множина і $\lessdot$ — бінарне відношення, визначене на деякій множині $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{T} \times \mathcal{X}$, яке задовольняє такі умови:*

1. *Відношення $\lessdot$ рефлексивне на $\mathbf{B}$;*
2. *$\forall\ \omega, \omega_2 \in \mathbf{B}$ з умов $\omega_2 \lessdot \omega_1$ і $\omega_1 \neq \omega_2$ випливає, що $\mathsf{tm}\,(\omega_1) < \mathsf{tm}\,(\omega_2)$.*

Тоді *існує єдина базова мінлива множина $\mathcal{B}$, що задовольняє такі умови:*

$$\textbf{а)}\ \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = \mathbb{T}; \quad \textbf{б)}\ \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \mathbf{B}; \quad \textbf{в)}\ \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}} = \lessdot.$$

Доведення. **1.** Введемо такі позначення:

$$r_{\omega_1,\omega_2} := \{\omega_1, \omega_2\} \quad (\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{B})\,; \qquad \mathcal{R} := \{r_{\omega_1,\omega_2} \mid \omega_1, \omega_2 \in \mathbf{B},\ \omega_2 \lessdot \omega_1\}\,. \tag{1.14}$$

[1.4] Посилання на властивості 1.60(8,9) означає посилання на пункти 8 і 9 з групи властивостей "Властивості 1.60".

Доведемо, що всі елементи множини $\mathcal{R}$ є абстрактними траєкторіями з $\mathbb{T}$ в $\mathcal{X}$. Зафіксуємо довільні $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{B}$ такі, що $\omega_2 \lessdot\!\!\!- \omega_1$. Оскільки $r_{\omega_1,\omega_2} = \{\omega_1, \omega_2\} \subseteq \mathbf{B} \subseteq \mathbf{T} \times \mathcal{X}$, то r_{ω_1,ω_2} є бінарним відношенням з $\mathbf{T}$ в $\mathcal{X}$. Доведемо, що це відношення є функцією. Припустимо супротивне. Тоді існують $(t, x_1), (t, x_2) \in r_{\omega_1,\omega_2}$ такі, що $x_1 \neq x_2$ (а отже $(t, x_1) \neq (t, x_2)$). Тому, можливими є лише наступні два випадки: $(t, x_1) = \omega_1$, $(t, x_2) = \omega_2$ або $(t, x_1) = \omega_2$, $(t, x_2) = \omega_1$. Але, оскільки $\omega_2 \lessdot\!\!\!- \omega_1$, за умовою 2 даної теореми, в обох випадках отримуємо хибну нерівність $t < t$. Тому, відношення r_{ω_1,ω_2} є функцією, а отже, і абстрактною траєкторією з $\mathbb{T}$ в $\mathcal{X}$. Тобто, $\mathcal{R}$ є системою абстрактних траєкторій з $\mathbb{T}$ в $\bigcup_{r \in \mathcal{R}} \mathfrak{R}(r) \subseteq \mathcal{X}$. Позначимо:

$$\mathcal{B} := \mathcal{A}t\,(\mathbb{T}, \mathcal{R})\,.$$

a) За теоремою 1.63 (пункт 1), $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = \mathbb{T}$.

b) За теоремою 1.63 (пункт 2), маємо:

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \bigcup_{r \in \mathcal{R}} r = \bigcup_{\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{B},\, \omega_2 \lessdot\!\!\!- \omega_1} \{\omega_1, \omega_2\} \subseteq \mathbf{B}. \tag{1.15}$$

З іншого боку, беручи до уваги, що, за умовою 1 даної теореми, відношення $\lessdot\!\!\!-$ є рефлексивним, отримуємо обернене включення:

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \bigcup_{\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{B},\, \omega_2 \lessdot\!\!\!- \omega_1} \{\omega_1, \omega_2\} \supseteq \bigcup_{\omega \in \mathbf{B}} \{\omega\} = \mathbf{B}. \tag{1.16}$$

Таким чином, $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \mathbf{B}$. Отже, базова мінлива множина $\mathcal{B}$ задовольняє умови а),б) висновку даної теореми.

в) Доведемо, що умова в) для базової мінливої множини $\mathcal{B}$ також виконується. Необхідно довести, що для довільних $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{B} = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ умова $\omega_2 \lessdot\!\!\!- \omega_1$ еквівалентна умові $\omega_2 \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}} \omega_1$ (тобто умові $\omega_2 \leftarrow \omega_1$). Оскільки обидва відношення $\lessdot\!\!\!-$ та $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}}$ є рефлексивними на $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \mathbf{B}$, досить довести останнє твердження лише для випадку $\omega_1 \neq \omega_2$. Отже, зафіксуємо довільні $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{B} = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ такі, що $\omega_1 \neq \omega_2$.

в.1) Припустимо, що $\omega_2 \leftarrow \omega_1$. тоді, за теоремою 1.63 (пункт 3),

$$\mathsf{tm}\,(\omega_1) \leq \mathsf{tm}\,(\omega_2) \tag{1.17}$$

і існує траєкторія $r_{w_1,w_2} \in \mathcal{R}$ $(w_2 \lessdot\!\!\!- w_1)$ така, що $\omega_1, \omega_2 \in r_{w_1,w_2} = \{w_1, w_2\}$. Отже, оскільки $w_2 \lessdot\!\!\!- w_1$ і $\omega_1 \neq \omega_2$, повинна виконуватись хоч одна з умов $\omega_2 \lessdot\!\!\!- \omega_1$ або $\omega_1 \lessdot\!\!\!- \omega_2$. Проте, випадок $\omega_1 \lessdot\!\!\!- \omega_2$ є неможливим, оскільки в цьому випадку, за умовою 2 даної теореми отримуємо нерівність $\mathsf{tm}\,(\omega_2) < \mathsf{tm}\,(\omega_1)$, яка суперечить нерівності (1.17). Отже, $\omega_2 \lessdot\!\!\!- \omega_1$.

в.2) Навпаки, припустимо, що $\omega_2 \lessdot\!\!\!- \omega_1$. Тоді, згідно (1.14), маємо, $r_{\omega_1,\omega_2} \in \mathcal{R}$. Отже, за умовою 2 даної теореми, $\mathsf{tm}\,(\omega_1) < \mathsf{tm}\,(\omega_2)$. Тому, за теоремою 1.63 (пункт

3) $\omega_2 \leftarrow \omega_1$.

Рівність $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}} = \lessdot\!\!-$ доведена. Таким чином, базова мінлива множина $\mathcal{B}$ задовольняє умови а),б),в).

2. Необхідно довести, що існує лише єдина базова мінлива множина $\mathcal{B}$, яка задовольняє умови а),б),в). Припустимо, що базова мінлива множина $\mathcal{B}_1$ також задовольняє умови а),б),в). Доведемо, що тоді $\mathcal{B}_1$ мусить задовольняти умови 1),2),3) теореми 1.63 для системи абстрактних траєкторій $\mathcal{R}$, визначеної в (1.14).

2.1) За умовою а), $\mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathcal{B}_1) = \mathbb{T}$.

2.2) Використовуючи умову б) і застосовуючи співвідношення (1.15),(1.16), отримуємо, $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_1) = \mathbf{B} = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \bigcup_{r\in\mathcal{R}} r$.

2.3) Оскільки обидві базові мінливі множини $\mathcal{B}$ та $\mathcal{B}_1$ задовольняють умову в), то $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow}} = \lessdot\!\!- = \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}} = \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{A}t(\mathbb{T},\mathcal{R})}{\leftarrow}}$. Це означає, що $\mathcal{B}_1$ задовольняє умову 3) теореми 1.63.

Отже, базова мінлива множина $\mathcal{B}_1$ задовольняє всі умови теореми 1.63 для системи абстрактних траєкторій $\mathcal{R}$. Тому, за теоремою 1.63, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{A}t(\mathbb{T},\mathcal{R}) = \mathcal{B}$. $\square$

Зауваження 1.66. З властивостей 1.60 і означення 1.52 випливає, що для базової мінливої множини $\mathcal{B}$, що задовольняє умови а),б),в) теореми 1.65 виконуються наступні твердження:

1. $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) = \{\mathsf{bs}\,(\omega) \mid \omega \in \mathbf{B}\}$;

2. для довільних $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ умова $x_2 \leftarrow x_1$ виконується тоді і тільки тоді, коли існують елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{B} = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ такі, що $\mathsf{bs}\,(\omega_1) = x_1$, $\mathsf{bs}\,(\omega_2) = x_2$ і $\omega_2 \lessdot\!\!- \omega_1$.

3. $\psi_{\mathcal{B}}(t) = \{\mathsf{bs}\,(\omega) \mid \omega \in \mathbf{B},\ \mathsf{tm}\,(\omega) = t\}$, $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$. Зокрема, $\psi_{\mathcal{B}}(t) = \emptyset$ для випадку, коли не існує $\omega \in \mathbf{B}$ такого, що $\mathsf{tm}\,(\omega) = t$.

Зауваження 1.67. Нехай $\mathcal{B}$ — довільна базова мінлива множина. Позначимо:

$$\mathbb{T} := \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}); \quad \mathcal{X} := \mathfrak{Bs}(\mathcal{B}); \quad \mathbf{B} := \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}), \quad \lessdot\!\!- := \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}}.$$

Очевидно, що умови 1,2 теореми 1.65 для $\mathbb{T}, \mathcal{X}, \mathbf{B}$ і $\lessdot\!\!-$ виконуються. Крім того, $\mathcal{B}$ є (єдиною) базовою мінливою множиною, що задовольняє умови а),б),в) висновку цієї теореми. Тому, використовуючи теорему 1.65 можна дати інше означення для поняття базової мінливої множини. А саме, базову мінливу множину можна визначити, як математичну структуру, що складається з лінійно упорядкованої множини $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$, множини $\mathcal{X}$, підмножини $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{T} \times \mathcal{X}$, і бінарного відношення $\lessdot\!\!-$, визначеного на $\mathbf{B}$, що задовольняє умови 1,2 теореми 1.65. Цей підхід до визначення базових мінливих множин використано, наприклад, в роботі [84].

З теореми 1.65 (беручи до уваги зауваження 1.67) отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 1.68. *Якщо для базових мінливих множин $\mathcal{B}_1$ і $\mathcal{B}_2$ справедливі рівності,* $\mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathcal{B}_1) = \mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathcal{B}_2)$, $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_1) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_2)$, $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow}} = \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_2}{\leftarrow}}$, *то* $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$.

Основні результати підрозділу 1.7 були анонсовані в роботі [67] і опубліковані в [85, розділ 2] крім теореми 1.65, яка опублікована в [86, теорема 2.2].

1.9. Ланцюги у множині елементарно-часових станів та лінії долі базових мінливих множин

Використовуючи означення базових мінливих множин, властивість 1.60(7), а також твердження 1.57 та 1.55 (пункт 2) отримуємо наступне твердження.

Твердження 1.69. *Нехай $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина. Тоді:*
1) Пара $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}} = \left(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}), \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}}\right) = (\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}), \leftarrow)$ є антициклічною орієнтованою множиною.
2) Відображення

$$\tilde{\psi}(t) = \tilde{\psi}_{\mathcal{B}}(t) := \{\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \mid \mathsf{tm}\,(\omega) = t\} \in 2^{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})} \quad (t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})) \tag{1.18}$$

є монотонним часом на $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}$.
3) Якщо, додатково, $\psi(t) \neq \emptyset$, $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$, то час $\tilde{\psi}$ є строго монотонним.

Згідно з твердженням 1.69, для довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}$ пара $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}} = (\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}), \leftarrow)$ є (антициклічною) орієнтованою множиною. Як і в довільній орієнтованій множині, в $(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}), \leftarrow)$ можна розглядати транзитивні множини і ланцюги. З антициклічності орієнтованої множини $(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}), \leftarrow)$ випливає наступне твердження.

Твердження 1.70. *Нехай $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина. Тоді:*

1) Довільна транзитивна підмножина $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ орієнтованої множини $(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}), \leftarrow)$ є (частково) упорядкованою множиною (відносно відношення $\leftarrow$).

2) Довільний ланцюг $\mathcal{L}$ орієнтованої множини $(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}), \leftarrow)$ є лінійно упорядкованою множиною (відносно відношення $\leftarrow$).

Позначення 1.71. Надалі через $\mathbb{L}l(\mathcal{B})$ будемо позначати множину всіх ланцюгів у множині елементарно-часових станів базової мінливої множини $\mathcal{B}$, тобто множину всіх ланцюгів орієнтованої множини $\left(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}), \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}}\right) = (\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}), \leftarrow)$.

Означення 1.72. Нехай $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина.

1) Довільний максимальний ланцюг $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ орієнтованої множини $(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}), \leftarrow)$ будемо називати **лінією долі** $\mathcal{B}$. При цьому множину всіх ліній долі $\mathcal{B}$ будемо позначати через $\mathbb{L}d(\mathcal{B})$:

$$\mathbb{L}d(\mathcal{B}) = \{\mathcal{L} \in \mathbb{L}l(\mathcal{B}) \mid \mathcal{L} \text{ є лінією долі } \mathcal{B}\}\,.$$

2) Довільну лінію долі, що містить елементарно-часовий стан $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ будемо називати **власною** лінією долі елементарно-часового стану ω (в $\mathcal{B}$).

3) Лінію долі $\mathcal{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})$ будемо називати **власною** лінією долі елементарного стану $x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$, якщо існує елементарно-часовий стан $\omega_x \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ такий, що $\mathsf{bs}\,(\omega_x) = x$ і $\mathcal{L}$ є лінією долі ω_x.

З означення 1.72 випливає, що включення:

$$\mathbb{L}d(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{L}l(\mathcal{B})$$

справедливе для довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}$.

Зрозуміло, що елементарний (елементарно-часовий) стан може мати, взагалі кажучи, не одну власну лінію долі.

Означення 1.73. Будемо говорити, що елементарні (елементарно-часові) стани $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$, $(\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B}))$ ***об'єднані долею***, якщо існує хоч одна лінія долі $\mathcal{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})$, яка є власною лінією долі кожного із станів x_1, x_2 (ω_1, ω_2) одночасно.

Твердження 1.74. *1) Довільний елементарно-часовий стан $\omega \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ має хоч одну власну лінію долі.*

2) Для того, щоб елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ були об'єднані долею необхідно і достатньо, щоб виконувалась хоч одна з умов:

$$\omega_2 \leftarrow \omega_1 \quad \textit{або} \quad \omega_1 \leftarrow \omega_2. \tag{1.19}$$

Доведення. 1) перший пункт даного твердження випливає з наслідку 1.8.

2) 2.а) Нехай елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ мають спільну лінію долі $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ (таку, що $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{L}$). Згідно з твердженням 1.70, пункт 2, пара $(\mathcal{L}, \leftarrow)$ є лінійно-упорядкованою множиною. Тому хоч одна з умов (1.19) мусить виконуватись.

2.б) Навпаки, нехай, $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ і $\omega_2 \leftarrow \omega_1$. Тоді, згідно з наслідком 1.8, існує максимальний ланцюг (лінія долі) $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ $(\mathcal{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B}))$ така, що $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{L}$. □

Твердження 1.75. *1) Довільний елементарний стан $x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ має хоч одну власну лінію долі.*

2) Для того, щоб елементарні стани $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ були об'єднані долею необхідно і достатньо, щоб виконувалась хоч одна з умов:

$$y \leftarrow x \quad \textit{або} \quad x \leftarrow y. \tag{1.20}$$

Доведення. 1) Нехай, $x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$. За означенням часу (означення 1.9), існує момент часу $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$ такий, що $x \in \psi(t)$. Згідно з твердженням 1.74, елементарно-часовий стан $\omega_x = (t, x) \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ має власну лінію долі. Ця лінія долі, за означенням 1.72, і буде власною лінією долі для елементарного стану x.

2) 2.а) Нехай, $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$, $y \leftarrow x$. За властивістю 1.60(8) (див. властивості 1.60), існують елементарно-часові стани ω_1,$\omega_2 \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ такі, що $\mathsf{bs}\,(\omega_1) = x$, $\mathsf{bs}\,(\omega_2) = y$ і $\omega_2 \leftarrow \omega_1$. Згідно з твердженням 1.74, ці елементарно-часові стани мають спільну

лінію долі $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$. Дана лінія долі $\mathcal{L}$, за означенням 1.72, і буде власною лінією долі для кожного з елементарних станів x і y.

2.б) Нехай, елементарні стани $x, y \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ мають спільну лінію долі $\mathcal{L}$. Тоді існують елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$, такі, що $\mathsf{bs}\,(\omega_1) = x$, $\mathsf{bs}\,(\omega_2) = y$ і $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{L}$. Тому, згідно з твердженням 1.74, пункт 2), хоч одна з умов $\omega_2 \leftarrow \omega_1$ або $\omega_1 \leftarrow \omega_2$ повинна виконуватись. Отже, за властивістю 1.60(7), хоч одна з умов (1.20) мусить мати місце. □

Означення 1.76. Нехай $\mathcal{R}$ — система абстрактних траєкторій з $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ в M.

1) Траєкторію $r \in \mathcal{R}$ системи абстрактних траєкторій $\mathcal{R}$ будемо називати **максимальною** (відносно $\mathcal{R}$), якщо не існує траєкторії $\rho \in \mathcal{R}$ $(\rho \neq r)$ такої, що $\mathfrak{D}\,(r) \subset \mathfrak{D}\,(\rho)$ і $r(t) = \rho(t)$, $t \in \mathfrak{D}\,(r)$, тобто такої, що $r \subset \rho$.

2) Систему абстрактн. траєкторій $\mathcal{R}$ будемо називати **системою максимальних траєкторій**, якщо кожна траєкторія $r \in \mathcal{R}$ є максимальною (відносно $\mathcal{R}$).

Нагадаємо, що в підрозділі 1.8.3 було введено позначення $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) := (\mathbf{Tm}(\mathcal{B}), \leq_{\mathcal{B}})$ (для довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}$).

Твердження 1.77. *Нехай $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина. Тоді:*

1) Довільний ланцюг $\mathcal{L} \in \mathbb{L}l(\mathcal{B})$ є абстрактною траєкторією з $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$ в $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$.

2) Множина $\mathbb{L}l(\mathcal{B})$ є системою абстрактних траєкторій з $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$ в $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$.

3) Довільна лінія долі $\mathcal{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{L}l(\mathcal{B})$ є максимальною траєкторією (відносно системи абстрактних траєкторій $\mathbb{L}l(\mathcal{B})$).

4) Множина $\mathbb{L}d(\mathcal{B})$ є системою максимальних траєкторій з $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$ в $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$.

Доведення. 1) Нехай, $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ $(\mathcal{L} \in \mathbb{L}l(\mathcal{B}))$ — ланцюг орієнтованої множини $(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}), \leftarrow)$. Оскільки $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ і $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$, то $\mathcal{L}$ є бінарним відношенням з множини $\mathbf{Tm}(\mathcal{B})$ в множину $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$. Отже, для обґрунтування того, що $\mathcal{L}$ є абстрактною траєкторією з $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$ в $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$, досить довести, що відношення $\mathcal{L}$ є функцією з $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$ в $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$. Припустимо, що $\mathcal{L}$ не є функцією. Тоді існують елементарно-часові стани виду $\omega_1 = (t, x_1)$, $\omega_2 = (t, x_2)$ такі, що $x_1 \neq x_2$ і $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{L}$. Оскільки $x_1 \neq x_2$, то $\omega_1 \neq \omega_2$. Оскільки $\mathcal{L}$ — ланцюг, то хоч одна з умов $\omega_2 \leftarrow \omega_1$ або $\omega_1 \leftarrow \omega_2$ повинна виконуватись. Припустимо, наприклад, що $\omega_2 \leftarrow \omega_1$. Тоді, враховуючи, що $\omega_1 \neq \omega_2$, за властивістю 1.60(7), отримаємо нерівність $t < t$, що неможливо. Аналогічно досягаємо суперечності, якщо припустити, що $\omega_1 \leftarrow \omega_2$. Отримана суперечність показує, що припущення — помилкове, а отже ланцюг $\mathcal{L}$ є функцією (тобто абстрактною траєкторією). Отже, доведено пункт 1) даного твердження.

Враховуючи пункт 1) даного твердження, для довільного ланцюга $\mathcal{L} \in \mathbb{L}l(\mathcal{B})$ є коректним вживати позначення $\mathfrak{D}(\mathcal{L})$ для області визначення $\mathcal{L}$ і запис $x = \mathcal{L}(t)$ (де $t \in \mathfrak{D}(\mathcal{L})$) замість $(t, x) \in \mathcal{L}$.

2) Розглянемо довільний елементарний стан $x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$. За означенням 1.9, існує момент часу $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$ такий, що $x \in \psi(t)$. Згідно з твердженням 1.4, пункт 2,

одноелементна множина $\mathcal{L}_x = \{(t,x)\} \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ є ланцюгом орієнтованої множини $(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}), \leftarrow)$. При цьому $\mathfrak{R}(\mathcal{L}_x) = \{x\} \ni x$. Отже, $\bigcup_{\mathcal{L}\in\mathbb{L}l(\mathcal{B})} \mathfrak{R}(\mathcal{L}) \supseteq \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$. Обернене включення очевидне, тобто $\bigcup_{\mathcal{L}\in\mathbb{L}l(\mathcal{B})} \mathfrak{R}(\mathcal{L}) = \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$. Тому, враховуючи пункт 1) даного твердження, приходимо до висновку, що $\mathbb{L}l(\mathcal{B})$ є системою абстрактних траєкторій з $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$ в $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$.

3) Пункт 3) твердження 1.77 випливає з означень 1.72 (п. 1) та 1.76 (п. 1).

4) Доведемо, що $\bigcup_{\mathcal{L}\in\mathbb{L}d(\mathcal{B})} \mathfrak{R}(\mathcal{L}) = \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$. Оскільки $\bigcup_{\mathcal{L}\in\mathbb{L}d(\mathcal{B})} \mathcal{L} \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$, то $\bigcup_{\mathcal{L}\in\mathbb{L}d(\mathcal{B})} \mathfrak{R}(\mathcal{L}) \subseteq \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$. Отже, залишилось довести обернене включення. Розглянемо довільний елементарний стан $x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$. Згідно з твердженням 1.75 (пункт 1), x має власну лінію долі $\mathcal{L}_x \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})$. Це, за означенням 1.72, означає, що існує елементарно-часовий стан $\omega_x = (t,x) \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ такий, що $\omega_x \in \mathcal{L}_x$. Оскільки $(t,x) \in \mathcal{L}_x$, то $\mathcal{L}_x(t) = x$. Отже, $x \in \mathfrak{R}(\mathcal{L}_x) \subseteq \bigcup_{\mathcal{L}\in\mathbb{L}d(\mathcal{B})} \mathfrak{R}(\mathcal{L})$. Тому $\bigcup_{\mathcal{L}\in\mathbb{L}d(\mathcal{B})} \mathfrak{R}(\mathcal{L}) \supseteq \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$, тобто $\bigcup_{\mathcal{L}\in\mathbb{L}d(\mathcal{B})} \mathfrak{R}(\mathcal{L}) = \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$. Отже, $\mathbb{L}d(\mathcal{B})$ є системою абстрактних траєкторій з $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$ в $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$. Оскільки $\mathbb{L}d(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{L}l(\mathcal{B})$, і, згідно з пунктом 3) даного твердження, довільна лінія долі $\mathcal{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})$ є максимальною траєкторією відносно системи абстрактних траєкторій $\mathbb{L}l(\mathcal{B})$, то вона також буде максимальною траєкторією і відносно вужчої системи абстрактних траєкторій $\mathbb{L}d(\mathcal{B})$. □

Твердження 1.78. *Нехай $\mathcal{R}$ — система абстрактних траєкторій з $\mathbb{T}$ в M. Тоді:*

$$\mathcal{R} \subseteq \mathbb{L}l\left(\mathcal{A}t\left(\mathbb{T},\mathcal{R}\right)\right).$$

Доведення. Нехай $\mathcal{R}$ — система абстрактних траєкторій з $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ в M. Розглянемо довільну траєкторію $r \in \mathcal{R}$. Згідно з теоремою 1.63, має місце включення $r \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{A}t\left(\mathbb{T},\mathcal{R}\right)\right)$, і, крім того, для довільних $\omega_1, \omega_2 \in r$ співвідношення $\omega_2 \underset{\mathcal{A}t(\mathbb{T},\mathcal{R})}{\leftarrow} \omega_1$ виконується тоді і тільки тоді, коли $\mathsf{tm}\left(\omega_1\right) \leq \mathsf{tm}\left(\omega_2\right)$. Отже, враховуючи, що $(\mathbf{T}, \leq)$ — лінійно упорядкована множина, приходимо до висновку, що r є ланцюгом у множині елементарно-часових станів базової мінливої множини $\mathcal{A}t\left(\mathbb{T},\mathcal{R}\right)$. □

Наступна теорема показує, що довільна базова мінлива множина може бути породжена деякою системою максимальних траєкторій.

Теорема 1.79. *Для довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}$ має місце рівність:*

$$\mathcal{A}t\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}),\, \mathbb{L}d(\mathcal{B})\right) = \mathcal{B}.$$

Доведення. Покладемо $\mathcal{R} := \mathbb{L}d(\mathcal{B})$ і доведемо, що $\mathcal{A}t(\mathcal{R}) = \mathcal{B}$. { [1.5]}

1) Оскільки, згідно з твердженням 1.77, $\mathcal{R} = \mathbb{L}d(\mathcal{B})$ є системою абстрактних траєкторій з $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = (\mathbf{Tm}(\mathcal{B}), \leq_{\mathcal{B}})$ в $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$, то, згідно з першим пунктом теореми 1.63, маємо, $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{A}t(\mathcal{R})\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$.

[1.5] Тут використовується скорочений варіант позначення $\mathcal{A}t(\mathcal{R})$ замість $\mathcal{A}t(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), \mathcal{R})$.

2) З другого пункту теореми 1.63 випливає рівність:

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{A}t(\mathcal{R})\right) = \bigcup_{r\in\mathcal{R}} r = \bigcup_{\mathcal{L}\in\mathbb{L}d(\mathcal{B})} \mathcal{L} \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}). \tag{1.21}$$

З іншої сторони, згідно з твердженням 1.74 довільний елементарно-часовий стан $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ має власну лінію долі $\mathcal{L}_\omega \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ таку, що $\omega \in \mathcal{L}_\omega$. Тому, $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \subseteq \bigcup_{\mathcal{L}\in\mathbb{L}d(\mathcal{B})} \mathcal{L} = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{A}t(\mathcal{R})\right)$. Тобто, враховуючи включення (1.21) отримуємо, $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{A}t(\mathcal{R})\right) = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$.

3) Розглянемо довільні $\omega_1 = (t_1, x_1)$, $\omega_2 = (t_2, x_2) \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{A}t(\mathcal{R})\right)$.

3.а) Нехай $\omega_2 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_1$. Тоді, за властивістю 1.60(7), маємо $\mathsf{tm}\left(\omega_1\right) \leq \mathsf{tm}\left(\omega_2\right)$. Крім того, згідно з твердженням 1.74 (пункт 2), існує лінія долі $\mathfrak{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})$ така, що $\omega_1, \omega_2 \in \mathfrak{L}$. Таким чином, згідно з теоремою 1.63 (пункт 3), $\omega_2 \underset{\mathcal{A}t(\mathbb{L}d(\mathcal{B}))}{\leftarrow} \omega_1$, тобто $\omega_2 \underset{\mathcal{A}t(\mathcal{R})}{\leftarrow} \omega_1$.

3.б) Навпаки, нехай $\omega_2 \underset{\mathcal{A}t(\mathcal{R})}{\leftarrow} \omega_1$. Тоді, згідно з теоремою 1.63 (пункт 3), $\mathsf{tm}\left(\omega_1\right) \leq \mathsf{tm}\left(\omega_2\right)$ і існує лінія долі $\mathfrak{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})$ така, що $\omega_1, \omega_2 \in \mathfrak{L}$. Оскільки лінія долі $\mathfrak{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{L}l(\mathcal{B})$ є ланцюгом в $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$, то хоч одна з умов $\omega_2 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_1$ або $\omega_1 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_2$ повинна мати місце. Доведемо, що $\omega_2 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_1$. Припустимо супротивне ($\omega_2 \underset{\mathcal{B}}{\not\leftarrow} \omega_1$). Тоді маємо $\omega_1 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_2$ і $\omega_2 \neq \omega_1$ (оскільки у випадку $\omega_1 = \omega_2$ ми б отримали $\omega_2 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_1$). Тобто, за властивістю 1.60(7), маємо, $\mathsf{tm}\left(\omega_2\right) < \mathsf{tm}\left(\omega_1\right)$. Остання нерівність є неможливою, оскільки вона суперечить доведеній вище нерівності $\mathsf{tm}\left(\omega_1\right) \leq \mathsf{tm}\left(\omega_2\right)$. Тому, $\omega_2 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_1$.

З пунктів 3.а) і 3.б) випливає рівність баз елементарних процесів $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}} = \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{A}t(\mathcal{R})}{\leftarrow}}$.

Відповідно, до результатів, доведених вище в пунктах 1),2),3) маємо, $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{A}t(\mathcal{R})\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$, $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{A}t(\mathcal{R})\right) = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$, $\underset{\mathcal{A}t(\mathcal{R})}{\leftarrow} = \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}$. Отже, згідно з наслідком 1.68, отримуємо $\mathcal{A}t(\mathcal{R}) = \mathcal{B}$. □

Наступний приклад покаже, що рівність $\mathbb{L}d(\mathcal{A}t(\mathcal{R})) = \mathcal{R}$ для довільної системи максимальних траєкторій $\mathcal{R}$, взагалі кажучи, не має місця. Причому, в загальному випадку, не можна, навіть, говорити про включення однієї цих множин в іншу.

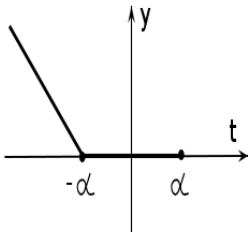
Приклад 1.80. Розглянемо функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, виду $f(t) := \frac{|t|-t}{2}$, $t \in \mathbb{R}$. Розглянемо систему абстрактних траєкторій $\mathcal{R} = \{r_\alpha |\, \alpha \in [0, \infty)\}$, де

$$r_\alpha(t) := f(t+\alpha),\ t \in (-\infty, \alpha] \quad (\mathfrak{D}\left(r_\alpha\right) = (-\infty, \alpha]), \quad \alpha \in (0, \infty);$$
$$r_0(t) := 0, \qquad t \in [0, \infty) \qquad (\mathfrak{D}\left(r_0\right) = [0, \infty)), \quad \alpha = 0.$$

Легко переконатись, що $\mathcal{R}$ є системою максимальних траєкторій з $\mathbb{R}$ в $[0, \infty)$, хоча при цьому абстрактна траєкторія $r_0 \in \mathcal{R}$ не є лінією долі для базової мінливої множини $\mathcal{A}t(\mathcal{R})$, тобто $r_0 \notin \mathbb{L}d(\mathcal{A}t(\mathcal{R}))$. Отже, $\mathcal{R} \not\subseteq \mathbb{L}d(\mathcal{A}t(\mathcal{R}))$. З іншої сторони, розглянемо траєкторію виду:

$$r_0^{\sim}(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \qquad (\mathfrak{D}\left(r_0^{\sim}\right) = \mathbb{R}).$$

$(r_0^{\sim} = \{(t, r_0^{\sim}(t)) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq \bigcup_{r \in \mathcal{R}} r = \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{A}t(\mathcal{R})))$. Легко перевірити, що $r_0^{\sim}$ є лінією долі для базової мінливої множини $\mathcal{A}t(\mathcal{R})$, хоча при цьому $r_0^{\sim} \notin \mathcal{R}$. Отже, $\mathbb{L}d(\mathcal{A}t(\mathcal{R})) \not\subseteq \mathcal{R}$.



Графік траєкторії $y = r_\alpha(t)$ при $\alpha \in (0, \infty)$.

Нижче буде описано найпростіший клас випадків, коли рівність $\mathbb{L}d(\mathcal{A}t(\mathcal{R})) = \mathcal{R}$, все ж таки, має місце.

Означення 1.81. Систему абстрактних траєкторій $\mathcal{R}$ з $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ в M будемо називати системою **індивідуальних траєкторій**, якщо будь-які дві неоднакові траєкторії $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$ не перетинаються $(\forall r_1, r_2 \in \mathcal{R}\ (r_1 \neq r_2 \Longrightarrow r_1 \cap r_2 = \emptyset))$.

Легко бачити, що система абстрактних траєкторій $\mathcal{R}$ з $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ в M є системою індивідуальних траєкторій тоді і тільки тоді, коли для довільних $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$ таких, що $r_1 \neq r_2$ має місце одне із співвідношень:

$$\mathfrak{D}\,(r_1) \cap \mathfrak{D}\,(r_2) = \emptyset \quad \text{або} \quad r_1(t) \neq r_2(t)\ (\forall t \in \mathfrak{D}\,(r_1) \cap \mathfrak{D}\,(r_2)).$$

Звідси, зокрема, випливає, що система траєкторій $\mathcal{R}$ в прикладі 1.58 є системою індивідуальних траєкторій.

Теорема 1.82. *Якщо $\mathcal{R}$ є системою індивідуальних траєкторій з $\mathbb{T}$ в M, то:*

$$\mathbb{L}d(\mathcal{A}t(\mathbb{T}, \mathcal{R})) = \mathcal{R}.$$

Доведення. Нехай, $\mathcal{R}$ є система індивідуальних траєкторій з $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ в M. Всюди в даному доведенні символ "$\leftarrow$" буде означати напрямне відношення змін або базу елементарних процесів у $\mathcal{A}t(\mathcal{R})$.

1. Нехай $r \in \mathcal{R}$. Згідно з твердженням 1.78, маємо, $r \in \mathbb{L}l\,(\mathcal{A}t(\mathcal{R}))$. Отже траєкторія r є ланцюгом орієнтованої множини $(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{A}t(\mathcal{R})), \leftarrow)$. Доведемо, що r є лінією долі $\mathcal{A}t(\mathcal{R}))$ (тобто максимальним ланцюгом $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{A}t(\mathcal{R})))$. Припустимо супротивне. Тоді існує лінія долі $\mathcal{L} \in \mathbb{L}d\,(\mathcal{A}t(\mathcal{R}))$ така, що $r \subset \mathcal{L}$. Оскільки ми маємо строге включення $r \subset \mathcal{L}$, то існує елементарно-часовий стан $\omega \in \mathcal{L}$ такий, що $\omega \notin r$. З іншої сторони, за означенням системи абстрактних траєкторій (див. означення 1.49, пункт 1) всі траєкторії системи $\mathcal{R}$ — непорожні. Отже, існує елементарно-часовий стан $\omega_0 \in r$. Оскільки $r \subset \mathcal{L}$, то $\omega_0 \in \mathcal{L}$. Отже, елементарно-часові стани ω і ω_0 — об'єднані долею. Тому, згідно із твердженням 1.74, мусить виконуватись хоч одна з умов $\omega \leftarrow \omega_0$ або $\omega_0 \leftarrow \omega$. Але, в обох випадках, за теоремою 1.63 (пункт 3), мусить

існувати траєкторія $r_1 \in \mathcal{R}$ така, що $\omega, \omega_0 \in r_1$. Оскільки $\omega \notin r$ і $\omega \in r_1$, то $r \neq r_1$. Проте, з іншої сторони $\omega_0 \in r \cap r_1$, що суперечить тому факту, що $\mathcal{R}$ є системою індивідуальних траєкторій. Отримана суперечність остаточно доводить, що r є лінією долі $\mathcal{A}t(\mathcal{R})$). Таким чином:

$$\mathcal{R} \subseteq \mathbb{L}d\left(\mathcal{A}t(\mathcal{R})\right). \tag{1.22}$$

2. Навпаки, нехай, $\mathcal{L} \in \mathbb{L}d\left(\mathcal{A}t(\mathcal{R})\right)$. Із зауваження 1.53 та наслідку 1.8 випливає, що лінія долі будь-якої базової мінливої множини є непорожньою множиною. Отже, існує елементарно-часовий стан ω такий, що $\omega \in \mathcal{L}$. Оскільки $\omega \in \mathcal{L} \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{A}t(\mathcal{R}))$, то, за теоремою 1.63 (пункт 2), існує траєкторія $r \in \mathcal{R}$ така, що $\omega \in r$. Розглянемо довільний елементарно-часовий стан $\omega_1 \in \mathcal{L}$. Оскільки $\omega, \omega_1 \in \mathcal{L}$, то елементарно-часові стани ω і ω_1 — об'єднані долею, і, згідно із твердженням 1.74, мусить виконуватись хоч одна з умов $\omega_1 \leftarrow \omega$ або $\omega \leftarrow \omega_1$. Тобто, за теоремою 1.63 (пункт 3), мусить існувати траєкторія $r_1 \in \mathcal{R}$ така, що $\omega, \omega_1 \in r_1$. Отже, $\omega \in r \cap r_1$. Але, оскільки $\mathcal{R}$ є системою індивідуальних траєкторій, то останнє співвідношення можливе лише за умови $r = r_1$. Тому довільний елементарно-часовий стан $\omega_1 \in \mathcal{L}$ належить до r. Це означає, що $\mathcal{L} \subseteq r$. Але, згідно з доведеним в пункті 1, траєкторія r також є лінією долі для $\mathcal{A}t(\mathcal{R})$. Оскільки r і $\mathcal{L}$ є лініями долі для $\mathcal{A}t(\mathcal{R})$, то включення $\mathcal{L} \subseteq r$ можливе лише за умови $\mathcal{L} = r$. Таким чином, $\mathcal{L} = r \in \mathcal{R}$, звідки, враховуючи довільність вибору лінії долі $\mathcal{L} \in \mathbb{L}d\left(\mathcal{A}t(\mathcal{R})\right)$, отримуємо включення, обернене до (1.22). □

Приклад 1.83. Нехай, $\mathfrak{X}$ — повний метричний простір. Нагадаємо [87, стор. 4], що динамічною системою на $\mathfrak{X}$ називається довільна пара виду:

$$\mathbb{S} = (\Theta, W), \quad \text{де} \tag{1.23}$$

- $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ — довільна підмножина числової прямої $\mathbb{R}$;
- W — операторнозначна функція, визначена на множині $\widetilde{\Theta} = \{(\tau, t_0) \in \mathbb{R}^2 |\, t_0, t_0 + \tau \in \Theta\}$, яка ставить у відповідність довільній парі $(\tau, t_0) \in \widetilde{\Theta}$ оператор $W(\tau, t_0) : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$, і задовольняє наступні умови:

$$W(0, t_0)\, x = x \quad (x \in \mathfrak{X},\ t_0 \in \Theta); \tag{1.24}$$

$$W(t + s, t_0) = W(t, t_0 + s)\, W(s, t_0) \quad (t_0,\ t_0 + s,\ t_0 + t + s \in \Theta), \tag{1.25}$$

  де добуток операторів визначається стандартним чином $(W(t, t_0 + s)\, W(s, t_0)\, x = W(t, t_0 + s)\, (W(s, t_0)\, x)$, $x \in \mathfrak{X})$.

(зауважимо, що оператори $W(\tau, t_0)$ $((\tau, t_0) \in \widetilde{\Theta})$ можуть бути і нелінійними.)

Довільна динамічна система $\mathbb{S}$ виду (1.23) породжує систему траєкторій:

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}_{\mathbb{S}} = \{r_{x,t_0} \mid x \in \mathfrak{X},\ t_0 \in \Theta\}, \quad \text{де} \\ &r_{x,t_0}(t) = W(t - t_0, t_0)\, x, \quad x \in \mathfrak{X},\ t \in \Theta \end{aligned} \tag{1.26}$$

з $\mathbb{T}_\Theta = (\Theta, \leq)$ в $\mathfrak{X}$, де $\leq$ — звичайний порядок на полі дійсних чисел. З формул (1.24) і (1.25) випливає, що довільні траєкторії з системи $\mathcal{R}_{\mathbb{S}}$ мають такі властивості:

$$\begin{aligned} &r_{x,t_0}(t_0) = x \quad (x \in \mathfrak{X},\ t_0 \in \Theta), \\ &r_{x,t_0'} = r_{\left[r_{x,t_0'}(t_0)\right],t_0} \quad (x \in \mathfrak{X},\ t_0, t_0' \in \Theta). \end{aligned}$$

Отже, при довільному фіксованому $t_0 \in \Theta$ справедлива рівність:

$$\mathcal{R}_{\mathbb{S}} = \{r_{x,t_0} \mid x \in \mathfrak{X}\}. \tag{1.27}$$

Доведемо, що $\mathcal{R}_{\mathbb{S}}$ — система індивідуальних траєкторій. Справді, зафіксуємо довільне число $t_0 \in \Theta$. Користуючись рівністю (1.27), розглянемо довільні траєкторії $r_{x_1,t_0}, r_{x_2,t_0} \in \mathcal{R}_{\mathbb{S}}$. Припустимо, що $r_{x_1,t_0}(t) = r_{x_2,t_0}(t)$ для деякого фіксованого $t \in \Theta$. Тоді використовуючи (1.24), (1.25), (1.26), отримуємо:

$$\begin{aligned} x_2 &= W(0, t_0)\, x_2 = W(t_0 - t, t)\, W(t - t_0, t_0)\, x_2 = W(t_0 - t, t)\, r_{x_2,t_0}(t) = \\ &= W(t_0 - t, t)\, r_{x_1,t_0}(t) = W(t_0 - t, t)\, W(t - t_0, t_0)\, x_1 = x_1. \end{aligned}$$

Отже, $r_{x_1,t_0} = r_{x_2,t_0}$. Це означає, що для довільних траєкторій $r_{x_1,t_0}, r_{x_2,t_0} \in \mathcal{R}_{\mathbb{S}}$ з умови $r_{x_1,t_0} \neq r_{x_2,t_0}$ випливає, що $r_{x_1,t_0}(t) \neq r_{x_2,t_0}(t)$ $(\forall t \in \Theta)$. Тому $\mathcal{R}_{\mathbb{S}}$ — система індивідуальних траєкторій. Зокрема, для довільних $x \in \mathfrak{X}$ і $t_0 \in \Theta$ існує, причому єдина, траєкторія $\rho_{x,t_0} \in \mathcal{R}_{\mathbb{S}}$ така, що $\rho_{x,t_0}(t_0) = x$ (де $\rho_{x,t_0} = r_{x,t_0}$).

Система індивідуальних траєкторій $\mathcal{R}_{\mathbb{S}}$ породжує базову мінливу множину $\mathcal{A}t(\mathbb{T}_\Theta, \mathcal{R}_{\mathbb{S}})$ (де $\mathbb{T}_\Theta = (\Theta, \leq)$), причому, за теоремою 1.63, $\mathbf{Tm}(\mathcal{A}t(\mathcal{R}_{\mathbb{S}})) = \Theta$. Згідно з теоремою 1.82, знаючи базову мінливу множину $\mathcal{A}t(\mathbb{T}_\Theta, \mathcal{R}_{\mathbb{S}})$, можна відновити систему траєкторій $\mathcal{R}_{\mathbb{S}}$. Звідси, в свою чергу, однозначно відновлюються оператори еволюції $\left\{W(\tau, t_0) \mid (\tau, t_0) \in \widetilde{\Theta}\right\}$ за допомогою формули: $W(\tau, t_0)\, x = \rho_{x,t_0}(\tau + t_0)$ $(x \in \mathfrak{X},\ t_0, t_0 + \tau \in \Theta)$ де $\rho_{x,t_0} \in \mathcal{R}_{\mathbb{S}}$ — траєкторія, що задовольняє умову $\rho_{x,t_0}(t_0) = x$. Отже, динамічна система $\mathbb{S}$ однозначно відновлюється за базовою мінливою множиною $\mathcal{A}t(\mathbb{T}_\Theta, \mathcal{R}_{\mathbb{S}})$. Таким чином, динамічні системи виду (1.23) можна вважати частинними випадками базових мінливих множин.

Основні результати підрозділу 1.9 були анонсовані в роботі [67] і опубліковані в [85, розділ 3].

1.10. Мінливі системи і процеси

Означення 1.84. Нехай $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина. Будь-яку підмножину $S \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ будемо називати **мінливою системою** базової мінливої множини $\mathcal{B}$.

На поняття мінливої системи можна дивитись, як на абстрактне узагальнення поняття фізичного тіла, склад якого, взагалі кажучи, не є постійним і може змінюватись довільним чином протягом часу в процесі трансформацій цього тіла.

Означення 1.85. Нехай $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина. Довільне відображення $s : \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \to 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{B})}$ таке, що $s(t) \subseteq \psi(t)$, $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$ будемо називати **процесом** базової мінливої множини $\mathcal{B}$.

Оскільки примітивні мінливі множини можна розглядати як базові мінливі множини з базою елементарних процесів $\leftarrow(\mathrm{f})$, то хронометричні процеси, введені в означенні 1.45, можна вважати частинними випадками процесів, введених в означенні 1.85. Нехай, $S \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ — довільна мінлива система довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}$. Покладемо:

$$S^{\sim}(t) := \{x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \mid (t, x) \in S\}, \quad t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \tag{1.28}$$

(зокрема $S^{\sim}(t) = \emptyset$ у випадку, коли не існує елементарних станів $x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ таких, що $(t, x) \in S$). Легко бачити, що $S^{\sim}(t) \subseteq \psi(t)$, $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$. Отже, за означенням 1.85, $S^{\sim}$ є процесом базової мінливої множини $\mathcal{B}$.

Означення 1.86. Процес $S^{\sim}$ будемо називати **процесом трансформацій** мінливої системи S.

Твердження 1.87. *Нехай $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина.*

1. Для довільних мінливих систем $S_1, S_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ рівність $S_1^{\sim} = S_2^{\sim}$ виконується тоді і тільки тоді, коли $S_1 = S_2$.

2. Для довільного процесу s базової мінливої множини $\mathcal{B}$ існує, причому єдина, мінлива система $S \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ така, що $s = S^{\sim}$.

Доведення. 1. Перший пункт твердження 1.87 випливає з рівності (1.28).

2. Нехай s — процес базової мінливої множини $\mathcal{B}$. Покладемо:

$$S := \{(t, x) \mid t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B}),\ x \in s(t)\} = \bigcup_{t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})} (\{t\} \times s(t)),$$

де у випадку $s(t) = \emptyset$, $\{t\} \times s(t) = \emptyset$. Оскільки для довільної пари $(t, x) \in S$ маємо $x \in s(t) \subseteq \psi(t)$, то $S \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$. Отже, S є мінливою системою $\mathcal{B}$. Нескладно перевірити, що $S^{\sim} = s$. Нехай, S_1 — інша мінлива система, така, що $S_1^{\sim} = s$. Тоді $S^{\sim} = S_1^{\sim}$, а отже, згідно з першим пунктом даного твердження, $S = S_1$. $\square$

Отже, згідно з твердженням 1.87, відображення $(\cdot)^{\sim}$ встановлює взаємно-однозначну відповідність між мінливими системами і процесами довільної базової мінливої множини. Враховуючи зазначений факт, надалі поняття мінливої системи і процесу завжди будемо "ототожнювати", а говорячи про процеси базових мінливих множин будемо позначати ці процеси великими буквами з хвилькою у верхньому індексі, маючи на увазі, що довільний процес є процесом трансформацій певної мінливої системи. *Будемо говорити, що мінлива система U базової мінливої множини $\mathcal{B}$ є* ***підсистемою*** *мінливої системи $S \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$, якщо $U \subseteq S$.* Нескладно перевірити справедливість наступного твердження:

Твердження 1.88. *Мінлива система $U \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ є підсистемою мінливої системи $S \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ тоді і тільки тоді, коли $U^{\sim}(t) \subseteq S^{\sim}(t)$ $(\forall\, t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B}))$.*

Означення 1.89. Будемо говорити, що елементарний стан $x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ базової мінливої множини $\mathcal{B}$ **належить** до мінливої системи $S \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ в момент часу $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$, якщо $x \in S^{\sim}(t)$.

Той факт, що елементарний стан x базової мінливої множини $\mathcal{B}$ належить до мінливої системи S в момент часу t будемо позначати наступним чином $x \in[t, \mathcal{B}]\ S$, а у випадку, коли зрозуміло про яку базову мінливу множину йде мова, будемо використовувати позначення $x \in[t]\ S$. З твердження 1.88 випливає, що для мінливих систем $U, S \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ співвідношення $U \subseteq S$ має місце тоді і тільки тоді, коли для довільних $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$ і $x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ з умови $x \in[t]\ U$ випливає співвідношення $x \in[t]\ S$. Останнє зауваження говорить про те, що на мінливу систему довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}$ можна дивитись як на аналог поняття підмножини в класичній теорії множин, а на відношення $\in[\cdot]$ як на аналог відношення належності класичної теорії множин. Проте, з іншої сторони, ні елементарні ні елементарно-часові стани не можуть повністю претендувати на аналог поняття елемента в класичній теорії множин, оскільки знаючи всі елементарні чи елементарно-часові стани базової мінливої множини ми не зможемо відновити ні напрямне відношення змін ні базу елементарних процесів, а отже не зможемо повністю відновити базову мінливу множину за її "елементами". Очевидно, що довільна лінія долі $\mathcal{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})$ базової мінливої множини $\mathcal{B}$ є її мінливою системою.

Означення 1.90. Процес $\mathcal{L}^{\sim}$, породжений лінією долі $\mathcal{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})$ базової мінливої множини $\mathcal{B}$ будемо називати **елементарним процесом** $\mathcal{B}$.

Розглянемо довільну систему матеріальних точок, які не втрачають свою "індивідуальність" в процесі еволюції (тобто коли матеріальні точки не зливаються в одну і не розпадаються на декілька). Еволюцію такої системи можна описати за допомогою базової мінливої множини $\mathcal{B} = \mathcal{A}t\,(\mathcal{R})$, де $\mathcal{R}$ — деяка система індивідуальних

траєкторій. Згідно з теоремою 1.82, лінії долі (тобто мінливі системи, що породжують елементарні процеси) для такої базової мінливої $\mathcal{B}$ співпадають з траєкторіями $r \in \mathcal{R}$, які описують еволюцію кожної з матеріальних точок, що входять в цю систему ($\mathbb{L}d(\mathcal{B}) = \mathcal{R}$). Це означає, що в цьому випадку кожен елементарний процес містить всю необхідну інформацію для самоідентифікації відповідної йому матеріальної точки в кожен момент часу еволюцій системи, а тому може бути ототожнений з цією матеріальною точкою і названий "елементом" відповідної базової мінливої множини. Отже, поняття елементарного процесу природно вважати аналогом поняття елемента звичайної (статичної) множини і в загальній ситуації довільної базової мінливої множини, що не породжується індивідуальними траєкторіями. Крім того, з елементарних процесів, користуючись теоремою 1.79, можна повністю відновити базову мінливу множину.

Основні результати підрозділу 1.10 були анонсовані в роботі [67] і опубліковані в [85, розділ 4].

1.11. Аналоги деяких теоретико-множинних операцій для базових мінливих множин

1.11.1. Мотивація. В фізиці часто зустрічаються міркування, коли до фізичної системи подумки долучають додаткові, реально не існуючі в ній компоненти. Наприклад, під час виведення формул перетворень Лоренца для систем відліку з паралельними осями використовується метод "світлової сфери", тобто припускається, що в нульовий момент часу на початку відліку "спалахнуло світло", і світлові промені розходяться від початку відліку у всіх напрямках (див., наприклад, [88, стор. 25]). Таке припущення зовсім не означає, що в довільній моделі еволюції в рамках спеціальної теорії відносності (СТВ) мусить існувати "світлова сфера". Просто прийнято вважати, що перетворення координат не зміниться, коли ми до будь-якої еволюційної моделі в рамках СТВ долучимо світлову сферу, тобто коли замість даної моделі розглянемо "розширену" модель, в якій світлова сфера вже присутня.

В даному підрозділі робиться спроба математично строгого обґрунтування в рамках теорії базових мінливих множин процедури долучення до вихідної моделі нових "віртуальних" еволюціонуючих об'єктів за припущення, що еволюція цих, нових, об'єктів **не впливає** на еволюцію вихідної системи. З цією метою вводяться аналоги теоретико-множинного відношення включення та теоретико-множинної операції об'єднання для базових мінливих множин.

1.11.2. Означення і властивості еволюційного розширення та еволюційного об'єднання.

Означення 1.91. Базові мінливі множини $\mathcal{B}_0$ і $\mathcal{B}_1$ будемо вважати **хронологічно спорідненими**, якщо $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{B}_0\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{B}_1\right)$.

Означення 1.92. Базову мінливу множину $\mathcal{B}_1$ будемо називати **еволюційним розширенням** базової мінливої множини $\mathcal{B}_0$, якщо:

1. $\mathcal{B}_0$ та $\mathcal{B}_1$ хронологічно споріднені;
2. $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_0\right) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right)$;
3. Для довільних $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_0\right)$ з умови $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_0}{\leftarrow} \omega_1$ випливає, що $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow} \omega_1$, тобто $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_0}{\leftarrow}} \subseteq \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow}}$ (де на бінарні відношення $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_0}{\leftarrow}}$ та $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow}}$ слід дивитись як на множини пар, зокрема $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_0}{\leftarrow}} = \left\{\left(\omega_2, \omega_1\right) \mid \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_0\right),\ \omega_2 \leftarrow \omega_1\right\}$).

Якщо базова мінлива множина $\mathcal{B}_1$ є еволюційним розширенням базової мінливої множини $\mathcal{B}_0$, то будемо, також говорити, що $\mathcal{B}_0$ **еволюційно включається** в $\mathcal{B}_1$ і позначати цей факт через $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_1$ або через $\mathcal{B}_1 \underset{\leftarrow}{\supseteq} \mathcal{B}_0$.

В підрозділі 1.10 обґрунтовувалось, що поняття елементарного процесу можна вважати аналогом поняття елемента звичайної (статичної) множини. Зазначений факт може служити мотивацією для наступного означення.

Означення 1.93. Базову мінливу множину $\mathcal{B}_1$ будемо називати **супереволюційним розширенням** базової мінливої множини $\mathcal{B}_0$, якщо:

1. $\mathcal{B}_0$ та $\mathcal{B}_1$ хронологічно споріднені;
2. $\mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_0\right) \subseteq \mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_1\right)$, тобто будь-який елементарний процес $\mathcal{B}_0$ є елементарним процесом $\mathcal{B}_1$.

Якщо базова мінлива множина $\mathcal{B}_1$ є супереволюційним розширенням базової мінливої множини $\mathcal{B}_0$, то будемо, також говорити, що $\mathcal{B}_0$ **супереволюційно включається** в $\mathcal{B}_1$ і позначати цей факт через $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{B}_1$ або через $\mathcal{B}_1 \underset{\leftarrow}{\sqsupseteq} \mathcal{B}_0$.

В твердженнях 1.94, 1.95 $\mathcal{B}_0$ та $\mathcal{B}_1$ — довільні хронологічно споріднені базові мінливі множини.

Твердження 1.94. *Якщо $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_1$, то:*

1. $\mathfrak{Bs}\left(\mathcal{B}_0\right) \subseteq \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{B}_1\right)$;
2. $\underset{\mathcal{B}_0}{\leftarrow} \subseteq \underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow}$, *тобто для довільних* $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{B}_0\right)$ *з умови* $x_2 \underset{\mathcal{B}_0}{\leftarrow} x_1$ *випливає, що* $x_2 \underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow} x_1$.

Доведення. Перший пункт твердження випливає з властивості 1.60(9) та означення 1.92 (пункт 2). Другий пункт випливає з властивості 1.60(8) та означення 1.92 (пункт 3). □

Твердження 1.95. *Будь-яке супереволюційне розширення довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}_0$ є її еволюційним розширенням, тобто якщо $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathcal{B}_1$, то $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\subset} \mathcal{B}_1$.*

Доведення. **1**. За теоремою 1.79, для довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}$ маємо:

$$\mathcal{A}t\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), \mathbb{L}d(\mathcal{B})\right) = \mathcal{B}, \tag{1.29}$$

а отже, згідно з теоремою 1.63 (пункт 2),

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{A}t\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), \mathbb{L}d(\mathcal{B})\right)\right) = \bigcup_{L \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})} L. \tag{1.30}$$

2.1. Оскільки $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathcal{B}_1$, то $\mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_0\right) \subseteq \mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_1\right)$. Отже, використовуючи рівність (1.30), отримуємо, $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_0\right) = \bigcup_{L \in \mathbb{L}d(\mathcal{B}_0)} L \subseteq \bigcup_{L \in \mathbb{L}d(\mathcal{B}_1)} L = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right)$.

2.2. Нехай, $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_0\right)$ і $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_0}{\leftarrow} \omega_1$. Тоді, згідно з (1.29) і теоремою 1.63 (пункт 3), маємо $\mathsf{tm}\left(\omega_1\right) \leq \mathsf{tm}\left(\omega_2\right)$ і існує лінія долі $L \in \mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_0\right)$ така, що $\omega_1, \omega_2 \in L$. Оскільки $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathcal{B}_1$, то, за означенням 1.93, $\mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_0\right) \subseteq \mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_1\right)$. Отже, $L \in \mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_1\right)$. Таким чином, $\mathsf{tm}\left(\omega_1\right) \leq \mathsf{tm}\left(\omega_2\right)$ і $\omega_1, \omega_2 \in L$, де $L \in \mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_1\right)$ $\left(L \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right)\right)$. Тобто, згідно з (1.29) і теоремою 1.63 (пункт 3), $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow} \omega_1$.

З підпунктів 2.1 і 2.2 випливає, що $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\subset} \mathcal{B}_1$. □

Надалі домовимось через $M^{\times 2}$ позначати декартовий квадрат множини M, $M^{\times 2} = M \times M$. Наступний приклад покаже, що твердження, обернене до твердження 1.95 не справедливе.

Приклад 1.96. Нехай, $\mathcal{R}_0 = \{r_0\}$, $\mathcal{R}_1 = \{r_1\}$ — системи траєкторій з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, де:

$$\mathfrak{D}\left(r_0\right) = [0, \infty), \quad r_0(t) = t \ \left(t \in \mathfrak{D}\left(r_0\right)\right); \qquad \mathfrak{D}\left(r_1\right) = \mathbb{R}, \quad r_1(t) = t \ \left(t \in \mathfrak{D}\left(r_1\right)\right).$$

Оскільки $\mathcal{R}_0$ і $\mathcal{R}_1$ складаються лише з однієї траєкторії, то $\mathcal{R}_0$ і $\mathcal{R}_1$ є системами індивідуальних траєкторій в сенсі означення 1.81. Покладемо:

$$\mathcal{B}_0 := \mathcal{A}t\left(\mathbb{R}_{ord}, \mathcal{R}_0\right); \qquad \mathcal{B}_1 := \mathcal{A}t\left(\mathbb{R}_{ord}, \mathcal{R}_1\right),$$

де $\mathbb{R}_{ord} = (\mathbb{R}, \leq)$ і $\leq$ — стандартний порядок поля дійсних чисел.

Оскільки $\mathcal{R}_0$ і $\mathcal{R}_1$ — системи індивідуальних траєкторій, то, згідно з теоремою 1.82, маємо, $\mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_0\right) = \mathcal{R}_0$, $\mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_1\right) = \mathcal{R}_1$. І, оскільки $\mathcal{R}_0 \nsubseteq \mathcal{R}_1$, то, $\mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_0\right) \nsubseteq \mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_1\right)$. Отже, за означенням 1.93, $\mathcal{B}_1$ не може бути супереволюційним розширенням $\mathcal{B}_0$, тобто $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\not\sqsubset} \mathcal{B}_1$.

З іншої сторони, враховуючи, що $r_0 \subseteq r_1$, згідно з теоремою 1.63, отримуємо:

$$\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{B}_0\right) = \mathbb{R}_{ord} = \mathbf{Tm}\left(\mathcal{B}_1\right);$$

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_0\right) = \bigcup_{r\in\mathcal{R}_0} r = r_0 \subseteq r_1 = \bigcup_{r\in\mathcal{R}_1} r = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right);$$

$$\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_0}{\leftarrow}} = \Big\{\left(\omega_2,\omega_1\right) \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_0\right)^{\times 2} \mid \left(\mathsf{tm}\left(\omega_1\right) \leq \mathsf{tm}\left(\omega_2\right)\right) \wedge \left(\exists r \in \mathcal{R}_0\left(\omega_1,\omega_2 \in r\right)\right)\Big\} =$$

$$= \left\{\left(\omega_2,\omega_1\right) \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_0\right)^{\times 2} \mid \left(\mathsf{tm}\left(\omega_1\right) \leq \mathsf{tm}\left(\omega_2\right)\right) \wedge \left(\omega_1,\omega_2 \in r_0\right)\right\} \subseteq$$

$$\subseteq \left\{\left(\omega_2,\omega_1\right) \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right)^{\times 2} \mid \left(\mathsf{tm}\left(\omega_1\right) \leq \mathsf{tm}\left(\omega_2\right)\right) \wedge \left(\omega_1,\omega_2 \in r_1\right)\right\} = \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow}},$$

де $\wedge$ — знак логічної операції кон'юнкції.

Отже, ми довели, що $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{B}_0\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{B}_1\right)$, $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_0\right) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right)$ і $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_0}{\leftarrow}} \subseteq \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow}}$. Тому, за означенням 1.92, $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_1$. Таким чином, $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\not\subseteq} \mathcal{B}_1$, хоча $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_1$.

Твердження 1.97. *Еволюційне включення має такі властивості:*

1. $\mathcal{B} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}$ *для довільної базової мінливої множини* $\mathcal{B}$*;*
2. *Якщо* $\mathcal{B}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_2$ *і* $\mathcal{B}_2 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_1$ *то* $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$*;*
3. *Якщо* $\mathcal{B}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_2$ *і* $\mathcal{B}_2 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_3$ *то* $\mathcal{B}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_3$.

Доведення. **1.** Співвідношення $\mathcal{B} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}$ є тривіальним наслідком означення 1.92.

2. Нехай $\mathcal{B}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_2$ і $\mathcal{B}_2 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_1$. Тоді, за означенням 1.92, маємо:

$$\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{B}_1\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{B}_2\right); \tag{1.31}$$

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_2\right);\ \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow}} \subseteq \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_2}{\leftarrow}}; \quad \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_2\right) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right);\ \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_2}{\leftarrow}} \subseteq \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow}}. \tag{1.32}$$

Із співвідношень (1.31), (1.32) і наслідку 1.68 випливає рівність $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$.

3. Нехай $\mathcal{B}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_2$ і $\mathcal{B}_2 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_3$. Тоді, за означенням 1.92, $\mathcal{B}_1$ і $\mathcal{B}_2$ та $\mathcal{B}_2$ і $\mathcal{B}_3$ — хронологічно споріднені. Отже, $\mathcal{B}_1$ і $\mathcal{B}_3$ — також хронологічно споріднені. За означенням 1.92, із еволюційних включень $\mathcal{B}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_2$ і $\mathcal{B}_2 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_3$, випливають включення:

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_2\right);\ \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow}} \subseteq \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_2}{\leftarrow}}; \quad \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_2\right) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_3\right);\ \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_2}{\leftarrow}} \subseteq \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_3}{\leftarrow}}.$$

Тому, за означенням 1.92, отримуємо, $\mathcal{B}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_3$. □

В твердженні 1.77 (пункт 2)) було доведено, що для довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}$, $\mathbb{L}l(\mathcal{B})$ є системою абстрактних траєкторій з $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$ в $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$.

Твердження 1.98. *Якщо для деякої базової мінливої множини* $\mathcal{B}$ *виконується співвідношення* $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{L}l(\mathcal{B})$ *де* $\mathcal{R} \neq \emptyset$*, то* $\boxed{\mathcal{A}t\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), \mathcal{R}\right) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}}$.

Доведення. Нехай, виконується умова твердження. Покладемо: $\mathcal{B}_1 := \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), \mathcal{R}\right)$. Оскільки $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{L}l(\mathcal{B}) \subseteq 2^{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}$, то, за теоремою 1.63, маємо:

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right) = \bigcup_{r\in\mathcal{R}} r \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}). \tag{1.33}$$

Розглянемо довільні елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_1)$ такі, що $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow} \omega_1$. Тоді, за теоремою 1.63, виконується наступна нерівність:

$$\mathsf{tm}(\omega_1) \leq \mathsf{tm}(\omega_2), \tag{1.34}$$

причому існує траєкторія $r \in \mathcal{R}$ така, що $\omega_1, \omega_2 \in r$. Оскільки $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{L}l(\mathcal{B})$, то $r \in \mathbb{L}l(\mathcal{B})$. Тому, r — ланцюг $\mathcal{B}$. Отже, хоч одна з умов $\omega_1 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_2$ або $\omega_2 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_1$ мусить виконуватись. Тому, якщо припустити, що $\omega_2 \underset{\mathcal{B}}{\not\leftarrow} \omega_1$, то отримаємо $\omega_1 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_2$ і, за властивістю 1.60(6), $\omega_1 \neq \omega_2$. Звідси, за властивістю 1.60(7), маємо нерівність $\mathsf{tm}(\omega_2) < \mathsf{tm}(\omega_1)$, яка суперечить нерівності (1.34). Отже, припущення $\omega_2 \underset{\mathcal{B}}{\not\leftarrow} \omega_1$ — помилкове. Тому $\omega_2 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_1$. Звідси, враховуючи включення (1.33), за означенням 1.92, отримуємо $\mathcal{B}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}$. □

Твердження 1.99. *Якщо $\mathcal{R}_i$ ($i \in \{1, 2\}$) — системи абстрактних траєкторій з $\mathbb{T}$ в M_i і при цьому $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$, то $\mathcal{A}t(\mathbb{T}, \mathcal{R}_1) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{A}t(\mathbb{T}, \mathcal{R}_2)$.*

Доведення. Користуючись умовою даного твердж. та твердж. 1.78, отримуємо:

$$\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2 \subseteq \mathbb{L}l(\mathcal{A}t(\mathbb{T}, \mathcal{R}_2)). \tag{1.35}$$

Далі скористаємось твердженням 1.98 з врахуванням пункту 1 теореми 1.63. □

Твердження 1.100. *Для довільних хронологічно споріднених базових мінливих множин $\mathcal{B}_1$ і $\mathcal{B}_2$, наступні твердження рівносильні:*

$$\mathbf{1}.\ \mathcal{B}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_2; \quad \mathbf{2}.\ \mathbb{L}l(\mathcal{B}_1) \subseteq \mathbb{L}l(\mathcal{B}_2); \quad \mathbf{3}.\ \mathbb{L}d(\mathcal{B}_1) \subseteq \mathbb{L}l(\mathcal{B}_2).$$

Доведення. **1**. Спочатку доведемо імплікацію 1⇒2. Нехай, $\mathcal{B}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_2$. Розглянемо довільний ланцюг $L \in \mathbb{L}l(\mathcal{B}_1)$. Оскільки, за означенням 1.92, $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_1) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_2)$, то $L \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_2)$. Необхідно довести, що відношення $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_2}{\leftarrow}}$ на L задовольняє такі умови:

1. $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_2}{\leftarrow}}$ є транзитивним відношенням на L;
2. для довільних $\omega_1, \omega_2 \in L$ справедливе хоч одне із співвідношень $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_2}{\leftarrow} \omega_1$ або $\omega_1 \underset{\mathcal{B}_2}{\leftarrow} \omega_2$.

Оскільки $L \in \mathbb{L}l(\mathcal{B}_1)$, то відношення $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow}}$ задовольняє умови 1,2. За означенням 1.92, для $\omega_1, \omega_2 \in L$ з умови $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow} \omega_1$ випливає співвідношення $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_2}{\leftarrow} \omega_1$. Отже, бажаного результату буде досягнуто, коли ми покажемо, що для довільних $\omega_1, \omega_2 \in L$ із співвідношення $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_2}{\leftarrow} \omega_1$ випливає співвідношення $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow} \omega_1$.

Нехай $\omega_1, \omega_2 \in L$ і $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_2}{\leftarrow} \omega_1$. Оскільки L — ланцюг в $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_1)$, то хоч одна з умов $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow} \omega_1$ або $\omega_1 \underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow} \omega_2$ повинна мати місце. Припустимо, що $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_1}{\not\leftarrow} \omega_1$. Тоді, оскільки

бінарне відношення $\overset{\mathbb{B}_5}{\underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow}}$ є рефлексивним, $\omega_1 \neq \omega_2$. Отже, маємо $\omega_1 \neq \omega_2$ і $\omega_1 \underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow} \omega_2$. Тому, згідно з властивістю 1.60(7), $\mathsf{tm}(\omega_2) < \mathsf{tm}(\omega_1)$. З іншої сторони, оскільки $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_2}{\leftarrow} \omega_1$, то, згідно з властивістю 1.60(7), $\mathsf{tm}(\omega_1) \leq \mathsf{tm}(\omega_2)$. Отже, ми приходимо до суперечності, яка доводить, що припущення про те, що $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_1}{\not\leftarrow} \omega_1$ — неправильне. Таким чином, $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow} \omega_1$, що й потрібно було довести.

2. Доведемо імплікацію 2⇒3. Нехай, $\mathbb{L}l(\mathcal{B}_1) \subseteq \mathbb{L}l(\mathcal{B}_2)$. Враховуючи, що кожна лінія долі базової мінливої множини є її ланцюгом, маємо $\mathbb{L}d(\mathcal{B}_1) \subseteq \mathbb{L}l(\mathcal{B}_1) \subseteq \mathbb{L}l(\mathcal{B}_2)$.

3. Доведемо імплікацію 3⇒1. Нехай, $\mathbb{L}d(\mathcal{B}_1) \subseteq \mathbb{L}l(\mathcal{B}_2)$. Тоді, згідно з теоремою 1.79 і твердженням 1.98 отримаємо, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{A}t(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}_1), \mathbb{L}d(\mathcal{B}_1)) = \mathcal{A}t(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}_2), \mathbb{L}d(\mathcal{B}_1)) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_2$. □

Твердження 1.101. *Супереволюційне включення має такі властивості:*

1. $\mathcal{B} \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{B}$ *для довільної базової мінливої множини* $\mathcal{B}$*;*
2. *Якщо* $\mathcal{B}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{B}_2$ *і* $\mathcal{B}_2 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{B}_1$ *то* $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$*;*
3. *Якщо* $\mathcal{B}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{B}_2$ *і* $\mathcal{B}_2 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{B}_3$ *то* $\mathcal{B}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{B}_3$*.*

Доведення. Перша властивість — тривіальна. Друга властивість випливає з тверджень 1.95 та 1.97. Доведемо третю властивість. Якщо $\mathcal{B}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{B}_2$ і $\mathcal{B}_2 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{B}_3$ то, за означенням 1.93, базові мінливі множини $\mathcal{B}_1$ і $\mathcal{B}_3$ — хронологічно споріднені. Крім того, за означенням 1.93, $\mathbb{L}d(\mathcal{B}_1) \subseteq \mathbb{L}d(\mathcal{B}_2) \subseteq \mathbb{L}d(\mathcal{B}_3)$. Отже, $\mathcal{B}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{B}_3$. □

Означення 1.102. Індексовану сім'ю $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ $(\mathcal{A} \neq \emptyset)$ базових мінливих множин будемо називати **хронологічно спорідненою**, якщо будь-які дві базові мінливі множини $\mathcal{B}_\alpha$,$\mathcal{B}_\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathcal{A})$ є хронологічно спорідненими.

Означення 1.103. Нехай, $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ $(\mathcal{A} \neq \emptyset)$ — довільна індексована сім'я базових мінливих множин. Базову мінливу множину $\mathcal{B}$ будемо називати **еволюційним об'єднанням** сім'ї $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$, якщо:

(**EO**$_1$) $\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}$ для довільного $\alpha \in \mathcal{A}$.

(**EO**$_2$) Якщо $\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}'$ при всіх $\alpha \in \mathcal{A}$ (де $\mathcal{B}'$ — базова мінлива множина), то $\mathcal{B} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}'$.

Твердження 1.104. *Довільна сім'я базових мінливих множин* $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ *(*$\mathcal{A} \neq \emptyset$*) може мати не більш, ніж одне еволюційне об'єднання.*

Доведення. Справді, нехай базові мінливі множини $\mathcal{B}$ і $\widetilde{\mathcal{B}}$ є еволюційним об'єднанням сім'ї базових мінливих множин $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$. Тоді, за означенням 1.103, $\mathcal{B} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \widetilde{\mathcal{B}}$ і $\widetilde{\mathcal{B}} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}$. Отже, за твердженням 1.97, маємо, $\mathcal{B} = \widetilde{\mathcal{B}}$. □

Враховуючи твердження 1.104 (єдиність еволюційного об'єднання), еволюційне об'єднання $\mathcal{B}$ сім'ї базових мінливих множин $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ позначатимемо таким чином:

$$\mathcal{B} = \overset{\leftarrow}{\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}}} \mathcal{B}_\alpha.$$

Зокрема, якщо $\mathcal{A} = \{1, ...n\}$ $(n \in \mathbb{N})$, то будемо використовувати позначення:

$$\mathcal{B}_1 \overset{\leftarrow}{\cup} \cdots \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{B}_n := \overset{\leftarrow}{\bigcup_{k=1}^{n}} \mathcal{B}_k := \overset{\leftarrow}{\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}}} \mathcal{B}_\alpha.$$

Зауваження 1.105. З означень 1.103 та 1.92 випливає, що якщо $\mathcal{B} = \overset{\leftarrow}{\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}}} \mathcal{B}_\alpha$, то сім'я базових мінливих множин $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ є хронологічно спорідненою, причому $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{B}_\alpha\right)$ $(\forall \alpha \in \mathcal{A})$.

Нехай $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — довільна лінійно упорядкована множина, $\mathcal{A}$ — довільна непорожня множина індексів, і для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{A}$ визначена система абстрактних траєкторій $\mathcal{R}_\alpha$ з $\mathbb{T}$ в M_α. У такому випадку індексовану сім'ю систем абстрактних траєкторій $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ будемо називати $\mathbb{T}$-***хронологічно спорідненою***. Множина $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{R}_\alpha$ є системою абстрактних траєкторій з $\mathbb{T}$ в $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} M_\alpha$. Отже, згідно з теоремою 1.63, існує базова мінлива множина $\mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{R}_\alpha\right)$. За цією ж теоремою, $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \mathcal{R}_\alpha\right)\right) = \mathbb{T}$ (для довільного $\alpha \in \mathcal{A}$). Отже, за означеннями 1.91 і 1.102, $\left(\mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \mathcal{R}_\alpha\right)\right)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ є хронологічно спорідненою сім'єю базових мінливих множин.

Твердження 1.106. *Нехай $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ — $\mathbb{T}$-хронологічно споріднена сім'я систем абстрактних траєкторій. Тоді існує еволюційне об'єднання $\overset{\leftarrow}{\bigcup}_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \mathcal{R}_\alpha\right)$, причому:*

$$\overset{\leftarrow}{\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}}} \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \mathcal{R}_\alpha\right) = \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{R}_\alpha\right).$$

Доведення. Нехай, для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{A}$, $\mathcal{R}_\alpha$ є системою абстрактних траєкторій з $\mathbb{T}$ в M_α. Покладемо:

$$\mathcal{B}_\alpha := \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \mathcal{R}_\alpha\right) \quad (\alpha \in \mathcal{A}), \qquad \mathcal{B} := \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{R}_\alpha\right).$$

а) Оскільки $\mathcal{R}_\alpha \subseteq \bigcup_{\beta \in \mathcal{A}} \mathcal{R}_\beta$ для довільного $\alpha \in \mathcal{A}$, то, згідно з твердженням 1.99, маємо: $\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}$ $(\forall \alpha \in \mathcal{A})$.

б) Якщо $\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}'$ $(\forall \alpha \in \mathcal{A})$, то, використовуючи твердження 1.78 і 1.100 для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{A}$ отримуємо:

$$\mathcal{R}_\alpha \subseteq \mathbb{L}l\left(\mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \mathcal{R}_\alpha\right)\right) = \mathbb{L}l\left(\mathcal{B}_\alpha\right) \subseteq \mathbb{L}l\left(\mathcal{B}'\right).$$

Звідси, $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{R}_\alpha \subseteq \mathbb{L}l\left(\mathcal{B}'\right)$. Отже, згідно з твердженням 1.98, $\mathcal{B} = \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{R}_\alpha\right) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}'$.

З пунктів а) і б), за означенням 1.103, випливає, що $\mathcal{B} = \overset{\leftarrow}{\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}}} \mathcal{B}_\alpha$. □

Застосовуючи твердження 1.106 та теорему 1.79 отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 1.107. *Довільна хронологічно споріднена сім'я базових мінливих множин $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ $(\mathcal{A} \neq \emptyset)$ має еволюційне об'єднання $\overset{\leftarrow}{\bigcup}_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$, причому:*

$$\overset{\leftarrow}{\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}}} \mathcal{B}_\alpha = \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_\alpha\right)\right),$$

де $\mathbb{T} = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{B}_\alpha\right)$ $(\alpha \in \mathcal{A})$.

Наслідок 1.108. *Якщо* $\mathcal{B} = \overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$, *то:*

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right); \qquad \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}} = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_\alpha}{\leftarrow}}; \qquad \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right).$$

Доведення. Якщо $\mathcal{B} = \overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$, то, згідно з наслідком 1.107, маємо, $\mathcal{B} = \mathcal{A}t\left((\mathbf{T},\leq), \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_\alpha\right)\right)$, де $(\mathbf{T},\leq) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{B}_\alpha\right)$ $(\forall\alpha \in \mathcal{A})$. Отже, використовуючи теорему 1.63 та теорему 1.79, отримуємо:

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \bigcup_{L\in\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathbb{L}d(\mathcal{B}_\alpha)} L = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \left(\bigcup_{L\in\mathbb{L}d(\mathcal{B}_\alpha)} L\right) = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right);$$

$$\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}} = \left\{(\omega_2,\omega_1) \mid \mathsf{tm}\left(\omega_1\right) \leq \mathsf{tm}\left(\omega_2\right), \exists L \in \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_\alpha\right)(\omega_1,\omega_2 \in L)\right\} =$$

$$= \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \left\{(\omega_2,\omega_1) \mid \mathsf{tm}\left(\omega_1\right) \leq \mathsf{tm}\left(\omega_2\right), \exists L \in \mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_\alpha\right)(\omega_1,\omega_2 \in L)\right\} = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_\alpha}{\leftarrow}}.$$

Далі, використовуючи доведену вище рівність $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right)$ і властивість 1.60(9), маємо: $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \{\mathsf{bs}\left(\omega\right) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})\} = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \{\mathsf{bs}\left(\omega\right) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right)\} = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right)$. □

Твердження 1.109 (про властивості еволюційного об'єднання)**.** *Нехай* $(\mathcal{B}_i)_{i\in\{1,2,3\}}$ *та* $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ $(\mathcal{A} \neq \emptyset)$ *— дві довільні хронологічно споріднені сім'ї базових мінливих множин. Операція еволюційного об'єднання має такі властивості:*

1. $\mathcal{B}_1 \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_2 \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{B}_1$.
2. *Якщо* $\mathcal{A} = \{\alpha_0\}$, *то* $\overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}_{\alpha_0}$.
3. *Якщо множина індексів* $\mathcal{A}$ *розпадається на диз'юнктне об'єднання непорожніх множин індексів* $\mathcal{A}_\gamma$ $(\gamma \in \mathcal{G})$, *тобто* $\mathcal{A} = \bigsqcup_{\gamma\in\mathcal{G}} \mathcal{A}_\gamma$, *то*

$$\overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}} \mathcal{B}_\alpha = \overleftarrow{\bigcup_{\gamma\in\mathcal{G}}} \left(\overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}_\gamma}} \mathcal{B}_\alpha\right).$$

Зокрема якщо $\mathbf{card}\left(\mathcal{A}\right) \geq 2$, *то для довільного* $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ *має місце рівність:*

$$\overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}} \mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}_{\alpha_0} \overset{\leftarrow}{\cup} \left(\overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}\setminus\{\alpha_0\}}} \mathcal{B}_\alpha\right), \tag{1.36}$$

а у випадку $\mathcal{A} = \{1,2,3\}$ *маємо рівність:*

$$\left(\mathcal{B}_1 \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{B}_2\right) \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{B}_3 = \mathcal{B}_1 \overset{\leftarrow}{\cup} \left(\mathcal{B}_2 \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{B}_3\right) = \mathcal{B}_1 \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{B}_2 \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{B}_3. \tag{1.37}$$

4. *Якщо, для деякої базової мінливої множини $\mathcal{B}'$ справедливе еволюційне включення $\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}'$ (для довільного $\alpha \in \mathcal{A}$), то $\overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}'$.*

5. *Якщо для деякого $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ при всіх $\alpha \in \mathcal{A}$ справедливе еволюційне включення $\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_{\alpha_0}$ то $\overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}_{\alpha_0}$. Зокрема $\mathcal{B} \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{B} = \mathcal{B}$ для довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}$.*

Доведення. **1.** За означенням 1.103, значення виразу $\overleftarrow{\bigcup}_{i\in\{1,2\}} \mathcal{B}_i$ не залежить від порядку індексації, тому $\mathcal{B}_1 \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{B}_2 = \overleftarrow{\bigcup}_{i\in\{1,2\}} \mathcal{B}_i = \mathcal{B}_2 \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{B}_1$.

2. Друга властивість — тривіальний наслідок означення 1.103.

3. Зафіксуємо довільний індекс $\alpha_1 \in \mathcal{A}$. Покладемо $\mathbb{T} := \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}_{\alpha_1})$. Оскільки $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ — хронологічно споріднена сім'я базових мінливих множин, то $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}_\alpha) = \mathbb{T}$ ($\forall\alpha \in \mathcal{A}$). Отже, згідно із зауваженням 1.105, еволюційні об'єднання $\overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$, $\overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}_\gamma} \mathcal{B}_\alpha$ ($\forall\gamma \in \mathcal{G}$) та $\overleftarrow{\bigcup\limits_{\gamma\in\mathcal{G}}} \left(\overleftarrow{\bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}_\gamma}} \mathcal{B}_\alpha\right)$ визначені коректно. Далі, використовуючи наслідок 1.107, твердження 1.106 та теорему 1.79, отримуємо:

$$\overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}} \mathcal{B}_\alpha = \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_\alpha)\right) = \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \bigcup_{\gamma\in\mathcal{G}} \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}_\gamma} \mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_\alpha)\right) =$$

$$= \overleftarrow{\bigcup_{\gamma\in\mathcal{G}}} \left(\overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}_\gamma}} \mathcal{A}t\,(\mathbb{T}, \mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_\alpha))\right) = \overleftarrow{\bigcup_{\gamma\in\mathcal{G}}} \left(\overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}_\gamma}} \mathcal{B}_\alpha\right).$$

Зокрема, у випадку $\mathbf{card}\,(\mathcal{A}) \geq 2$, для довільного фіксованого індексу $\alpha_0 \in \mathcal{A}$, використовуючи пункт 2, даного твердження отримуємо:

$$\overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}} \mathcal{B}_\alpha = \overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in\{\alpha_0\}\sqcup(\mathcal{A}\setminus\{\alpha_0\})}} \mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}_{\alpha_0} \overset{\leftarrow}{\cup} \left(\overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}\setminus\{\alpha_0\}}} \mathcal{B}_\alpha\right),$$

тобто рівність (1.36). Рівність (1.37) випливає з рівності (1.36) у частинному випадку $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$ з використанням комутативності операції еволюційного об'єднання.

4. Четвертий пункт даного твердження є тривіальним наслідком означення 1.103.

5. Нехай $\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_{\alpha_0}$ ($\forall\,\alpha \in \mathcal{A}$) для деякого (фіксованого) $\alpha_0 \in \mathcal{A}$. Тоді, згідно з попереднім пунктом даного твердження, $\overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_{\alpha_0}$. З іншого боку, за означенням 1.103, $\mathcal{B}_{\alpha_0} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$. Отже, за твердженням 1.97 (пункт 2), $\overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}_{\alpha_0}$. □

Нехай $(\mathcal{B}_{\alpha\beta})_{\alpha\in\mathsf{A},\,\beta\in\mathsf{B}}$ ($\mathsf{A}, \mathsf{B} \neq \emptyset$) — довільна двопараметрична індексована сім'я базових мінливих множин. Сім'ю $(\mathcal{B}_{\alpha\beta})_{\alpha\in\mathsf{A},\,\beta\in\mathsf{B}}$ будемо називати **хронологічно спорідненою**, якщо для довільних індексів $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathsf{A}$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathsf{B}$ базові мінливі множини $\mathcal{B}_{\alpha_1\beta_1}$,$\mathcal{B}_{\alpha_2\beta_2}$ є хронологічно спорідненими. Якщо сім'я базових мінливих множин $(\mathcal{B}_{\alpha\beta})_{\alpha\in\mathsf{A},\,\beta\in\mathsf{B}}$ ($\mathsf{A}, \mathsf{B} \neq \emptyset$) є хронологічно спорідненою, то для довільних фіксованих $\alpha_0 \in \mathsf{A}$, $\beta_0 \in \mathsf{B}$ однопараметричні сім'ї базових мінливих множин $(\mathcal{B}_{\alpha_0\beta})_{\beta\in\mathsf{B}}$

та $(\mathcal{B}_{\alpha\beta_0})_{\alpha\in\mathbf{A}}$ будуть хронологічно споріднені, а отже, згідно з наслідком 1.107, існують еволюційні об'єднання $\mathcal{U}_{\alpha_0,*} = \overleftarrow{\bigcup}_{\beta\in\mathbf{B}}\mathcal{B}_{\alpha_0\beta}$ та $\mathcal{U}_{*,\beta_0} = \overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathbf{A}}\mathcal{B}_{\alpha\beta_0}$. Причому, за зауваженням 1.105, базові мінливі множини $\mathcal{U}_{\alpha_0,*}$ та $\mathcal{U}_{*,\beta_0}$ хронологічно споріднені з базовою мінливою множиною $\mathcal{B}_{\alpha_0,\beta_0}$. Тому, враховуючи хронологічну спорідненість сім'ї $(\mathcal{B}_{\alpha\beta})_{\alpha\in\mathbf{A},\,\beta\in\mathbf{B}}$, бачимо, що сім'ї базових мінливих множин $(\mathcal{U}_{\alpha,*})_{\alpha\in\mathbf{A}}$ та $(\mathcal{U}_{*,\beta})_{\beta\in\mathbf{B}}$ також є хронологічно спорідненими. Це означає, що можна визначити подвійні еволюційні об'єднання $\overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathbf{A}}\mathcal{U}_{\alpha,*} = \overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathbf{A}}\overleftarrow{\bigcup}_{\beta\in\mathbf{B}}\mathcal{B}_{\alpha\beta}$ та $\overleftarrow{\bigcup}_{\beta\in\mathbf{B}}\mathcal{U}_{*,\beta} = \overleftarrow{\bigcup}_{\beta\in\mathbf{B}}\overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathbf{A}}\mathcal{B}_{\alpha\beta}$. Доведемо, що в подвійному еволюційному об'єднанні можна змінювати порядок об'єднування. Справді, зафіксуємо довільну пару індексів $\alpha_0\in\mathbf{A}$, $\beta_0\in\mathbf{B}$. Покладемо $\mathbb{T} := \mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathcal{B}_{\alpha_0\beta_0})$. Використовуючи теорему 1.79 та твердження 1.106, отримуємо:

$$\overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in\mathbf{A}}}\overleftarrow{\bigcup_{\beta\in\mathbf{B}}}\mathcal{B}_{\alpha\beta} = \overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in\mathbf{A}}}\overleftarrow{\bigcup_{\beta\in\mathbf{B}}}\mathcal{A}t\,(\mathbb{T},\mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_{\alpha\beta})) = \mathcal{A}t\left(\mathbb{T},\bigcup_{\alpha\in\mathbf{A}}\bigcup_{\beta\in\mathbf{B}}\mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_{\alpha\beta})\right) =$$

$$= \mathcal{A}t\left(\mathbb{T},\bigcup_{\beta\in\mathbf{B}}\bigcup_{\alpha\in\mathbf{A}}\mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_{\alpha\beta})\right) = \overleftarrow{\bigcup_{\beta\in\mathbf{B}}}\overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in\mathbf{A}}}\mathcal{A}t\,(\mathbb{T},\mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_{\alpha\beta})) = \overleftarrow{\bigcup_{\beta\in\mathbf{B}}}\overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in\mathbf{A}}}\mathcal{B}_{\alpha\beta}.$$

Враховуючи доведене вище, надалі для подвійного еволюційного об'єднання будемо використовувати таке позначення:

$$\overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in\mathbf{A},\,\beta\in\mathbf{B}}}\mathcal{B}_{\alpha\beta} := \overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in\mathbf{A}}}\overleftarrow{\bigcup_{\beta\in\mathbf{B}}}\mathcal{B}_{\alpha\beta} = \overleftarrow{\bigcup_{\beta\in\mathbf{B}}}\overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in\mathbf{A}}}\mathcal{B}_{\alpha\beta}.$$

Аналогічно вводиться поняття хронологічної спорідненості для багатопараметричної сім'ї базових мінливих множин $(\mathcal{B}_{\alpha_1\ldots\alpha_n})_{\alpha_1\in\mathbf{A}_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbf{A}_n}$, де $n\in\mathbb{N}$, $\mathbf{A}_i\neq\emptyset$, $i\in\{1,\cdots,n\}$. Еволюційним об'єднанням сім'ї $(\mathcal{B}_{\alpha_1\ldots\alpha_n})_{\alpha_1\in\mathbf{A}_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbf{A}_n}$ будемо називати базову мінливу множину:

$$\overleftarrow{\bigcup_{\alpha_1\in\mathbf{A}_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbf{A}_n}}\mathcal{B}_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = \overleftarrow{\bigcup_{\alpha_1\in\mathbf{A}_1}}\cdots\overleftarrow{\bigcup_{\alpha_n\in\mathbf{A}_n}}\mathcal{B}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}.$$

Аналогічно, як і для випадку двопараметричної сім'ї доводиться, що об'єднання в правій частині останньої рівності існує, і не залежить від порядку розташування знаків еволюційного об'єднання.

Означення 1.110. Нехай, $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ $(\mathcal{A}\neq\emptyset)$ — довільна хронологічно споріднена індексована сім'я базових мінливих множин. Базову мінливу множину $\mathcal{B}$ будемо називати **супереволюційним об'єднанням** сім'ї $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$, якщо:

(cEO$_1$) $\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathcal{B}$ $(\forall\alpha\in\mathcal{A})$.

(cEO$_2$) Якщо $\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathcal{B}'$ $(\forall\alpha\in\mathcal{A})$, то $\mathcal{B} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}'$.

З означення 1.110 і твердження 1.97 (пункт 2) випливає наступний наслідок.

Наслідок 1.111. *Якщо супереволюційне об'єднання хронологічно спорідненої сім'ї базових мінливих множин $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ $(\mathcal{A}\neq\emptyset)$ існує, то воно єдине.*

Супереволюційне об'єднання $\mathcal{B}$ сім'ї базових мінливих множин $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ будемо позначати наступним чином:

$$\mathcal{B} = \overleftarrow{\bigvee_{\alpha\in\mathcal{A}}} \mathcal{B}_\alpha.$$

Зокрема, якщо $\mathcal{A} = \{1, ...n\}$ $(n \in \mathbb{N})$, то замість позначення $\overleftarrow{\bigvee}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$ будемо використовувати позначення $\overleftarrow{\bigvee}_{k=1}^{n} \mathcal{B}_k$ або просто $\mathcal{B}_1 \overleftarrow{\vee} \cdots \overleftarrow{\vee} \mathcal{B}_n$:

$$\overleftarrow{\bigvee_{k=1}^{n}} \mathcal{B}_k := \mathcal{B}_1 \overleftarrow{\vee} \cdots \overleftarrow{\vee} \mathcal{B}_n := \overleftarrow{\bigvee_{\alpha\in\mathcal{A}}} \mathcal{B}_\alpha.$$

Наступне твердження можна інтерпретувати як певний аналог теореми про те, що кожна обмежена зверху множина дійсних чисел має точну верхню грань.

Твердження 1.112. *Якщо для хронологічно спорідненої сім'ї базових мінливих множин $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ $(\mathcal{A} \neq \emptyset)$ існує, така базова мінлива множина $\widetilde{\mathcal{B}}$, що для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{A}$ справедливе включення $\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \widetilde{\mathcal{B}}$, то супереволюційне об'єднання $\overleftarrow{\bigvee}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$ існує, причому має місце рівність* $\overleftarrow{\bigvee_{\alpha\in\mathcal{A}}} \mathcal{B}_\alpha = \overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}} \mathcal{B}_\alpha$.

Доведення. Нехай виконується умова твердження. Покладемо: $\mathcal{B} := \overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}} \mathcal{B}_\alpha$. Доведемо, що:

$$\forall \alpha \in \mathcal{A} \quad (\mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_\alpha) \subseteq \mathbb{L}d(\mathcal{B}))\,. \tag{1.38}$$

Припустимо супротивне. Тоді існують індекс $\beta \in \mathcal{A}$ та лінія долі $L \in \mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_\beta)$ такі, що $L \notin \mathbb{L}d(\mathcal{B})$. Згідно з означенням 1.103, $\mathcal{B}_\beta \underset{\rightarrow}{\subseteq} \overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}$. Отже, згідно з твердженням 1.100, $L \in \mathbb{L}l(\mathcal{B})$. Тому, оскільки $L \notin \mathbb{L}d(\mathcal{B})$, існує ланцюг $L_1 \in \mathbb{L}l(\mathcal{B})$ такий, що $L \subset L_1$. Оскільки $\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \widetilde{\mathcal{B}}$ $(\forall\, \alpha \in \mathcal{A})$, то, згідно з твердженням 1.95, для довільного $\alpha \in \mathcal{A}$ $\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\subseteq} \widetilde{\mathcal{B}}$. Отже, згідно з твердженням 1.109 (пункт 4) $\mathcal{B} = \overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\subseteq} \widetilde{\mathcal{B}}$. Оскільки $\mathcal{B} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \widetilde{\mathcal{B}}$ і $L_1 \in \mathbb{L}l(\mathcal{B})$, то, згідно з твердженням 1.100, $L_1 \in \mathbb{L}l\left(\widetilde{\mathcal{B}}\right)$. Таким чином, ми довели існування ланцюга $L_1 \in \mathbb{L}l\left(\widetilde{\mathcal{B}}\right)$ такого, що $L \subset L_1$. А це означає, що $L \notin \mathbb{L}d\left(\widetilde{\mathcal{B}}\right)$. З іншої сторони, оскільки $\mathcal{B}_\beta \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \widetilde{\mathcal{B}}$ і $L \in \mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_\beta)$, то, за означенням 1.93, співвідношення $L \in \mathbb{L}d\left(\widetilde{\mathcal{B}}\right)$ мусить виконуватись. Отримана суперечність доводить співвідношення (1.38). Із співвідношення (1.38), за означенням 1.93, випливає, що $\forall \alpha \in \mathcal{A}$ $\left(\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathcal{B}\right)$. Отже, базова мінлива множина $\mathcal{B}$ задовольняє умову $(\mathbf{cEO}_1)$ означення 1.110.

Доведемо, що умова $(\mathbf{cEO}_2)$ означення 1.110 для $\mathcal{B}$ також виконується. Справді, нехай для деякої базової мінливої множини $\mathcal{B}'$ маємо $\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathcal{B}'$ при всіх $\alpha \in \mathcal{A}$. Тоді, згідно з твердженням 1.95, $\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}'$ $(\forall \alpha \in \mathcal{A})$. Отже, за твердженням 1.109 (пункт 4), $\mathcal{B} = \overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}} \mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}'$. $\square$

Наслідок 1.113. *Якщо існує супереволюційне об'єднання* $\overleftarrow{\bigvee}_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathcal{B}_\alpha$, *то воно співпадає з відповідним еволюційним об'єднанням, тобто* $\overleftarrow{\bigvee\limits_{\alpha\in\mathcal{A}}}\mathcal{B}_\alpha = \overleftarrow{\bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}}}\mathcal{B}_\alpha$.

Доведення. Справді, якщо для хронологічно спорідненої сім'ї базових мінливих множин $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ $(\mathcal{A}\neq\emptyset)$ існує супереволюційне об'єднання $\overleftarrow{\bigvee}_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathcal{B}_\alpha$, то базова мінлива множина $\widetilde{\mathcal{B}} = \overleftarrow{\bigvee}_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathcal{B}_\alpha$ задовольнятиме умови твердження 1.112. □

Як буде видно з наступного прикладу, на відміну від еволюційного об'єднання, супереволюційне об'єднання довільної хронологічно спорідненої сім'ї базових мінливих множин існує не завжди.

Приклад 1.114. Нехай системи абстрактних траєкторій $\mathcal{R}_0=\{r_0\}$, $\mathcal{R}_1=\{r_1\}$ ті ж самі, що й в прикладі 1.96. Як було показано в прикладі 1.96, для базових мінливих множин $\mathcal{B}_0 := \mathcal{A}t\,(\mathbb{R}_{ord},\mathcal{R}_0)$, $\mathcal{B}_1 := \mathcal{A}t\,(\mathbb{R}_{ord},\mathcal{R}_1)$ справедливе еволюційне включення $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_1$. Отже, згідно з твердженням 1.109, пункт 5, $\mathcal{B}_0 \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_1$. З іншої сторони супереволюційного об'єднання $\mathcal{B}_0 \overset{\leftarrow}{\vee} \mathcal{B}_1$ не існує. Справді, припустимо супротивне. Тоді, згідно з наслідком 1.113, $\mathcal{B}_0 \overset{\leftarrow}{\vee} \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_0 \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_1$. Проте, як було показано в прикладі 1.96, $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\not\subseteq} \mathcal{B}_1$. Отже, за означенням 1.110, $\mathcal{B}_1$ не може бути супереволюційним об'єднанням $\mathcal{B}_0$ і $\mathcal{B}_1$. Одержана суперечність доводить, що супереволюційного об'єднання $\mathcal{B}_0 \overset{\leftarrow}{\vee} \mathcal{B}_1$ не існує.

Означення 1.115. Хронологічно споріднену сім'ю базових мінливих множин $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ $(\mathcal{A}\neq\emptyset)$ будемо називати **еволюційно насиченою**, якщо:

$$\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_\alpha) \subseteq \mathbb{L}d\left(\overleftarrow{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}}\mathcal{B}_\alpha\right). \tag{1.39}$$

Зауваження 1.116. З означень 1.115 та 1.93 випливає, що хронологічно споріднена сім'я базових мінливих множин $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ $(\mathcal{A}\neq\emptyset)$ є еволюційно насиченою тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{B}_\beta \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \overleftarrow{\bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}}}\mathcal{B}_\alpha$ $(\forall\beta\in\mathcal{A})$.

Твердження 1.117. *Супереволюційне об'єднання* $\overleftarrow{\bigvee}_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathcal{B}_\alpha$ *хронологічно спорідненої сім'ї базових мінливих множин* $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ $(\mathcal{A}\neq\emptyset)$ *існує тоді і тільки тоді, коли ця сім'я є еволюційно насиченою.*

Доведення. Припустимо, що супереволюційне об'єднання $\mathcal{B} = \overleftarrow{\bigvee}_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathcal{B}_\alpha$ існує. Тоді, за означенням 1.110, $\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{B}$ $(\forall\alpha\in\mathcal{A})$. Отже, за означенням 1.93, $\mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_\alpha)\subseteq\mathbb{L}d(\mathcal{B})$ $(\forall\alpha\in\mathcal{A})$, тобто $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_\alpha)\subseteq\mathbb{L}d(\mathcal{B})$. Але, за наслідком 1.113, $\mathcal{B} = \overleftarrow{\bigvee}_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathcal{B}_\alpha = \overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathcal{B}_\alpha$. Отже, $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_\alpha)\subseteq\mathbb{L}d\left(\overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathcal{B}_\alpha\right)$.

Навпаки, припустимо, що хронологічно споріднена сім'я базових мінливих множин $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ $(\mathcal{A}\neq\emptyset)$ є еволюційно насиченою, тобто виконується рівність (1.39).

Покладемо $\mathcal{B} = \overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$. Згідно (1.39), $\mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_\alpha) \subseteq \mathbb{L}d(\mathcal{B})$ $(\forall\alpha \in \mathcal{A})$. Отже, за означенням 1.93, $\mathcal{B}_\alpha \sqsubseteq\!\!\!\rightarrow \mathcal{B}$ $(\forall\alpha \in \mathcal{A})$. Тому, згідно з твердженням 1.112, супереволюційне об'єднання $\overleftarrow{\bigvee}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$ існує. □

Лема 1.118 (про властивості еволюційної насиченості)**.** *Нехай,* $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ *(*$\mathcal{A} \neq \emptyset$*) — довільна хронологічно споріднена індексована сім'я базових мінливих множин.*

1. *Якщо існує така базова мінлива множина* $\widetilde{\mathcal{B}}$*, що для довільного індексу* $\alpha \in \mathcal{A}$ *справедливе включення* $\mathcal{B}_\alpha \sqsubseteq\!\!\!\rightarrow \widetilde{\mathcal{B}}$*, то сім'я* $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ *є еволюційно насиченою.*
2. *Якщо* $\mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}$ *(*$\forall\alpha \in \mathcal{A}$*), то сім'я* $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ *є еволюційно насиченою.*
3. *Якщо* $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha) \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\beta) = \emptyset$ *при умові* $\mathcal{B}_\alpha \neq \mathcal{B}_\beta$*, то сім'я* $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ *є еволюційно насиченою.*
4. *Якщо сім'я* $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ *є еволюційно насиченою і* $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$*,* $\mathcal{A}_1 \neq \emptyset$*, то підсім'я* $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}_1}$ *також є еволюційно насиченою.*

Доведення. 1. Якщо $\mathcal{B}_\alpha \sqsubseteq\!\!\!\rightarrow \widetilde{\mathcal{B}}$ $(\forall\alpha \in \mathcal{A})$, то, згідно з твердженням 1.112, існує супереволюційне об'єднання $\overleftarrow{\bigvee}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$, а отже, за твердженням 1.117, сім'я $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ є еволюційно насиченою.

2. Якщо $\mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}$ $(\forall\alpha \in \mathcal{A})$, то, згідно з твердженням 1.101, $\mathcal{B}_\alpha \sqsubseteq\!\!\!\rightarrow \mathcal{B}$ $(\forall\alpha \in \mathcal{A})$. Тому за попереднім пунктом, сім'я $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ є еволюційно насиченою.

3. Нехай, $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha) \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\beta) = \emptyset$ при умові $\mathcal{B}_\alpha \neq \mathcal{B}_\beta$. Покладемо, $\mathcal{B} := \overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$. Нехай, $L \in \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_\alpha)$. Тоді існує індекс $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ такий, що $L \in \mathbb{L}d\,(\mathcal{B}_{\alpha_0})$. Оскільки, за означенням 1.103, $\mathcal{B}_{\alpha_0} \subseteq\!\!\!\rightarrow \overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}$, то, за твердженням 1.100, $L \in \mathbb{L}l(\mathcal{B})$. Доведемо, що $L \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})$. Припустимо супротивне. Тоді існує ланцюг $L_1 \in \mathbb{L}l(\mathcal{B})$ $(L_1 \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}))$ такий, що $L \subset L_1$. Розглянемо довільний елементарно-часовий стан $\omega \in L_1$. Оскільки L — лінія долі $\mathcal{B}_{\alpha_0}$, то, згідно з твердженням 1.74 і зауваженням 1.53, $L \neq \emptyset$. Отже, існує елементарно-часовий ω_0 такий, що $\omega_0 \in L$. Оскільки $L \subset L_1$, то $\omega_0 \in L_1$. Оскільки L_1 — ланцюг $\mathcal{B}$ і $\omega, \omega_0 \in L_1$, то хоч одна з умов $\omega_0 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega$ або $\omega \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_0$ мусить виконуватись. Отже, за наслідком 1.108, існує індекс $\alpha_1 \in \mathcal{A}$ такий, що $\omega_0 \underset{\mathcal{B}_{\alpha_1}}{\leftarrow} \omega$ або $\omega \underset{\mathcal{B}_{\alpha_1}}{\leftarrow} \omega_0$. Але, оскільки відношення $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_{\alpha_1}}{\leftarrow}}$ діє на множині $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_{\alpha_1})$, із обох співвідношень випливає, що $\omega, \omega_0 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_{\alpha_1})$. Таким чином, $\omega_0 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_{\alpha_0}) \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_{\alpha_1})$. І, враховуючи, що, за умовою, $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha) \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\beta) = \emptyset$ при $\mathcal{B}_\alpha \neq \mathcal{B}_\beta$, отримуємо, що $\mathcal{B}_{\alpha_0} = \mathcal{B}_{\alpha_1}$. Отже, $\omega, \omega_0 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_{\alpha_0})$. Таким чином, довільний елемент $\omega \in L_1$ належить до $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_{\alpha_0})$. Тому, $L_1 \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_{\alpha_0})$. Доведемо, що для довільних $\omega_1, \omega_2 \in L_1$ співвідношення $\omega_2 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_1$ виконується тоді і тільки тоді, коли $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_{\alpha_0}}{\leftarrow} \omega_1$. Якщо $\omega_1, \omega_2 \in L_1$ і $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_{\alpha_0}}{\leftarrow} \omega_1$, то, за наслідком 1.108, $\omega_2 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_1$. Навпаки, нехай $\omega_2 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_1$ (де $\omega_1, \omega_2 \in L_1$). Оскільки $\mathcal{B} = \overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$, то, за наслідком 1.108, існує індекс $\alpha_1 \in \mathcal{A}$ такий, що $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_{\alpha_1}}{\leftarrow} \omega_1$. Отже,

оскільки відношення $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_{\alpha_1}}{\leftarrow}}$ діє на множині $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_{\alpha_1}\right)$, то $\omega, \omega_0 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_{\alpha_1}\right)$. І, враховуючи, що, за умовою, $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_{\alpha}\right) \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_{\beta}\right) = \emptyset$ при $\mathcal{B}_{\alpha} \neq \mathcal{B}_{\beta}$, отримуємо, що $\mathcal{B}_{\alpha_0} = \mathcal{B}_{\alpha_1}$. Отже, $\omega_2 \underset{\mathcal{B}_{\alpha_0}}{\leftarrow} \omega_1$, що й треба було довести. Оскільки, згідно із щойно доведеним, бінарні відношення $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}}$ та $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_{\alpha_0}}{\leftarrow}}$ на множині L_1 співпадають, і L_1 є ланцюгом у $\mathcal{B}$ (відносно відношення $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}}$), то L_1 також буде ланцюгом і у $\mathcal{B}_{\alpha_0}$ (відносно відношення $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_{\alpha_0}}{\leftarrow}}$). Таким чином, припущення про те, що $L \notin \mathbb{L}d(\mathcal{B})$ приводить до існування ланцюга $L_1 \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_{\alpha_0}\right)$ в $\mathcal{B}_{\alpha_0}$ такого, що $L \subset L_1$, що суперечить тому факту, що $L \in \mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_{\alpha_0}\right)$. Тому, $L \in \mathbb{L}d(\mathcal{B})$. Тобто, за означенням 1.115, сім'я базових мінливих множин $\left(\mathcal{B}_{\alpha}\right)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ є еволюційно насиченою.

4. Якщо сім'я $\left(\mathcal{B}_{\alpha}\right)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ є еволюційно насиченою, то, за твердженням 1.117, існує супереволюційне об'єднання $\mathcal{B} = \overset{\leftarrow}{\bigvee}_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{B}_{\alpha}$. Тому, за означенням 1.110, для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$ будемо мати, $\mathcal{B}_{\alpha} \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathcal{B}$. Тому, згідно з першим пунктом леми, підсім'я $\left(\mathcal{B}_{\alpha}\right)_{\alpha \in \mathcal{A}_1}$ є еволюційно насиченою. $\square$

З твердження 1.109 і означення 1.110, враховуючи наслідок 1.113, твердження 1.117 та лему 1.118, отримуємо наступне твердження.

Твердження 1.119 (про властивості супереволюційного об'єднання)**.** *Нехай* $\left(\mathcal{B}_i\right)_{i \in \{1,2,3\}}$ *та* $\left(\mathcal{B}_{\alpha}\right)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ $(\mathcal{A} \neq \emptyset)$ *— дві еволюційно насичені сім'ї базових мінливих множин. Операція супереволюційного об'єднання має такі властивості:*

1. $\mathcal{B}_1 \overset{\leftarrow}{\vee} \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_2 \overset{\leftarrow}{\vee} \mathcal{B}_1$.
2. *Якщо* $\mathcal{A} = \{\alpha_0\}$, *то* $\overset{\leftarrow}{\bigvee}_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{B}_{\alpha} = \mathcal{B}_{\alpha_0}$.
3. *Якщо множина індексів* $\mathcal{A}$ *розпадається на диз'юнктне об'єднання непорожніх множин індексів* $\mathcal{A}_{\gamma}$ $(\gamma \in \mathcal{G})$, *тобто* $\mathcal{A} = \bigsqcup_{\gamma \in \mathcal{G}} \mathcal{A}_{\gamma}$ *то*

$$\overset{\leftarrow}{\bigvee_{\alpha \in \mathcal{A}}} \mathcal{B}_{\alpha} = \overset{\leftarrow}{\bigcup_{\gamma \in \mathcal{G}}} \left(\overset{\leftarrow}{\bigvee_{\alpha \in \mathcal{A}_{\gamma}}} \mathcal{B}_{\alpha} \right). \tag{1.40}$$

Зокрема, якщо $\mathbf{card}\left(\mathcal{A}\right) \geq 2$, *то для довільного* $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ *має місце рівність:*

$$\overset{\leftarrow}{\bigvee_{\alpha \in \mathcal{A}}} \mathcal{B}_{\alpha} = \mathcal{B}_{\alpha_0} \overset{\leftarrow}{\cup} \left(\overset{\leftarrow}{\bigvee_{\alpha \in \mathcal{A} \setminus \{\alpha_0\}}} \mathcal{B}_{\alpha} \right), \tag{1.41}$$

а у випадку $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$ *маємо рівність:*

$$\left(\mathcal{B}_1 \overset{\leftarrow}{\vee} \mathcal{B}_2\right) \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{B}_3 = \mathcal{B}_1 \overset{\leftarrow}{\cup} \left(\mathcal{B}_2 \overset{\leftarrow}{\vee} \mathcal{B}_3\right) = \mathcal{B}_1 \overset{\leftarrow}{\vee} \mathcal{B}_2 \overset{\leftarrow}{\vee} \mathcal{B}_3. \tag{1.42}$$

4. *Якщо, для деякої базової мінливої множини $\mathcal{B}'$ має місце включення, $\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}'$ (для довільного $\alpha \in \mathcal{A}$), то $\overleftarrow{\bigvee}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}'$.*
5. *Якщо для деякого $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ при всіх $\alpha \in \mathcal{A}$ справедливе еволюційне включення $\mathcal{B}_\alpha \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_{\alpha_0}$ то $\overleftarrow{\bigvee}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}_{\alpha_0}$. Зокрема $\mathcal{B} \overset{\leftarrow}{\vee} \mathcal{B} = \mathcal{B}$ для довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}$.*

Виявляється, що в пункті 3 твердження 1.119 (точніше, в рівностях (1.40),(1.41) та (1.42)) знак еволюційного об'єднання не можна замінити на знак супереволюційного об'єднання, крім того, в пункті 4 еволюційне включення не можна замінити на супереволюційне. В [84, приклад 3] наведено приклад, який показує, що, незважаючи на те, що довільна підсім'я еволюційно насиченої сім'ї $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ базових мінливих множин сама є еволюційно насиченою, сім'я базових мінливих множин $\left(\mathcal{B}_{\alpha_0}, \left(\overleftarrow{\bigvee}_{\alpha\in\mathcal{A}\setminus\{\alpha_0\}} \mathcal{B}_\alpha\right)\right)$ при $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ може бути вже не еволюційно насиченою (тобто супереволюційного об'єднання $\mathcal{B}_{\alpha_0} \overset{\leftarrow}{\vee} \left(\overleftarrow{\bigvee}_{\alpha\in\mathcal{A}\setminus\{\alpha_0\}} \mathcal{B}_\alpha\right)$, взагалі кажучи, може не існувати, незважаючи на те, що супереволюційне об'єднання $\overleftarrow{\bigvee}_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$ існує).

1.11.3. Про існування еволюційних розширень базових мінливих множин.

Теорема 1.120. *Нехай $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина, і $\mathcal{R}$ — система абстрактних траєкторій з $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$ в M. Тоді базова мінлива множина $\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{A}t\,(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), \mathcal{R})$ є еволюційним розширенням $\mathcal{B}$ таким, що $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{L}l\left(\widetilde{\mathcal{B}}\right)$.*

Доведення. Щоб переконатись у правильності теореми досить скористатись твердженням 1.78, означенням 1.103 та твердженням 1.100. □

Означення 1.121. Систему абстрактних траєкторій $\mathcal{R}$ з $\mathbb{T}$ в M будемо називати:

- **Еволюційно насиченою**, якщо $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{L}d\,(\mathcal{A}t\,(\mathbb{T}, \mathcal{R}))$.
- **Еволюційно насиченою відносно** базової мінливої множини $\mathcal{B}$, якщо:
  1) $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = \mathbb{T}$; **2)** $\mathbb{L}d(\mathcal{B}) \cup \mathcal{R} \subseteq \mathbb{L}d\left(\mathcal{B} \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{A}t\,(\mathbb{T}, \mathcal{R})\right)$.

Твердження 1.122. *1. Якщо система абстрактних траєкторій $\mathcal{R}$ еволюційно насичена відносно баз. мінливої множини $\mathcal{B}$, то вона є еволюційно насиченою.*

2. Якщо система абстрактних траєкторій $\mathcal{R}$ з $\mathbb{T}$ в M є еволюційно насиченою і при цьому $\left(\bigcup_{r\in\mathcal{R}} r\right) \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \emptyset$ де $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина така, що $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = \mathbb{T}$, то $\mathcal{R}$ є еволюційно насиченою відносно $\mathcal{B}$.

Доведення. **1.** Нехай, система абстрактних траєкторій $\mathcal{R}$ з $\mathbb{T}$ в M еволюційно насичена відносно базової мінливої множини $\mathcal{B}$. Тоді, за означенням 1.121, $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = \mathbb{T}$.

Згідно з твердженням 1.78, довільна траєкторія $r \in \mathcal{R}$ належить до $\mathbb{L}l\left(\mathcal{A}t\left(\mathbb{T},\mathcal{R}\right)\right)$. Припустимо, що r не є лінією долі в $\mathcal{A}t\left(\mathbb{T},\mathcal{R}\right)$. Тоді існує ланцюг $L \in \mathbb{L}l\left(\mathcal{A}t\left(\mathbb{T},\mathcal{R}\right)\right)$ такий, що $r \subset L$. Оскільки, за означенням 1.103, $\mathcal{A}t\left(\mathbb{T},\mathcal{R}\right) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B} \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{A}t\left(\mathbb{T},\mathcal{R}\right)$, то, за твердженням 1.100, $L \in \mathbb{L}l\left(\mathcal{B} \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{A}t\left(\mathbb{T},\mathcal{R}\right)\right)$. Отже, в базовій мінливій множині $\mathcal{B} \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{A}t\left(\mathbb{T},\mathcal{R}\right)$ існує ланцюг $L \in \mathbb{L}l\left(\mathcal{B} \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{A}t\left(\mathbb{T},\mathcal{R}\right)\right)$ такий, що $r \subset L$. Тому $r \notin \mathbb{L}d\left(\mathcal{B} \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{A}t\left(\mathbb{T},\mathcal{R}\right)\right)$. Проте, з іншої сторони, оскільки $\mathcal{R}$ еволюційно насичена відносно $\mathcal{B}$, за означенням 1.121, співвідношення $r \in \mathbb{L}d\left(\mathcal{B} \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{A}t\left(\mathbb{T},\mathcal{R}\right)\right)$ для траєкторії $r \in \mathcal{R}$ мусить виконуватись. Отримана суперечність показує, що $r \in \mathbb{L}d\left(\mathcal{A}t\left(\mathbb{T},\mathcal{R}\right)\right)$ $(\forall r \in \mathcal{R})$. Тому система траєкторій $\mathcal{R}$ є еволюційно насиченою.

2. Нехай, система абстрактних траєкторій $\mathcal{R}$ з $\mathbb{T}$ в M є еволюційно насиченою і при цьому $\left(\bigcup_{r\in\mathcal{R}} r\right) \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \emptyset$ де $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = \mathbb{T}$. Тоді, згідно з теоремою 1.63, $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{A}t\left(\mathbb{T},\mathcal{R}\right)\right) \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \left(\bigcup_{r\in\mathcal{R}} r\right) \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \emptyset$. Отже, за лемою 1.118 (пункт 3), сім'я з двох базових мінливих множин $(\mathcal{B},\ \mathcal{A}t\left(\mathbb{T},\mathcal{R}\right))$ є еволюційно насиченою. Тому, за означенням 1.115, маємо, $\mathbb{L}d\left(\mathcal{A}t\left(\mathbb{T},\mathcal{R}\right)\right) \cup \mathbb{L}d(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{L}d\left(\mathcal{B} \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{A}t\left(\mathbb{T},\mathcal{R}\right)\right)$. Оскільки система траєкторій $\mathcal{R}$ є еволюційно насиченою, то, за означенням 1.121, отримуємо, $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{L}d\left(\mathcal{A}t\left(\mathbb{T},\mathcal{R}\right)\right)$. Отже, $\mathcal{R} \cup \mathbb{L}d(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{L}d\left(\mathcal{A}t\left(\mathbb{T},\mathcal{R}\right)\right) \cup \mathbb{L}d(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{L}d\left(\mathcal{B} \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{A}t\left(\mathbb{T},\mathcal{R}\right)\right)$, що, за означенням 1.121, означає, що система траєкторій $\mathcal{R}$ є еволюційно насиченою відносно $\mathcal{B}$. □

Теорема 1.123. *Нехай $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина, і $\mathcal{R}$ — система абстрактних траєкторій з $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$ в M, еволюційно насичена відносно $\mathcal{B}$.*

Тоді базова мінлива множина $\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}),\mathcal{R}\right)$ є супереволюційним розширенням $\mathcal{B}$ таким, що $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{L}d\left(\widetilde{\mathcal{B}}\right)$.

Доведення. Покладемо, $\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}),\mathcal{R}\right)$. Згідно з твердженням 1.106 маємо:

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), \bigcup_{r\in\mathcal{R}} \{r\}\right) = \mathcal{B} \overset{\leftarrow}{\cup} \overset{\leftarrow}{\bigcup_{r\in\mathcal{R}}} \mathcal{B}_r, \tag{1.43}$$
$$\text{де} \quad \mathcal{B}_r = \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), \{r\}\right) \quad (r \in \mathcal{R}).$$

Оскільки для довільного $r \in \mathcal{R}$ однотраєкторна система $\mathcal{R}_r = \{r\}$ є системою індивідуальних траєкторій в сенсі означення 1.81, то згідно з теоремою 1.82, $\mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_r\right) = \{r\}$ $(\forall\, r \in \mathcal{R})$. Отже, беручи до уваги означення 1.121, та рівність (1.43) отримуємо:

$$\mathbb{L}d(\mathcal{B}) \cup \bigcup_{r\in\mathcal{R}} \mathbb{L}d\left(\mathcal{B}_r\right) = \mathbb{L}d(\mathcal{B}) \cup \bigcup_{r\in\mathcal{R}} \{r\} = \mathbb{L}d(\mathcal{B}) \cup \mathcal{R} \subseteq$$
$$\subseteq \mathbb{L}d\left(\mathcal{B} \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}),\mathcal{R}\right)\right) = \mathbb{L}d\left(\widetilde{\mathcal{B}}\right) = \mathbb{L}d\left(\mathcal{B} \overset{\leftarrow}{\cup} \overset{\leftarrow}{\bigcup_{r\in\mathcal{R}}} \mathcal{B}_r\right). \tag{1.44}$$

Тому, згідно з твердженням 1.117, існує супереволюційне об'єднання $\overleftarrow{\bigvee}_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathcal{B}_\alpha$, де $\mathcal{A}=\mathcal{R}\bigsqcup\{\alpha_0\}$, $\mathcal{B}_{\alpha_0}=\mathcal{B}$ і α_0 — довільний індекс такий, що $\alpha_0\notin\mathcal{R}$ (наприклад в якості α_0 можна взяти довільний елемент завідомо непорожньої множини $2^{\mathcal{R}}\setminus\mathcal{R}$). Згідно з наслідком 1.113 та рівністю (1.43) маємо, $\overleftarrow{\bigvee}_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathcal{B}_\alpha=\overleftarrow{\bigcup}_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathcal{B}_\alpha=\mathcal{B}_{\alpha_0}\overleftarrow{\cup}\overleftarrow{\bigcup}_{r\in\mathcal{R}}\mathcal{B}_r=\mathcal{B}\overleftarrow{\cup}\overleftarrow{\bigcup}_{r\in\mathcal{R}}\mathcal{B}_r=\widetilde{\mathcal{B}}$. Отже, за означенням 1.110, $\mathcal{B}=\mathcal{B}_{\alpha_0}\sqsubseteq\widetilde{\mathcal{B}}$. Тобто $\widetilde{\mathcal{B}}$ є супереволюційним розширенням $\mathcal{B}$. При цьому, згідно з (1.44), $\mathcal{R}\subseteq\mathbb{L}d(\mathcal{B})\cup\mathcal{R}\subseteq\mathbb{L}d\left(\widetilde{\mathcal{B}}\right)$. □

Основні результати підрозділу 1.11 були опубліковані в роботі [84], а також представлені на конференціях [89–91].

1.12. Багатоликість та уніфікація сприймання. Загальне означення мінливої множини

1.12.1. Мотивація. Загальне означення мінливої множини. Базові мінливі множини можна розглядати як абстракцію моделей фізичних та ін. процесів (на рівні макросвіту), коли спостереження за процесом проводиться з одного, фіксованого пункту спостереження (однієї фіксованої системи відліку). Проте, реальний фізичний світ є багатоликим, оскільки у фізиці (зокрема у теорії відносності) "картина світу" може істотно змінюватись в залежності від зміни системи відліку. Тобто, в результаті, ми отримуємо не одну, а багато "базових мінливих множин" (пов'язаних з кожною системою відліку в межах даної фізичної моделі). Кожну з цих "базових мінливих множин" можна вважати окремим ликом (областю сприймання) реального світу. При цьому припускається, що між різними областями сприймання (системами відліку) існує природна уніфікація фізичних об'єктів і процесів, тобто існує якесь "правило", котре визначає яким чином об'єкт з однієї системи відліку "слід бачити" в іншій системі відліку. Тобто ми ототожнюємо певний об'єкт або процес із іншим об'єктом або процесом іншої системи відліку, кажучи, що це той самий об'єкт або процес, але "видимий" в іншій системі відліку. В класичній механіці така "уніфікація сприймання" задається з допомогою групи перетворень Галілея, в спеціальній теорії відносності (для інерційних систем відліку) — з допомогою групи перетворень Лоренца-Пуанкаре. Слід зазначити, що в обох випадках уніфікація сприймання проводиться на рівні елементарно-часових станів (з допомогою взаємнооднозначних відображень, заданих на 4-вимірному просторі часу). Отже, припускається, що довільний елементарно-часовий стан, "видимий" з однієї системи відліку є завжди "видимим" з іншої системи відліку. На нашу думку, таке припущення є занадто сильним, і для абстрактної теорії мінливих множин добре було б відмовитись

від обов'язкової "наскрізної" видимості. Крім того, в теорії відносності для неінерційних систем відліку останнє припущення не виконується. Саме тому в означенні нижче уніфікація сприймання проводиться не на рівні елементарно-часових станів, а на рівні "об'єктів і процесів". Нагадаємо (див. підрозділ 1.10), що в теорії базових мінливих множин абстрактними аналогами фізичних об'єктів або процесів є мінливі системи, тобто підмножини множини $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ всіх елементарно-часових станів базової мінливої множини $\mathcal{B}$.

Означення 1.124. Нехай $\overleftarrow{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_\alpha \,|\, \alpha \in \mathcal{A})$ індексована сім'я базових мінливих множин, де $\mathcal{A} \neq \emptyset$ — деяка (непорожня) множина індексів. Система відображень $\overleftarrow{\mathfrak{U}} = (\mathfrak{U}_{\beta\alpha} \,|\, \alpha, \beta \in \mathcal{A})$ виду:

$$\mathfrak{U}_{\beta\alpha} : 2^{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_\alpha)} \longrightarrow 2^{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_\beta)} \qquad (\alpha, \beta \in \mathcal{A})$$

називається **уніфікацією сприймання** на $\overleftarrow{\mathcal{B}}$, якщо виконуються такі умови:

1. $\mathfrak{U}_{\alpha\alpha} A \equiv A$ для довільних $\alpha \in \mathcal{A}$ і $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha)$.
   (Тут і надалі де через $\mathfrak{U}_{\beta\alpha} A$ буде позначатись дія відображення $\mathfrak{U}_{\beta\alpha}$ на множину $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha)$, тобто $\mathfrak{U}_{\beta\alpha} A := \mathfrak{U}_{\beta\alpha}(A)$.)
2. Будь-яке відображення $\mathfrak{U}_{\beta\alpha}$ є монотонним відображенням множин, тобто для довільних $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ і $A, B \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha)$ з умови $A \subseteq B$ випливає, що $\mathfrak{U}_{\beta\alpha} A \subseteq \mathfrak{U}_{\beta\alpha} B$.
3. Для довільних $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$ і $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha)$ має місце включення:

$$\mathfrak{U}_{\gamma\beta} \mathfrak{U}_{\beta\alpha} A \subseteq \mathfrak{U}_{\gamma\alpha} A. \tag{1.45}$$

При цьому відображення $\mathfrak{U}_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta \in \mathcal{A})$ будемо називати **відображеннями уніфікації**, а трійку виду:

$$\mathcal{Z} = \left(\mathcal{A}, \overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{\mathfrak{U}}\right)$$

будемо називати **мінливою множиною**.

Перша умова означення 1.124 є цілком очевидною. Друга умова продиктована природнім прагненням "бачити" підсистему даної мінливої системи в одній системі відліку підсистемою "цієї ж" мінливої системі в іншій системі відліку. У випадку класичної механіки або спеціальної теорії відносності (для інерційних систем відліку) замість співвідношення (1.45) у третій умові означення 1.124 варто було б записати рівність:

$$\mathfrak{U}_{\gamma\beta} \mathfrak{U}_{\beta\alpha} A = \mathfrak{U}_{\gamma\alpha} A \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A},\ A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha)) \tag{1.46}$$

Заміна в (1.45) знаку рівності на включення зумовлена можливістю "спотворення зображення" при переході до іншої системи відліку, коли не всі елементарно-часові

стани довільної мінливої системи даної системи відліку є “видимими” з іншої системи відліку. Далі остання думка буде більш детально пояснена (див. підрозділ 1.14, зокрема теорему 1.182).

1.12.2. Зауваження про термінологію і позначення. Нехай $\mathcal{Z} = \left(\mathcal{A}, \overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{\mathfrak{U}}\right)$ — мінлива множина, де $\overleftarrow{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_\alpha \,|\, \alpha \in \mathcal{A})$ індексована сім'я базових мінливих множин і $\overleftarrow{\mathfrak{U}} = (\mathfrak{U}_{\beta\alpha} \,|\, \alpha, \beta \in \mathcal{A})$ — уніфікація сприймання на $\overleftarrow{\mathcal{B}}$. Надалі будемо вживати наступні терміни і позначення:

1) Множину $\mathcal{A}$ будемо називати ***множиною індексів*** мінливої множини $\mathcal{Z}$ і будемо позначати її через $\mathcal{I}nd\,(\mathcal{Z})$.

2) Для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathcal{Z})$ пару $(\alpha, \mathcal{B}_\alpha)$ будемо називати ***системою відліку*** [1.6] мінливої множини $\mathcal{Z}$.

3) Множину всіх систем відліку мінл. множини $\mathcal{Z}$ позначатимемо через $\mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$:

$$\mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}) := \{(\alpha, \mathcal{B}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathcal{Z})\}\,.$$

Системи відліку мінливих множин будемо, як правило, позначати малими готичними буквами ($\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{k}, \mathfrak{p}$ та ін).

4) Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} = (\alpha, \mathcal{B}_\alpha) \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ введемо позначення:

$$\mathtt{ind}\,(\mathfrak{l}) := \alpha; \quad \mathfrak{l}\hat{} := \mathcal{B}_\alpha.$$

Отже, для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ математичний об'єкт $\mathfrak{l}\hat{}$ є базовою мінливою множиною.

Надалі, коли це не викликає непорозумінь, для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ в позначеннях:

$$\begin{aligned}&\mathfrak{Bs}\,(\mathfrak{l}\hat{})\,,\ \mathbb{Bs}\,(\mathfrak{l}\hat{})\,,\ \mathbf{Tm}\,(\mathfrak{l}\hat{})\,,\ \mathbb{Tm}\,(\mathfrak{l}\hat{})\ \leq_{\mathfrak{l}\hat{}},\ <_{\mathfrak{l}\hat{}},\\ &\geq_{\mathfrak{l}\hat{}},\ >_{\mathfrak{l}\hat{}},\ \psi_{\mathfrak{l}\hat{}},\ \underset{\mathfrak{l}\hat{}}{\leftarrow},\ \underset{\mathfrak{l}\hat{}}{\leftarrow}(\mathrm{f}),\ \overset{\mathbb{Bs}}{\underset{\mathfrak{l}\hat{}}{\leftarrow}},\ \mathbb{L}l\,(\mathfrak{l}\hat{})\,,\ \mathbb{L}d\,(\mathfrak{l}\hat{})\end{aligned} \tag{1.47}$$

символ “ ˆ” будемо опускати, використовуючи замість них позначення:

$$\begin{aligned}&\mathfrak{Bs}\,(\mathfrak{l})\,,\ \mathbb{Bs}\,(\mathfrak{l})\,,\ \mathbf{Tm}\,(\mathfrak{l})\,,\ \mathbb{Tm}\,(\mathfrak{l})\,,\ \leq_{\mathfrak{l}},\ <_{\mathfrak{l}},\\ &\geq_{\mathfrak{l}},\ >_{\mathfrak{l}},\ \psi_{\mathfrak{l}},\ \underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow},\ \underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}(\mathrm{f}),\ \overset{\mathbb{Bs}}{\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}},\ \mathbb{L}l\,(\mathfrak{l})\,,\ \mathbb{L}d\,(\mathfrak{l})\,.\end{aligned} \tag{1.48}$$

[1.6] Зазначимо, що терміни “***область сприймання***” або “***лик***” можна розглядати, як синоніми до терміну “система відліку”. З метою стандартизації термінології в даній роботі застосовується лише термін “система відліку”. В більш ранніх роботах [67, 86, 92, 93] як правило використовувався термін “область сприймання” для мінливих множин (а термін “система відліку” використовувався лише для кінематичних мінливих множин та універсальних кінематик).

5) Для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ відображення уніфікації $\mathfrak{U}_{\mathtt{ind}(\mathfrak{m}),\mathtt{ind}(\mathfrak{l})}$ будемо позначати через $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{Z}\rangle$ або $\langle \mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{m}, \mathcal{Z}\rangle$, тобто:

$$\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{Z}\rangle = \langle \mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{m}, \mathcal{Z}\rangle = \mathfrak{U}_{\mathtt{ind}(\mathfrak{m}),\mathtt{ind}(\mathfrak{l})}.$$

Якщо відомо про яку мінливу множину $\mathcal{Z}$ йде мова, символ $\mathcal{Z}$ у зазначених вище позначеннях будемо опускати, вживаючи замість них позначення "$\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle$, $\langle \mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{m}\rangle$". Також, коли це не викликає непорозумінь, в позначеннях "$\leq_{\mathfrak{l}}$, $<_{\mathfrak{l}}$, $\geq_{\mathfrak{l}}$, $>_{\mathfrak{l}}$, $\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}$, $\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}(\mathrm{f})$, $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{l}\hat{}}{\leftarrow}}$, $\psi_{\mathfrak{l}}$" символ "$\mathfrak{l}$" також будемо опускати, застосовуючи замість них позначення "$\leq$, $<$, $\geq$, $>$, $\leftarrow$, $\leftarrow(\mathrm{f})$, $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\leftarrow}$, ψ". Крім того, для елементарно-часових станів $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ ми, як правило, використовуватимемо позначення $\omega_2 \leftarrow \omega_1$ або $\omega_2 \underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow} \omega_1$ замість позначень $\omega_2 \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\leftarrow} \omega_1$ або $\omega_2 \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}} \omega_1$ відповідно (у випадках, коли це не викликає непорозумінь).

Зауваження 1.125. Безпосередньо з означення мінливої множини (див. означення 1.124) випливає, що для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ довільної мінливої множини $\mathcal{Z}$ виконуються властивості 1.60, (з заміною символа "$\mathcal{B}$" на символ "$\mathfrak{l}$" і терміну "базова мінлива множина" на термін "система відліку").

1.12.3. Елементарні властивості мінливих множин. Використовуючи означення 1.124, а також позначення, введені у підрозділі 1.12.2, можна сформулювати наступні **базові властивості мінливих множин**:

Властивості 1.126. *У властивостях 1-9, $\mathcal{Z}$ є довільною мінливою множиною і $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ — довільні системи відліку $\mathcal{Z}$.*

1. *Множини $\mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ та $\mathcal{I}nd\,(\mathcal{Z})$ завжди є непорожніми, причому $\mathcal{I}nd\,(\mathcal{Z}) = \{\mathtt{ind}\,(\mathfrak{l}) \mid \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})\}$.*
2. *Рівність $\mathfrak{l} = \mathfrak{m}$ виконується тоді і тільки тоді, коли $\mathtt{ind}\,(\mathfrak{l}) = \mathtt{ind}\,(\mathfrak{m})$.*
3. $\mathfrak{l} = (\mathtt{ind}\,(\mathfrak{l})\,, \mathfrak{l}\hat{})$.
4. $\mathfrak{l}\hat{} = \left(\left(\left(\mathfrak{Bs}(l), \underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}\right), (\mathbf{Tm}(\mathfrak{l}), \leq_{\mathfrak{l}})\,, \psi_{\mathfrak{l}}\right), \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}}\right)$ *є базовою мінливою множиною.*
5. $\langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle\, A = \langle \mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{l}\rangle\, A = A,\ A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$.
6. *Відображення уніфікації $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\ \mathcal{Z}\rangle$ є відображенням з $2^{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})}$ в $2^{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m})}$ (для будь-яких $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$).*
7. $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle\, A = \langle \mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{m}\rangle\, A,\ A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$.
8. *Якщо $A \subseteq B\ \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$, то $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle\, A \subseteq \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle\, B$.*
9. $\langle \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{m}\rangle\, \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle\, A \subseteq \langle \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle\, A$, *де* $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$.

Надалі означення 1.124, як правило, безпосередньо застосовуватись не буде а замість нього будуть використовуватись властивості 1.126. Наступні три твердження є

безпосередніми наслідками означення 1.124 та властивостей 1.126. В цих твердженнях символ $\mathcal{Z}$ означає довільну мінливу множину.

Твердження 1.127. *Нехай, $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_2$ — довільні мінливі множини, причому:*

1. $\mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}_1) = \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}_2)$.
2. *Для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}_1) = \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}_2)$ виконується рівність:* $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{Z}_1 \rangle = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{Z}_2 \rangle$.

Тоді, $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_2$.

Доведення. Це твердження випливає з означення 1.124 та системи позначень, введеної в підрозділі 1.12.2. □

Твердження 1.128. *Для довільних $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ справедлива наступна рівність:*

$$\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \emptyset = \emptyset.$$

Доведення. Позначимо, $B := \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \emptyset \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m})$. Використовуючи властивості 1.126 (9 та 5) отримуємо, $\langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle\, B = \langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle\, \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \emptyset \subseteq \langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \emptyset = \emptyset$. Звідси, оскільки $\emptyset \subseteq B$, за властивістю 1.126(8) маємо, $\langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle\, \emptyset \subseteq \langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle\, B = \emptyset$, тобто $\langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle\, \emptyset = \emptyset$. Отже, згідно з властивостями 1.126 (5 та 9), отримуємо:

$$\emptyset = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle\, \emptyset \supseteq \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle\, \emptyset = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \emptyset = B. \qquad \square$$

Твердження 1.129. *Для довільних $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ і довільної сім'ї мінливих систем $(A_\alpha | \alpha \in \mathcal{A})$ $(A_\alpha \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\ \forall\, \alpha \in \mathcal{A})$ справедливі наступні включення:*

1) $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \left(\bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \right) \subseteq \bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A_\alpha$;

2) $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \supseteq \langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \left(\bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A_\alpha \right)$;

3) $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \left(\bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \right) \supseteq \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A_\alpha$.

Підкреслимо, що множина індексів $\mathcal{A}$ в даному твердженні є довільною, і, взагалі кажучи, не співпадає з множиною індексів у означенні 1.124.

Доведення. 1) Покладемо, $A := \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$. Враховуючи, що $A \subseteq A_\alpha$ $(\forall\, \alpha \in \mathcal{A})$ і використовуючи властивість 1.126(8) отримуємо, $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A \subseteq \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A_\alpha$ $(\alpha \in \mathcal{A})$. Таким чином, $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A \subseteq \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A_\alpha$.

2) Позначимо: $Q := \bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A_\alpha$. Тоді $Q \subseteq \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A_\alpha$ $(\forall\, \alpha \in \mathcal{A})$. Звідси, за властивостями 1.126(8,9 та 5) отримуємо, $\langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle\, Q \subseteq \langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle\, \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A_\alpha \subseteq \langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A_\alpha = A_\alpha$ $(\alpha \in \mathcal{A})$. Отже, $\langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle\, Q \subseteq \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$, що й необхідно було довести.

3) Покладемо: $A := \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$. Враховуючи, що $A_\alpha \subseteq A$ $(\forall\, \alpha \in \mathcal{A})$ і використовуючи властивість 1.126(8) отримуємо, $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A_\alpha \subseteq \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A$ $(\alpha \in \mathcal{A})$. Тому, $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A_\alpha \subseteq \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A$. □

Основні результати підрозділу 1.12 були анонсовані в роботі [67] і опубліковані в [86, розділ 3], а також представлені на конференціях [69–71, 94–98].

1.13. Приклади мінливих множин

1.13.1. Мінлива множина, породжена системами базових мінливих множин та відображень.

Приклад 1.130. Нехай індексована сім'я базових мінливих множин $\overleftarrow{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_\alpha \,|\, \alpha \in \mathcal{A})$ $(\mathcal{A} \neq \emptyset)$ є такою, що множини елементарно-часових станів $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha)$ і $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\beta)$ є рівнопотужними для довільних $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, тобто $\mathbf{card}\,(\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha)) = \mathbf{card}\,(\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\beta))$, $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$. Розглянемо довільну індексовану сім'ю бієкцій (взаємно-однозначних відображень) $\overleftarrow{W} = (W_{\alpha\beta} \,|\, \alpha, \beta \in \mathcal{A})$ виду $W_{\beta\alpha} : \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha) \leftrightarrow \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\beta)$, що задовольняє наступні умови [1.7] :

$$\left.\begin{aligned} W_{\alpha\alpha}(\omega) &= \omega, \qquad \alpha \in \mathcal{A},\ \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha)\,; \\ W_{\gamma\beta}\,(W_{\beta\alpha}(\omega)) &= W_{\gamma\alpha}(\omega), \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A},\ \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha)\,. \end{aligned}\right\} \tag{1.49}$$

Покладемо: $\mathfrak{U}_{\beta\alpha} A := W_{\beta\alpha}(A) = \{W_{\beta\alpha}(\omega) \,|\, \omega \in A\}$ $(A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha))$. Неважко перевірити, що сім'я відображень $\overleftarrow{\mathfrak{U}} = (\mathfrak{U}_{\beta\alpha} \,|\, \alpha, \beta \in \mathcal{A})$ задовольняє всі умови означення 1.124, причому третю умову цього означення можна замінити на більш сильну умову (1.46). Отже, трійка:

$$\mathcal{Z}\mathsf{pv}\left(\overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{W}\right) = \left(\mathcal{A}, \overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{\mathfrak{U}}\right)$$

є мінливою множиною. Мінливу множину $\mathcal{Z}\mathsf{pv}\left(\overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{W}\right)$ будемо називати ***чітко видимою*** мінливою множиною, породженою системою базових мінливих множин $\overleftarrow{\mathcal{B}}$ та системою відображень $\overleftarrow{W}$.

Використовуючи результати прикладу 1.130 та систему позначень, введену в підрозділі 1.12.2, отримуємо наступні властивості мінливих множин виду $\mathcal{Z}\mathsf{pv}\left(\overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{W}\right)$.

Властивості 1.131. *Нехай $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}\mathsf{pv}\left(\overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{W}\right)$ — чітко видима мінлива множина, породжена системою базових мінливих множин $\overleftarrow{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_\alpha \,|\, \alpha \in \mathcal{A})$ та системою відображень $\overleftarrow{W} = (W_{\beta\alpha} |\, \alpha, \beta \in \mathcal{A})$. Тоді:*

[1.7] Сім'ю бієкцій, що задовольняє умови (1.49), легко побудувати наступним чином. Оскільки $\mathbf{card}\,(\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha)) = \mathbf{card}\,(\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\beta))$, $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, то існує множина $\mathbf{B}_0$, яка є рівнопотужною до всіх множин сім'ї $(\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha) \,|\, \alpha \in \mathcal{A})$ (оскільки $\mathcal{A} \neq \emptyset$, можна вибрати, для прикладу, довільний (фіксований) індекс $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ і покласти $\mathbf{B}_0 := \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_{\alpha_0})$). Також візьмемо довільну сім'ю бієкцій $\overleftarrow{\mathcal{W}} = (\mathcal{W}_\alpha \,|\, \alpha \in \mathcal{A})$ виду $\mathcal{W}_\alpha : \mathbf{B}_0 \leftrightarrow \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha)$ (така сім'я обов'язково існує, оскільки $\mathbf{card}\,(\mathbf{B}_0) = \mathbf{card}\,(\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha))$, $\alpha \in \mathcal{A}$). Покладемо: $W_{\beta\alpha}\,(\omega) := \mathcal{W}_\beta\left(\mathcal{W}_\alpha^{[-1]}\,(\omega)\right)$ $(\alpha, \beta \in \mathcal{A},\ \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha))$, де $\mathcal{W}_\alpha^{[-1]}$ — бієкція, обернена до $\mathcal{W}_\alpha$. Легко перевірити, що сім'я бієкцій $(W_{\beta\alpha} |\, \alpha, \beta \in \mathcal{A})$ задовольняє умови (1.49).

1. $\mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}) = \{(\alpha, \mathcal{B}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$;
2. $\mathcal{I}nd\,(\mathcal{Z}) = \mathcal{A}$;
3. *Для довільної системи відліку* $\mathfrak{l} = (\alpha, \mathcal{B}_\alpha) \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ $(\alpha \in \mathcal{A})$ *виконуються наступні рівності:*

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha)\,;\ \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha)\,;\ \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}) = \mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathcal{B}_\alpha)\,;\ \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) = \mathbf{Tm}\,(\mathcal{B}_\alpha)\,;$$
$$\leq_{\mathfrak{l}} = \leq_{\mathcal{B}_\alpha};\ \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}} = \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_\alpha}{\leftarrow}};\ \underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow} = \underset{\mathcal{B}_\alpha}{\leftarrow}.$$

4. *Для довільних систем відліку* $\mathfrak{l} = (\alpha, \mathcal{B}_\alpha) \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$, $\mathfrak{m} = (\beta, \mathcal{B}_\beta) \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ $(\alpha, \beta \in \mathcal{A})$ *і довільної мінливої системи* $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha)$ *справедлива рівність:*

$$\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{Z} \rangle\, A = W_{\beta\alpha}(A) = \{W_{\beta\alpha}(\omega) \mid \omega \in A\}\,.$$

1.13.2. Мінливі множини, породжені мультиобразом базової мінливої множини. Для того, щоб побудувати мультиобраз базової мінливої множини необхідно ввести деякі нові означення і довести теорему про мультиобраз для мінливих множин.

Означення 1.132. Упорядковану трійку $(\mathbb{T}, \mathcal{X}, U)$ будемо називати **еволюційним проектором** для базової мінливої множини $\mathcal{B}$, якщо:

1. $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — лінійно упорядкована множина;
2. $\mathcal{X}$ — довільна множина;
3. U — є відображенням виду, $U : \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \to \mathbf{T} \times \mathcal{X}$.

Теорема 1.133 (про образ базової мінливої множини)**.** *Нехай* $(\mathbb{T}, \mathcal{X}, U)$ *— еволюційний проектор для базової мінливої множини* $\mathcal{B}$*. Тоді існує, причому єдина базова мінлива множина* $U\,[\mathcal{B}, \mathbb{T}]$*, що задовольняє такі умови:*

1. $\mathbb{T}\mathbf{m}\,(U\,[\mathcal{B}, \mathbb{T}]) = \mathbb{T}$;
2. $\mathbb{B}\mathfrak{s}(U\,[\mathcal{B}, \mathbb{T}]) = U(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})) = \{U(\omega) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})\}$;
3. *Якщо* $\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(U\,[\mathcal{B}, \mathbb{T}])$ *і* $\mathsf{tm}\,(\widetilde{\omega}_1) \neq \mathsf{tm}\,(\widetilde{\omega}_2)$*, то* $\widetilde{\omega}_1$ *і* $\widetilde{\omega}_2$ *є об'єднані долею в* $U\,[\mathcal{B}, \mathbb{T}]$ *тоді і тільки тоді, коли існують об'єднані долею в* $\mathcal{B}$ *елементарно-часові стани* $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ *такі, що* $\widetilde{\omega}_1 = U\,(\omega_1)$, $\widetilde{\omega}_2 = U\,(\omega_2)$.

Доведення. **Доведення існування.**

Нехай, $(\mathbb{T}, \mathcal{X}, U)$ — еволюційний проектор для базової мінливої множини $\mathcal{B}$ (де $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$). На множині $U(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})) = \{U(\omega) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})\} \subseteq \mathbf{T} \times X$ визначимо бінарне відношення $\Leftarrow$. А саме, для довільних $\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2 \in U(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}))$ будемо вважати, що $\widetilde{\omega}_2 \Leftarrow \widetilde{\omega}_1$ тоді і тільки тоді, коли виконується хоч одна з наступних умов:

U[B]1) $\widetilde{\omega}_1 = \widetilde{\omega}_2$;

U[B]2) $\mathsf{tm}\,(\widetilde{\omega}_1) < \mathsf{tm}\,(\widetilde{\omega}_2)$ і існують об'єднані долею в $\mathcal{B}$ елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ такі, що $\widetilde{\omega}_i = U\,(\omega_i)\ \ (i = 1, 2)$.

З умов U[B]1), U[B]2) випливає, що відношення $\lessdot\!\!-$ задовольняє умови 1,2 теореми 1.65. Отже, за теоремою 1.65, існує (і тільки одна) базова мінлива множина $\mathcal{B}_1$, яка задовольняє такі умови:

$$\mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathcal{B}_1) = \mathbb{T}; \qquad \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_1) = U(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})); \qquad \xleftarrow[\mathcal{B}_1]{\mathbb{B}\mathfrak{s}} = \lessdot\!\!- \,. \tag{1.50}$$

Покладемо, $U\,[\mathcal{B}, \mathbb{T}] := \mathcal{B}_1$. З перших двох умов (1.50) випливає, що базова мінлива множина $U\,[\mathcal{B}, \mathbb{T}]$ задовольняє умови 1,2 даної теореми. З третьої умови (1.50), з урахуванням твердження 1.74, випливає, що третя умова даної теореми для базової мінливої множини $U\,[\mathcal{B}, \mathbb{T}]$ також виконується.

Доведення єдиності. Нехай базова мінлива множина $\mathcal{B}_2$ також задовольняє умови 1,2,3 даної теореми, тобто:

1′. $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_2) = U(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}))$; **2′.** $\mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathcal{B}_2) = \mathbb{T}$;

3′. Якщо $\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_2)$ і $\mathsf{tm}\,(\widetilde{\omega}_1) \neq \mathsf{tm}\,(\widetilde{\omega}_2)$, то $\widetilde{\omega}_1$ і $\widetilde{\omega}_2$ об'єднані долею в $\mathcal{B}_2$ тоді і тільки тоді, коли існують об'єднані долею в $\mathcal{B}$ елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ такі, що $\widetilde{\omega}_1 = U\,(\omega_1)$, $\widetilde{\omega}_2 = U\,(\omega_2)$.

Тоді, з умов 1′,2′ і умов 1,2 даної теореми, випливає, що $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_2) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(U\,[\mathcal{B}, \mathbb{T}])$, $\mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathcal{B}_2) = \mathbb{T}\mathbf{m}\,(U\,[\mathcal{B}, \mathbb{T}])$. Крім того з умови 3′, з урахуванням умови 3 даної теореми, властивості 1.60(7) і твердження 1.74, отримуємо рівність $\xleftarrow[\mathcal{B}_2]{\mathbb{B}\mathfrak{s}} = \xleftarrow[U[\mathcal{B},\mathbb{T}]]{\mathbb{B}\mathfrak{s}}$. Отже, згідно з наслідком 1.68, отримуємо рівність, $\mathcal{B}_2 = U\,[\mathcal{B}, \mathbb{T}]$. □

Означення 1.134. Базову мінливу множину $U\,[\mathcal{B}, \mathbb{T}]$, що задовольняє умови 1,2,3 теореми 1.133 будемо називати **образом базової мінливої множини** $\mathcal{B}$ відносно трансформуючого відображення U і часової шкали $\mathbb{T}$.

Зауваження 1.135. З умов U[B]1), U[B]2) в доведенні теореми 1.133 випливає, що для довільних $\widetilde{\omega}_1$, $\widetilde{\omega}_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(U\,[\mathcal{B}, \mathbb{T}])$ співвідношення $\widetilde{\omega}_2 \xleftarrow[U[\mathcal{B},\mathbb{T}]]{} \widetilde{\omega}_1$ виконується тоді і тільки тоді, коли $\widetilde{\omega}_1 = \widetilde{\omega}_2$ або $\mathsf{tm}\,(\widetilde{\omega}_1) < \mathsf{tm}\,(\widetilde{\omega}_2)$ і існують об'єднані долею в $\mathcal{B}$ елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ такі, що $\widetilde{\omega}_1 = U\,(\omega_1)$, $\widetilde{\omega}_2 = U\,(\omega_2)$.

Зауваження 1.136. У випадку, коли $\mathbb{T} = \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$ замість позначення $U\,[\mathcal{B}, \mathbb{T}]$ будемо використовувати позначення $U\,[\mathcal{B}]$:

$$U\,[\mathcal{B}] := U\,[\mathcal{B}, \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})]\,.$$

Зауваження 1.137. Нехай, $\mathcal{B}$ — довільна базова мінлива множина і $\mathbb{I}_{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})} : \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \to \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ — відображення, що задається формулою: $\mathbb{I}_{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}(\omega) = \omega\ \ (\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}))$. Тоді трійка $\big(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), \mathfrak{Bs}(\mathcal{B}), \mathbb{I}_{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}\big)$, очевидно є еволюційним проектором для $\mathcal{B}$. При

цьому, якщо в умови теореми 1.133 замість $\mathbb{T}$ і $U[\mathcal{B},\mathbb{T}]$ підставити $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$ і $\mathcal{B}$ відповідно, то всі ці умови будуть задовольнятись. Отже, для тотожного на $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ відображення $\mathbb{I}_{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}$ маємо:

$$\mathbb{I}_{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}[\mathcal{B}] = \mathcal{B}.$$

Означення 1.138. 1. Еволюційний проектор $(\mathbb{T},\mathcal{X},U)$ (де $\mathbb{T}=(\mathbf{T},\leq)$) для базової мінливої множини $\mathcal{B}$ будемо називати **ін'єктивним**, якщо [1.8] відображення U є ін'єкцією з $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ в $\mathbf{T}\times\mathcal{X}$ (тобто бієкцією з $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ на множину $\mathfrak{R}(U)\subseteq\mathbf{T}\times\mathcal{X}$).

2. Довільну індексовану сім'ю ін'єктивних еволюційних проекторів для базової мінливої множини $\mathcal{B}$ виду $\mathfrak{P}=((\mathbb{T}_\alpha,\mathcal{X}_\alpha,U_\alpha)\mid\alpha\in\mathcal{A})$ (де $\mathcal{A}\neq\emptyset$) будемо називати **еволюційним мультипроектором** для $\mathcal{B}$.

Теорема 1.139 (про мультиобраз для мінливих множин)**.** *Нехай,* $\mathfrak{P}=((\mathbb{T}_\alpha,\mathcal{X}_\alpha,U_\alpha)\mid\alpha\in\mathcal{A})$ *— еволюційний мультипроектор для базової мінливої множини* $\mathcal{B}$*. Тоді існує, причому єдина, мінлива множина* $\mathcal{Z}$*, що задовольняє такі умови:*

1. $\mathcal{L}k(\mathcal{Z})=\{(\alpha,U_\alpha[\mathcal{B},\mathbb{T}_\alpha])\mid\alpha\in\mathcal{A}\}$.
2. *Для довільних систем відліку* $\mathfrak{l}=(\alpha,U_\alpha[\mathcal{B},\mathbb{T}_\alpha])\in\mathcal{L}k(\mathcal{Z})$, $\mathfrak{m}=(\beta,U_\beta[\mathcal{B},\mathbb{T}_\beta])\in\mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ *(*$\alpha,\beta\in\mathcal{A}$*) і довільної множини* $A\subseteq\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})=U_\alpha(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}))$ *справедлива наступна рівність:*
$$\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l},\mathcal{Z}\rangle A=U_\beta\left(U_\alpha^{[-1]}(A)\right)=\left\{U_\beta\left(U_\alpha^{[-1]}(\omega)\right)\mid\omega\in A\right\},$$
де $U_\alpha^{[-1]}$ *— відображення, обернене до* U_α*.*

Зауваження 1.140. Якщо мінлива множина $\mathcal{Z}$ задовольняє умову 1 теореми 1.139, то для довільної системи відліку $\mathfrak{l}=(\alpha,U_\alpha[\mathcal{B},\mathbb{T}_\alpha])\in\mathcal{L}k(\mathcal{Z})$, згідно з властивістю 1.126(3), маємо, $\mathtt{ind}(\mathfrak{l})=\alpha$, $\mathfrak{l}\hat{}=U_\alpha[\mathcal{B},\mathbb{T}_\alpha]$, а отже, $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})=\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\hat{})=\mathbb{B}\mathfrak{s}(U_\alpha[\mathcal{B},\mathbb{T}_\alpha])$. Тому, за теоремою 1.133, $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})=U_\alpha(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}))$. Таким чином, умова 2 теореми 1.139 сформульована коректно.

Доведення теореми 1.139. Нехай, $\mathfrak{P}=((\mathbb{T}_\alpha,\mathcal{X}_\alpha,U_\alpha)\mid\alpha\in\mathcal{A})$ — еволюційний мультипроектор для базової мінливої множини $\mathcal{B}$.

Згідно з означенням 1.138, для довільного $\alpha\in\mathcal{A}$ трійка $(\mathbb{T}_\alpha,\mathcal{X}_\alpha,U_\alpha)$ є ін'єктивним еволюційним проектором для $\mathcal{B}$. Згідно з теоремою 1.133 покладемо, $\mathcal{B}_\alpha:=U_\alpha[\mathcal{B},\mathbb{T}_\alpha]$ $(\alpha\in\mathcal{A})$. Оскільки $(\mathbb{T}_\alpha,\mathcal{X}_\alpha,U_\alpha)$ є ін'єктивним еволюційним проектором, то, за означенням 1.138, відображення U_α є взаємно-однозначною відповідністю між $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ та $\mathfrak{R}(U)$. Отже, існує обернене відображення $U_\alpha^{[-1]}$ (при всіх $\alpha\in\mathcal{A}$).

Для довільних елементів $\alpha,\beta\in\mathcal{A}$ і $\omega\in\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_\alpha)$ покладемо:

$$W_{\beta\alpha}(\omega):=U_\beta\left(U_\alpha^{[-1]}(\omega)\right)\tag{1.51}$$

[1.8] В деяких попередніх роботах використовувався термін "***бієктивний*** еволюційний проектор" замість "ін'єктивний...".

(зауважимо, що, за теоремою 1.133, виконується рівність $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right) = U_\alpha\left(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})\right)$). Отже, $W_{\beta\alpha}$ є відображенням з $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right)$ в $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\beta\right) = U_\beta\left(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})\right)$.

Легко перевірити, що сім'я відображень $\overleftarrow{W} = (W_{\beta\alpha} |\, \alpha, \beta \in \mathcal{A})$ задовольняє умови (1.49). Отже, використовуючи результати підрозділу 1.13.1, можна покласти:

$$\mathcal{Z} := \mathcal{Z}\mathsf{pv}\left(\overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{W}\right), \quad \text{де} \quad \overleftarrow{\mathcal{B}} = \left(\mathcal{B}_\alpha \,|\, \alpha \in \mathcal{A}\right). \tag{1.52}$$

Звідси, використовуючи властивість 1.131(1), отримуємо:

$$\mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right) = \left\{(\alpha, \mathcal{B}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\right\} = \left\{(\alpha, U_\alpha\left[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha\right]) \mid \alpha \in \mathcal{A}\right\}, \tag{1.53}$$

крім того, згідно з властивістю 1.131(4), для довільних систем відліку $\mathfrak{l} = (\alpha, U_\alpha\left[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha\right]) \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right)$, $\mathfrak{m} = (\beta, U_\beta\left[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\beta\right]) \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right)$ (де $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$) і для довільної множини $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(U_\alpha\left[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha\right]\right) = U_\alpha(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}))$, маємо:

$$\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathcal{Z}\rangle\, A = W_{\beta\alpha}(A) = U_\beta\left(U_\alpha^{[-1]}(A)\right). \tag{1.54}$$

Із співвідношень (1.53) та (1.54) випливає, що мінлива множина $\mathcal{Z}$ задовольняє умови $1, 2$ теореми 1.139.

Припустимо, що мінлива множина $\mathcal{Z}_1$ також задовольняє умови $1, 2$ теореми 1.139. Тоді, згідно з умовою 1, маємо рівність $\mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right) = \mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}_1\right)$. Далі, використовуючи умову 2, для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right) = \mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}_1\right)$ отримуємо рівність, $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{Z}\rangle = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{Z}_1\rangle$. Отже, згідно з твердженням 1.127, маємо рівність $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1$. Таким чином, мінлива множина $\mathcal{Z}$, що задовольняє умови $1, 2$ теореми 1.139 є єдиною. □

Означення 1.141. Нехай, $\mathfrak{P} = \left((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\right)$ — еволюційний мультипроектор для базової мінливої множини $\mathcal{B}$. Мінливу множину $\mathcal{Z}$, що задовольняє умови $1, 2$ теореми 1.139 будемо називати **еволюційним мультиобразом** базової мінливої множини $\mathcal{B}$ відносно еволюційного мультипроектора $\mathfrak{P}$, і будемо позначати її через $\mathcal{Z}\mathsf{im}\left[\mathfrak{P}, \mathcal{B}\right]$:

$$\mathcal{Z}\mathsf{im}\left[\mathfrak{P}, \mathcal{B}\right] := \mathcal{Z}.$$

Зауваження 1.142. З рівності (1.52) (в доведенні теореми 1.139) випливає, що довільну мінливу множину виду $\mathcal{Z}\mathsf{im}\left[\mathfrak{P}, \mathcal{B}\right]$ (де $\mathfrak{P} = \left((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\right)$) можна представити у вигляді:

$$\mathcal{Z}\mathsf{im}\left[\mathfrak{P}, \mathcal{B}\right] = \mathcal{Z}\mathsf{pv}\left(\overleftarrow{\mathcal{B}}_{\mathfrak{P}}, \overleftarrow{W}_{\mathfrak{P}}\right), \qquad \text{де} \tag{1.55}$$

$$\overleftarrow{\mathcal{B}}_{\mathfrak{P}} = \left(\mathcal{B}_\alpha^{(\mathfrak{P})} \mid \alpha \in \mathcal{A}\right); \quad \overleftarrow{W}_{\mathfrak{P}} = \left(W_{\beta\alpha}^{(\mathfrak{P})} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{A}\right), \quad \text{і}$$

$$\mathcal{B}_\alpha^{(\mathfrak{P})} = U_\alpha\left[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha\right] \quad (\alpha \in \mathcal{A}); W_{\beta\alpha}^{(\mathfrak{P})}(\omega) = U_\beta\left(U_\alpha^{[-1]}(\omega)\right) \quad (\alpha, \beta \in \mathcal{A})$$

Означення 1.143. Нехай $\mathcal{Z}$ — довільна мінлива множина і $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ — будь-яка система відліку $\mathcal{Z}$. Будемо говорити, що елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ є ***об'єднані долею*** в системі відліку $\mathfrak{l}$ якщо вони є об'єднані долею в базовій мінливій множині $\mathfrak{l}\hat{}$.

З твердження 1.74 випливає наступний наслідок:

Наслідок 1.144. *Нехай $\mathcal{Z}$ — довільна мінлива множина. Для того, щоб елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ були об'єднані долею системі відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась хоч одна з умов:*

$$\omega_2 \leftarrow \omega_1 \quad \textit{або} \quad \omega_1 \leftarrow \omega_2.$$

Безпосередньо з теорем 1.139 та 1.133, беручи до уваги властивість 1.60(9), властивість 1.126(1) та зауваження 1.125, отримуємо такі властивості еволюційного мультиобраза базової мінливої множини.

Властивості 1.145. *Нехай $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$, де $\mathbb{T}_\alpha = (\mathbf{T}_\alpha, \leq_\alpha)$ $(\alpha \in \mathcal{A})$ — еволюційний мультипроектор для баз. мінл. множини $\mathcal{B}$ і $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}\mathsf{im}\,[\mathfrak{P}, \mathcal{B}]$. Тоді:*

1. $\mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}) = \{(\alpha, U_\alpha\,[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$.
2. $\mathcal{I}nd\,(\mathcal{Z}) = \mathcal{A}$.
3. *Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} = (\alpha, U_\alpha\,[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha])$ справедливі такі рівності:*

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = U_\alpha\,(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})) = \{U_\alpha(\omega) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})\}\,;$$

$$\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = \{\mathsf{bs}\,(U_\alpha(\omega)) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})\}\,; \quad \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}) = \mathbb{T}_\alpha; \quad \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) = \mathbf{T}_\alpha; \quad \leq_{\mathfrak{l}} = \leq_\alpha .$$

4. *Нехай, $\mathfrak{l} = (\alpha, U_\alpha\,[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$, де $\alpha \in \mathcal{A}$. Якщо $\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ і $\mathsf{tm}\,(\widetilde{\omega}_1) \neq \mathsf{tm}\,(\widetilde{\omega}_2)$, то $\widetilde{\omega}_1$ і $\widetilde{\omega}_2$ є об'єднані долею в $\mathfrak{l}$ тоді і тільки тоді, коли існують об'єднані долею в $\mathcal{B}$ елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ такі, що $\widetilde{\omega}_1 = U_\alpha\,(\omega_1)$, $\widetilde{\omega}_2 = U_\alpha\,(\omega_2)$.*

Приклад 1.146. Нехай, $\mathcal{B}$ — довільна базова мінлива множина, X — довільна множина, що містить $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ $(\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \subseteq X)$. Множина бієкцій $\mathbb{U}$, заданих на $\mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times X$:

$$U : \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times X \to \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times X \qquad (U \in \mathbb{U})$$

називається ***трансформуючою множиною бієкцій*** відносно базової мінливої множини $\mathcal{B}$ на X.

Нехай, $\mathbb{U}$ — трансформуюча множина бієкцій відносно $\mathcal{B}$ на X. Тоді, за означенням 1.132, кожне відображення $U \in \mathbb{U}$ породжує еволюційний проектор, $\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), X, U_{\restriction \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}\right)$, де $U_{\restriction \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}$ — звуження відображення U на множину $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times X$ (надалі, коли не виникає непорозумінь, будемо відображення $U_{\restriction \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}$ ототожнювати з відображенням U при такому ототожнення можна вважати, що $\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), X, U_{\restriction \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}\right) = (\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), X, U)$). Отже, індексована сім'я:

$$\mathfrak{P}_{\mathcal{B}}\,[\mathbb{U}] = ((\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), X, U) \mid U \in \mathbb{U})$$

є еволюційним мультипроектором для $\mathcal{B}$. У цьому частинному випадку отримуємо мінливу множину:

$$\mathcal{Z}\mathsf{im}\,(\mathbb{U},\mathcal{B}) = \mathcal{Z}\mathsf{im}\,[\mathfrak{P}_{\mathcal{B}}\,[\mathbb{U}]\,,\mathcal{B}]\,. \tag{1.56}$$

Означення 1.147. Мінливу множину $\mathcal{Z}\mathsf{im}\,(\mathbb{U},\mathcal{B})$ будемо називати ***багатоликим образом*** базової мінливої множини $\mathcal{B}$ відносно трансформуючої множини бієкцій $\mathbb{U}$.

Приклад 1.148. Нехай, $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина така, що

$$\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{R}^3, \quad \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = \mathbb{R}_{ord} = (\mathbb{R},\leq)\,,$$

де $\leq$ — стандартне відношення лінійного порядку на полі дійсних чисел. Така базова мінлива множина $\mathcal{B}$ обов'язково існує, оскільки, наприклад, можна покласти, $\mathcal{B} := \mathcal{A}t\,(\mathbb{R}_{ord},\mathcal{R})$, де $\mathcal{R}$ — система абстрактних траєкторій з $\mathbb{R}_{ord}$ в деяку підмножину $M \subseteq \mathbb{R}^3$. Розглянемо групу Пуанкаре $\mathbb{U} = P(1,3,c)$, визначену на 4-мірному просторі часу $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \supseteq \mathbf{Tm}(\mathcal{B})\times\mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$, тобто групу афінних перетворень (лінійного) простору $\mathbb{R}^4$, що задовольняють такі умови:

1. Будь-яке перетворення $\boldsymbol{P} \in P(1,3,c)$ залишає незмінним значення псевдометрики Лоренца-Мінковського на $\mathbb{R}^4$:

   $$\mathsf{M}_c\,(\boldsymbol{P}\mathrm{w}_1 - \boldsymbol{P}\mathrm{w}_2) = \mathsf{M}_c\,(\mathrm{w}_1 - \mathrm{w}_2)\,, \quad (\forall\,\mathrm{w}_1,\mathrm{w}_2 \in \mathbb{R}^4), \quad \text{де;}$$
   $$\mathsf{M}_c\,(\mathrm{w}) = \sum\nolimits_{j=1}^{3} w_i^2 - c^2 w_0^2 \quad \big(\mathrm{w} = (w_0,w_1,w_2,w_3) \in \mathbb{R}^4\big)$$

   Тут число c є фіксованою додатною дійсною константою, яка має фізичний зміст швидкості світла в вакуумі.

2. Будь-яке перетворення $\boldsymbol{P} \in P(1,3,c)$ має додатний напрямок часу, тобто $\boldsymbol{P}\mathrm{w}_2 - \boldsymbol{P}\mathrm{w}_1 \in \mathcal{M}_{c,+}\,(\mathbb{R}^3)$ для довільних векторів $\mathrm{w}_1,\mathrm{w}_2 \in \mathbb{R}^4$ таких, що $\mathrm{w}_2 - \mathrm{w}_1 \in \mathcal{M}_{c,+}\,(\mathbb{R}^3)$, де $\mathcal{M}_{c,+}\,(\mathbb{R}^3) = \Big\{\mathrm{w} = (w_0,w_1,w_2,w_3) \in \mathbb{R}^4 \mid w_0 > 0,\ \mathsf{M}_c\,(\mathrm{w}) < 0\Big\}$ (див. [99]).

Група Пуанкаре $\mathbb{U} = P(1,3,c)$ є трансформуючою множиною бієкцій відносно базової мінливої множини $\mathcal{B}$ на $\mathbb{R}^3$. Отже, отримуємо мінливу множину $\mathcal{Z}\mathsf{im}\,(P(1,3),\mathcal{B})$, яка являє собою математично строгу модель кінематики спеціальної теорії відносності в інерційних системах відліку. Зауважимо, що дана модель формально не забороняє існування тахіонних трансформацій, оскільки, наприклад, можуть існувати елементарно-часові стани $\omega_1,\omega_2 \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ такі, що $\omega_2 \leftarrow \omega_1$ і $\mathsf{M}_c\,(\omega_1 - \omega_2) > 0$.

1.13.3. Інші приклади мінливих множин. У всіх попередніх прикладах відображення уніфікації $\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle$ між системами відліку $\mathfrak{l},\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ мінливої множини $\mathcal{Z}$ задаються з допомогою бієкцій (взаємно-однозначних відображень) між множинами елементарно-часових станів $\mathbb{Bs}(\mathfrak{l})$ і $\mathbb{Bs}(\mathfrak{m})$ (тобто для довільної мінливої системи $A \subseteq \mathbb{Bs}(\mathfrak{l})$ відображення уніфікації $\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle\,A$ можна подати у вигляді:

$$\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A = \bigcup_{\omega \in A} \{\mathcal{W}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}(\omega)\}\,,$$

де відображення $\mathcal{W}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}} : \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) \to \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m})$ є бієкцією між $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ та $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m})$). У всіх вищенаведених прикладах третю умову означення 1.124 можна замінити на більш сильну умову (1.46). Але, насправді, умови означення 1.124 дуже загальні. Останню думку буде проілюстровано в наступних прикладах.

Приклад 1.149. Нехай $\overleftarrow{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_\alpha \,|\, \alpha \in \mathcal{A})$ — довільна індексована сім'я базових мінливих множин. Покладемо:

$$\mathfrak{U}_{\beta\alpha} A := \begin{cases} A, & \alpha = \beta \\ \emptyset, & \alpha \neq \beta \end{cases}, \qquad \alpha, \beta \in \mathcal{A},\ A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right).$$

Легко перевірити, що сім'я відображень $\overleftarrow{\mathfrak{U}} = (\mathfrak{U}_{\beta\alpha} \,|\, \alpha, \beta \in \mathcal{A})$ задовольняє всі умови означення 1.124. Тому, трійка:

$$\mathcal{Z}\mathsf{nv}\left(\overleftarrow{\mathcal{B}}\right) = \left(\mathcal{A}, \overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{\mathfrak{U}}\right)$$

є мінливою множиною.

Мінливу множину $\mathcal{Z}\mathsf{nv}\left(\overleftarrow{\mathcal{B}}\right)$ будемо називати ***повністю невидимою мінливою множиною***, породженою системою базових мінливих множин $\overleftarrow{\mathcal{B}}$.

Зауважимо, що будь-яку базову мінливу множину $\mathcal{B}$ можна ототожнити з мінливою множиною виду $\mathcal{Z}\mathsf{nv}\left(\overleftarrow{\mathcal{B}}\right)$, де $\mathcal{A} = \{1\}$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$ і $\overleftarrow{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_\alpha \,|\, \alpha \in \mathcal{A}) = (\mathcal{B}_1)$.

Приклад 1.150. Нехай, $\overleftarrow{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ ($\mathcal{A} = \{1, 2\}$) сім'я з двох базових мінливих множин. Розглянемо довільний елементарно-часовий стан $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_2\right)$. (Відповідно до властивості 1.60(2), маємо, $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_2\right) \neq \emptyset$. Отже, хоч один елементарно-часовий стан $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_2\right)$ обов'язково існує.) Покладемо:

$$\mathfrak{U}_{21} A := \begin{cases} \emptyset, & A \neq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right) \\ \{\omega\}, & A = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right) \end{cases}; \quad \mathfrak{U}_{12} B := \begin{cases} \emptyset, & \omega \notin B \\ \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right), & \omega \in B \end{cases};$$

$$\mathfrak{U}_{11} A := A; \qquad \mathfrak{U}_{22} B := B \qquad\qquad \left(A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right),\ B \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_2\right)\right).$$

1. Оскільки $\mathfrak{U}_{11}, \mathfrak{U}_{22}$ є тотожними відображеннями множин, то перша умова означення 1.124 виконується тривіальним чином. Також по цій же причині тривіальним чином виконуються друга умова цього означення у випадку $\alpha = \beta$.

2. Нехай $\alpha, \beta \in \mathcal{A} = \{1, 2\}$, $A, B \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right)$, $A \subseteq B$. Згідно із зауваженням зробленим в першому пункті, досить розглянути випадок $\alpha \neq \beta$. Отже, отримуємо наступні два підвипадки.

2.a) $\alpha = 1$, $\beta = 2$. У випадку $A \neq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right)$ маємо $\mathfrak{U}_{\beta\alpha} A = \mathfrak{U}_{21} A = \emptyset \subseteq \mathfrak{U}_{\beta\alpha} B$, а у випадку $A = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right)$, оскільки $A \subseteq B$, маємо $B = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right)$, а отже $\mathfrak{U}_{\beta\alpha} A = \mathfrak{U}_{\beta\alpha} B$.

2.б) $\alpha = 2$, $\beta = 1$. У випадку $\omega \notin A$ маємо $\mathfrak{U}_{\beta\alpha}A = \mathfrak{U}_{12}A = \emptyset \subseteq \mathfrak{U}_{\beta\alpha}B$. У випадку $\omega \in A$ з умови $A \subseteq B$ випливає, що $\omega \in B$, тому $\mathfrak{U}_{\beta\alpha}A = \mathfrak{U}_{12}A = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right) = \mathfrak{U}_{12}B = \mathfrak{U}_{\beta\alpha}B$.

3. Нехай $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A} = \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right)$. Розглянемо наступні випадки.

3.а) $\alpha = \beta$. У цьому випадку $\mathfrak{U}_{\beta\alpha}A = A$. Тому:

$$\mathfrak{U}_{\gamma\beta}\mathfrak{U}_{\beta\alpha}A = \mathfrak{U}_{\gamma\beta}A = \mathfrak{U}_{\gamma\alpha}A.$$

3.б) $\beta = \gamma$. У цьому випадку $\mathfrak{U}_{\gamma\beta}S = S$, $S \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\beta\right)$. Тому:

$$\mathfrak{U}_{\gamma\beta}\mathfrak{U}_{\beta\alpha}A = \mathfrak{U}_{\beta\alpha}A = \mathfrak{U}_{\gamma\alpha}A.$$

3.в) $\alpha \neq \beta \neq \gamma$. В цьому випадку, оскільки множина $\mathcal{A}$ — двохелементна, $\alpha = \gamma$. Тому можливими є лише наступні два випадки:

3.в.1) Нехай $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$. Тоді випадку $A \neq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right)$ отримуємо:

$$\mathfrak{U}_{\gamma\beta}\mathfrak{U}_{\beta\alpha}A = \mathfrak{U}_{12}\mathfrak{U}_{21}A = \mathfrak{U}_{12}\emptyset = \emptyset \subseteq \mathfrak{U}_{\gamma\alpha}A,$$

а у випадку $A = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right)$ маємо:

$$\mathfrak{U}_{\gamma\beta}\mathfrak{U}_{\beta\alpha}A = \mathfrak{U}_{12}\mathfrak{U}_{21}A = \mathfrak{U}_{12}\{\omega\} = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right) = A = \mathfrak{U}_{\gamma\alpha}A.$$

3.в.2) Нехай, $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$. Тоді випадку $\omega \notin A$ отримуємо:

$$\mathfrak{U}_{\gamma\beta}\mathfrak{U}_{\beta\alpha}A = \mathfrak{U}_{21}\mathfrak{U}_{12}A = \mathfrak{U}_{21}\emptyset = \emptyset \subseteq \mathfrak{U}_{\gamma\alpha}A,$$

а у випадку $\omega \in A$ дістаємо:

$$\mathfrak{U}_{\gamma\beta}\mathfrak{U}_{\beta\alpha}A = \mathfrak{U}_{21}\mathfrak{U}_{12}A = \mathfrak{U}_{21}\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right) = \{\omega\} \subseteq A = \mathfrak{U}_{\gamma\alpha}A.$$

Отже, трійка:

$$\mathcal{Z}_1 = \left(\mathcal{A}, \overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{\mathfrak{U}}\right),$$

де $\overleftarrow{\mathfrak{U}} = \left(\mathfrak{U}_{\beta\alpha} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{A}\right)$ є мінливою множиною.

Приклад 1.151. Нехай $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, ω такі ж самі, як і у прикладі 1.150. $\mathfrak{U}_{11}$ і $\mathfrak{U}_{22}$, так само, як і в прикладі 1.150, визначимо як тотожні відображення. Також покладемо:

$$\mathfrak{U}_{21}A := \begin{cases} \emptyset, & A = \emptyset \\ \{\omega\}, & A \neq \emptyset \end{cases} \quad \left(A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_1\right)\right); \qquad \mathfrak{U}_{12}A := \emptyset \quad \left(A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_2\right)\right).$$

Аналогічно до попереднього прикладу неважко перевірити, що трійка:

$$\mathcal{Z}_2 = \left(\mathcal{A}, \overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{\mathfrak{U}}\right),$$

де $\mathcal{A} = \{1, 2\}$, $\overleftarrow{\mathcal{B}} = \left(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\right)$, $\overleftarrow{\mathfrak{U}} = \left(\mathfrak{U}_{\beta\alpha} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{A}\right)$ є мінливою множиною.

Основні результати підрозділу 1.13 були опубліковані в [86, підрозділ 3.4]. Теорема 1.139 (в її теперішньому формулювання) опублікована в [100].

1.14. Видимість у мінливих множинах

1.14.1. Градації видимості.

Означення 1.152. Нехай, $\mathcal{Z}$ — довільна мінлива множина і $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ — довільні системи відліку $\mathcal{Z}$. Будемо говорити, що мінлива система $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ є:

1. **видимою** (частково видимою) з системи відліку $\mathfrak{m}$, якщо $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A \neq \emptyset$;
2. **нормально видимою** з системи відліку $\mathfrak{m}$, якщо $A \neq \emptyset$ і будь-яка непорожня підсистема $B \subseteq A$ мінливої системи A є видимою з $\mathfrak{m}$ (тобто якщо $A \neq \emptyset$ і $\forall\, B : \emptyset \neq B \subseteq A\ \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, B \neq \emptyset$);
3. **чітко видимою** з $\mathfrak{m}$ якщо: **(a)** A є нормально видимою з $\mathfrak{m}$; **(b)** для довільної сім'ї $\{A_\alpha \,|\, \alpha \in \mathcal{A}\} \subseteq 2^A$ мінливих підсистем A такої, що $\bigsqcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha = A$ має місце рівність: $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A = \bigsqcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A_\alpha$, де знак $\bigsqcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$ означає диз'юнктне об'єднання сім'ї множин $\{A_\alpha \,|\, \alpha \in \mathcal{A}\}$, тобто таке об'єднання $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$, при якому $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ при $\alpha \neq \beta$.
4. **невидимою** з системи відліку $\mathfrak{m}$, якщо $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A = \emptyset$;

Зауваження 1.153. Очевидно, що з чіткої видимості довільної мінливої системи $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ ($\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$) з системи відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ випливає її нормальна видимість з $\mathfrak{m}$, а з нормальної видимості довільної мінливої системи $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ з $\mathfrak{m}$ випливає її видимість (часткова видимість) з $\mathfrak{m}$.

Твердження 1.154. *Для довільної мінливої множини $\mathcal{Z}$ мають місце наступні властивості видимості мінливих систем.*

1. *Порожня мінлива система $\emptyset \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ завжди є невидимою з будь-якої системи відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$.*
2. *Довільна непорожня мінлива система $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$, $A \neq \emptyset$ завжди є чітко видимою з власної системи відліку $\mathfrak{l}$.*
3. *Якщо мінлива система $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ (де $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$) містить підсистему $B \subseteq A$, видиму з системи відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$, то сама мінлива система A також є видимою з $\mathfrak{m}$.*
4. *Якщо мінлива система $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ є нормально видимою (чітко видимою) з системи відліку $\mathfrak{m}$, то будь-яка непорожня підсистема $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$ мінливої системи A також є нормально видимою (чітко видимою) з $\mathfrak{m}$ відповідно.*

Доведення. Пункти 1,2,3 даного твердження випливають з твердження 1.128 та властивостей 1.126 мінливих множин. Пункт 4 для випадку нормальної видимості є тривіальним. Отже, залишилось довести пункт 4 для випадку чіткої видимості. Нехай мінлива система $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ є чітко видимою з системи відліку $\mathfrak{m}$. Розглянемо довільну мінливу систему B таку, що $\emptyset \neq B \subseteq A$. Оскільки з чіткої видимості випливає нормальна видимість, то B буде нормально видимою з $\mathfrak{m}$. Припустимо, що

$B = \bigsqcup_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha$. Використовуючи рівності, $A = B \sqcup (A \setminus B)$, $A = \bigsqcup_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha \sqcup (A \setminus B)$ і враховуючи чітку видимість множини A з $\mathfrak{m}$, отримуємо:

$$\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, B \sqcup \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, (A \setminus B)\,;$$

$$\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A = \bigsqcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, B_\alpha \sqcup \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, (A \setminus B)\,.$$

Отже, $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, B \sqcup \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, (A \setminus B) = \bigsqcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, B_\alpha \sqcup \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, (A \setminus B)$. Звідси, $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, B = \bigsqcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, B_\alpha$. Тому, B є чітко видимою з $\mathfrak{m}$. □

Означення 1.155. Будемо говорити, що система відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ є:

1. **видимою** (частково видимою) з системи відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ (позначення: $\mathfrak{l} \succ \mathfrak{m}\,(\mathcal{Z})$), якщо існує хоч одна мінлива система $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ видима з $\mathfrak{m}$ (тобто якщо $\exists\, A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\ \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A \neq \emptyset$).
2. **нормально видимою** з системи відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ (позначення: $\mathfrak{l} \succ!\ \mathfrak{m}\,(\mathcal{Z})$), якщо будь-яка непорожня мінлива система $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ $(A \neq \emptyset)$ є нормально видимою з $\mathfrak{m}$.
3. **чітко видимою** з $\mathfrak{m}$ (позначення: $\mathfrak{l} \succ!!\ \mathfrak{m}\,(\mathcal{Z})$), якщо будь-яка непорожня мінлива система $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ $(A \neq \emptyset)$ є чітко видимою з системи відліку $\mathfrak{m}$.
4. **невидимою** з системи відліку $\mathfrak{m}$, якщо будь-яка мінлива система $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ є невидимою з $\mathfrak{m}$.

У випадку, коли наперед відомо про яку мінливу множину $\mathcal{Z}$ йде мова, у позначеннях $\mathfrak{l} \succ \mathfrak{m}\,(\mathcal{Z})$, $\mathfrak{l} \succ!\ \mathfrak{m}\,(\mathcal{Z})$, $\mathfrak{l} \succ!!\ \mathfrak{m}\,(\mathcal{Z})$ послідовність символів "$(\mathcal{Z})$" будемо опускати, вживаючи замість них позначення $\mathfrak{l} \succ \mathfrak{m}$, $\mathfrak{l} \succ!\ \mathfrak{m}$, $\mathfrak{l} \succ!!\ \mathfrak{m}$ відповідно.

Зауваження 1.156. Нехай, $\mathcal{Z}$ — довільна мінлива множина. Із зауваження 1.153 випливає, що для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ справедливі наступні твердження:

- якщо $\mathfrak{l} \succ!!\ \mathfrak{m}$, то $\mathfrak{l} \succ!\ \mathfrak{m}$;
- якщо $\mathfrak{l} \succ!\ \mathfrak{m}$, то $\mathfrak{l} \succ \mathfrak{m}$.

Таким чином, з чіткої видимості випливає нормальна видимість, а з нормальної видимості — видимість (часткова видимість). Приклад 1.150 показує, що з видимості не випливає нормальна видимість. Справді, розглянемо випадок, коли в цьому прикладі множина $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_1)$ містить не менше двох елементів ($\mathbf{card}\,(\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_1)) \geq 2$). В цьому випадку для систем відліку $\mathfrak{l}_1 = (1, \mathcal{B}_1)$, $\mathfrak{l}_2 = (2, \mathcal{B}_2)$ мінлива система $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l}_1) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_1)$ є видимою з $\mathfrak{l}_2$, проте не є нормально видимою з $\mathfrak{l}_2$, оскільки довільна підмножина $A \subset \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l}_1) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_1)$ $(A \neq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_1))$ є невидимою з $\mathfrak{l}_2$. Таким чином, у випадку $\mathbf{card}\,(\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_1)) \geq 2$ маємо $\mathfrak{l}_1 \succ \mathfrak{l}_2$, проте співвідношення $\mathfrak{l}_1 \succ!\ \mathfrak{l}_2$ **не виконується**.

Приклад 1.151 показує, що з нормальної видимості не випливає чітка видимість. У цьому прикладі будь-яка непорожня мінлива система $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l}_1)$ $(\mathfrak{l}_1 = (1, \mathcal{B}_1))$

є видимою, а отже (в силу довільності A) і нормально видимою з системи відліку $\mathfrak{l}_2 = (2, \mathcal{B}_2)$. Проте, у випадку $\mathbf{card}\,(A) \geq 2$ мінлива система A не є чітко видимою з $\mathfrak{l}_2$, оскільки в цьому випадку у множині A існують непорожні підмножини $A_1, A_2 \subseteq A$ такі, що $A_1 \sqcup A_2 = A$, але образи цих множин в l_2 ($\langle \mathfrak{l}_2 \leftarrow \mathfrak{l}_1 \rangle\, A_1 = \mathfrak{U}_{21} A_1 = \{\omega\}$, $\langle \mathfrak{l}_2 \leftarrow \mathfrak{l}_1 \rangle\, A_2 = \mathfrak{U}_{21} A_2 = \{\omega\}$) не є диз'юнктними. Тому, у випадку $\mathbf{card}\,(\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_1)) \geq 2$ виконується умова $\mathfrak{l}_1 \succ! \mathfrak{l}_2$, проте умова $\mathfrak{l}_1 \succ!! \mathfrak{l}_2$ **не виконується**.

Далі буде доведено, що в прикладах 1.130, 1.146 та 1.148 довільна система відліку мінливих множин типу $\mathcal{Z}\mathsf{pv}\left(\overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{W}\right)$ та $\mathcal{Z}\mathsf{im}\,(\mathbb{U}, \mathcal{B})$ є чітко видимою з будь-якої іншої системи відліку (див. твердження 1.164 та 1.165 далі).

Наступні три твердження є безпосередніми наслідками означень 1.155, 1.152 та твердження 1.154.

Твердження 1.157. *Для довільної мінливої множини $\mathcal{Z}$ наступні твердження еквівалентні:*

(Vi1) *Система відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ є видимою з системи відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ $(\mathfrak{l} \succ \mathfrak{m})$.*

(Vi2) *Множина $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ всіх елементарно-часових станів $\mathfrak{l}$ є видимою з $\mathfrak{m}$.*

Твердження 1.158. *Для довільної мінливої множини $\mathcal{Z}$ наступні твердження еквівалентні:*

(nVi1) *Система відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ є нормально видимою з системи відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ $(\mathfrak{l} \succ! \mathfrak{m})$.*

(nVi2) *Множина $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ є нормально видимою з $\mathfrak{m}$.*

(nVi3) *Будь-яка непорожня мінлива система $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ є видимою з системи відліку $\mathfrak{m}$ $(\forall \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\ (A \neq \emptyset \Rightarrow \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A \neq \emptyset))$.*

Твердження 1.159. *Нехай $\mathcal{Z}$ — довільна мінлива множина. Тоді:*

1. Довільна система відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ є чітко видимою з самої себе (тобто $\forall\, \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})\ (\mathfrak{l} \succ!! \mathfrak{l})$).

2. Наступні твердження рівносильні:

(pVi1) *Система відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ є чітко видимою з системи відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ $(\mathfrak{l} \succ!! \mathfrak{m})$.*

(pVi2) *Множина $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ $\mathfrak{l}$ є чітко видимою з $\mathfrak{m}$.*

Твердження 1.160. *Для довільної мінливої множини $\mathcal{Z}$ бінарне відношення $\succ!$ є відношенням квазіпорядку*[1.9] *на множині $\mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ всіх систем відліку $\mathcal{Z}$.*

[1.9] Про відношення квазіпорядку див. зноску 1.2.

Доведення. Рефлексивність бінарного відношення $\succ!$ випливає з першого пункту твердження 1.159 та зауваження 1.156. Отже, потребує доведення лише транзитивність відношення $\succ!$.

Нехай $\mathfrak{l} \succ! \mathfrak{m}$ і $\mathfrak{m} \succ! \mathfrak{p}$, де $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$. Тоді, використовуючи твердження 1.158 (еквівалентність між пунктами (nVi1) та (nVi3)), для довільної непорожньої мінливої системи $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ отримуємо, $\langle \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A \supseteq \langle \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A \neq \emptyset$, отже, згідно з твердженням 1.158, маємо $\mathfrak{l} \succ! \mathfrak{p}$. □

Зауваження 1.161. З першого пункту твердження 1.159 враховуючи зауваження 1.156 випливає рефлексивність відношень $\succ!!$ та $\succ$ на множині $\mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ (для довільної мінливої множини $\mathcal{Z}$). Проте, ці відношення, взагалі кажучи, не є транзитивними. Це буде доведено за допомогою наступних прикладів.

Приклад 1.162. Нехай $\mathcal{B}$ — довільна базова мінлива множина. Розглянемо індексовану сім'ю базових мінливих множин $\overleftarrow{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N})$, визначену наступним чином:

$$\mathcal{B}_\alpha := \mathcal{B}, \qquad \alpha \in \mathbb{N}.$$

Визначимо відображення $\mathfrak{U}_{\beta\alpha} : 2^{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_\alpha)} \to 2^{\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\beta\right)}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{N})$ наступною формулою:

$$\mathfrak{U}_{\beta\alpha} A := \begin{cases} A, & \beta \in \{\alpha, \alpha+1\}\,; \\ \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}), & \beta > \alpha+1,\ A \neq \emptyset; \\ \emptyset, & \beta > \alpha+1,\ A = \emptyset; \\ \emptyset, & \beta < \alpha, \end{cases} \qquad (A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha) = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}),\ n \in \mathbb{N}) \tag{1.57}$$

(тут знаки $<, >$ означають звичний порядок на множині натуральних чисел).

Доведемо, що система відображень $\overleftarrow{\mathfrak{U}} = (\mathfrak{U}_{\beta\alpha} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N})$ є уніфікацією сприймання. Перші дві умови означення 1.124 для системи відображень $\overleftarrow{\mathfrak{U}}$ виконуються тривіальним чином. Перевіримо третю умову. Нехай, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$ і $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha) = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$. Тоді у випадку $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, згідно з (1.57), отримаємо:

$$\mathfrak{U}_{\gamma\beta}\mathfrak{U}_{\beta\alpha} A = \begin{cases} \emptyset, & A = \emptyset; \\ A, & A \neq \emptyset,\ \beta \in \{\alpha, \alpha+1\}\,,\ \gamma \in \{\beta, \beta+1\}\,; \\ \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}), & A \neq \emptyset,\ \text{і}\ (\beta > \alpha+1\ \text{або}\ \gamma > \beta+1). \end{cases} \tag{1.58}$$

Оскільки при $\alpha \leq \gamma$ множина $\mathfrak{U}_{\gamma\alpha} A$ завжди збігається з A або $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ (тобто $\mathfrak{U}_{\gamma\alpha} A \in \{A, \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})\}$), то у перших двох випадках формули (1.58) включення $\mathfrak{U}_{\gamma\beta}\mathfrak{U}_{\beta\alpha} A \subseteq \mathfrak{U}_{\gamma\alpha} A$ має місце. В третьому випадку формули (1.58) маємо $\gamma > \alpha+1$, отже, $\mathfrak{U}_{\gamma\alpha} A = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$. Тому, в цьому випадку останнє включення також має місце. Якщо ж умова $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ порушується, тобто $\alpha > \beta$ або $\beta > \gamma$, то, за формулою (1.57), $\mathfrak{U}_{\gamma\beta}\mathfrak{U}_{\beta\alpha} A = \emptyset$. Отже

в цьому випадку включення $\mathfrak{U}_{\gamma\beta}\mathfrak{U}_{\beta\alpha}A \subseteq \mathfrak{U}_{\gamma\alpha}A$ також виконується. Таким чином, всі три умови означення 1.124 виконуються.

Отже, трійка $\mathcal{Z} = \left(\mathbb{N}, \overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{\mathfrak{U}}\right)$ є мінливою множиною. При цьому, відповідно до системи позначень, прийнятої в підрозділі 1.12.2, маємо:

$$\mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right) = \left\{\mathfrak{l}_n \,|\, n \in \mathbb{N}\right\}, \quad \text{де} \quad \mathfrak{l}_n = (n, \mathcal{B}_n) = (n, \mathcal{B}), \; n \in \mathbb{N},$$

і для $\mathfrak{l}_n, \mathfrak{l}_m \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right)$ має місце рівність $\langle \mathfrak{l}_n \leftarrow \mathfrak{l}_m \rangle = \mathfrak{U}_{nm}$. Тому, згідно (1.57) отримуємо:

$$\langle \mathfrak{l}_{n+1} \leftarrow \mathfrak{l}_n \rangle A = A, \qquad A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}_n\right) = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}), \; n \in \mathbb{N};$$

$$\langle \mathfrak{l}_{n+2} \leftarrow \mathfrak{l}_n \rangle A = \begin{cases} \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}), & A \neq \emptyset \\ \emptyset, & A = \emptyset \end{cases}, \quad A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}_n\right) = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}), \; n \in \mathbb{N};$$

З останньої рівності видно, що для довільного $n \in \mathbb{N}$ виконується співвідношення $\mathfrak{l}_n \succ!! \, \mathfrak{l}_{n+1}$. Але, при умові $\mathbf{card}(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})) \geq 2$, система відліку $\mathfrak{l}_n$ є нормально видимою, проте не чітко видимою з $\mathfrak{l}_{n+2}$. Отже, при $\mathbf{card}(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})) \geq 2$, для довільного $n \in \mathbb{N}$ маємо, $\mathfrak{l}_n \succ!! \, \mathfrak{l}_{n+1}$, $\mathfrak{l}_{n+1} \succ!! \, \mathfrak{l}_{n+2}$, хоча умова $\mathfrak{l}_n \succ!! \, \mathfrak{l}_{n+2}$ не виконується.

Приклад 1.163. Нехай базова мінлива множина $\mathcal{B}$ така, що множина $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ — нескінченна. Тоді існує послідовність елементарно-часових станів $(\omega_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ така, що $\omega_n \neq \omega_m$, $m \neq n$. Покладемо:

$$\mathcal{B}_\alpha := \mathcal{B}, \quad \alpha \in \mathbb{N}; \qquad \overleftarrow{\mathcal{B}} := \left(\mathcal{B}_\alpha \,|\, \alpha \in \mathbb{N}\right);$$

$$\mathfrak{U}_{\beta\alpha}A := \begin{cases} A, & \beta = \alpha \\ \{\omega_\beta\}, & \beta = \alpha + 1, \; \omega_\beta \in A \\ \emptyset, & \beta = \alpha + 1, \; \omega_\beta \notin A \\ \emptyset, & \beta \notin \{\alpha, \alpha + 1\}. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right) \\ \quad = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}); \; \alpha, \beta \in \mathbb{N} \end{pmatrix} \tag{1.59}$$

Аналогічно до попереднього прикладу можна переконатись, що система відображень $\overleftarrow{\mathfrak{U}} = \left(\mathfrak{U}_{\beta\alpha} \,|\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}\right)$ є уніфікацією сприймання на $\overleftarrow{\mathcal{B}}$. Отже, трійка $\mathcal{Z} = \left(\mathbb{N}, \overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{\mathfrak{U}}\right)$ є мінливою множиною. При цьому:

$$\mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right) = \left\{\mathfrak{l}_n \,|\, n \in \mathbb{N}\right\}, \text{ де } \mathfrak{l}_n = (n, \mathcal{B}_n) = (n, \mathcal{B}), \; n \in \mathbb{N},$$

$$\langle \mathfrak{l}_n \leftarrow \mathfrak{l}_m \rangle = \mathfrak{U}_{nm}, \quad m, n \in \mathbb{N} \; (\mathfrak{l}_n, \mathfrak{l}_m \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right)).$$

Тому, згідно (1.59), для довільного $n \in \mathbb{N}$ отримуємо, $\langle \mathfrak{l}_{n+2} \leftarrow \mathfrak{l}_n \rangle A = \mathfrak{U}_{n+2,n}A = \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}_n\right)$, хоча при умові, $\omega_{n+1}, \omega_{n+2} \in A$ маємо, $\langle \mathfrak{l}_{n+1} \leftarrow \mathfrak{l}_n \rangle A = \{\omega_{n+1}\} \neq \emptyset$, $\langle \mathfrak{l}_{n+2} \leftarrow \mathfrak{l}_{n+1} \rangle A = \{\omega_{n+2}\} \neq \emptyset$. Тобто, $\mathfrak{l}_n \succ \mathfrak{l}_{n+1}$, $\mathfrak{l}_{n+1} \succ \mathfrak{l}_{n+2}$, хоча при цьому система відліку $\mathfrak{l}_n$ невидима з $\mathfrak{l}_{n+2}$ ($\mathfrak{l}_n \not\succ \mathfrak{l}_{n+2}$).

Зараз перейдемо до дослідження питання про видимість систем відліку в мінливих множинах типу $\mathcal{Z}\mathsf{pv}\left(\overleftarrow{\mathcal{B}},\overleftarrow{W}\right)$ та $\mathcal{Z}\mathsf{im}\left[\mathfrak{P},\mathcal{B}\right]$. Нижче буде доведено, що в зазначених мінливих множинах кожна система відліку є чітко видимою з будь-якої іншої.

Твердження 1.164. *Нехай* $\overleftarrow{\mathcal{B}}=(\mathcal{B}_\alpha\,|\,\alpha\in\mathcal{A})$ *(*$\mathcal{A}\neq\emptyset$*) — індексована сім'я базових мінливих множин така, що* $\mathbf{card}\left(\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right)\right)=\mathbf{card}\left(\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\beta\right)\right)$ *(для довільних індексів* $\alpha,\beta\in\mathcal{A}$*) і* $\overleftarrow{W}=(W_{\beta\alpha}|\,\alpha,\beta\in\mathcal{A})$ *— індексована сім'я бієкцій виду* $W_{\beta\alpha}:\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right)\to\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\beta\right)$ *(між* $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right)$ *і* $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\beta\right)$*), що задовольняє умови* (1.49)*. Покладемо:*

$$\mathcal{Z}:=\mathcal{Z}\mathsf{pv}\left(\overleftarrow{\mathcal{B}},\overleftarrow{W}\right).$$

Тоді для довільних систем відліку $\mathfrak{l}_1,\mathfrak{l}_2\in\mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right)$ *виконується співвідношення* $\mathfrak{l}_1\succ!!\,\mathfrak{l}_2$.

Доведення. Розглянемо будь-які системи відліку $\mathfrak{l}_1,\mathfrak{l}_2\in\mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right)$, де $\mathcal{Z}=\mathcal{Z}\mathsf{pv}\left(\overleftarrow{\mathcal{B}},\overleftarrow{W}\right)$. Згідно з властивістю 1.131(1) системи відліку $\mathfrak{l}_1,\mathfrak{l}_2$ можна подати у вигляді, $\mathfrak{l}_1=(\alpha,\mathcal{B}_\alpha)$, $\mathfrak{l}_2=(\beta,\mathcal{B}_\beta)$, де $\alpha,\beta\in\mathcal{A}$. Згідно з властивостями 1.131(4,3), відображення уніфікації між $\mathfrak{l}_1$ та $\mathfrak{l}_2$ визначаються за формулою:

$$\langle\mathfrak{l}_2\leftarrow\mathfrak{l}_1\rangle\,A=W_{\beta\alpha}(A)=\{W_{\beta\alpha}(\omega)\,|\,\omega\in A\}\quad\left(\forall A\subseteq\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}_1\right)=\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right)\right),$$

де відображення $W_{\beta\alpha}:\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right)\to\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\beta\right)$ є бієкцією між $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right)=\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}_1\right)$ та $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\beta\right)=\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}_2\right)$. Отже, довільна непорожня мінлива система $A\subseteq\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}_1\right)$ є видимою з $\mathfrak{l}_2$. Тому, за означенням 1.152 (пункт 2), множина $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}_1\right)$ є нормально видимою з $\mathfrak{l}_2$. Оскільки відображення $W_{\beta\alpha}$ є бієкцією між $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}_1\right)$ та $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}_2\right)$, то для довільної диз'юнктної індексованої сім'ї мінливих систем $(A_\xi\,|\,\xi\in\mathcal{B})$ $\left(A_\xi\subseteq\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}_1\right),\ \xi\in\mathcal{B}\quad\text{і}\quad A_\xi\cap A_\gamma=\emptyset\right.$ при $\left.\xi\neq\gamma\right)$, отримуємо рівність:

$$\langle\mathfrak{l}_2\leftarrow\mathfrak{l}_1\rangle\left(\bigsqcup_{\xi\in\mathcal{B}}A_\xi\right)=W_{\beta\alpha}\left(\bigsqcup_{\xi\in\mathcal{B}}A_\xi\right)=\bigsqcup_{\xi\in\mathcal{B}}W_{\beta\alpha}\left(A_\xi\right)=\bigsqcup_{\xi\in\mathcal{B}}\langle\mathfrak{l}_2\leftarrow\mathfrak{l}_1\rangle\,A_\xi.$$

Отже, за означенням 1.152 (пункт 3), множина $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}_1\right)$, є чітко видимою з $\mathfrak{l}_2$. Таким чином, згідно з твердженням 1.159, маємо, $\mathfrak{l}_1\succ!!\,\mathfrak{l}_2$. □

Твердження 1.165. *Нехай* $\mathfrak{P}$ *еволюційний мультипроектор для базової мінливої множини* $\mathcal{B}$ *і* $\mathcal{Z}=\mathcal{Z}\mathsf{im}\left[\mathfrak{P},\mathcal{B}\right]$*. Тоді для довільних систем відліку* $\mathfrak{l}_1,\mathfrak{l}_2\in\mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right)$ *виконується співвідношення* $\mathfrak{l}_1\succ!!\,\mathfrak{l}_2$.

Доведення. Твердження 1.165 випливає з твердження 1.164 і рівності (1.55) (див, також, зауваження 1.142). □

Наслідок 1.166. *Нехай,* $\mathbb{U}$ *— трансформуюча множина бієкцій відносно базової мінливої множини* $\mathcal{B}$ *на* X*. Покладемо* $\mathcal{Z}:=\mathcal{Z}\mathsf{im}\left(\mathbb{U},\mathcal{B}\right)$*. Тоді для довільних систем відліку* $\mathfrak{l}_1,\mathfrak{l}_2\in\mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right)$ *виконується співвідношення* $\mathfrak{l}_1\succ!!\,\mathfrak{l}_2$.

Доведення. Наслідок 1.166 випливає з твердження 1.165 і рівності (1.56). □

Зокрема, з наслідку 1.166 випливає, що в мінливій множині, що розглядалась в прикладі 1.148, кожна система відліку є чітко видимою з будь-якої іншої.

Означення 1.167. Будемо говорити, що мінлива множина $\mathcal{Z}$ є **видимою (нормально видимою, чітко видимою)** якщо для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ виконується умова $\mathfrak{l} \succ \mathfrak{m}$ ($\mathfrak{l} \succ! \mathfrak{m}$, $\mathfrak{l} \succ!! \mathfrak{m}$) відповідно.

Із зауваження 1.156 випливає, що довільна нормально видима мінлива множина є видимою. Приклад 1.150 показує, що обернене твердження, взагалі кажучи не є правильним. Справді, розглянемо випадок, коли в цьому прикладі $\mathbf{card}(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_1)) \geq 2$. Як було доведено в зауваженні 1.156, в цьому випадку для систем відліку $\mathfrak{l}_1 = (1, \mathcal{B}_1)$, $\mathfrak{l}_2 = (2, \mathcal{B}_2)$ виконується співвідношення $\mathfrak{l}_1 \succ \mathfrak{l}_2$, проте співвідношення $\mathfrak{l}_1 \succ! \mathfrak{l}_2$ **не виконується**. Оскільки в цьому прикладі $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_2)$, то отримуємо, $\langle \mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_2 \rangle \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_2) = \mathfrak{U}_{12}\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_2) = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_1) \neq \emptyset$. Отже, $\mathfrak{l}_2 \succ \mathfrak{l}_1$. Таким чином $\mathfrak{l}_1 \succ \mathfrak{l}_2$, $\mathfrak{l}_2 \succ \mathfrak{l}_1$, проте співвідношення $\mathfrak{l}_1 \succ! \mathfrak{l}_2$ **не виконується**. І беручи до уваги, що $\mathcal{L}k(\mathcal{Z}_1) = \{\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2\}$, отримуємо, що мінлива множина $\mathcal{Z}_1$ в прикладі 1.150 є видимою, проте не нормально видимою. В підрозділі 1.14.2 (див. наслідок 1.172) буде показано, що довільна мінлива множина $\mathcal{Z}$ є чітко видимою тоді і тільки тоді, коли вона є нормально видимою.

Використовуючи поняття чітко видимої мінливої множини, введене в означенні 1.167, отримуємо наступні наслідки з тверджень 1.164, 1.165 та наслідка 1.166.

Наслідок 1.168. *Нехай* $\overleftarrow{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_\alpha \,|\, \alpha \in \mathcal{A})$ $(\mathcal{A} \neq \emptyset)$ *— індексована сім'я базових мінливих множин така, що* $\mathbf{card}(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_\alpha)) = \mathbf{card}(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_\beta))$ *(для довільних індексів* $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$*) і* $\overleftarrow{W} = (W_{\beta\alpha} |\, \alpha, \beta \in \mathcal{A})$ *— індексована сім'я бієкцій виду* $W_{\beta\alpha} : \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_\alpha) \to \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_\beta)$ *(між* $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_\alpha)$ *і* $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_\beta)$*), що задовольняє умови* (1.49)*. Тоді мінлива множина* $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}\mathsf{pv}\left(\overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{W}\right)$ *є чітко видимою.*

Наслідок 1.169. *Нехай* $\mathfrak{P}$ *еволюційний мультипроектор для базової мінливої множини* $\mathcal{B}$*. Тоді мінлива множина* $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}\mathsf{im}[\mathfrak{P}, \mathcal{B}]$ *є чітко видимою.*

Наслідок 1.170. *Нехай,* $\mathbb{U}$ *— трансформуюча множина бієкцій відносно базової мінливої множини* $\mathcal{B}$ *на* X*. Тоді мінлива множина* $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}\mathsf{im}(\mathbb{U}, \mathcal{B})$ *є чітко видимою.*

1.14.2. Класи видимості.

Твердження 1.171. *Для довільних систем відліку* $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ *довільної мінливої множини* $\mathcal{Z}$ *наступні твердження рівносильні:*

$$\textbf{(А)}\ \mathfrak{l} \succ! \mathfrak{m} \text{ і } \mathfrak{m} \succ! \mathfrak{l}; \qquad \textbf{(Б)}\ \mathfrak{l} \succ!! \mathfrak{m} \text{ і } \mathfrak{m} \succ!! \mathfrak{l}.$$

Доведення. Оскільки з чіткої видимості випливає нормальна видимість, досить довести імплікацію (А)⇒(Б). Отже, припустимо, що $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$, $\mathfrak{l} \succ! \mathfrak{m}$ і $\mathfrak{m} \succ! \mathfrak{l}$.

1) Спочатку доведемо, що для довільних $A, B \subseteq \mathbb{Bs}(\mathfrak{l})$, рівність $A \cap B = \emptyset$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A \cap \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, B = \emptyset$. Нехай, $A \cap B = \emptyset$. Тоді, згідно з другим пунктом твердження 1.129, маємо, $\emptyset = A \cap B \supseteq \langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle\, (\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A \cap \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, B)$. Оскільки $\mathfrak{m} \succ!\, \mathfrak{l}$ і $\langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle\, (\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A \cap \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, B) = \emptyset$, то, за означенням нормальної видимості, отримуємо, $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A \cap \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, B = \emptyset$, що й необхідно було довести. Навпаки, нехай $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A \cap \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, B = \emptyset$. Тоді, згідно з першим пунктом твердження 1.129, маємо, $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, (A \cap B) \subseteq \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A \cap \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, B = \emptyset$. Оскільки $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, (A \cap B) = \emptyset$ і $\mathfrak{l} \succ!\, \mathfrak{m}$, то, за означенням нормальної видимості, отримуємо $A \cap B = \emptyset$.

2) Нехай, $A \subseteq \mathbb{Bs}(\mathfrak{l})$ і $A = \bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$ (де $A_\alpha \subseteq A$, $\alpha \in \mathcal{A}$; $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$, $\alpha \neq \beta$). Згідно з пунктом 3) твердження 1.129, маємо, $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A \supseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A_\alpha$. Оскільки сім'я множин $(A_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A})$ — диз'юнктна, то, згідно з першим пунктом даного доведення, сім'я множин $(\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A})$ — також диз'юнктна, тобто $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A \supseteq \bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A_\alpha$. Припустимо, що останнє включення є строге (тобто що $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A \neq \bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A_\alpha$). Тоді множина $\tilde{B} = (\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A) \setminus \left(\bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A_\alpha\right)$ — непорожня. Отже, за означенням нормальної видимості, множина $B = \langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle\, \tilde{B}$ — також непорожня. Оскільки $\tilde{B} \subseteq \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A$, то, згідно з властивостями 1.126, маємо, $B = \langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle\, \tilde{B} \subseteq \langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle\, \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A \subseteq \langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A = A$. Оскільки множина $\tilde{B} = (\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A) \setminus \left(\bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A_\alpha\right)$ не перетинається з жодною із множин $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A_\alpha$ $(\alpha \in \mathcal{A})$, то, множина $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, B = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle\, \tilde{B} \subseteq \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle\, \tilde{B} = \tilde{B}$ також не перетинається з жодною із множин $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A_\alpha$ $(\alpha \in \mathcal{A})$ (тобто $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, B \cap \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A_\alpha = \emptyset$, $\alpha \in \mathcal{A}$). Звідси, за першим пунктом даного доведення, маємо, $B \cap A_\alpha = \emptyset$, $\alpha \in \mathcal{A}$. Таким чином, ми бачимо, що існує **непорожня** множина $B \subseteq A$ така, що $B \cap A_\alpha = \emptyset$, $\alpha \in \mathcal{A}$, що суперечить рівності $A = \bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$. Отже, зроблене вище припущення — помилкове. Тому маємо рівність $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A = \bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A_\alpha$.

Таким чином, довільна множина $A \subseteq \mathbb{Bs}(\mathfrak{l})$ є чітко видимою з системи відліку $\mathfrak{m}$, тобто $\mathfrak{l} \succ!!\, \mathfrak{m}$. Аналогічно отримуємо $\mathfrak{m} \succ!!\, \mathfrak{l}$. □

Безпосередньо з твердження 1.171 випливає наступний наслідок.

Наслідок 1.172. *Мінлива множина $\mathcal{Z}$ є чітко видимою тоді і тільки тоді, коли вона є нормально видимою.*

Враховуючи наслідок 1.172, терміном "нормально видима мінлива множина" надалі користуватись не будемо.

Означення 1.173. Будемо говорити, що системи відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ **еквівалентні відносно чіткої видимості** (або, скорочено, **чітко-еквівалентні**), якщо виконується умова (Б) (або, що рівносильно, умова (А)) твердження 1.171.

Той факт, що системи відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ є чітко-еквівалентними будемо позначати наступним чином:

$\mathfrak{l} \equiv!\, \mathfrak{m}\,(\mathcal{Z})$.

А якщо відомо, про яку мінливу множину $\mathcal{Z}$ йде мова, будемо вживати скорочене позначення $\mathfrak{l} \equiv! \mathfrak{m}$.

Твердження 1.174. *Для довільної мінливої множини $\mathcal{Z}$ відношення $\equiv!$ є відношенням еквівалентності на множині $\mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$.*

Доведення. Для $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ умова $\mathfrak{l} \equiv! \mathfrak{m}$ рівносильна умові (A) твердження 1.171 (тобто умові $\mathfrak{l} \succ! \mathfrak{m}$ і $\mathfrak{m} \succ! \mathfrak{l}$). Тому, оскільки (згідно з твердженням 1.160) відношення $\succ!$ є квазіпорядком на $\mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$, то бажаний результат випливає з [73, лема на стор. 37] [1.10]. □

Означення 1.175. Класи еквівалентності, на які розбиває відношення еквівалентності $\equiv!$ множину $\mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ будемо називати **класами чіткої видимості** мінливої множини $\mathcal{Z}$.

Таким чином, множина $\mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ систем відліку довільної мінливої множини $\mathcal{Z}$ розбивається на класи чіткої видимості, в межах яких будь-яка система відліку є чітко видимою з іншої системи відліку даного класу. Очевидно, що мінлива множина $\mathcal{Z}$ є чітко видимою тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ складається лише з одного класу чіткої видимості.

Виявляється, що використовуючи відношення видимості "$\succ$" також можна розбити множину $\mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ на класи еквівалентності.

Означення 1.176. Нехай, $\mathcal{Z}$ — мінлива множина.

(а) Будемо говорити, що системи відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ **безпосередньо зв'язані видимістю** в $\mathcal{Z}$ (використовуючи позначення $\mathfrak{l} \prec\!\succ \mathfrak{m}\,(\mathcal{Z})$, або $\mathfrak{l} \prec\!\succ \mathfrak{m}$ у випадку, коли наперед відомо про яку мінливу множину $\mathcal{Z}$ йде мова) якщо має місце хоч одна з умов, $\mathfrak{l} \succ \mathfrak{m}$ або $\mathfrak{m} \succ \mathfrak{l}$.

(б) Будемо говорити, що системи відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ **зв'язані видимістю** в $\mathcal{Z}$ (використовуючи позначення $\mathfrak{l} \widehat{\equiv} \mathfrak{m}(\mathcal{Z})$, або $\mathfrak{l} \widehat{\equiv} \mathfrak{m}$ у випадку, коли наперед відомо про яку мінливу множину $\mathcal{Z}$ йде мова) якщо існує послідовність $\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_1, \cdots, \mathfrak{l}_\nu \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ $(\nu \in \mathbb{N})$ така, що:

$$\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{l}, \quad \mathfrak{l}_\nu = \mathfrak{m}, \text{ і } \quad \mathfrak{l}_i \prec\!\succ \mathfrak{l}_{i-1} \ (\forall\, i \in \overline{1, \nu}).$$

Твердження 1.177. *Відношення $\widehat{\equiv}$ є відношенням еквівалентності на $\mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$.*

Доведення. Оскільки відношення видимості, згідно з зауваженням 1.161, є рефлексивним, то відношення $\prec\!\succ$ є рефлексивним і симетричним на $\mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$. Бінарне відношення $\widehat{\equiv}$ є транзитивним замиканням відношення $\prec\!\succ$ в сенсі [81, стор. 69], [101, стор.

[1.10] Зауважимо, що рефлексивність, симетричність і транзитивність відношення $\equiv!$ неважко, також, встановити безпосередньою перевіркою, виходячи з того, що відношення $\succ!$ є квазіпорядком (рефлексивним і транзитивним відношенням) на $\mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$.

32]. Тому, згідно з [81, твердження 5.8, 5.9 і теорема 5.7], відношення $\widehat{\equiv}$ є відношенням еквівалентності на $\mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right)$. (Зауважимо, що рефлексивність, симетричність і транзитивність відношення $\widehat{\equiv}$ неважко встановити і безпосередньою перевіркою.) $\square$

Означення 1.178. Класи еквівалентності, на які розбиває відношення еквівалентності $\widehat{\equiv}$ множину $\mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right)$ називатимемо **класами видимості** мінливої множини $\mathcal{Z}$.

Проте може виявитись, що в мінливій множині існує всього один клас видимості.

Означення 1.179. Мінлива множина $\mathcal{Z}$ називається **зв'язно видимою**, якщо для довільних $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right)$ має місце умова $\mathfrak{l} \widehat{\equiv} \mathfrak{m}$.

Зрозуміло, що будь-яка видима мінлива множина є зв'язно видимою. Аналізуючи приклади 1.162 та 1.163, неважко встановити, що обернене твердження, взагалі кажучи, є хибним.

Отже, якщо мінлива множина $\mathcal{Z}$ не є зв'язно видимою, то сукупність її систем відліку $\mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right)$ розбивається на "спаралелені світи" (класи видимості). Причому будь-який клас видимості є "повністю невидимим" з інших класів видимості. Формальним прикладом мінливої множини з багатьма класами видимості може служити мінлива множина $\mathcal{Z}\mathsf{nv}\left(\overleftarrow{\mathcal{B}}\right)$ (див. приклад 1.149) при умові $\mathbf{card}(\mathcal{A}) \geq 2$. В мінливій множині $\mathcal{Z}\mathsf{nv}\left(\overleftarrow{\mathcal{B}}\right)$ кожна система відліку утворює окремий клас видимості.

Класи чіткої видимості також можна розглядати як "спаралелені світи". Проте такі "спаралелені світи" можуть бути частково видимими з інших "спаралелених світів".

1.14.3. Чітко видимі мінливі множини.

В класичній механіці та спеціальній теорії відносності припускається, що будь-який елементарно-часовий стан (фіз. – "подія") є видимим в будь-якій інерційній системі відліку. Отже, чітко видимі мінливі множини є особливо важливими для фізики. Саме тому в даному підрозділі ці мінливі множини будуть вивчені більш детально. Нагадаємо, що (згідно з результатами, доведеними вище) мінливі множини типу $\mathcal{Z}\mathsf{pv}\left(\overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{W}\right)$, $\mathcal{Z}\mathsf{im}\left[\mathfrak{P}, \mathcal{B}\right]$ і $\mathcal{Z}\mathsf{im}\left(\mathbb{U}, \mathcal{B}\right)$, введені в прикладах 1.130, 1.146, 1.148 та означенні 1.141, є чітко видимими.

Зауваження 1.180. В силу твердження 1.171 та означення відношення $\equiv!$, *для довільної мінливої множини $\mathcal{Z}$ наступні твердження є рівносильними:*

(I) *$\mathcal{Z}$ є чітко видимою мінливою множиною;*

(II) *для довільних $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right)$ має місце умова $\mathfrak{l} \succ!! \mathfrak{m}$;*

(III) *для довільних $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right)$ має місце умова $\mathfrak{l} \succ! \mathfrak{m}$;*

(IV) *для довільних $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right)$ має місце умова $\mathfrak{l} \equiv! \mathfrak{m}$.*

Зауважимо, також, що в першому пункті доведення твердження 1.171 було доведено наступну лему.

Лема 1.181. *Нехай, мінлива множина $\mathcal{Z}$ є чітко видимою. Тоді для довільних $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ і $A, B \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ рівність $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A \cap \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle B = \emptyset$ має місце тоді і тільки тоді, коли $A \cap B = \emptyset$.*

Теорема 1.182. *Мінлива множина $\mathcal{Z}$ є чітко видимою тоді і тільки тоді, коли для довільних $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ справедлива рівність:*

$$\langle \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle = \langle \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle . \tag{1.60}$$

Доведення. **Достатність**. Нехай для довільних $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ виконується рівність (1.60). Розглянемо довільні системи відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ і довільну мінливу систему $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ таку, що $A \neq \emptyset$. Тоді, згідно з (1.60), маємо, $A = \langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A = \langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A$. Отже, за твердженням 1.128, $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A \neq \emptyset$. Таким чином, за твердженням 1.158, маємо $\mathfrak{l} \succ! \mathfrak{m}$ (для довільних $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$). Отже, згідно з зауваженням 1.180, мінлива множина $\mathcal{Z}$ є чітко видимою.

Необхідність. Навпаки, нехай мінлива множина $\mathcal{Z}$ є чітко видимою. Розглянемо довільні системи відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ і довільну мінливу систему $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$. За властивістю 1.126(9), маємо, $\langle \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A \subseteq \langle \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A$. Позначимо:

$$B_1 := \langle \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A \setminus \langle \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A.$$

Тоді, $B_1 \subseteq \langle \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A$ і $B_1 \cap \langle \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A = \emptyset$. Покладемо, $B := \langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{p} \rangle B_1$. Використовуючи властивості 1.126 отримуємо:

$$B = \langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{p} \rangle B_1 \subseteq \langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{p} \rangle \langle \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A \subseteq \langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A = A;$$
$$\langle \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle B = \langle \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{p} \rangle B_1 \subseteq \langle \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{p} \rangle B_1 = B_1.$$

Отже, оскільки $B_1 \cap \langle \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A = \emptyset$, то отримуємо, $\langle \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle B \cap \langle \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A = \emptyset$. Звідси, використовуючи лему 1.181, дістаємо, $B \cap A = \emptyset$. Оскільки $B \subseteq A$ і $B \cap A = \emptyset$, то $B = \emptyset$. Таким чином, $\langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{p} \rangle B_1 = B = \emptyset$. Отже, беручи до уваги, той факт, що згідно з зауваженням 1.180, мають місце співвідношення $\mathfrak{p} \succ! \mathfrak{m}$ і $\mathfrak{m} \succ! \mathfrak{l}$, отримуємо (за означенням нормальної видимості) рівність $B_1 = \emptyset$. □

Зауважимо, що для мінливої множини виду $\mathcal{Z} = \left(\mathcal{A}, \overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{\mathfrak{U}}\right)$ з означення 1.124, умова (1.60) еквівалентна умові (1.46).

Твердження 1.183. *Нехай $\mathcal{Z}$ — чітко видима мінлива множина. Тоді для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$, довільної сім'ї мінливих систем $(A_\alpha | \alpha \in \mathcal{A})$ (такої, що $A_\alpha \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ $\forall \alpha \in \mathcal{A}$) і довільних мінливих систем $A, B \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ справедливі наступні твердження:*

1. $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A_\alpha$;

2. $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle (A \setminus B) = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A \setminus \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle B$;
3. $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m})$;
4. $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A_\alpha$;
5. *Якщо мінлива система* $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ *є одноелементною (тобто* $\mathbf{card}(A) = 1$*), то мінлива система* $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A$ *також одноелементна.*

Доведення. 1) Використовуючи твердження 1.129, пункт 2), властивості 1.126 і теорему 1.182 (рівність (1.60)) отримуємо:

$$\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \right) \supseteq \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A_\alpha \right) =$$
$$= \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A_\alpha.$$

Отже, $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \right) \supseteq \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A_\alpha$. Обернене включення міститься в твердженні 1.129, пункт 1).

2) Оскільки $A \setminus B \subseteq A$, то, за властивістю 1.126(8) маємо, $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle (A \setminus B) \subseteq \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A$. Так, як $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$, то згідно з лемою 1.181, отримуємо, $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle (A \setminus B) \cap \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle B = \emptyset$. Отже:

$$\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle (A \setminus B) \subseteq \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A \setminus \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle B. \tag{1.61}$$

Застосувавши співвідношення (1.61) до множин $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A$, $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle B$, і відображення уніфікації $\langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle$, а також, скориставшись формулою (1.60) та властивостями 1.126 отримуємо:

$$\langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle (\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A \setminus \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle B) \subseteq \langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A \setminus \langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle B =$$
$$= \langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A \setminus \langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle B = A \setminus B.$$

Звідси, за властивістю 1.126(8), маємо, $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle (\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A \setminus \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle B) \subseteq \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle (A \setminus B)$. І, скориставшись скориставшись формулою (1.60) і властивістю 1.126(5), отримаємо обернене включення до (1.61).

3) За означенням відображення уніфікації:

$$\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m}). \tag{1.62}$$

Аналогічно, $\langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m}) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$. Застосувавши до останнього включення відображення уніфікації $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle$, а також скориставшись властивостями 1.126 та співвідношенням (1.60) отримаємо включення, обернене до (1.62).

4) Зауважимо, що: $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} (\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) \setminus A_\alpha) \right)$. Звідси, скориставшись пунктами 1, 2, і 3 даного твердження отримаємо:

$$\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \right) = (\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})) \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} (\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) \setminus \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, A_\alpha) \right) =$$

$$= \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m}) \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} (\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m}) \setminus \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, A_\alpha) \right) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, A_\alpha.$$

5) Нехай $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$, причому $A = \{\omega\}$ — одноелементна множина. Оскільки $\mathcal{Z}$ — чітко видима мінлива множина, то, згідно із зауваженням 1.180, маємо $\mathfrak{l} \succ! \, \mathfrak{m}$ і $\mathfrak{m} \succ! \, \mathfrak{l}$. Тому, оскільки $A \neq \emptyset$, то, за означенням нормальної видимості, отримуємо, $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, A \neq \emptyset$. Припустимо, що множина $B = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, A$ містить більш, ніж один елемент. Тоді існують множини $B_1, B_2 \subseteq B$ такі, що $B_1, B_2 \neq \emptyset$ і $B = B_1 \sqcup B_2$. Покладемо: $A_1 := \langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \, B_1$, $A_2 := \langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \, B_2$. Оскільки $B_1, B_2 \neq \emptyset$, то, за означенням нормальної видимості, $A_1, A_2 \neq \emptyset$. Оскільки $B = B_1 \sqcup B_2$, то, за означенням чіткої видимості, маємо, $\langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \, B = \langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \, B_1 \sqcup \langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \, B_2 = A_1 \sqcup A_2$. Звідси, враховуючи, що $B = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, A$ і використовуючи рівність (1.60), отримуємо:

$$A_1 \sqcup A_2 = \langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \, B = \langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \, \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, A = A.$$

Таким чином, множину A можна розбити на дві диз'юнктні непорожні множини, що суперечить тому факту, що множина A — одноелементна. Отже, множина $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, A$ — непорожня, і не може містити більше, ніж один елемент, тобто є одноелементною. □

Означення 1.184. Нехай $\mathcal{Z}$ — чітко видима мінлива множина, $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ і $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$. Елементарно-часовий стан $\omega' \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m})$ такий, що $\{\omega'\} = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \{\omega\}$ будемо називати **видимим образом** елементарно-часового стану $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ в системі відліку $\mathfrak{m}$ і будемо позначати його через $\langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \, \mathcal{Z} \rangle \, \omega$:

$$\langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \, \mathcal{Z} \rangle \, \omega = \omega'.$$

Відображення $\langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \, \mathcal{Z} \rangle : \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) \to \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m})$ будемо називати відображенням **чіткої уніфікації** між системами відліку $\mathfrak{l}$ і $\mathfrak{m}$ (з системи відліку $\mathfrak{l}$ в систему відліку $\mathfrak{m}$).

У випадку, коли наперед відомо про яку мінливу множину $\mathcal{Z}$ йде мова, замість позначення $\langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \, \mathcal{Z} \rangle$ будемо використовувати позначення $\langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle$.

Згідно з твердженням 1.183, пункт 5, довільний елементарно-часовий стан $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ завжди має видимий образ $\omega' = \langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega$ (в іншій системі відліку довільної чітко видимої мінливої множини). Отже, в силу означення 1.184, для довільного елементарно-часового стану $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ в системі відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ чітко видимої мінливої множини $\mathcal{Z}$ справедлива така рівність:

$$\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \{\omega\} = \{\langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega\} \quad (\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})) \tag{1.63}$$

Використовуючи рівність $A = \bigsqcup_{\omega \in A} \{\omega\}$, означення чіткої видимості та рівність (1.63) отримуємо наступну теорему.

Теорема 1.185. *Для довільної непорожньої мінливої системи $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ в системі відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ чітко видимої мінливої множини $\mathcal{Z}$ справедлива рівність:*

$$\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A = \bigsqcup_{\omega \in A} \{\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega\} = \{\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega \mid \omega \in A\} \quad (\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})). \tag{1.64}$$

Наслідок 1.186. *Нехай $\mathcal{Z}$ — чітко видима мінлива множина і $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ — довільні її системи відліку. Тоді для будь-якої мінливої системи $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ множини A і $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A$ є рівнопотужними. При цьому у випадку $A \neq \emptyset$ відображення:*

$$f(\omega) = \langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega, \qquad \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) \tag{1.65}$$

є бієкцією між множинами A та $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A$. Зокрема рівнопотужними є множини $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ та $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m}) = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ і відображення (1.65) є бієкцією між ними.

Доведення. У випадку $A = \emptyset$ твердження даного наслідку випливає з твердження 1.128. У випадку $A \neq \emptyset$ з теореми 1.185 випливає, що відображення (1.65) є бієкцією між множинами A та $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A$ (звернемо увагу на знак диз'юнктного об'єднання в рівності (1.64)). Крім того, з твердження 1.183 (пункт 3)) випливає, що $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m}) = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$. Отже, множини $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ і $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m})$ є рівнопотужними і відображення (1.65) є бієкцією між цими множинами. □

Використовуючи властивість 1.126(5), а також теореми 1.185 та 1.182 отримуємо наступні властивості відображень чіткої уніфікації в чітко видимих мінливих множинах.

Властивості 1.187. *Нехай $\mathcal{Z}$ — чітко видима мінлива множина і $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ — довільні системи відліку $\mathcal{Z}$. Тоді:*

1. $\forall\, \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) \quad \langle !\, \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega = \omega$;
2. $\forall\, A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) \quad \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A = \{\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega \mid \omega \in A\}$;
3. $\forall\, \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) \quad \langle !\, \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle\, \langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega = \langle !\, \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega$.

Згідно з наслідками 1.169 і 1.170, мінливі множини типу $\mathcal{Z}\mathsf{im}\,[\mathfrak{P}, \mathcal{B}]$ та $\mathcal{Z}\mathsf{im}\,(\mathbb{U}, \mathcal{B})$ завжди є чітко видимими. Тому, отримуємо такий наслідок теореми 1.139:

Наслідок 1.188. *Нехай $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}\mathsf{im}\,[\mathfrak{P}, \mathcal{B}]$, де $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$. Тоді для довільних систем відліку $\mathfrak{l} = (\alpha, U_\alpha\,[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$, $\mathfrak{m} = (\beta, U_\beta\,[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\beta]) \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ $(\alpha, \beta \in \mathcal{A})$ виконується наступна рівність:*

$$\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathcal{Z} \rangle\, \omega = U_\beta\left(U_\alpha^{[-1]}(\omega)\right) \quad (\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = U_\alpha\,(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}))).$$

Основні результати підрозділу 1.14 були опубліковані в [93].

Розділ 2

Кінематичні мінливі множини та їх властивості

2.1. Вступ до розділу

На фізичному рівні проблема дослідження кінематик з довільними законами перетворення просторово-часових координат в інерційних системах відліку в найбільш загальній формі ставилось у роботах [102–104] для випадку, коли простір геометричних змінних є тривимірним і Евклідовим. Частинним випадком перетворень координат, розглянутих в [102–104], є класичні перетворення Лоренца, а також узагальнені перетворення Лоренца в сенсі E. Recami, В. Ольховського та R. Goldoni [56–58, 105–107] (для систем відліку, що рухаються зі швидкістю, більшою за швидкість світла). Тематика побудови теорії надсвітлового руху була започаткована, зокрема, в роботах [53, 54]. Дослідження в цьому напрямку активізувались в 2011-2012 у зв'язку із дослідами, проведеними в рамках експерименту OPERA [108]. Хоча пізніше результати цих дослідів не підтвердились, зазначена тематика була і залишається актуальною вже понад 50 років [55, 109]. На сьогодні наявність декількох кінематичних теорій тахіонного руху породжує необхідність побудови нових абстрактних математичних структур, які б дозволяли моделювати еволюцію фізичних систем в рамках різних законів кінематики. За умови відсутності експериментальної перевірки висновків різних теорій тахіонової кінематики, такі математичні структури гарантували б, принаймні, коректність отримання цих висновків із постулатів даних теорій. Даний розділ дисертаційної роботи присвячений побудові і дослідженню таких математичних структур. Дослідження в цьому напрямку можуть бути цікавими, також, для астрофізики, оскільки існує припущення, що у великих масштабах Всесвіту закони фізики (зокрема, закони кінематики) можуть бути відмінними від тих, які діють в околі нашої Сонячної системи (тобто відмінними від тих, які базуються на перетвореннях координат Лоренца-Пуанкаре або Галілея для інерційних систем відліку).

В роботах [110,111] було дано загальне означення лінійних перетворень координат та узагальнених перетворень Лоренца у випадку, коли простір геометричних змін-

них є довільним дійсним гільбертовим простором. Слід зазначити, що математичний апарат робіт [56–58, 102–107, 110, 111] не базується на теорії мінливих множин, що істотно зменшує його загальність. Зокрема математичний апарат зазначених робіт дає змогу вивчати лише універсальні перетворення координат (тобто такі перетворення координат, при яких геометрично-часове положення довільного матеріального об'єкта в довільній системі відліку визначається геометрично-часовим положенням цього об'єкта в певній, фіксованій, системі відліку і не залежить від жодних внутрішніх властивостей цього об'єкта). Даний розділ роботи базується на абстрактній теорії мінливих множин, розвинутій у попередньому розділі. Зокрема в цьому розділі буде дано означення реального та універсального перетворення координат у кінематичних мінливих множинах і показано, що в класичних кінематиках типу Галілея та Лоренца-Пуанкаре завжди існує універсальне перетворення координат. Також буде побудовано один цікавий клас кінематик, в яких кожна частинка в довільний момент часу може мати свою власну "швидкість світла", і доведено, що в таких кінематиках не існує універсального перетворення координат.

2.2. Мінливі множини і кінематика

2.2.1. Координатні простори.

Означення 2.1. В даній роботі ***координатним простором*** $\mathfrak{Q}$ будемо розуміти математичну структуру одного з наступних трьох типів:

а) $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{X}, \mathcal{T})$ — топологічний простір (тобто $\mathcal{T}$ — топологія на множині $\mathfrak{X}$).

б) $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{X}, \oplus, \otimes)$ — лінійний простір над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ (тобто $\oplus$ і $\otimes$ — лінійні операції додавання елементів з множини $\mathfrak{X}$ і множення елементів множини $\mathfrak{X}$ на елементи поля $\mathbb{R}$ відповідно).

в) $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{X}, \mathcal{T}, \oplus, \otimes)$ — топологічний векторний простір.

При цьому будемо використовувати такі терміни та позначення:

1. Множину $\mathfrak{X}$ позначатимемо через $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ і називатимемо множиною ***значень координат*** $\mathfrak{Q}$ $(\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}) := \mathfrak{X})$.
2. Якщо мають місце випадки **а)** або **в)**, то будемо використовувати позначення $\mathcal{T}p(\mathfrak{Q}) := \mathcal{T}$. В протилежному випадку покладемо $\mathcal{T}p(\mathfrak{Q}) := \emptyset$. $\mathcal{T}p(\mathfrak{Q})$ називатимемо ***топологією*** $\mathfrak{Q}$.
3. Якщо мають місце випадки **б)** або **в)**, то покладемо $\mathbb{L}s(\mathfrak{Q}) := (\mathfrak{X}, \oplus, \otimes)$. В протилежному випадку покладемо $\mathbb{L}s(\mathfrak{Q}) := \emptyset$. $\mathbb{L}s(\mathfrak{Q})$ називатимемо ***лінійною структурою*** $\mathfrak{Q}$. Очевидно, що якщо $\mathbb{L}s(\mathfrak{Q}) \neq \emptyset$, то $\mathbb{L}s(\mathfrak{Q})$ є лінійним нормованим простором над $\mathbb{R}$ (для довільного координатного простору $\mathfrak{Q}$).

4. У випадку, коли $\mathbb{L}s(\mathfrak{Q}) \neq \emptyset$ для довільних $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ будемо позначати:

   $(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)_{\mathfrak{Q}} := \lambda_1 \otimes x_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_n \otimes x_n$. Коли не виникає непорозумінь замість $(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)_{\mathfrak{Q}}$ будемо писати $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$.

Елементи $x \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ будемо називати ***координатами*** координатного простору $\mathfrak{Q}$, а у випадку $\mathbb{L}s(\mathfrak{Q}) \neq \emptyset$ ці елементи будемо також називати ***векторами (векторними координатами)*** $\mathfrak{Q}$.

2.2.2. Кінематичні мінливі множини.

Означення 2.2. 1. Пару $\mathcal{G}_0 = (\mathfrak{Q}, k)$ будемо називати **геометричним оточенням** базової мінливої множини $\mathcal{B}$, якщо:

   а) $\mathfrak{Q}$ — координатний простір;

   б) $k : \mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \to \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ — відображення з $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ в $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$.

   При цьому пару $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}} = (\mathcal{B}, \mathcal{G}_0) = (\mathcal{B}, (\mathfrak{Q}, k))$ будемо називати **базовою кінематичною мінливою множиною**, або, скорочено — **базовою кінематичною** множиною.

2. Нехай, $\mathcal{Z}$ — довільна мінлива множина. Індексовану сім'ю пар виду $\mathcal{G} = ((\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}, k_{\mathfrak{l}}) \mid \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}))$ будемо називати **геометричним оточенням** мінливої множини $\mathcal{Z}$, якщо для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ пара $(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}, k_{\mathfrak{l}})$ є геометричним оточенням базової мінливої множини $\mathfrak{l}\hat{}$, породженої системою відліку $\mathfrak{l}$, тобто якщо пара $(\mathfrak{l}\hat{}, (\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}, k_{\mathfrak{l}}))$ є базовою кінематичною множиною для довільної $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$.

   При цьому пару $\mathfrak{C} = (\mathcal{Z}, \mathcal{G})$ будемо називати **кінематичною мінливою множиною**, або, скорочено — **кінематичною** множиною.

Підкреслимо, що в цій дисертаційній роботі розглядаються лише кінематичні множини зі сталою (не змінною в часі) геометрією. Такі кінематичні множини достатні для побудови абстрактних кінематик в інерційних системах відліку. Зробивши певну модифікацію означення 2.2, визначити кінематичні множини з мінливою геометрією, в принципі, можливо.

2.2.3. Система позначень для базових кінематичних множин.

Нехай, $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}} = (\mathcal{B}, \mathcal{G}_0)$, де $\mathcal{G}_0 = (\mathfrak{Q}, k)$ — довільна базова кінематична множина. Надалі будемо використовувати наступну систему позначень.

а) Позначення, індуковані з теорії базових мінливих множин:

$$\mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathfrak{Bs}(\mathcal{B}); \quad \mathbb{Bs}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathbb{Bs}(\mathcal{B}); \quad \underset{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}{\leftarrow} := \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow};$$
$$\overset{\mathbb{Bs}}{\underset{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}{\leftarrow}} := \overset{\mathbb{Bs}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}}; \quad \mathbb{L}l\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathbb{L}l(\mathcal{B}); \quad \mathbb{L}d\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathbb{L}d(\mathcal{B})$$
$$\mathbf{Tm}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathbf{Tm}(\mathcal{B}); \quad \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}); \quad \leq_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}} := \leq_{\mathcal{B}};$$
$$<_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}} := <_{\mathcal{B}}; \quad \geq_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}} := \geq_{\mathcal{B}}; \quad >_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}} := >_{\mathcal{B}}.$$

б) Позначення, індуковані з позначень для координатних просторів:

$$\mathbf{Zk}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}\right); \quad \mathcal{T}p\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathcal{T}p\left(\mathfrak{Q}\right); \quad \mathbb{L}s\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathbb{L}s\left(\mathfrak{Q}\right).$$

Також у випадку $\mathbb{L}s\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) \neq \emptyset$ для довільних $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$, $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$ будемо використовувати наступне позначення:

$$(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}} := (\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)_{\mathcal{Q}}.$$

в) Власні позначення для базових кінематичних множин:

$$\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathcal{B}; \qquad \mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathfrak{Q}; \qquad \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}(x) := k(x) \ \left(x \in \mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right).$$

Зауважимо, що функція $\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}(\cdot)$ ставить у відповідність кожному елементарному стану $x \in \mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$ його координату $\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}(x) \in \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$.

г) Скорочені варіанти позначень: Використовуються всі скорочені варіанти позначень, описані в підрозділі 1.8.3 (але, з заміною символу "$\mathcal{B}$" на символ "$\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$" і терміну "базова мінлива множина" на термін "базова кінематична множина"). У тих випадках, коли наперед відомо про яку базову кінематичну множину $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$ йде мова замість позначень $(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}$ та $\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}$ будемо використовувати позначення $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$ та $\mathfrak{q}$ відповідно.

2.2.4. Система позначень для кінематичних множин. Нехай, $\mathfrak{C} = (\mathcal{Z}, \mathcal{G})$, де $\mathcal{G} = \left((\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}, k_{\mathfrak{l}}) \,\middle|\, \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right)\right)$ — кінематична множина.

а) Мінливу множину $\mathbb{BE}\left(\mathfrak{C}\right) := \mathcal{Z}$ будемо називати ***базою еволюції*** $\mathfrak{C}$.

б) Множини:

$$\mathcal{I}nd\left(\mathfrak{C}\right) := \mathcal{I}nd\left(\mathcal{Z}\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathbb{BE}\left(\mathfrak{C}\right)\right); \quad \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right) := \mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right) = \mathcal{L}k\left(\mathbb{BE}\left(\mathfrak{C}\right)\right)$$

будемо називати ***множиною індексів*** та ***множиною систем відліку*** кінематичної множини $\mathfrak{C}$ (відповідно).

в) Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right) = \mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right)$ зберігаються всі позначення, введені для систем відліку в теорії мінливих множин (а саме, це стосується позначень: $\mathtt{ind}\left(\mathfrak{l}\right)$, $\mathfrak{Bs}(\mathfrak{l})$, $\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}$, $\mathbb{Bs}(\mathfrak{l})$, $\overset{\mathbb{Bs}}{\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}}$, $\mathbf{Tm}(\mathfrak{l})$, $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l})$, $\mathbb{L}l\left(\mathfrak{l}\right)$, $\mathbb{L}d\left(\mathfrak{l}\right)$, $\leq_{\mathfrak{l}}$, $<_{\mathfrak{l}}$, $\geq_{\mathfrak{l}}$, $>_{\mathfrak{l}}$). Так само зберігаються всі скорочені варіанти цих позначень.

г) Для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$ індукуються позначення для відображень уніфікації: $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\ \mathfrak{C} \rangle := \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\ \mathcal{Z} \rangle$.

Зокрема, у випадку, коли мінлива множина $\mathcal{Z}$ є чітко видимою (у цьому випадку будемо говорити, що кінематична множина $\mathfrak{C}$ є ***чітко видимою***), вводимо позначення: $\langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C}\rangle := \langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{Z}\rangle$.

д) Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ введемо позначення:

$$\mathfrak{C} \restriction \mathfrak{l} := (\mathfrak{l}\hat{}, (\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}, k_{\mathfrak{l}}))\,. \tag{2.1}$$

За означенням 2.2, для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ пара $\mathfrak{C} \restriction \mathfrak{l}$ є базовою кінематичною множиною. Базову кінематичну множину $\mathfrak{C} \restriction \mathfrak{l}$ будемо називати ***образом кінематичної множини*** $\mathfrak{C}$ в системі відліку $\mathfrak{l}$.

е) Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Zk}(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C}) := \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{C} \restriction \mathfrak{l}) = \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}})\,; \quad \mathbb{L}s(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C}) := \mathbb{L}s\,(\mathfrak{C} \restriction \mathfrak{l}) = \mathbb{L}s\,(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}})\,;\\
&\mathcal{T}p(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C}) := \mathcal{T}p\,(\mathfrak{C} \restriction \mathfrak{l}) = \mathcal{T}p\,(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}})\,; \quad \mathsf{BE}(\mathfrak{l}) := \mathsf{BE}(\mathfrak{C} \restriction \mathfrak{l}) = \mathfrak{l}\hat{}\,;\\
&\mathsf{BG}(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C}) := \mathsf{BG}(\mathfrak{C} \restriction \mathfrak{l}) = \mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}.
\end{aligned}$$

Також для систем відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ таких, що $\mathbb{L}s(\mathfrak{l}) \neq \emptyset$ і довільних $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C})$, $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathfrak{Ps}(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C})$ будемо використовувати наступне позначення: $(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)_{\mathfrak{l},\mathfrak{C}} := (\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)_{\mathcal{Q}_l}$.

є) Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ введемо таке позначення:

$$\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\,(x;\,\mathfrak{C}) := \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}\restriction\mathfrak{l}}\,(x) = k_{\mathfrak{l}}(x) \quad (x \in \mathfrak{Bs}\,(\mathfrak{l}))\,.$$

ж) Скорочені варіанти позначень:

- У випадках, коли наперед відомо про яку кінематичну множину $\mathfrak{C}$ йде мова замість позначень $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\,\mathfrak{C}\rangle$, $\langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\,\mathfrak{C}\rangle$, $\mathbf{Zk}(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C})$, $\mathbb{L}s(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C})$, $\mathcal{T}p(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C})$, $\mathsf{BG}(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C})$, $\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\,(x;\,\mathfrak{C})$, $(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)_{\mathfrak{l},\mathfrak{C}}$ будемо використовувати позначення $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle$, $\langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle$, $\mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$, $\mathbb{L}s(\mathfrak{l})$, $\mathcal{T}p(\mathfrak{l})$, $\mathsf{BG}(\mathfrak{l})$, $\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\,(x)$, $(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)_{\mathfrak{l}}$ відповідно.
- У тих випадках, коли наперед відомо про яку систему відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ йде мова замість позначень $\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\,(x)$, $(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)_{\mathfrak{l}}$ будемо використовувати позначення $\mathfrak{q}(x)$, $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$ відповідно. Також будемо користуватися всіма скороченими варіантами позначень для систем відліку мінливих множин, описаними в підрозділі 1.12.2 (див. після пункту 5)).

Зауваження 2.3.

▶ Із зауваження 1.125, також з системи позначень, прийнятої в параграфі 2.2.4, випливає, що для будь-якої системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ довільної кінематичної множини $\mathfrak{C}$, властивості 1.60 залишаються справедливими (але з заміною символу "$\mathcal{B}$" на символ "$\mathfrak{l}$" і терміну "базова мінлива множина" на термін "система відліку"). При

цьому *використовуються всі скорочені варіанти позначень, введених для систем відліку мінливих множин.*

► Аналогічно із системи позначень, прийнятої в параграфі 2.2.4, випливає, що для довільної кінематичної множини $\mathfrak{C}$ залишаються справедливими властивості 1.126 та наслідок 1.186, а у випадку, коли $\mathfrak{C}$ є чітко видимою, — зберігаються властивості 1.187 (але, з заміною скрізь символу $\mathcal{Z}$ на символ $\mathfrak{C}$ і терміна "мінлива множина" на термін "кінематична множина").

Твердження 2.4. *Нехай,* $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ *— кінематичні множини, причому:*

1. $\mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_2)$.
2. *Для довільних систем відліку* $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_2)$ *справедливі рівності,* $\mathfrak{C}_1 \restriction \mathfrak{l} = \mathfrak{C}_2 \restriction \mathfrak{l}$ *та* $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C}_1 \rangle = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C}_2 \rangle$.

Тоді: $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2$.

Доведення. Нехай, $\mathfrak{C}_1 = (\mathcal{Z}_1, \mathcal{G}_1)$, $\mathfrak{C}_2 = (\mathcal{Z}_2, \mathcal{G}_2)$, де $\mathcal{G}_1 = \left(\left(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}^{(1)}, k_{\mathfrak{l}}^{(1)}\right) \mid \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}_1)\right)$, $\mathcal{G}_2 = \left(\left(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}^{(2)}, k_{\mathfrak{l}}^{(2)}\right) \mid \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}_2)\right)$ — кінематичні множини, які задовольняють умови твердження 2.4. Тоді мінливі множини $\mathcal{Z}_1$ і $\mathcal{Z}_2$ задовольняють умови твердження 1.127. Отже, $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_2$.

За умовою даного твердження, для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}_1) = \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}_2)$, виконується рівність $\mathfrak{C}_1 \restriction \mathfrak{l} = \mathfrak{C}_2 \restriction \mathfrak{l}$. Отже, згідно з позначеннями, прийнятими в підрозділі 2.2.4, маємо, $\left(\mathfrak{l}\hat{\ }, \left(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}^{(1)}, k_{\mathfrak{l}}^{(1)}\right)\right) = \mathfrak{C}_1 \restriction \mathfrak{l} = \mathfrak{C}_2 \restriction \mathfrak{l} = \left(\mathfrak{l}\hat{\ }, \left(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}^{(2)}, k_{\mathfrak{l}}^{(2)}\right)\right)$. Тобто, $\left(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}^{(1)}, k_{\mathfrak{l}}^{(1)}\right) = \left(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}^{(2)}, k_{\mathfrak{l}}^{(2)}\right)$ $(\forall \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}_1) = \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}_2))$. Звідси послідовно отримуємо: $\mathcal{G}_1 = \left(\left(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}^{(1)}, k_{\mathfrak{l}}^{(1)}\right) \mid \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}_1)\right) = \left(\left(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}^{(2)}, k_{\mathfrak{l}}^{(2)}\right) \mid \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}_2)\right) = \mathcal{G}_2$, $\mathfrak{C}_1 = (\mathcal{Z}_1, \mathcal{G}_1) = (\mathcal{Z}_2, \mathcal{G}_2) = \mathfrak{C}_2$. □

Наслідок 2.5. *Нехай,* $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ *— кінематичні множини, причому:*

1. $\mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_2)$.
2. *Для довільної системи відліку* $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_2)$ *справедливі рівності:*

$$\mathsf{BG}\,(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C}_1) = \mathsf{BG}\,(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C}_2)\,; \quad \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\,(x,\, \mathfrak{C}_1) = \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\,(x,\, \mathfrak{C}_2) \quad (\forall x \in \mathfrak{Bs}(\mathfrak{l}))\,.$$

3. *Для довільних систем відліку* $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_2)$ *справедлива рівність,* $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C}_1 \rangle = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C}_2 \rangle$.

Тоді: $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2$.

Доведення. Даний наслідок випливає з твердження 2.4 та системи позначень, прийнятої в підрозділі 2.2.4. □

Основні результати підрозділу 2.2 були анонсовані в роботі [112] і опубліковані в [113, розділи 3,4,5]. Також результати підрозділу 2.2 були представлені на конференціях [94, 95, 97, 98, 114].

2.3. Перетворення координат у кінематичних множинах

Нехай, $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$ – базова кінематична множина. Введемо наступні позначення.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathbf{Tm}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) \times \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right);\\
&\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\rangle}(\omega) := \left(\mathsf{tm}\left(\omega\right), \mathsf{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}\left(\mathsf{bs}\left(\omega\right)\right)\right), \quad \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Множину $\mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$ будемо називати ***множиною Мінковського*** базової кінематичної множини $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$. Для довільного $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$ значення $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\rangle}(\omega)$ будемо називати ***координатами Мінковського*** елементарно-часового стану ω.

Якщо $\mathfrak{C}$ — довільна кінематична множина, то для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$ вводимо позначення:

$$\mathbb{M}k(\mathfrak{l};\mathfrak{C}) := \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{l}). \tag{2.3}$$

$$\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega;\mathfrak{C}) := \left(\mathsf{tm}\left(\omega\right), \mathsf{q}_{\mathfrak{l}}(\mathsf{bs}\left(\omega\right))\right) \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l};\mathfrak{C}), \quad \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}). \tag{2.4}$$

Множину $\mathbb{M}k(\mathfrak{l};\mathfrak{C})$ будемо називати ***множиною Мінковського*** системи відліку $\mathfrak{l}$ в кінематичній множині $\mathfrak{C}$. Значення $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega;\mathfrak{C})$ будемо називати ***координатами Мінковського*** елементарно-часового стану $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\right)$ ***в системі відліку*** $\mathfrak{l}$.

У тих випадках, коли наперед відомо, про яку кінематичну множину $\mathfrak{C}$ йде мова, замість позначень $\mathbb{M}k(\mathfrak{l};\mathfrak{C})$, $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega;\mathfrak{C})$ будемо використовувати позначення $\mathbb{M}k(\mathfrak{l})$, $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega)$ відповідно.

Означення 2.6. Нехай, $\mathfrak{C}$ — чітко видима кінематична множина і $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$ — довільні системи відліку $\mathfrak{C}$.

1. Відображення $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}\left(\,\cdot\,;\mathfrak{C}\right) : \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) \to \mathbb{M}k(\mathfrak{m})$, що задається формулою:

   $$\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega;\mathfrak{C}) = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\rangle}(\langle!\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle\,\omega) \quad (\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}))$$

   будемо називати **реальним перетворенням координат** з $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{m}$.
   Для елементарно-часового стану $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\right)$ значення $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega;\mathfrak{C})$ можна назвати координатами Мінковського ω у (іншій) системі відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$.

2. Відображення $\widetilde{Q} : \mathbb{M}k(\mathfrak{l}) \to \mathbb{M}k(\mathfrak{m})$ будемо називати **універсальним перетворенням координат** з $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{m}$, якщо:

   - $\widetilde{Q}$ є бієкцією з (взаємно-однозначним відображенням) між $\mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ та $\mathbb{M}k(\mathfrak{m})$.
   - Для довільного $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ справедлива рівність:

     $$\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega;\mathfrak{C}) = \widetilde{Q}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega)\right).$$

3. Будемо говорити, що системи відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ **допускають універсальне перетворення координат**, якщо існує хоч одне універсальне перетворення координат $\widetilde{Q} : \mathbb{M}k(\mathfrak{l}) \to \mathbb{M}k(\mathfrak{m})$ з $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{m}$. Якщо системи відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ допускають універсальне перетворення координат будемо використовувати позначення $\mathfrak{l} \underset{\mathfrak{C}}{\rightleftarrows} \mathfrak{m}$. У випадку, коли наперед відомо, про яку кінематичну множину $\mathfrak{C}$ йде мова, будемо використовувати позначення $\mathfrak{l} \rightleftarrows \mathfrak{m}$.

4. Індексовану сім'ю відображень $\left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathfrak{C})}$ будемо називати **універсальним перетворенням координат для кінематичної множини $\mathfrak{C}$**, якщо:

   • Для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ відображення $\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}$ є універсальним перетворенням координат з $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{m}$.

   • Для довільних $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ і $\mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ справедливі наступні рівності:

$$\widetilde{Q}_{\mathfrak{l},\mathfrak{l}}(\mathrm{w}) = \mathrm{w}; \qquad \widetilde{Q}_{\mathfrak{p},\mathfrak{m}}\left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}(\mathrm{w})\right) = \widetilde{Q}_{\mathfrak{p},\mathfrak{l}}(\mathrm{w}). \tag{2.5}$$

5. Будемо говорити, що кінематична множина $\mathfrak{C}$ **допускає універсальне перетворення координат**, якщо існує хоч одне універсальне перетворення координат $\left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathfrak{C})}$ для $\mathfrak{C}$.

Зауваження 2.7. У тих випадках, коли наперед відомо, про яку кінематичну множину $\mathfrak{C}$ йде мова, замість позначення $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega;\mathfrak{C})$ будемо використовувати позначення $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega)$.

Твердження 2.8. *Нехай $\mathfrak{C}$ — чітко видима кінематична множина. Тоді:*

1. *Для довільної $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ тотожне відображення на $\mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ ($\mathbb{I}_{[\mathfrak{l}]}(\mathrm{w}) := \mathrm{w}$ $(\mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}))$) є універсальним перетворенням координат з $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{l}$.*

2. *Якщо $\widetilde{Q}$ — універсальне перетворення координат з $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{m}$ ($\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$), то $\widetilde{Q}^{[-1]}$ — універсальне перетворення координат з $\mathfrak{m}$ в $\mathfrak{l}$* (відображення $\widetilde{Q}^{[-1]}$, обернене до $\widetilde{Q}$ існує, оскільки, за означенням 2.6 (пункт 2), $\widetilde{Q}$ є бієкцією з $\mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ на $\mathbb{M}k(\mathfrak{m})$).

3. *Якщо $\widetilde{Q}^{(\mathfrak{m},\mathfrak{l})}$ є універсальним перетворенням координат з $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{m}$, а $\widetilde{Q}^{(\mathfrak{p},\mathfrak{m})}$ — універсальним перетворенням координат з $\mathfrak{m}$ в $\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$), то композиція відображень $\widetilde{Q}^{(\mathfrak{p},\mathfrak{m})}$ і $\widetilde{Q}^{(\mathfrak{m},\mathfrak{l})}$, тобто відображення:*

$$\widetilde{Q}^{(\mathfrak{p},\mathfrak{l})}(\mathrm{w}) = \widetilde{Q}^{(\mathfrak{p},\mathfrak{m})}\left(\widetilde{Q}^{(\mathfrak{m},\mathfrak{l})}(\mathrm{w})\right) \quad (\mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}))\,.$$

   є універсальним перетворенням координат з $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{p}$.

4. *Бінарне відношення $\rightleftarrows$ є відношенням еквівалентності на множині $\mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ всіх систем відліку $\mathfrak{C}$.*

Доведення. 1. Розглянемо довільну систему відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$. Очевидно, що відображення $\mathbb{I}_{\mathfrak{l}}$ є бієкцією з $\mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ на $\mathbb{M}k(\mathfrak{l})$. Використовуючи означення 2.6 (пункт 1) та властивість 1.187(1), для довільного $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ отримуємо:

$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle}(\omega) = \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\langle ! \, \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega) = \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega) = \mathbb{I}_{[\mathfrak{l}]} \left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega) \right).$$

Отже, за означенням 2.6 (п. 2), $\mathbb{I}_{\mathfrak{l}}$ є універсальним перетворенням координат з $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{l}$.

2. Нехай, $\widetilde{Q}$ — універсальне перетворення координат з $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{m}$ ($\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$). Тоді, для довільного $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$, за означенням 2.6 (пункти 1 та 2), отримуємо: $\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \rangle}\left(\langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega\right) = \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle}(\omega) = \widetilde{Q}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega)\right)$. Звідси:

$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega) = \widetilde{Q}^{[-1]}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \rangle}\left(\langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega\right)\right).$$

Отже, для довільного $\omega_1 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m})$ ($\langle ! \, \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \, \omega_1 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$), внаслідок властивостей 1.187(1,3) будемо мати:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}\left(\langle ! \, \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \, \omega_1\right) &= \widetilde{Q}^{[-1]}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \rangle}\left(\langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \langle ! \, \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \, \omega_1\right)\right) = \\ &= \widetilde{Q}^{[-1]}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \rangle}\left(\langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \, \omega_1\right)\right) = \widetilde{Q}^{[-1]}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \rangle}\left(\omega_1\right)\right).\end{aligned}$$

Тобто, за означенням 2.6 (пункт 1), отримуємо:

$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle}\left(\omega_1\right) = \widetilde{Q}^{[-1]}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \rangle}\left(\omega_1\right)\right) \qquad (\forall \omega_1 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m})).$$

Таким чином, за означенням 2.6 (пункт 2), $\widetilde{Q}^{[-1]}$ є універсальним перетворенням координат з $\mathfrak{m}$ в $\mathfrak{l}$.

3. Нехай, $\widetilde{Q}^{(\mathfrak{m},\mathfrak{l})}$ є універсальним перетворенням координат з $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{m}$, а $\widetilde{Q}^{(\mathfrak{p},\mathfrak{m})}$ — універсальним перетворенням координат з $\mathfrak{m}$ в $\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$). Покладемо: $\widetilde{Q}^{(\mathfrak{p},\mathfrak{l})}(\mathrm{w}) := \widetilde{Q}^{(\mathfrak{p},\mathfrak{m})}\left(\widetilde{Q}^{(\mathfrak{m},\mathfrak{l})}(\mathrm{w})\right)$, $\mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$. Зрозуміло, що відображення $\widetilde{Q}^{(\mathfrak{p},\mathfrak{l})}$ є бієкцією між $\mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ та $\mathbb{M}k(\mathfrak{p})$. При цьому, використовуючи означення 2.6 (пункти 1,2) та властивості 1.187, для довільного $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle}(\omega) &= \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{p} \rangle}\left(\langle ! \, \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega\right) = \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{p} \rangle}\left(\langle ! \, \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \, \langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega\right) = \\ &= \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle}\left(\langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega\right) = \widetilde{Q}^{(\mathfrak{p},\mathfrak{m})}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \rangle}\left(\langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega\right)\right) = \\ &= \widetilde{Q}^{(\mathfrak{p},\mathfrak{m})}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle}(\omega)\right) = \widetilde{Q}^{(\mathfrak{p},\mathfrak{m})}\left(\widetilde{Q}^{(\mathfrak{m},\mathfrak{l})}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega)\right)\right) = \widetilde{Q}^{(\mathfrak{p},\mathfrak{l})}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega)\right).\end{aligned}$$

Отже, за означенням 2.6 (п. 2), $\widetilde{Q}^{(\mathfrak{p},\mathfrak{l})}$ є універс. перетворенням координат з $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{p}$.

4. Пункт 4 твердження 2.8 випливає з пунктів 1,2 та 3. □

Твердження 2.9. *Для довільної чітко видимої кінематичної множини $\mathfrak{C}$ наступні твердження рівносильні:*

1. *$\mathfrak{C}$ допускає універсальне перетворення координат.*
2. *Для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ має місце співвідношення $\mathfrak{l} \rightleftarrows \mathfrak{m}$ (тобто довільні дві системи відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ допускають універсальне перетворення координат).*

3. *Існує система відліку* $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ *така, що для довільної системи відліку* $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ *виконується співвідношення* $\mathfrak{l} \rightleftarrows \mathfrak{m}$.

Доведення. 1. Імплікація $1 \Longrightarrow 2$ випливає з означення 2.6, пункти 3 і 4.

2. За властивістю 1.126(1), множина $\mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ — непорожня. Тому, для того, щоб переконатись у справедливості імплікації $2 \Longrightarrow 3$ досить зафіксувати довільну систему відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$.

3. Отже, залишилось довести імплікацію $3 \Longrightarrow 1$. Нехай існує система відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ така, що для довільної $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ виконується співвідношення $\mathfrak{l} \rightleftarrows \mathfrak{m}$. Тоді, для довільної системи відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ існує універсальне перетворення координат $Q^{(\mathfrak{m},\mathfrak{l})} : \mathbb{M}k(\mathfrak{l}) \to \mathbb{M}k(\mathfrak{m})$ з $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{m}$. Для довільних сис. відліку $\mathfrak{m}, \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ покладемо:

$$\widetilde{Q}_{\mathfrak{p},\mathfrak{m}}(\mathrm{w}) := Q^{(\mathfrak{p},\mathfrak{l})}\left(\left(Q^{(\mathfrak{m},\mathfrak{l})}\right)^{[-1]}(\mathrm{w})\right) \qquad (\mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{m}))\,. \tag{2.6}$$

Згідно з твердженням 2.8 (пункти 2 і 3), для довільних $\mathfrak{m}, \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ відображення $\widetilde{Q}_{\mathfrak{p},\mathfrak{m}} : \mathbb{M}k(\mathfrak{m}) \to \mathbb{M}k(\mathfrak{p})$ є універсальним перетворенням координат з $\mathfrak{m}$ в $\mathfrak{p}$. Крім того, згідно з рівністю (2.6), для довільних $\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{k} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ і $\mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{m})$ отримуємо:

$$\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}}(\mathrm{w}) = Q^{(\mathfrak{m},\mathfrak{l})}\left(\left(Q^{(\mathfrak{m},\mathfrak{l})}\right)^{[-1]}(\mathrm{w})\right) = \mathrm{w};$$

$$\widetilde{Q}_{\mathfrak{k},\mathfrak{p}}\left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{p},\mathfrak{m}}(\mathrm{w})\right) = Q^{(\mathfrak{k},\mathfrak{l})}\left(\left(Q^{(\mathfrak{p},\mathfrak{l})}\right)^{[-1]}\left(Q^{(\mathfrak{p},\mathfrak{l})}\left(\left(Q^{(\mathfrak{m},\mathfrak{l})}\right)^{[-1]}(\mathrm{w})\right)\right)\right) = \widetilde{Q}_{\mathfrak{k},\mathfrak{m}}(\mathrm{w}).$$

Отже, за означенням 2.6 (пункт 4), сім'я відображень $\left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{p},\mathfrak{m}}\right)_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}\in\mathcal{L}k(\mathfrak{C})}$ є універсальним перетворенням координат для кінематичної множини $\mathfrak{C}$. Тому, за означенням 2.6 (пункт 5), $\mathfrak{C}$ допускає універсальне перетворення координат. □

Приклади кінематичних множин, що допускають універсальне перетворення координат буде наведено в розділі 2.5. В розділі 2.6 буде доведено існування кінематичних множин, що не допускають універсального перетворення координат. Отже (згідно з твердженням 2.9) існує кінематична множина $\mathfrak{C}$, в якій деякі системи відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ не допускають універсального перетворення координат. Наступною метою є встановлення необхідної і достатньої умови існування універсального перетворення координат між системами відліку чітко видимих кінематичних множин. Нижче вводяться поняття, необхідні для того, щоб це зробити.

Нехай, $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$ — будь-яка базова кінематична множина. Для довільної множини $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$ покладемо:

$$\mathfrak{tr}\mathfrak{j}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}[A] := \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\rangle}(A) = \left\{\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\rangle}(\omega) \,|\, \omega \in A\right\} \subseteq \mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right). \tag{2.7}$$

Множину $\mathfrak{tr}\mathfrak{j}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}[A]$ будемо називати ***траєкторією*** множини $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$. Для до-

вільної базової кінематичної множини $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$ покладемо:

$$\mathbb{T}\mathbf{rj}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathfrak{tr}\mathfrak{j}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}\left[\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right] = \left\{\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\rangle}(\omega) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right\} \subseteq \mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right),$$
$$\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) \setminus \mathbb{T}\mathbf{rj}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right).$$

Множину $\mathbb{T}\mathbf{rj}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$ будемо називати ***(загальною) траєкторією*** базової кінематичної множини $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$, а множину $\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$ — ***доповненням (загальної) траєкторії*** $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$. Відповідно для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$ довільної кінематичної множини $\mathfrak{C}$ можна визначити ***траєкторією*** довільної ***мінливої системи*** $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$, а також ***(загальну) траєкторію*** і ***доповнення (загальної) траєкторії системи відліку*** $\mathfrak{l}$:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{tr}\mathfrak{j}_{\mathfrak{l}}\left[A;\, \mathfrak{C}\right] := \mathfrak{tr}\mathfrak{j}_{\mathfrak{C}\restriction\mathfrak{l}}\left[A\right] = \left\{\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega) \mid \omega \in A\right\};\\
&\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C}) := \mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{C}\restriction\mathfrak{l}) = \left\{\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\right\};\\
&\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C}) := \overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{C}\restriction\mathfrak{l}) = \mathbb{M}k(\mathfrak{l}) \setminus \mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C})
\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

(у тих випадках, коли кінематична множина $\mathfrak{C}$ є наперед відомою, замість позначень $\mathfrak{tr}\mathfrak{j}_{\mathfrak{l}}\left[A;\, \mathfrak{C}\right]$, $\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C})$, $\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C})$ будемо використовувати позначення $\mathfrak{tr}\mathfrak{j}_{\mathfrak{l}}\left[A\right]$, $\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l})$, $\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{l})$ відповідно).

Теорема 2.10. *Нехай $\mathfrak{C}$ — чітко видима кінематична множина. Системи відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$ допускають універсальне перетворення координат (тобто $\mathfrak{l} \rightleftarrows \mathfrak{m}$) тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:*

1. $\mathbf{card}\left(\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{l})\right) = \mathbf{card}\left(\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{m})\right)$.
2. *Для довільних елементарно-часових станів $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ рівність $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}\left(\omega_1\right) = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}\left(\omega_2\right)$ справедлива тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\omega_1\right) = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\omega_2\right)$.*

Доведення. **1.** Нехай $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$ і $\mathfrak{l} \rightleftarrows \mathfrak{m}$. Тоді, за означенням 2.6 існує бієкція $\widetilde{Q} : \mathbb{M}k(\mathfrak{l}) \to \mathbb{M}k(\mathfrak{m})$ така, що для довільного елементарно-часового стану $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ справедлива рівність:

$$\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega) = \widetilde{Q}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega)\right). \tag{2.9}$$

1.a) Використовуючи означення загальної траєкторії системи відліку (див. (2.8)), властивості 1.187(1,3) означення 2.6 (пункт 1) та рівність (2.9) отримуємо:

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{m}) &= \left\{\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\rangle}(\omega) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m})\right\} = \left\{\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\rangle}\left(\langle!\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle\langle!\,\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}\rangle\,\omega\right) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m})\right\} =\\
&= \left\{\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\rangle}\left(\langle!\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle\,\omega_1\right) \mid \omega_1 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\right\} = \left\{\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}\left(\omega_1\right) \mid \omega_1 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\right\} =\\
&= \left\{\widetilde{Q}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\omega_1\right)\right) \mid \omega_1 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\right\} = \widetilde{Q}(\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l})).
\end{aligned}$$

Тому, згідно з (2.8), враховуючи, що $\widetilde{Q}$ — бієкція між $\mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ та $\mathbb{M}k(\mathfrak{m})$, маємо:

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{m}) &= \mathbb{M}k(\mathfrak{m}) \setminus \mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{m}) = \\ &= \widetilde{Q}(\mathbb{M}k(\mathfrak{l})) \setminus \widetilde{Q}(\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l})) = \widetilde{Q}(\mathbb{M}k(\mathfrak{l}) \setminus \mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l})) = \widetilde{Q}(\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{l})).\end{aligned}$$

Звідси, оскільки $\widetilde{Q}$ — бієкція, випливає, що $\mathbf{card}\left(\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{m})\right) = \mathbf{card}\left(\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{l})\right)$.

1.б) Нехай, $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ і $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega_1) = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega_2)$. Тоді, згідно з (2.9) отримуємо:

$$\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega_1) = \widetilde{Q}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega_1)\right) = \widetilde{Q}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega_2)\right) = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega_2).$$

Навпаки, якщо $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega_1) = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega_2)$, то, згідно (2.9), маємо, $\widetilde{Q}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega_1)\right) = \widetilde{Q}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega_2)\right)$, а отже, оскільки $\widetilde{Q}$ — бієкція, $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega_1) = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega_2)$.

2. Навпаки, нехай для систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ виконуються умови 1,2 даної теореми. Для $\mathrm{w} = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\omega \in \mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l})$, де $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ покладемо:

$$\widetilde{Q}_0(\mathrm{w}) := \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega). \tag{2.10}$$

З означення (2.8) траєкторії системи відліку та другої умови даної теореми випливає, що формула (2.10) коректним чином визначає відображення $\widetilde{Q}_0 : \mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l}) \to \mathbb{M}k(\mathfrak{m})$. Доведемо, що це відображення є бієкцією між $\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l})$ і $\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{m})$. Згідно з означенням 2.6 (п. 1) та рівностями (2.8), для довільного $\mathrm{w} = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\omega \in \mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l})$ $(\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}))$ маємо:

$$\widetilde{Q}_0(\mathrm{w}) = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega) = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\rangle}\left(\langle!\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle\,\omega\right) \in \mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{m}). \tag{2.11}$$

Крім того, використовуючи властивості 1.187, для довільного $\mathrm{w}_1 = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\rangle}(\omega_1) \in \mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{m})$ $(\omega_1 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m}))$ отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathrm{w}_1 &= \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\rangle}(\omega_1) = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\rangle}\left(\langle!\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle\,\langle!\,\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}\rangle\,\omega_1\right) = \\ &= \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}\left(\langle!\,\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}\rangle\,\omega_1\right) = \widetilde{Q}_0\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\langle!\,\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}\rangle\,\omega_1\right)\right), \\ &\quad \text{де} \quad \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\langle!\,\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}\rangle\,\omega_1\right) \in \mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l}).\end{aligned} \tag{2.12}$$

Із (2.11) та (2.12) випливає, що $\widetilde{Q}_0$ є відображенням з $\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l})$ на $\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{m})$. З другої умови теореми випливає, що для довільних $\mathrm{w}, \mathrm{w}' \in \mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l})$ таких, що $\mathrm{w} \neq \mathrm{w}'$ виконується умова $\widetilde{Q}_0(\mathrm{w}) \neq \widetilde{Q}_0(\mathrm{w}')$. Отже, відображення $\widetilde{Q}_0$ є бієкцією між $\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l})$ та $\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{m})$.

За умовою теореми, множини $\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{l})$ та $\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{m})$ — рівнопотужні. Тому, існує бієкція $\widetilde{Q}_1 : \overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{l}) \to \overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{m})$ між $\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{l})$ і $\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{m})$. За означенням загальної траєкторії системи відліку (2.8), маємо рівність, $\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l}) \sqcup \overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{l}) = \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ (де символ "$\sqcup$" означає диз'юнктне об'єднання). Отже, для $\omega \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ можна покласти:

$$\widetilde{Q}(\mathrm{w}) := \begin{cases} \widetilde{Q}_0(\mathrm{w}), & \mathrm{w} \in \mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l}) \\ \widetilde{Q}_1(\mathrm{w}), & \mathrm{w} \in \overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{l}). \end{cases} \tag{2.13}$$

$\widetilde{Q}$ є бієкцією між $\mathbb{M}k(\mathfrak{l}) = \mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l}) \sqcup \overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{l})$ та $\mathbb{M}k(\mathfrak{m}) = \mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{m}) \sqcup \overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{m})$. Крім того, для довільного $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$, за означенням відображень $\widetilde{Q}$ та $\widetilde{Q}_0$ отримуємо:

$$\widetilde{Q}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega)\right) = \widetilde{Q}_0\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega)\right) = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega).$$

Отже, за означенням 2.6, $\widetilde{Q}$ є універсальним перетворенням координат з $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{m}$. □

Зауваження 2.11. Універсальне перетворення координат між двома системами відліку кінематичної множини (якщо воно існує) визначається, взагалі кажучи, неоднозначно. Справді, нехай системи відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ кінематичної множини $\mathfrak{C}$ задовольняють такі умови:

$$\mathfrak{l} \rightleftarrows \mathfrak{m} \quad \text{і} \quad \mathbf{card}\left(\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{l})\right) = \mathbf{card}\left(\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{m})\right) \geq 2.$$

Тоді існує багато бієкцій між $\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{l})$ та $\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{m})$. Отже, універсальне перетворення координат в формулі (2.13) визначається неоднозначно.

Основні результати підрозділу 2.3 були анонсовані в роботі [112] і опубліковані в [113, розділ 6], а також представлені на конференціях [94, 95, 114].

2.4. Теорема про мультиобраз для кінематичних множин

В даному підрозділі буде доведено теорему про мультиобраз для кінематичних множин, яка необхідна для побудови математично строгих моделей кінематики спеціальної теорії відносності, а також її тахіонових розширень, в яких дозволяється надсвітловий рух для систем відліку.

Означення 2.12.

1. Упорядковану п'ятірку $(\mathbb{T}, \mathcal{X}, U, \mathfrak{Q}, k)$ будемо називати **кінематичним проектором** для базової мінливої множини $\mathcal{B}$, якщо:

   1.1. $(\mathbb{T}, \mathcal{X}, U)$ — еволюційний проектор для $\mathcal{B}$.

   1.2. $\mathfrak{Q}$ — координатний простір.

   1.3. k — відображення з $\mathcal{X}$ в $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$.

   ▶▶ У випадку, коли $(\mathbb{T}, \mathcal{X}, U)$ є ін'єктивним еволюційним проектором для $\mathcal{B}$, кінематичний проектор $(\mathbb{T}, \mathcal{X}, U, \mathfrak{Q}, k)$ будемо називати **ін'єктивним**.

2. Довільну індексовану сім'ю $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha, \mathfrak{Q}_\alpha, k_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$ (де $\mathcal{A} \neq \emptyset$), що складається з ін'єктивних кінематичних проекторів для базової мінливої множини $\mathcal{B}$ будемо називати **кінематичним мультипроектором** для $\mathcal{B}$.

Зауваження 2.13. Враховуючи, що в цій роботі розглядатимуться лише ін'єктивні кінематичні проектори, надалі замість терміну "ін'єктивний кінематичний проектор" будемо використовувати термін "кінематичний проектор".

Нехай $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha, \mathfrak{Q}_\alpha, k_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$ — довільний кінематичний мультипроектор для $\mathcal{B}$. Покладемо:

$$\mathfrak{P}^{[e]} := ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}).$$

За означеннями 2.12 та 1.138, $\mathfrak{P}^{[e]}$ є еволюційним мультипроектором для $\mathcal{B}$.

Теорема 2.14. *Нехай, $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha, \mathfrak{Q}_\alpha, k_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$ — кінематичний мультипроектор для базової мінливої множини $\mathcal{B}$. Тоді:*

А) *Існує, причому єдина, кінематична множина $\mathfrak{C}$, що задовольняє такі умови:*

1. $\mathbb{BE}(\mathfrak{C}) = \mathcal{Z}\mathsf{im}\left[\mathfrak{P}^{[e]}, \mathcal{B}\right]$.
2. *Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} = (\alpha, U_\alpha[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ (де $\alpha \in \mathcal{A}$) виконуються наступні рівності:*

$$\textbf{2.1)}\ \mathsf{BG}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{Q}_\alpha; \qquad \textbf{2.2)}\ \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}(x) = k_\alpha(x) \quad (x \in \mathfrak{Bs}(\mathfrak{l})).$$

Б) *Кінематична множина $\mathfrak{C}$, що задовольняє умови 1,2 є чітко видимою.*

Доведення. Нехай, $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha, \mathfrak{Q}_\alpha, k_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$ (де $\mathbb{T}_\alpha = (\mathbf{T}_\alpha, \leq_\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{A}$) — кінематичний мультипроектор для $\mathcal{B}$.

А) Покладемо:

$$\mathcal{Z} := \mathcal{Z}\mathsf{im}\left[\mathfrak{P}^{[e]}, \mathcal{B}\right].$$

Тоді, за теоремою 1.139, маємо, $\mathcal{L}k(\mathcal{Z}) = \{(\alpha, U_\alpha[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$. Зафіксуємо довільну систему відліку $\mathfrak{l} = (\alpha, U_\alpha[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ (де $\alpha \in \mathcal{A}$). Покладемо:

$$\mathfrak{Q}^{(\mathfrak{l})} := \mathfrak{Q}_\alpha.$$

П'ятірка $(\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha, \mathfrak{Q}_\alpha, k_\alpha)$ є кінематичним проектором, а отже, за означенням 2.12, трійка $(\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha) = ((\mathbf{T}_\alpha, \leq_\alpha), \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha)$ є еволюційним проектором для $\mathcal{B}$. Тому, за означенням еволюційного проектора (означення 1.132), U_α є відображенням виду $U_\alpha : \mathbb{Bs}(\mathcal{B}) \to \mathbf{T}_\alpha \times \mathcal{X}_\alpha$. Отже, за властивістю 1.145(3), отримуємо, $\mathfrak{Bs}(\mathfrak{l}) = \{\mathsf{bs}(U_\alpha(\omega)) \mid \omega \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})\} \subseteq \mathcal{X}_\alpha$. Для довільного $x \in \mathfrak{Bs}(\mathfrak{l})$ покладемо:

$$k^{(\mathfrak{l})}(x) := k_\alpha(x).$$

За означенням кінематичного проектора (означення 2.12), k_α є відображенням з $\mathcal{X}_\alpha$ в $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_\alpha) = \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}^{(\mathfrak{l})}\right)$. Отже, $k^{(\mathfrak{l})}$ — відображення з $\mathfrak{Bs}(\mathfrak{l})$ в $\mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}^{(\mathfrak{l})}\right)$. Тому, враховуючи довільність сист. відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$, за означенням 2.2 (п. 2), отримуємо, що пара

$$\mathfrak{C} = \left(\mathcal{Z},\ \left(\left(\mathfrak{Q}^{(\mathfrak{l})},\ k^{(\mathfrak{l})}\right) \mid \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})\right)\right) \tag{2.14}$$

є кінематичною множиною. Звідси, враховуючи систему позначень, прийняту в підрозділі 2.2.4, отримуємо:

$$\mathbb{BE}(\mathfrak{C}) = \mathcal{Z} = \mathcal{Z}\mathsf{im}\left[\mathfrak{P}^{[e]}, \mathcal{B}\right],$$

і для довільної системи відліку $\mathfrak{l} = (\alpha, U_\alpha[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$, де $\alpha \in \mathcal{A}$ маємо:

$$\mathsf{BG}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{Q}^{(\mathfrak{l})} = \mathfrak{Q}_\alpha; \quad \mathfrak{q}_\mathfrak{l}(x) = k^{(\mathfrak{l})}(x) = k_\alpha(x) \quad (x \in \mathfrak{Bs}(\mathfrak{l})).$$

Отже, кінематична множина $\mathfrak{C}$ задовольняє умови 1,2 пункту **A)** теореми 2.14.

Доведемо, що кінематична множина $\mathfrak{C}$, що задовольняє умови 1,2 пункту **A)** теореми 2.14 єдина. Припустимо, що кінематична множина $\mathfrak{C}_1$ також задовольняє умови 1,2 пункту **A)** теореми 2.14. Тоді, за умовою 1 пункту **A)** теореми 2.14, $\mathbb{BE}(\mathfrak{C}) = \mathcal{Z} = \mathbb{BE}(\mathfrak{C}_1)$. Отже,

$$\mathcal{L}k(\mathfrak{C}) = \mathcal{L}k(\mathcal{Z}) = \mathcal{L}k(\mathfrak{C}_1),$$

причому, для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C}) = \mathcal{L}k(\mathfrak{C}_1)$ маємо:

$$\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C} \rangle = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{Z} \rangle = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C}_1 \rangle.$$

Далі, за умовою 2 пункту **A)** теореми 2.14, для довільної системи відліку $\mathfrak{l} = (\alpha, U_\alpha[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C}) = \mathcal{L}k(\mathfrak{C}_1)$ отримуємо:

$$\mathsf{BG}(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C}) = \mathfrak{Q}_\alpha = \mathsf{BG}(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C}_1); \quad \mathfrak{q}_\mathfrak{l}(x,\, \mathfrak{C}) = k_\alpha(x) = \mathfrak{q}_\mathfrak{l}(x,\, \mathfrak{C}_1) \ \ (x \in \mathfrak{Bs}(\mathfrak{l})).$$

Звідси, за наслідком 2.5, маємо, $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1$.

Б) Нагадаємо, що поняття *чітко видимої*, кінематичної множини було введено в пункті г) підрозділу 2.2.4. Згідно з наслідком 1.169, мінлива множина $\mathcal{Z}$ є чітко видимою. Отже, кінематична множина $\mathfrak{C}$, що задається формулою (2.14), згідно з пунктом г) підрозділу 2.2.4, також є чітко видимою. □

Означення 2.15. Нехай, $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha, \mathfrak{Q}_\alpha, k_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$ — кінематичний мультипроектор для базової мінливої множини $\mathcal{B}$. Кінематичну множину $\mathfrak{C}$, що задовольняє умови 1,2 теореми 2.14 будемо називати **кінематичним мультиобразом** базової мінливої множини $\mathcal{B}$ відносно кінематичного мультипроектора $\mathfrak{P}$, і будемо позначати її через $\mathfrak{Kim}[\mathfrak{P}, \mathcal{B}]$:

$$\mathfrak{Kim}[\mathfrak{P}, \mathcal{B}] := \mathfrak{C}.$$

Використовуючи властивості 1.145, наслідок 1.188 та теорему 2.14, отримуємо наступні властивості кінематичного мультиобразу базової мінливої множини.

Властивості 2.16. ***Нехай*** $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha, \mathfrak{Q}_\alpha, k_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$ *— кінематичний мультипроектор для* $\mathcal{B}$ *(де* $\mathbb{T}_\alpha = (\mathbf{T}_\alpha, \leq_\alpha)$ $(\alpha \in \mathcal{A})$*), причому* $\mathfrak{C} = \mathfrak{Kim}[\mathfrak{P}, \mathcal{B}]$. ***Тоді:***

1. $\mathcal{L}k(\mathfrak{C}) = \{(\alpha, U_\alpha[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$.
2. $\mathcal{I}nd(\mathfrak{C}) = \mathcal{A}$.
3. *Для довільної сист. відліку* $\mathfrak{l} = (\alpha, U_\alpha[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ *справедливі рівності:*

$$\mathbb{Bs}(\mathfrak{l}) = U_\alpha(\mathbb{Bs}(\mathcal{B})) = \{U_\alpha(\omega) \mid \omega \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})\};$$

$$\mathfrak{Bs}(\mathfrak{l}) = \{\mathsf{bs}(U_\alpha(\omega)) \mid \omega \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})\};$$

$$\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}) = \mathbb{T}_\alpha; \quad \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) = \mathbf{T}_\alpha;$$

$$\mathbf{Zk}(\mathfrak{l}) = \mathbf{Zk}(\mathsf{BG}(\mathfrak{l})) = \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_\alpha); \quad \mathbb{M}k(\mathfrak{l}) = \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{l}) = \mathbf{T}_\alpha \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_\alpha);$$

$$\mathfrak{q}_\mathfrak{l}(x) = k_\alpha(x) \quad (x \in \mathfrak{Bs}(\mathfrak{l}));$$

$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega) = (\mathsf{tm}(\omega), \mathfrak{q}_\mathfrak{l}(\mathsf{bs}(\omega))) = (\mathsf{tm}(\omega), k_\alpha(\mathsf{bs}(\omega))) \quad (\omega \in \mathbb{Bs}(\mathfrak{l})).$$

4. *Нехай,* $\mathfrak{l} = (\alpha, U_\alpha[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$, *де* $\alpha \in \mathcal{A}$. *Якщо* $\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ *і* $\mathsf{tm}(\widetilde{\omega}_1) \neq \mathsf{tm}(\widetilde{\omega}_2)$, *то* $\widetilde{\omega}_1$ *і* $\widetilde{\omega}_2$ *є об'єднані долею в* $\mathfrak{l}$ *тоді і тільки тоді, коли існують* $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ *такі, що* ω_1, ω_2 *об'єднані долею в* $\mathcal{B}$ *і* $\widetilde{\omega}_i = U_\alpha(\omega_i)$ $(i \in \overline{1,2})$.

5. *Для довільних систем відліку* $\mathfrak{l} = (\alpha, U_\alpha[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$, $\mathfrak{m} = (\beta, U_\beta[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\beta]) \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ $(\alpha, \beta \in \mathcal{A})$ *справедлива наступна рівність:*

$$\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathfrak{C} \rangle\, \omega = U_\beta\left(U_\alpha^{[-1]}(\omega)\right) \quad (\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = U_\alpha(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}))).$$

Нехай, $\mathfrak{Q}$ — координатний простір, а $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина така, що $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ (така базова мінлива множина $\mathcal{B}$ обов'язково існує, оскільки, наприклад, можна покласти $\mathcal{B} := \mathcal{A}t(\mathbb{T}, \mathcal{R})$, де $\mathcal{R}$ — система абстрактних траєкторій з лінійно упорядкованої множини $\mathbb{T}$ в множину $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$). Нагадаємо, що означення базової мінливої множини типу $\mathcal{A}t(\mathbb{T}, \mathcal{R})$ можна знайти в прикладі 1.62 (див., також, теорему 1.63). Нехай, $\mathbb{U}$ — довільна трансформуюча множина бієкцій відносно $\mathcal{B}$ на $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ (в сенсі прикладу 1.146). Тоді довільне відображення $\mathbf{U} \in \mathbb{U}$ є (бієктивним) відображенням виду, $\mathbf{U} : \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}) \longleftrightarrow \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$, де $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$. Отже, трансформуюча множина бієкцій $\mathbb{U}$ породжує кінематичний мультипроектор $\widehat{\mathbb{U}} := \left(\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}), \mathbf{U}, \mathfrak{Q}, \mathbb{I}_{\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})}\right) \mid \mathbf{U} \in \mathbb{U}\right)$ для базової мінливої множини $\mathcal{B}$, де $\mathbb{I}_{\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})}$ — тотожне відображення на $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$. Позначимо:

$$\mathfrak{Kim}(\mathbb{U}, \mathcal{B}, \mathfrak{Q}) := \mathfrak{Kim}\left[\widehat{\mathbb{U}}, \mathcal{B}\right]. \tag{2.15}$$

Теорема 2.17. *Кінематична множина* $\mathfrak{C} = \mathfrak{Kim}(\mathbb{U}, \mathcal{B}, \mathfrak{Q})$ *допускає універсальне перетворення координат. При цьому множина систем відліку* $\mathfrak{C}$ *має вигляд,* $\mathcal{L}k(\mathfrak{C}) = ((\mathbf{U}, \mathbf{U}[\mathcal{B}]) \mid \mathbf{U} \in \mathbb{U})$, *а система відображень* $\left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})}$ *виду:*

$$\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}(\mathrm{w}) = \mathbf{V}\left(\mathbf{U}^{[-1]}(\mathrm{w})\right), \quad \mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}) = \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}) \tag{2.16}$$
$$(\,\mathfrak{l} = (\mathbf{U}, \mathbf{U}[\mathcal{B}]) \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C}), \quad \mathfrak{m} = (\mathbf{V}, \mathbf{V}[\mathcal{B}]) \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})\,)$$

є універсальним перетворенням координат для $\mathfrak{C}$.

Доведення. Нехай, $\mathfrak{Q}$ — координатний простір і $\mathbb{U}$ — трансформуюча множина бієкцій відносно базової мінливої множини $\mathcal{B}$ ($\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$) на $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$. Покладемо, $\mathfrak{C} := \mathfrak{Kim}(\mathbb{U}, \mathcal{B}, \mathfrak{Q})$. Тоді, $\mathfrak{C} = \mathfrak{Kim}\left[\widehat{\mathbb{U}}, \mathcal{B}\right]$, де $\widehat{\mathbb{U}} = \left(\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}), \mathbf{U}, \mathfrak{Q}, \mathbb{I}_{\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})}\right) \mid \mathbf{U} \in \mathbb{U}\right)$. Отже, згідно з властивістю 2.16(1), маємо, $\mathcal{L}k(\mathfrak{C}) = \{(\mathbf{U}, \mathbf{U}[\mathcal{B}]) \mid \mathbf{U} \in \mathbb{U}\}$. А, використовуючи властивість 2.16(3), для довільної системи відліку $\mathfrak{l} = (\mathbf{U}, \mathbf{U}[\mathcal{B}]) \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ отримуємо: $\mathfrak{Bs}(\mathfrak{l}) = \{\mathsf{bs}(\mathbf{U}(\omega)) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})\} \subseteq \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$. Звідси, за теоремою 2.14, маємо $\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}(x, \mathfrak{C}) = x \quad (\forall\, x \in \mathfrak{Bs}(\mathfrak{l}))$. Отже:

$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega; \mathfrak{C}) = (\mathsf{tm}(\omega), \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}(\mathsf{bs}(\omega))) = (\mathsf{tm}(\omega), \mathsf{bs}(\omega)) = \omega \quad (\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C}),\ \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})).$$

Застосовуючи останню рівність, а також властивість 2.16(5), для довільних систем відліку $\mathfrak{l} = (\mathbf{U}, \mathbf{U}[\mathcal{B}]) \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$, $\mathfrak{m} = (\mathbf{V}, \mathbf{V}[\mathcal{B}]) \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ $(\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{U})$, отримуємо:

$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle}(\omega; \mathfrak{C}) = \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \rangle}(\langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega) = \langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega =$$
$$= \mathbf{V}\left(\mathbf{U}^{[-1]}(\omega)\right) = \mathbf{V}\left(\mathbf{U}^{[-1]}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega)\right)\right) = \widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega)\right).$$

Неважко перевірити, що система відображень $\left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})}$ задовольняє умови (2.5). Тому, за означенням 2.6 (пункт 4), $\left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})}$ є універсальним перетворенням координат для $\mathfrak{C}$. □

Основні результати підрозділу 2.4 були анонсовані в [112] і опубліковані в [100, підрозділ 6.3], а також представлені на конференціях [94, 95].

2.5. Кінематичні множини, породжені спеціальною теорією відносності та її узагальненнями

Даний підрозділ суттєво використовує результати робіт [110, 111]. Результати цих робіт детально викладені в додатку А. Отже, для розуміння даного підрозділу необхідно ознайомитись з додатком А або роботами [110, 111].

Нехай, $(\mathfrak{H}, \|\cdot\|, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ — дійсний гільбертовий простір. Тоді $\mathfrak{H}$ породжує координатний простір $\widehat{\mathfrak{H}} = (\mathfrak{H}, \mathcal{T}_{\mathfrak{H}}, \oplus_{\mathfrak{H}}, \otimes_{\mathfrak{H}})$, де $\rho_{\mathfrak{H}}$ і $\mathcal{T}_{\mathfrak{H}}$ — метрика та топологія, породжені нормою $\|\cdot\|$ на $\mathfrak{H}$, а $(\oplus_{\mathfrak{H}}, \otimes_{\mathfrak{H}})$ — природна лінійна структура простору $\mathfrak{H}$.

Позначимо через $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ простір лінійних (однорідних) неперервних операторів над $\mathfrak{H}$, а через $\mathcal{L}^{\times}(\mathfrak{H})$ простір всіх операторів афінних перетворень простору $\mathfrak{H}$, тобто $\mathcal{L}^{\times}(\mathfrak{H}) = \left\{\mathbf{A}_{[\mathbf{a}]} \mid \mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}), \mathbf{a} \in \mathfrak{H}\right\}$, де $\mathbf{A}_{[\mathbf{a}]}x = \mathbf{A}x + \mathbf{a}$, $x \in \mathfrak{H}$. Нагадаємо, також, що простором ***Мінковського*** над $\mathfrak{H}$ називається гільбертовий простір $\mathcal{M}(\mathfrak{H}) = \mathbb{R} \times \mathfrak{H} = \{(t, x) \mid t \in \mathbb{R}, x \in \mathfrak{H}\}$, оснащений скалярним добутком та нормою: $\langle \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \rangle = \langle \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \rangle_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})} = t_1 t_2 + \langle x_1, x_2 \rangle$, $\|\mathrm{w}_1\| = \|\mathrm{w}_1\|_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})} = \left(t_1^2 + \|x_1\|^2\right)^{1/2}$ (де $\mathrm{w}_i = (t_i, x_i) \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$, $i \in \{1, 2\}$), див. додаток А, підрозділ А.1.1.

Позначимо через $\mathbf{Pk}(\mathfrak{H})$ множину всіх операторів $\mathbf{S} \in \mathcal{L}^{\times}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$, що мають неперервний обернений оператор $\mathbf{S}^{-1} \in \mathcal{L}^{\times}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$. Оператори $\mathbf{S} \in \mathbf{Pk}(\mathfrak{H})$ будемо називати ***операторами (афінного) перетворення координат***.

Нагадаємо, що в підрозділі А.2 (формула (А.155)) для довільних $c \in (0, \infty]$, $\lambda \in [0, \infty] \setminus \{c\}$, $s \in \{-1, 1\}$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$ і $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ було введено оператор лінійного перетворення координат $\mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J] \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$. Для довільних фіксованих значень $c \in (0, \infty]$, $\lambda \in [0, \infty] \setminus \{c\}$, $s \in \{-1, 1\}$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ і $\mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ введемо наступний оператор:

$$\mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J; \mathbf{a}]\mathrm{w} := \mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J](\mathrm{w} + \mathbf{a}) \quad (\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})). \tag{2.17}$$

Наслідок 2.18. *Нехай* $c \in (0,\infty]$, $\lambda \in [0,\infty] \setminus \{c\}$, $s \in \{-1,1\}$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, *і* $\mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$. *Тоді* $\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}] \in \mathbf{Pk}(\mathfrak{H})$.

Доведення. Досить довести, що для $c \in (0,\infty]$, $\lambda \in [0,\infty] \setminus \{c\}$, $s \in \{-1,1\}$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$ і $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ ***оператор*** $\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J]$ ***має неперервний обернений*** $\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J]^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$, оскільки з існування оберненого оператора виду $\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J]^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$ легко довести існування оператора $\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]^{-1} \in \mathcal{L}^{\times}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$ (для будь-якого $\mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$), а також формулу:

$$\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]^{-1}\,\mathrm{w} = \mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J]^{-1}\,\mathrm{w} - \mathbf{a} \qquad (\forall \mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}))\,.$$

У випадку $c < \infty$ виділене жирним шрифтом твердження було доведено в додатку A.2 (див. наслідок A.41). А у випадку $c = \infty$ зазначене твердження випливає з твердження A.51. □

Для $0 < c \leq \infty$ введемо наступні класи операторів:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{PT}(\mathfrak{H},c) &:= \big\{\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}] \mid s \in \{-1,1\}\,,\\
&\qquad \lambda \in [0,\infty] \setminus \{c\},\ \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)\,,\ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)\,,\ \mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})\big\};\\
\mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H},c) &:= \{\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}] \in \mathfrak{PT}(\mathfrak{H},c) \mid s = 1\}\,;\\
\mathfrak{P}(\mathfrak{H},c) &:= \{\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}] \in \mathfrak{PT}(\mathfrak{H},c) \mid \lambda < c\}\,;\\
\mathfrak{P}_+(\mathfrak{H},c) &:= \{\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}] \in \mathfrak{P}(\mathfrak{H},c) \mid s = 1\}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

Легко бачити, що $\mathfrak{PT}(\mathfrak{H},\infty) = \mathfrak{P}(\mathfrak{H},\infty)$, $\mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H},\infty) = \mathfrak{P}_+(\mathfrak{H},\infty)$, а також:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{PT}(\mathfrak{H},c) &= \{\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}] \mid \mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)\,,\ \mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})\}\,;\\
\mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H},c) &= \{\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}] \mid \mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J] \in \mathfrak{OT}_+(\mathfrak{H},c)\,,\ \mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})\}\,;\\
\mathfrak{P}(\mathfrak{H},c) &= \{\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}] \mid \mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J] \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H},c)\,,\ \mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})\}\,;\\
\mathfrak{P}_+(\mathfrak{H},c) &= \{\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}] \mid \mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J] \in \mathfrak{O}_+(\mathfrak{H},c)\,,\ \mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})\}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

Підсумовуючи результати, отримані в твердженнях A.5, A.22, наслідках A.52, A.53 і використовуючи формули (2.19), (2.17), приходимо до наступного висновку:

Наслідок 2.19. *Для довільного значення* $c \in (0,\infty]$ *класи операторів* $\mathfrak{P}(\mathfrak{H},c)$ *і* $\mathfrak{P}_+(\mathfrak{H},c)$ *утворюють групи над простором* $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$.
(підкреслимо, що $\mathfrak{P}(\mathfrak{H},c)\,,\mathfrak{P}_+(\mathfrak{H},c) \subseteq \mathcal{L}^{\times}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$.)

Зауваження 2.20. У випадку $\mathfrak{H} = \mathbb{R}^3$, $c < \infty$ група операторів $\mathfrak{P}_+(\mathfrak{H},c)$ являє собою відому групу Пуанкаре (означення класичної групи Пуанкаре див, наприклад, [115, 116]). У випадку $\mathfrak{H} = \mathbb{R}^3$, $c = \infty$ група операторів $\mathfrak{P}_+(\mathfrak{H},\infty)$ збігається з (класичною) групою Галілея (означення групи Галілея, див, наприклад, [115–117]).

Застосовуючи наслідки A.44 і A.50, та формули (2.19) і (2.17) отримуємо:

Наслідок 2.21. *Для довільного $c \in (0, \infty)$ справедливі наступні твердження:*

1. *Клас $\mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H}, c)$ не утворює групу операторів над простором $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$.*
2. *Якщо $\dim(\mathfrak{H}) > 1$, то клас $\mathfrak{PT}(\mathfrak{H}, c)$ не утворює групу операторів над $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$.*

Доведення. Справді, припустимо, що клас операторів $\mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H}, c)$ є групою. Тоді множина операторів $\mathfrak{OT}_+(\mathfrak{H}, c) = \{\mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J; \mathbf{a}] \in \mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H}, c) \mid \mathbf{a} = \mathbf{0}\}$ повинна бути підгрупою групи $\mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H}, c)$, що суперечить наслідку A.44. Аналогічно, приходимо до суперечності з наслідком A.50, якщо припустимо, що $\dim(\mathfrak{H}) > 1$ і клас операторів $\mathfrak{PT}(\mathfrak{H}, c)$ є групою. □

Нехай, $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина така, що $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathfrak{H} = \mathbf{Zk}\left(\widehat{\mathfrak{H}}\right)$ і $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \leq)$, де $\leq$ — стандартний порядок на полі дійсних чисел $\mathbb{R}$ [2.1]. Тоді $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{R} \times \mathfrak{H} = \mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Довільна множина $\mathbb{S} \subseteq \mathbf{Pk}(\mathfrak{H})$ є трансформуючою множиною бієкцій відносно $\mathcal{B}$ на $\mathfrak{H} = \mathbf{Zk}\left(\widehat{\mathfrak{H}}\right)$ (в сенсі, означеному в прикладі 1.146). Отже, можна покласти:

$$\mathfrak{Kim}(\mathbb{S}, \mathcal{B}; \mathfrak{H}) := \mathfrak{Kim}\left(\mathbb{S}, \mathcal{B}, \widehat{\mathfrak{H}}\right),$$

де $\mathfrak{Kim}\left(\mathbb{S}, \mathcal{B}, \widehat{\mathfrak{H}}\right)$ — кінематична множина, що визначається формулою (2.15). З теореми 2.17 отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 2.22. *Кінематична множина $\mathfrak{Kim}(\mathbb{S}, \mathcal{B}; \mathfrak{H})$ допускає універсальне перетворення координат.*

Використовуючи введені в формулах (2.18) класи операторів, можна визначити наступні кінематичні множини:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{KPT}_0(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c) &:= \mathfrak{Kim}(\mathfrak{PT}(\mathfrak{H}, c), \mathcal{B}; \mathfrak{H});\\
\mathfrak{KPT}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c) &:= \mathfrak{Kim}(\mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H}, c), \mathcal{B}; \mathfrak{H});\\
\mathfrak{KP}_0(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c) &:= \mathfrak{Kim}(\mathfrak{P}(\mathfrak{H}, c), \mathcal{B}; \mathfrak{H});\\
\mathfrak{KP}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c) &:= \mathfrak{Kim}(\mathfrak{P}_+(\mathfrak{H}, c), \mathcal{B}; \mathfrak{H}).
\end{aligned}$$

У випадку $\dim(\mathfrak{H}) = 3$, $c < \infty$ кінематична множина $\mathfrak{KP}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$ являє собою найпростішу математично строгу модель кінематики спеціальної теорії відносності в інерційних системах відліку. Кінематична множина $\mathfrak{KP}_0(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$ побудована на основі загальної групи Лоренца-Пуанкаре, і містить крім звичайних систем відліку (з додатним напрямком часу), які мають зрозумілу фізичну інтерпретацію, також системи відліку з від'ємним напрямком часу. Кінематичні множини $\mathfrak{KPT}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$ і $\mathfrak{KPT}_0(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$ містять крім стандартних ("тардіонних") систем відліку також і "тахіонні" системи відліку, які рухаються відносно "тардіонних" систем відліку зі швидкістю більшою за швидкість світла c. У випадку $\dim(\mathfrak{H}) = 3$, $c = \infty$ кінематична

[2.1] Така базова мінлива множина $\mathcal{B}$ існує, оскільки, наприклад, можна покласти $\mathcal{B} := \mathcal{A}t(\mathbb{R}, \mathcal{R})$, де $\mathcal{R}$ — система абстрактних траєкторій $\mathbb{R}$ в множину $\mathbf{M} \subseteq \mathfrak{H}$.

множина $\mathfrak{KP}(\mathfrak{H},\mathcal{B},\infty) = \mathfrak{KPT}(\mathfrak{H},\mathcal{B},\infty)$ являє собою математично строгу модель класичної кінематики Галілея в інерційних системах відліку. З наслідка 2.22 випливає наступний наслідок.

Наслідок 2.23. *Кінематичні множини* $\mathfrak{KPT}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$, $\mathfrak{KPT}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$, $\mathfrak{KP}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$, $\mathfrak{KP}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ *допускають універсальне перетворення координат.*

Зауваження 2.24. З наслідка 2.19 випливає, що множини операторів $\mathfrak{P}(\mathfrak{H},c)$ та $\mathfrak{P}_+(\mathfrak{H},c)$ утворюють групи операторів над простором $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$. В той же час, в наслідку 2.21 доведено, що класи операторів $\mathfrak{PT}(\mathfrak{H},c)$ (при $\dim(\mathfrak{H}) > 1$) та $\mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H},c)$ не утворюють групи операторів над $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Це означає, що побудовані на основі цих класів операторів кінематики типу $\mathfrak{KPT}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ та $\mathfrak{KPT}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ не задовольняють умовам принципу відносності, оскільки, згідно з теоремою 2.17, множина $\mathbb{UP}(\mathfrak{l})$ природних універсальних перетворень координат (2.16), що забезпечують перехід від однієї системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ ($\mathfrak{C} \in \{\mathfrak{KPT}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c), \mathfrak{KPT}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)\}$) до всіх інших систем відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ є різною для різних систем відліку $\mathfrak{l}$. Слід зауважити, що у випадку $\dim(\mathfrak{H}) = 3$ той факт, що узагальнені перетворення Лоренца виду (A.155) не задовольняють умовам принципу відносності було помічено також і в коментарі [118] виходячи з міркувань інваріантності світлової сфери в інерційних системах відліку. В той же час, принцип відносності в цих кінематиках порушується лише на надсвітловому діапазоні, оскільки кінематичні множини $\mathfrak{KPT}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ та $\mathfrak{KPT}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ побудовані шляхом "додавання" нових, надсвітлових, систем відліку до кінематичних множин $\mathfrak{KP}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ та $\mathfrak{KP}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$, які задовольняють умовам принципу відносності. Слід зазначити, що принцип відносності є лише одним із експериментально встановлених фактів. Тому, цілком можливо, що цей принцип не виконується при виході за межі світлового бар'єру. Можливість порушення принципу відносності зараз обговорюється в фізичній літературі (див., наприклад, [102–104, 119–122]).

Основні результати підрозділу 2.5 були анонсовані в [112] і опубліковані в [123] (див., також, препринт [124]), а також представлені на конференціях [94, 95].

2.6. Кінематичні множини, що не допускають універсального перетворення координат

В даному підрозділі побудовано один цікавий клас кінематичних множин, в яких кожна частинка в кожен момент часу може мати свою власну "швидкість світла". На фізичному рівні подібні моделі (з частинково-залежною швидкістю світла) розглядались в роботах [125–130].

Нехай, множина $\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}} \subseteq (0,\infty]$ така, що $\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}} \neq \emptyset$ і $(0,\infty] \setminus \mathfrak{V}_{\mathfrak{f}} \neq \emptyset$. Покладемо:

$$\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}} := \mathfrak{H} \times \mathfrak{V}_{\mathfrak{f}} = \{(x,c) \mid x \in \mathfrak{H},\ c \in \mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}\}; \quad \mathcal{M}\left(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}\right) := \mathbb{R} \times \mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}.$$

Множину $\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}\right)$ будемо називати простором Мінковського ***із множиною заборонених швидкостей*** $\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}$ над $\mathfrak{H}$. Множину $\widetilde{\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}} := [0,\infty] \setminus \mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}$ будемо називати ***множиною дозволених швидкостей*** для простору $\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}\right)$. Множина дозволених швидкостей $\widetilde{\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}$ завжди є непорожньою, оскільки, за визначенням множини $\widetilde{\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}$, гарантовано маємо $0 \in \widetilde{\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}$. Введемо ***множину скінченних ненульових дозволених швидкостей*** для простору $\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}\right)$:

$$\widetilde{\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}^{\mathsf{fin}+} := \widetilde{\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}} \setminus \{0,\infty\} = (0,\infty) \setminus \mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}.$$

Для довільного $\omega = (t,(x,c)) \in \mathcal{M}\left(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}\right)$ покладемо, $\omega^* := (t,x) \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Далі, для довільних $\lambda \in \widetilde{\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}$, $s \in \{-1,1\}$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ і $\omega = (t,(x,c)) \in \mathcal{M}\left(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}\right)$ введемо таке позначення:

$$\mathbf{W}_{\lambda;\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\,\omega := \left(\mathsf{tm}\left(\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\,\omega^*\right),\ \left(\mathsf{bs}\left(\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\,\omega^*\right),c\right)\right). \quad (2.20)$$

Тоді, для довільного $\omega = (t,(x,c)) \in \mathcal{M}\left(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}\right)$ отримаємо рівність:

$$\left(\mathbf{W}_{\lambda;\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\,\omega\right)^* = \mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\,\omega^*. \quad (2.21)$$

Твердження 2.25. *Для довільних* $\lambda \in \widetilde{\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}$, $s \in \{-1,1\}$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ *відображення* $\mathbf{W}_{\lambda;\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]$ *є бієкцією на* $\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}\right)$.

Доведення. Припустимо, що $\mathbf{W}_{\lambda;\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\,\omega_1 = \mathbf{W}_{\lambda;\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\,\omega_2$, де $\omega_1 = (t_1,(x_1,c_1)) \in \mathcal{M}\left(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}\right)$, $\omega_2 = (t_2,(x_2,c_2)) \in \mathcal{M}\left(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}\right)$. Тоді:

$$\left(\mathsf{tm}\left(\mathbf{W}_{\lambda,c_1}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\,\omega_1^*\right),\ \left(\mathsf{bs}\left(\mathbf{W}_{\lambda,c_1}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\,\omega_1^*\right),c_1\right)\right) =$$
$$= \left(\mathsf{tm}\left(\mathbf{W}_{\lambda,c_2}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\,\omega_2^*\right),\ \left(\mathsf{bs}\left(\mathbf{W}_{\lambda,c_2}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\,\omega_2^*\right),c_2\right)\right).$$

Тому, $c_1 = c_2$, а отже, виконуються такі рівності: $\mathsf{tm}\left(\mathbf{W}_{\lambda,c_1}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\,\omega_1^*\right) = \mathsf{tm}\left(\mathbf{W}_{\lambda,c_1}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\,\omega_2^*\right)$, $\mathsf{bs}\left(\mathbf{W}_{\lambda,c_1}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\,\omega_1^*\right) = \mathsf{bs}\left(\mathbf{W}_{\lambda,c_1}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\,\omega_2^*\right)$. Звідси, $\mathbf{W}_{\lambda,c_1}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\,\omega_1^* = \mathbf{W}_{\lambda,c_1}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\,\omega_2^*$. Враховуючи, що відображення $\mathbf{W}_{\lambda,c_1}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]$ є бієкцією на $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$, приходимо до висновку, що, $\omega_1^* = \omega_2^*$, тобто $t_1 = t_2$, $x_1 = x_2$. Отже, $\omega_1 = (t_1,(x_1,c_1)) = (t_2,(x_2,c_2)) = \omega_2$. Таким чином, відображення $\mathbf{W}_{\lambda;\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]$ є взаємно-однозначним.

Залишилось довести, що $\mathbf{W}_{\lambda;\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]$ відображає множину $\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}\right)$ на $\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}\right)$. Розглянемо довільний елемент $\omega = (t,(x,c)) \in \mathcal{M}\left(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}\right)$. Покладемо:

$$\widetilde{\omega} := \left(\mathsf{tm}\left(\left(\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\right)^{[-1]}\omega^*\right),\ \left(\mathsf{bs}\left(\left(\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\right)^{[-1]}\omega^*\right),c\right)\right).$$

Тоді маємо, $\widetilde{\omega}^* = \left(\mathsf{tm}\left(\left(\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\right)^{[-1]}\omega^*\right),\ \mathsf{bs}\left(\left(\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\right)^{[-1]}\omega^*\right)\right) = \left(\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\right)^{[-1]}\omega^*$. Звідси, $\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\,\widetilde{\omega}^* = \omega^*$. Отже,

$$\mathbf{W}_{\lambda;\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\,\widetilde{\omega} = \left(\mathsf{tm}\left(\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\,\widetilde{\omega}^*\right),\ \left(\mathsf{bs}\left(\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\,\widetilde{\omega}^*\right),c\right)\right) =$$
$$= \left(\mathsf{tm}\left(\omega^*\right),\ \left(\mathsf{bs}\left(\omega^*\right),c\right)\right) = (t,(x,c)) = \omega.$$

Таким чином, відображення $\mathbf{W}_{\lambda;\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]$ є бієкцією на $\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}\right)$. $\square$

Введемо наступні позначення:

$$\mathfrak{PT}(\mathfrak{H};\mathfrak{V}_\mathfrak{f}) := \Big\{\mathbf{W}_{\lambda;\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}] \mid \lambda\in\widetilde{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}},\ s\in\{-1,1\},$$
$$J\in\mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1),\ \mathbf{n}\in\mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1),\ \mathbf{a}\in\mathcal{M}(\mathfrak{H})\Big\};$$
$$\mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H};\mathfrak{V}_\mathfrak{f}) := \left\{\mathbf{W}_{\lambda;\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\in\mathfrak{PT}(\mathfrak{H};\mathfrak{V}_\mathfrak{f}) \mid s=1\right\}.$$

Нехай, $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина така, що $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B})\subseteq\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}$, $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})=(\mathbb{R},\leq)$. Тоді $\mathbb{Bs}(\mathcal{B})\subseteq\mathbb{R}\times\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}=\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}\right)$. Розглянемо такі кінематичні мультипроектори для $\mathcal{B}$:

$$\mathfrak{PT}(\mathfrak{H};\mathfrak{V}_\mathfrak{f})^\wedge = \left(\left((\mathbb{R},\leq),\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}},\mathbf{S},\widehat{\mathfrak{H}},\mathbf{q}\right) \mid \mathbf{S}\in\mathfrak{PT}(\mathfrak{H};\mathfrak{V}_\mathfrak{f})\right);$$
$$\mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H};\mathfrak{V}_\mathfrak{f})^\wedge = \left(\left((\mathbb{R},\leq),\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}},\mathbf{S},\widehat{\mathfrak{H}},\mathbf{q}\right) \mid \mathbf{S}\in\mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H};\mathfrak{V}_\mathfrak{f})\right),\quad \text{де}$$
$$\mathbf{q}(\tilde{x}) = x \quad \left(\forall\,\tilde{x}=(x,c)\in\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}\right) \tag{2.22}$$

Відповідно до теореми 2.14 та означення 2.15, введемо кінематичні множини:

$$\mathfrak{KPT}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B};\mathfrak{V}_\mathfrak{f}) := \mathfrak{Kim}\left[\mathfrak{PT}(\mathfrak{H};\mathfrak{V}_\mathfrak{f})^\wedge,\mathcal{B}\right];$$
$$\mathfrak{KPT}(\mathfrak{H},\mathcal{B};\mathfrak{V}_\mathfrak{f}) := \mathfrak{Kim}\left[\mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H};\mathfrak{V}_\mathfrak{f})^\wedge,\mathcal{B}\right].$$

Виявляється, що введені кінематичні множини допускають універсальне перетворення координат лише в тривіальних випадках, коли в них реалізується лише одна заборонена швидкість $c\in(0,\infty]$, тобто коли вони зводяться до кінем. множин виду $\mathfrak{KPT}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ або $\mathfrak{KPT}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ (з єдиною, "універсальною" швидкістю світла).

Теорема 2.26. *Нехай множина заборонених швидкостей $\mathfrak{V}_\mathfrak{f}$ є такою, що відповідна множина скінченних ненульових дозволених швидкостей $\widetilde{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}^{\mathsf{fin+}}=(0,\infty)\setminus\mathfrak{V}_\mathfrak{f}$ містить щонайменше два елемента (тобто $\mathbf{card}\left(\widetilde{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}^{\mathsf{fin+}}\right)\geq 2$).*

У цьому випадку кінематична множина $\mathfrak{KPT}(\mathfrak{H},\mathcal{B};\mathfrak{V}_\mathfrak{f})$ допускає універсальне перетворення координат тоді і тільки тоді, коли не існує елементарних станів $\tilde{x}_1=(x_1,c_1)$, $\tilde{x}_2=(x_2,c_2)\in\mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ таких, що $c_1\neq c_2$.

Для доведення теореми 2.26 знадобляться дві допоміжні леми (див. нижче).

Позначення 2.27. Нехай елементи $y_1,y_2\in(0,\infty]$, є такі, що $y_1\neq\infty$ або $y_2\neq\infty$. Покладемо:

$$\sigma(y_1,y_2) = \begin{cases} \left(\frac{y_1^{-2}+y_2^{-2}}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}, & y_1,y_2<\infty \\ \sqrt{2}\,y_1, & y_1<\infty,\ y_2=\infty \\ \sqrt{2}\,y_2, & y_1=\infty,\ y_2<\infty \end{cases}. \tag{2.23}$$

Лема 2.28. *Зафіксуємо довільні* $c_1, c_2 \in (0, \infty]$, $c_1 \neq c_2$; $\lambda \in (0, \infty) \setminus \{c_1, c_2, \sigma(c_1, c_2)\}$; $s \in \{-1, 1\}$ *і* $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$.

Тоді для будь-яких векторів $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ *таких, що* $\mathrm{w}_1 \neq \mathrm{w}_2$ *існують вектори* $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ *і* $\mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$, *такі, що* $\mathbf{W}_{\lambda,c_1}[s, \mathbf{n}, J; \mathbf{a}]\,\mathrm{w}_1 = \mathbf{W}_{\lambda,c_2}[s, \mathbf{n}, J; \mathbf{a}]\,\mathrm{w}_2$.

Доведення. Нехай, $c_1, c_2 \in (0, \infty]$ і $c_1 \neq c_2$. Надалі для зручності будемо вважати, що $c_1 < c_2$. Зрозуміло, що таке припущення не обмежує загальності міркувань.

1. Спочатку доведемо лему у спеціальному випадку, коли $\mathrm{w}_1 = \mathbf{0}$, $\mathrm{w}_2 = \mathrm{w} \neq \mathbf{0}$. Розглянемо довільні фіксовані $\lambda \in (0, \infty) \setminus \{c_1, c_2, \sigma(c_1, c_2)\}$, $s \in \{-1, 1\}$ і $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$. Враховуючи специфіку випадку, потрібно знайти такі $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ і $\mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$, що:

$$\mathbf{W}_{\lambda,c_1}[s, \mathbf{n}, J; \mathbf{a}]\,\mathbf{0} = \mathbf{W}_{\lambda,c_2}[s, \mathbf{n}, J; \mathbf{a}]\,\mathrm{w}. \tag{2.24}$$

Беручи до уваги (2.17), остання умова переписується у вигляді:

$$\mathbf{W}_{\lambda,c_1}[s, \mathbf{n}, J]\,\mathbf{a} = \mathbf{W}_{\lambda,c_2}[s, \mathbf{n}, J]\,(\mathrm{w} + \mathbf{a}). \tag{2.25}$$

Покладемо:

$$t := \mathcal{T}(\mathrm{w}), \qquad x := \mathbf{X}\mathrm{w}. \tag{2.26}$$

Тоді можна записати, $\mathrm{w} = t\mathbf{e}_0 + x$.

Зафіксуємо довільний вектор $\mathbf{n}_0 \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$. Покладемо, $\mathbf{n} := \begin{cases} \frac{x}{\|x\|}, & x \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{n}_0, & x = \mathbf{0} \end{cases}$. Тоді:

$$\left.\begin{aligned} x &= \|x\|\,\mathbf{n}, \quad \langle \mathbf{n}, \mathrm{w} \rangle = \langle \mathbf{n}, x \rangle = \|x\|, \\ \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w} &= \mathbf{X}\mathrm{w} - \langle \mathbf{n}, \mathrm{w} \rangle\,\mathbf{n} = x - \|x\|\,\mathbf{n} = x - x = \mathbf{0}. \end{aligned}\right\} \tag{2.27}$$

Вектор $\mathbf{a}$ будемо шукати у вигляді:

$$\mathbf{a} = \tau\mathbf{e}_0 + \mu\mathbf{n}, \qquad \text{де} \quad \tau, \mu \in \mathbb{R}. \tag{2.28}$$

1.a) Спочатку розглянемо випадок $c_1, c_2 < \infty$.

Підставляючи вектор $\mathbf{a}$ з (2.28) в умову (2.25) і враховуючи співвідношення (2.26), (2.27) та (A.155), отримуємо наступну умову:

$$\begin{aligned} &\left(s\tau - \frac{\lambda}{c_1^2}\mu\right)\gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right)\mathbf{e}_0 + (\lambda\tau - s\mu)\,\gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right)J\mathbf{n} = \\ &\quad = \left(s(t+\tau) - \frac{\lambda}{c_2^2}(\|x\| + \mu)\right)\gamma\left(\frac{\lambda}{c_2}\right)\mathbf{e}_0 + (\lambda(t+\tau) - s(\|x\| + \mu))\,\gamma\left(\frac{\lambda}{c_2}\right)J\mathbf{n}, \\ &\qquad \text{де} \quad \gamma(\xi) = \frac{1}{\sqrt{|1-\xi^2|}}, \quad \xi \geq 0,\ \xi \neq 1. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Звідси, враховуючи ортогональність вектора $\mathbf{e}_0$ до підпростору $\mathfrak{H}_1$ та унітарність оператора J на підпросторі $\mathfrak{H}_1$, отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \left(s\tau - \frac{\lambda}{c_1^2}\mu\right)\gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right) = \left(s\left(t+\tau\right) - \frac{\lambda}{c_2^2}\left(\|x\|+\mu\right)\right)\gamma\left(\frac{\lambda}{c_2}\right) \\ \left(\lambda\tau - s\mu\right)\gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right) = \left(\lambda\left(t+\tau\right) - s\left(\|x\|+\mu\right)\right)\gamma\left(\frac{\lambda}{c_2}\right) \end{cases} \tag{2.30}$$

Після нескладних перетворень система (2.30) зводиться до наступного (еквівалентного) вигляду:

$$\begin{cases} \left(\gamma\left(\frac{\lambda}{c_2}\right) - \gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right)\right)\tau + \lambda s\left(\frac{\gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right)}{c_1^2} - \frac{\gamma\left(\frac{\lambda}{c_2}\right)}{c_2^2}\right)\mu & = \left(\frac{\lambda s\|x\|}{c_2^2} - t\right)\gamma\left(\frac{\lambda}{c_2}\right) \\ \lambda\left(\gamma\left(\frac{\lambda}{c_2}\right) - \gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right)\right)\tau + s\left(\gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right) - \gamma\left(\frac{\lambda}{c_2}\right)\right)\mu & = \left(s\|x\| - \lambda t\right)\gamma\left(\frac{\lambda}{c_2}\right) \end{cases} \tag{2.31}$$

Система (2.31) є системою лінійних рівнянь відносно змінних "τ" та "μ". Визначник цієї системи дорівнює:

$$\begin{aligned} \Delta = & -s\left(\gamma\left(\frac{\lambda}{c_2}\right) - \gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right)\right)^2 - s\lambda^2\left(\gamma\left(\frac{\lambda}{c_2}\right) - \gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right)\right)\left(\frac{\gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right)}{c_1^2} - \frac{\gamma\left(\frac{\lambda}{c_2}\right)}{c_2^2}\right) = \\ & = -s\left(\gamma\left(\frac{\lambda}{c_2}\right) - \gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right)\right)\left(\gamma\left(\frac{\lambda}{c_2}\right)\left(1 - \frac{\lambda^2}{c_2^2}\right) - \gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right)\left(1 - \frac{\lambda^2}{c_1^2}\right)\right) = \\ & = -s\left(\gamma\left(\frac{\lambda}{c_2}\right) - \gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right)\right)\left(\Phi\left(1 - \frac{\lambda^2}{c_2^2}\right) - \Phi\left(1 - \frac{\lambda^2}{c_1^2}\right)\right), \quad \text{де} \end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\Phi(y) := \operatorname{sign}(y)\sqrt{|y|} \qquad (y \in \mathbb{R}). \tag{2.33}$$

Оскільки $\lambda \in (0,\infty)\backslash\{c_1, c_2, \sigma(c_1, c_2)\}$, то $\lambda > 0$ і $\lambda \neq \sigma(c_1, c_2)$. Тому, множник $\gamma\left(\frac{\lambda}{c_2}\right) - \gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right)$ в формулі (2.32) є ненульовим. Другий множник $\left(\Phi\left(1 - \frac{\lambda^2}{c_2^2}\right) - \Phi\left(1 - \frac{\lambda^2}{c_1^2}\right)\right)$ — також ненульовий, тому, що $c_1 < c_2$ і функція Φ є строго монотонною на $\mathbb{R}$. Отже, визначник Δ системи (2.31) — ненульовий. Тому, ця система має єдиний розв'язок. Позначимо цей розв'язок через $(\tilde{\tau}, \tilde{\mu})$. Тоді, відповідно до формули (2.28), шуканий вектор $\mathbf{a}$ записується у вигляді, $\mathbf{a} = \tilde{\tau}\mathbf{e}_0 + \tilde{\mu}\mathbf{n}$. І легко зрозуміти, що підстановка знайдених значень векторів $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ і $\mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ в (2.25) гарантує правильну рівність. Отже, у випадку $c_2, c_2 < \infty$ і $\mathrm{w}_1 = \mathbf{0}$, лему доведено.

1.б) Далі, залишилось розглянути лише випадок $c_2 = \infty$, $c_1 < \infty$ ($\mathrm{w}_1 = \mathbf{0}$, $\mathrm{w}_2 = \mathrm{w} \neq \mathbf{0}$). Підкреслимо, що випадок $c_1 = \infty$ неможливий, оскільки $c_1 < c_2$.

Підставляючи вектор $\mathbf{a}$ з (2.28) в умову (2.25) і враховуючи співвідношення (2.26), (2.27) та (A.155), отримуємо наступну умову:

$$\left(s\tau - \frac{\lambda}{c_1^2}\mu\right)\gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right)\mathbf{e}_0 + \left(\lambda\tau - s\mu\right)\gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right)J\mathbf{n} =$$

$$= s\left(t+\tau\right)\mathbf{e}_0 + \left(\lambda\left(t+\tau\right) - s\left(\|x\|+\mu\right)\right) J\mathbf{n}.$$

Звідси, враховуючи ортогональність вектора $\mathbf{e}_0$ до підпростору $\mathfrak{H}_1$ та унітарність оператора J на підпросторі $\mathfrak{H}_1$, отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \left(s\tau - \frac{\lambda}{c_1^2}\mu\right)\gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right) = s\left(t+\tau\right) \\ \left(\lambda\tau - s\mu\right)\gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right) = \lambda\left(t+\tau\right) - s\left(\|x\|+\mu\right) \end{cases} \tag{2.34}$$

Після нескладних перетворень система (2.34) зводиться до наступного (еквівалентного) вигляду:

$$\begin{cases} \left(1-\gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right)\right)\tau + \lambda s\,\frac{\gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right)}{c_1^2}\,\mu = -t \\ \lambda\left(1-\gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right)\right)\tau + s\left(\gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right)-1\right)\mu = s\,\|x\| - \lambda t \end{cases} \tag{2.35}$$

Система (2.35) є системою лінійних рівнянь відносно змінних "τ" та "μ". Визначник цієї системи дорівнює:

$$\begin{aligned} \Delta = & -s\left(1-\gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right)\right)^2 - s\lambda^2\left(1-\gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right)\right)\frac{\gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right)}{c_1^2} = \\ & = -s\left(1-\gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right)\right)\left(1-\Phi\left(1-\frac{\lambda^2}{c_1^2}\right)\right), \end{aligned} \tag{2.36}$$

де функція Φ визначається за формулою (2.33). Оскільки $\lambda \in (0,\infty)\backslash\{c_1, c_2, \sigma\left(c_1, c_2\right)\}$, де $c_2 = +\infty$, то $\lambda > 0$ і $\lambda \neq \sigma\left(c_1,\infty\right) = \sqrt{2}c_1$. Отже множник $1-\gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right)$ в формулі (2.36) — ненульовий. Другий множник, $\left(1-\Phi\left(1-\frac{\lambda^2}{c_1^2}\right)\right)$ також є ненульовим тому, що $1 = \Phi(1)$ і функція Φ — строго монотонна на $\mathbb{R}$. Отже, визначник Δ системи (2.35) — ненульовий. Тому, ця система має єдиний розв'язок. Позначимо через $(\tilde{\tau}, \tilde{\mu})$ розв'язок системи (2.35). Тоді, відповідно до формули (2.28), шуканий вектор $\mathbf{a}$ записується у вигляді, $\mathbf{a} = \tilde{\tau}\mathbf{e}_0 + \tilde{\mu}\mathbf{n}$. І підстановка знайдених значень векторів $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1\left(\mathfrak{H}_1\right)$ і $\mathbf{a} \in \mathcal{M}\left(\mathfrak{H}\right)$ в (2.25) гарантує правильну рівність.

У спеціальному випадку, коли $\mathrm{w}_1 = \mathbf{0}$, $\mathrm{w}_2 = \mathrm{w} \neq \mathbf{0}$ лему повністю доведено.

2. Тепер перейдемо тепер до загального випадку, коли $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2$ — довільні вектори простору $\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}\right)$ такі, що $\mathrm{w}_1 \neq \mathrm{w}_2$. Нехай, $\lambda \in (0,\infty)\setminus\{c_1, c_2, \sigma\left(c_1, c_2\right)\}$. Згідно з отриманим в першому пункті доведення даної леми для спеціального випадку, існують такі вектори $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1\left(\mathfrak{H}_1\right)$ і $\widetilde{\mathbf{a}} \in \mathcal{M}\left(\mathfrak{H}\right)$, що $\mathbf{W}_{\lambda,c_1}\left[s,\mathbf{n},J\right]\widetilde{\mathbf{a}} = \mathbf{W}_{\lambda,c_2}\left[s,\mathbf{n},J\right]\left(\mathrm{w}_2 - \mathrm{w}_1 + \widetilde{\mathbf{a}}\right)$. Покладемо, $\mathbf{a} := \widetilde{\mathbf{a}} - \mathrm{w}_1$. Тоді, враховуючи (2.17), отримуємо бажану рівність $\mathbf{W}_{\lambda,c_1}\left[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}\right]\mathrm{w}_1 = \mathbf{W}_{\lambda,c_2}\left[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}\right]\mathrm{w}_2$. □

Лема 2.29. *Нехай, для деякого вектора* $\mathrm{w} \in \mathcal{M}\left(\mathfrak{H}\right)$ *виконується рівність* $\mathbf{W}_{\lambda,c_1}\left[s,\mathbf{n},J\right]\mathrm{w} = \mathbf{W}_{\lambda,c_2}\left[s,\mathbf{n},J\right]\mathrm{w}$, *де* $c_1, c_2 \in (0,\infty]$, $\lambda \in (0,\infty] \setminus$

$\{c_1, c_2, \sigma(c_1, c_2)\}$, $s \in \{-1, 1\}$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, *причому* $c_1 \neq c_2$. *Тоді,* $\mathcal{T}(\mathrm{w}) = \langle \mathbf{n}, \mathrm{w} \rangle = 0$.

Доведення леми розіб'ємо на декілька випадків.

Випадок 1: $c_1, c_2 < \infty$, $\lambda < \infty$. У цьому випадку, за формулою (A.155), маємо:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{W}_{\lambda,c_1}[s, \mathbf{n}, J]\,\mathrm{w} - \mathbf{W}_{\lambda,c_2}[s, \mathbf{n}, J]\,\mathrm{w} = \\
&= \left(\left(\gamma\left(\tfrac{\lambda}{c_1}\right) - \gamma\left(\tfrac{\lambda}{c_2}\right)\right) s\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \left(\tfrac{\lambda}{c_1^2}\gamma\left(\tfrac{\lambda}{c_1}\right) - \tfrac{\lambda}{c_2^2}\gamma\left(\tfrac{\lambda}{c_2}\right)\right)\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle\right)\mathbf{e}_0 + \\
&\qquad + \left(\gamma\left(\tfrac{\lambda}{c_1}\right) - \gamma\left(\tfrac{\lambda}{c_2}\right)\right)\left(\lambda\mathcal{T}(\mathrm{w}) - s\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle\right) J\mathbf{n},
\end{aligned} \tag{2.37}$$

де функція γ визначається за формулою (2.29). За умовою леми, $\mathbf{W}_{\lambda,c_1}[s, \mathbf{n}, J]\,\mathrm{w} - \mathbf{W}_{\lambda,c_2}[s, \mathbf{n}, J]\,\mathrm{w} = \mathbf{0}$, де $\mathbf{0}$ — нульовий вектор простору $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Отже, права частина (2.37) дорівнює нульовому вектору. Тому, враховуючи ортогональність вектора $\mathbf{e}_0$ до підпростору $\mathfrak{H}_1$ і унітарність оператора J на підпросторі $\mathfrak{H}_1$, отримуємо рівності:

$$\left.\begin{aligned}
s\left(\gamma\left(\tfrac{\lambda}{c_1}\right) - \gamma\left(\tfrac{\lambda}{c_2}\right)\right)\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \left(\tfrac{\lambda}{c_1^2}\gamma\left(\tfrac{\lambda}{c_1}\right) - \tfrac{\lambda}{c_2^2}\gamma\left(\tfrac{\lambda}{c_2}\right)\right)\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle &= 0\,; \\
\left(\gamma\left(\tfrac{\lambda}{c_1}\right) - \gamma\left(\tfrac{\lambda}{c_2}\right)\right)\left(\lambda\mathcal{T}(\mathrm{w}) - s\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle\right) &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{2.38}$$

За умовою леми, $\lambda > 0$ і $\lambda \neq \sigma(c_1, c_2) = \sqrt{\frac{2}{\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2}}}$.

Отже, $\gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right) - \gamma\left(\frac{\lambda}{c_2}\right) \neq 0$. Тому рівності (2.38) можна переписати у вигляді:

$$\left\{\begin{aligned}
s\left(\gamma\left(\tfrac{\lambda}{c_1}\right) - \gamma\left(\tfrac{\lambda}{c_2}\right)\right)\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \left(\tfrac{\lambda}{c_1^2}\gamma\left(\tfrac{\lambda}{c_1}\right) - \tfrac{\lambda}{c_2^2}\gamma\left(\tfrac{\lambda}{c_2}\right)\right)\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle &= 0\,; \\
\lambda\mathcal{T}(\mathrm{w}) - s\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle &= 0.
\end{aligned}\right. \tag{2.39}$$

Система (2.39) є системою лінійних однорідних рівнянь відносно змінних $\mathcal{T}(\mathrm{w})$ і $\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle$. Визначник цієї системи дорівнює:

$$\begin{aligned}
\Delta &= -\left[\left(\gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right) - \gamma\left(\frac{\lambda}{c_2}\right)\right) - \left(\frac{\lambda^2}{c_1^2}\gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right) - \frac{\lambda^2}{c_2^2}\gamma\left(\frac{\lambda}{c_2}\right)\right)\right] = \\
&= \Phi\left(1 - \frac{\lambda^2}{c_2^2}\right) - \Phi\left(1 - \frac{\lambda^2}{c_1^2}\right),
\end{aligned}$$

де функція Φ визначається за формулою (2.33). Оскільки функція Φ є строго монотонною на $\mathbb{R}$, то то визначник Δ системи (2.39) відмінний від нуля. Тому, $\mathcal{T}(\mathrm{w}) = \langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle = 0$, що й необхідно було довести.

Випадок 2: $c_1, c_2 < \infty$, $\lambda = \infty$. Згідно з формулою (A.155), отримуємо:

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbf{W}_{\lambda,c_1}[s, \mathbf{n}, J]\,\mathrm{w} - \mathbf{W}_{\lambda,c_2}[s, \mathbf{n}, J]\,\mathrm{w} = \\
&= -\frac{\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle}{c_1}\mathbf{e}_0 + c_1\mathcal{T}(\mathrm{w})\,J\mathbf{n} - \left(-\frac{\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle}{c_2}\mathbf{e}_0 + c_2\mathcal{T}(\mathrm{w})\,J\mathbf{n}\right) =
\end{aligned}$$

$$= -\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right)\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle\, \mathbf{e}_0 + (c_1 - c_2)\,\mathcal{T}(\mathrm{w})\, J\mathbf{n}.$$

Оскільки $c_1 \neq c_2$, то з останньої рівності (в силу ортогональності вектора $\mathbf{e}_0$ до підпростору $\mathfrak{H}_1$ і унітарності оператора J на підпросторі $\mathfrak{H}_1$) випливає рівність $\mathcal{T}(\mathrm{w}) = \langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle = 0$.

Випадок 3: $c_1 < \infty$, $c_2 = \infty$. За умовою леми, $\lambda \neq c_2$. Отже, в цьому випадку $\lambda < \infty$. І, використовуючи формулу (A.155), отримуємо:

$$\begin{aligned} 0 = \mathbf{W}_{\lambda,c_1}[s, \mathbf{n}, J]\,\mathrm{w} - \mathbf{W}_{\lambda,c_2}[s, \mathbf{n}, J]\,\mathrm{w} = \\ = \left(\left(\gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right) - 1\right) s\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \frac{\lambda}{c_1^2}\gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right)\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle\right)\mathbf{e}_0 + \\ + \left(\gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right) - 1\right)\left(\lambda\mathcal{T}(\mathrm{w}) - s\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle\right) J\mathbf{n}. \end{aligned} \tag{2.40}$$

За умовою леми, $\lambda > 0$ і $\lambda \neq \sigma(c_1, c_2) = \sqrt{2}\,c_1$. Отже, $\gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right) - 1 \neq 0$. Тому, враховуючи ортогональність вектора $\mathbf{e}_0$ до підпростору $\mathfrak{H}_1$ і унітарність оператора J на підпросторі $\mathfrak{H}_1$, з рівності (2.40) отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \left(\gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right) - 1\right) s\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \frac{\lambda}{c_1^2}\gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right)\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle &= 0 \\ \lambda\mathcal{T}(\mathrm{w}) - s\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle &= 0. \end{cases} \tag{2.41}$$

Система (2.41) є системою лінійних однорідних рівнянь відносно змінних $\mathcal{T}(\mathrm{w})$ і $\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle$. Визначник останньої системи дорівнює: $\Delta_1 = -\left(\left(\gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right) - 1\right) - \frac{\lambda^2}{c_1^2}\gamma\left(\frac{\lambda}{c_1}\right)\right) = \Phi(1) - \Phi\left(1 - \frac{\lambda^2}{c_1^2}\right)$. Оскільки, за умовою леми, $\lambda > 0$ і $c_1 < \infty$, то $\frac{\lambda}{c_1} \neq 0$. Тому, $\Delta_1 \neq 0$. Звідси отримуємо, $\mathcal{T}(\mathrm{w}) = \langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle = 0$.

Випадок 4: $c_1 = \infty$, $c_2 < \infty$ розглядається аналогічно до випадку 3.

Випадок $c_1, c_2 = \infty$ є неможливим, оскільки, за умовою леми, $c_1 \neq c_2$.

Таким чином, лему повністю доведено в усіх випадках. □

Наслідок 2.30. *Нехай,* $c_1, c_2 \in (0, \infty]$, $c_1 \neq c_2$, $s \in \{-1, 1\}$, $\lambda \in (0, \infty) \setminus \{c_1, c_2, \sigma(c_1, c_2)\}$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$.

Тоді для довільного $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ *існує такий вектор* $\mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$, *що* $\mathbf{W}_{\lambda,c_1}[s, \mathbf{n}, J; \mathbf{a}]\,\mathrm{w} \neq \mathbf{W}_{\lambda,c_2}[s, \mathbf{n}, J; \mathbf{a}]\,\mathrm{w}$.

Доведення. Зафіксуємо довільний вектор $\mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$, що задовольняє умову:

$$\mathcal{T}(\mathrm{w} + \mathbf{a}) \neq 0. \tag{2.42}$$

Якщо припустити, що $\mathbf{W}_{\lambda,c_1}[s, \mathbf{n}, J; \mathbf{a}]\,\mathrm{w} = \mathbf{W}_{\lambda,c_2}[s, \mathbf{n}, J; \mathbf{a}]\,\mathrm{w}$, то, згідно (2.17), отримаємо, $\mathbf{W}_{\lambda,c_1}[s, \mathbf{n}, J](\mathrm{w} + \mathbf{a}) = \mathbf{W}_{\lambda,c_2}[s, \mathbf{n}, J](\mathrm{w} + \mathbf{a})$. Звідси, за ле-

мою 2.29, маємо, $\mathcal{T}(\mathrm{w}+\mathbf{a}) = 0$, що суперечить співвідношенню (2.42). Тому, $\mathbf{W}_{\lambda,c_1}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\,\mathrm{w} \neq \mathbf{W}_{\lambda,c_2}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\,\mathrm{w}$. □

Доведення теореми 2.26. **1**. Доведемо, що для довільного фіксованого вектора $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ виконується рівність:

$$\mathbf{W}_{0;\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}[1,\mathbf{n},\mathbb{I}_{-1,1}[\mathbf{n}],\mathbf{0}] = \mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}})}, \tag{2.43}$$

де $\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}})}$ — тотожний відображення на $\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}\right)$, а оператор $\mathbb{I}_{-1,1}[\mathbf{n}]$ визначається за формулою (A.120).

Справді, згідно з (2.20), (2.17), (A.155), для довільного елемента $\omega = (t,(x,c)) \in \mathcal{M}\left(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}\right)$, маємо:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{W}_{0;\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}[1,\mathbf{n},\mathbb{I}_{-1,1}[\mathbf{n}],\mathbf{0}]\,\omega = \\
&\quad = (\mathsf{tm}\,(\mathbf{W}_{0,c}[1,\mathbf{n},\mathbb{I}_{-1,1}[\mathbf{n}]]\,\omega^*),\ (\mathsf{bs}\,(\mathbf{W}_{0,c}[1,\mathbf{n},\mathbb{I}_{-1,1}[\mathbf{n}]]\,\omega^*),c)) = \\
&\quad = (\mathsf{tm}\,(\omega^*),\ (\mathsf{bs}\,(\omega^*),c)) = (t,\ (x,c)) = \omega,
\end{aligned}$$

що й необхідно було довести. З рівності (2.43) випливає, що $\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}})} \in \mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H};\mathfrak{V}_\mathfrak{f})$. При цьому, згідно із зауваженням 1.137, $\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}})}[\mathcal{B}] = \mathcal{B}$. Отже, за властивістю 2.16(1), можна визначити систему відліку:

$$\mathfrak{l}_0 = \left(\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}})}, \mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}})}[\mathcal{B}]\right) = \left(\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}})}, \mathcal{B}\right) \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{KPT}(\mathfrak{H},\mathcal{B};\mathfrak{V}_\mathfrak{f})\right).$$

Тепер, розглянемо довільну фіксовану систему відліку $\mathfrak{l} = (U, U[\mathcal{B}]) \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{KPT}(\mathfrak{H},\mathcal{B};\mathfrak{V}_\mathfrak{f})\right)$, де $U = \mathbf{W}_{\lambda,\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}[1,\mathbf{n},J;\mathbf{a}] \in \mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H};\mathfrak{V}_\mathfrak{f})$.

Згідно з властивостями 2.16(3, 5), маємо:

$$\mathbb{M}k(\mathfrak{l}) = \mathbb{R} \times \mathfrak{H} = \mathcal{M}(\mathfrak{H}); \tag{2.44}$$

$$\langle !\,\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l}_0\rangle\,\omega = U\left(\mathbb{I}^{[-1]}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}})}\omega\right) = U\omega = \mathbf{W}_{\lambda,\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}[1,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\,\omega$$
$$(\forall \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}_0) = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{M}\left(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}\right).$$

Використовуючи властивість 2.16(3) та рівність (2.22), для довільного елементарно-часового стану $\omega = (t,(x,c)) \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ отримуємо:

$$\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega) = (\mathsf{tm}\,(\omega),\mathbf{q}(\mathsf{bs}\,(\omega))) = (t,\mathbf{q}\,((x,c))) = (t,x) = \omega^*. \tag{2.45}$$

Звідси, використовуючи означення 2.6 (пункт 1) та рівність (2.21) одержуємо:

$$\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{l}_0\rangle}(\omega) = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\langle !\,\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{l}_0\rangle\,\omega\right) = \left(\mathbf{W}_{\lambda,\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}[1,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\,\omega\right)^* = \mathbf{W}_{\lambda,c}[1,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\,\omega^*$$
$$\left(\forall \omega = (t,(x,c)) \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}_0) = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{M}\left(\mathfrak{H}_{\mathfrak{V}_\mathfrak{f}}\right)\right). \tag{2.46}$$

2. **2.1**. Нехай, існують елементарні стани $\tilde{x}_1 = (x_1, c_1)$, $\tilde{x}_2 = (x_2, c_2) \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ такі, що $c_1 \neq c_2$. Оскільки, згідно з властивістю 1.60(9), $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) = \{\mathsf{bs}(\omega) \mid \omega \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})\}$, то існують елементарно-часові стани виду $\omega_1 = (t_1, \tilde{x}_1) = (t_1, (x_1, c_1)) \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$, $\omega_2 = (t_2, \tilde{x}_2) = (t_2, (x_2, c_2)) \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$. Відповідно до умов теореми, множина $\widetilde{\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}} \setminus \{0, \infty\} = \widetilde{\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}^{\mathsf{fin}+}$ містить щонайменше два елементи. Отже, існує таке додатне число $\widetilde{\lambda}$, що $\widetilde{\lambda} \in \widetilde{\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}$ і $\widetilde{\lambda} \neq \sigma(c_1, c_2)$. Розглянемо два випадки.

Випадок 2.1.1: $\omega_1^* \neq \omega_2^*$. Зафіксуємо довільний оператор $J_1 \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$. За лемою 2.28, існують такі вектори $\mathbf{n}_1 \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ і $\mathbf{a}_1 \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$, що:

$$\mathbf{W}_{\widetilde{\lambda}, c_1}[1, \mathbf{n}_1, J_1; \mathbf{a}_1]\, \omega_1^* = \mathbf{W}_{\widetilde{\lambda}, c_2}[1, \mathbf{n}_1, J_1; \mathbf{a}_1]\, \omega_2^*. \tag{2.47}$$

Розглянемо систему відліку, $\mathfrak{l}_1 := (U_1, U_1[\mathcal{B}]) \in \mathcal{L}k(\mathfrak{KPT}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}; \mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}))$, де $U_1 := \mathbf{W}_{\widetilde{\lambda}; \mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}[1, \mathbf{n}_1, J_1, \mathbf{a}_1] \in \mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H}; \mathfrak{V}_{\mathfrak{f}})$. Згідно з (2.46), та (2.47), отримуємо:

$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_0 \rangle}(\omega_1) = \mathbf{W}_{\widetilde{\lambda}, c_1}[1, \mathbf{n}_1, J_1; \mathbf{a}_1]\, \omega_1^* = \mathbf{W}_{\widetilde{\lambda}, c_2}[1, \mathbf{n}_1, J_1; \mathbf{a}_1]\, \omega_2^* = \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_0 \rangle}(\omega_2).$$

З іншої сторони, згідно з формулою (2.45) отримуємо, $\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0 \rangle}(\omega_1) = \omega_1^* \neq \omega_2^* = \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0 \rangle}(\omega_2)$. Таким чином, для елементарно-часових станів ω_1,ω_2 маємо $\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l}_0 \rangle}(\omega_1) = \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l}_0 \rangle}(\omega_2)$, хоча $\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0 \rangle}(\omega_1) \neq \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0 \rangle}(\omega_2)$. Отже, за теоремою 2.10, системи відліку $\mathfrak{l}_0$ і $\mathfrak{l}$ не допускають універсального перетворення координат. Тому, згідно з твердженням 2.9, пункт 2, кінематична множина $\mathfrak{KPT}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}; \mathfrak{V}_{\mathfrak{f}})$ не допускає універсального перетворення координат в даному випадку.

Випадок 2.1.2: $\omega_1^* = \omega_2^*$. Зафіксуємо довільні оператор $J_2 \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$ і вектор $\mathbf{n}_2 \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$. Згідно з наслідком 2.30, існує такий вектор $\mathbf{a}_2 \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$, що:

$$\mathbf{W}_{\widetilde{\lambda}, c_1}[1, \mathbf{n}_2, J_2; \mathbf{a}_2]\, \omega_1^* \neq \mathbf{W}_{\widetilde{\lambda}, c_2}[1, \mathbf{n}_2, J_2; \mathbf{a}_2]\, \omega_2^*. \tag{2.48}$$

Розглянемо систему відліку, $\mathfrak{l}_2 := (U_2, U_2[\mathcal{B}]) \in \mathcal{L}k(\mathfrak{KPT}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}; \mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}))$, де $U_2 = \mathbf{W}_{\widetilde{\lambda}; \mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}[1, \mathbf{n}_2, J_2, \mathbf{a}_2] \in \mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H}; \mathfrak{V}_{\mathfrak{f}})$. Згідно (2.46), та (2.48), отримуємо:

$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_2 \leftarrow \mathfrak{l}_0 \rangle}(\omega_1) = \mathbf{W}_{\widetilde{\lambda}, c_1}[1, \mathbf{n}_2, J_2; \mathbf{a}_2]\, \omega_1^* \neq \mathbf{W}_{\widetilde{\lambda}, c_2}[1, \mathbf{n}_2, J_2; \mathbf{a}_2]\, \omega_2^* = \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_2 \leftarrow \mathfrak{l}_0 \rangle}(\omega_2).$$

З іншої сторони, за формулою (2.45), маємо: $\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0 \rangle}(\omega_1) = \omega_1^* = \omega_2^* = \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0 \rangle}(\omega_2)$.

Тобто, для елементарно-часових станів ω_1, ω_2 маємо $\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_2 \leftarrow \mathfrak{l}_0 \rangle}(\omega_1) \neq \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_2 \leftarrow \mathfrak{l}_0 \rangle}(\omega_2)$, хоча $\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0 \rangle}(\omega_1) = \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0 \rangle}(\omega_2)$. Отже, за теоремою 2.10, системи відліку $\mathfrak{l}_0$ і $\mathfrak{l}_2$ не допускають універсального перетворення координат. Тому, згідно з твердженням 2.9, пункт 2, кінематична множина $\mathfrak{KPT}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}; \mathfrak{V}_{\mathfrak{f}})$ не допускає універсального перетворення координат.

Таким чином, якщо кінематична множина $\mathfrak{KPT}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}; \mathfrak{V}_{\mathfrak{f}})$ допускає універсальне перетворення координат, то не існує елементарних станів $\tilde{x}_1 = (x_1, c_1)$, $\tilde{x}_2 = (x_2, c_2) \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ таких, що $c_1 \neq c_2$.

2.2. Навпаки, нехай в базовій мінливій множині $\mathcal{B}$ не існує елементарних станів $\tilde{x}_1 = (x_1, c_1)$, $\tilde{x}_2 = (x_2, c_2) \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ таких, що $c_1 \neq c_2$. Тоді існує таке число $c_0 \in \mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}$, що

довільний елементарний стан $\tilde{x} \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ можна подати у вигляді: $\tilde{x} = (x, c_0)$, де $x \in \mathfrak{H}$. Розглянемо довільну систему відліку, $\mathfrak{l} := (U, U[\mathcal{B}]) \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{KPT}\left(\mathfrak{H}, \mathcal{B}; \mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}\right)\right)$, де $U = \mathbf{W}_{\lambda;\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}\left[1, \mathbf{n}, J, \mathbf{a}\right] \in \mathfrak{PT}_{+}\left(\mathfrak{H}; \mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}\right)$. Згідно з (2.46), (2.45), для довільного елементарно-часового стану $\omega = (t, (x, c_0)) \in \mathbb{Bs}\left(\mathfrak{l}_0\right) = \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ маємо:

$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l}_0 \rangle}\left(\omega\right) = \mathbf{W}_{\lambda, c_0}\left[1, \mathbf{n}, J; \mathbf{a}\right] \omega^{*} = \mathbf{W}_{\lambda, c_0}\left[1, \mathbf{n}, J; \mathbf{a}\right] \left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0 \rangle}(\omega)\right),$$

де $\mathbf{W}_{\lambda, c_0}\left[1, \mathbf{n}, J; \mathbf{a}\right]$ — бієкція з $\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}\right)$ на $\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}\right)$ (тобто, згідно (2.44), $\mathbf{W}_{\lambda, c_0}\left[1, \mathbf{n}, J; \mathbf{a}\right]$ — бієкція з $\mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}_0\right)$ на $\mathbb{M}k(\mathfrak{l})$). Отже, за означенням 2.6, відображення $\mathbf{W}_{\lambda, c_0}\left[1, \mathbf{n}, J; \mathbf{a}\right]$ є універсальним перетворенням координат з $\mathfrak{l}_0$ в $\mathfrak{l}$. Тому, системи відліку $\mathfrak{l}_0$ та $\mathfrak{l}$ допускають універсальне перетворення координат, тобто $\mathfrak{l}_0 \rightleftarrows \mathfrak{l}$ (для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{KPT}\left(\mathfrak{H}, \mathcal{B}; \mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}\right)\right)$). Таким чином, за твердженням 2.9, кінематична множина $\mathfrak{KPT}\left(\mathfrak{H}, \mathcal{B}; \mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}\right)$ допускає універсальне перетворення координат. □

Аналогічно до теореми 2.26 доводиться наступна теорема.

Теорема 2.31. *Нехай множина заборонених швидкостей $\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}$ є такою, що відповідна множина скінченних ненульових дозволених швидкостей $\widetilde{\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}^{\mathsf{fin}+} = (0, \infty) \setminus \mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}$ містить щонайменше два елемента (тобто $\mathbf{card}\left(\widetilde{\mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}}^{\mathsf{fin}+}\right) \geq 2$).*

У цьому випадку кінематична множина $\mathfrak{KPT}_0\left(\mathfrak{H}, \mathcal{B}; \mathfrak{V}_{\mathfrak{f}}\right)$ допускає універсальне перетворення координат тоді і тільки тоді, коли не існує елементарних станів $\tilde{x}_1 = (x_1, c_1)$, $\tilde{x}_2 = (x_2, c_2) \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ таких, що $c_1 \neq c_2$.

Основні результати підрозділу 2.6 були анонсовані в [112] і опубліковані в препринтах [124, 131] та статті [123]. Зауважимо, що в роботах [112, 124, 131] містяться результати дещо менш загальні, ніж теореми 2.26 та 2.31. В теперішній формі ці теореми опубліковані в статті [123]. Крім того, результати підрозділу 2.6 були представлені на конференціях [94, 95, 114].

Розділ 3

Кінематичні мінливі множини із заданим універсальним перетворенням координат

3.1. Вступ до розділу

В попередньому розділі були дані означення реального і універсального перетворення координат у кінематичних множинах та наведені приклади кінематичних множин, які допускають універсальне перетворення координат. Також було визначено один цікавий клас кінематичних множин з частинково-залежною швидкістю світла, які не допускають універсального перетворення координат. В той же час більшість фізичних кінематичних теорій (як класичних так і тахіонних) передбачають існування універсального перетворення координат між інерційними системами відліку. Саме тому в даному розділі основну увагу приділено дослідженню кінематичних мінливих множин із заданим універсальним перетворенням координат та їхньому застосуванню до спеціальної теорії відносності та її узагальнень.

3.2. Означення і основні властивості універсальних кінематичних множин

3.2.1. Означення універсальних кінематик Із зауваження 2.11 випливає, що якщо кінематична множина $\mathfrak{C}$ допускає універсальне перетворення координат, то воно визначається, взагалі кажучи, неоднозначно, тобто може існувати багато різних універсальних перетворень координат для $\mathfrak{C}$.

Означення 3.1. Якщо $\overleftarrow{\mathcal{Q}} = \left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathfrak{C})}$ є універсальним перетворенням координат для чітко видимої кінематичної множини $\mathfrak{C}$, то пару

$$\mathcal{F} = \left(\mathfrak{C}, \overleftarrow{\mathcal{Q}}\right)$$

будемо називати **універсальною кінематичною множиною**, або, скорочено, **універсальною кінематикою**.

Підкреслимо, що якщо $\mathcal{F} = \left(\mathfrak{C}, \overleftarrow{\mathcal{Q}}\right)$ є універсальною кінематикою то, за означенням 3.1, кінематична множина $\mathfrak{C}$ обов'язково допускає універсальне перетворення координат.

3.2.2. Система позначень для універсальних кінематик

Всюди в даному підрозділі $\mathcal{F} = \left(\mathfrak{C}, \overleftarrow{\mathcal{Q}}\right) = \left(\mathfrak{C}, \left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathfrak{C})}\right)$ — довільна універсальна кінематика

База еволюції

a) Мінливу множину $\boxed{\mathbb{BE}\left(\mathcal{F}\right) := \mathbb{BE}\left(\mathfrak{C}\right)}$ будемо називати ***базою еволюції*** універсальної кінематики $\mathcal{F}$.

Позначення, індуковані з теорії кінематичних множин

b) Введемо позначення:

$$\mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}\right) := \mathcal{I}nd\left(\mathfrak{C}\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathbb{BE}\left(\mathfrak{C}\right)\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathbb{BE}\left(\mathcal{F}\right)\right);$$
$$\mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right) := \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right) = \mathcal{L}k\left(\mathbb{BE}\left(\mathfrak{C}\right)\right) = \mathcal{L}k\left(\mathbb{BE}\left(\mathcal{F}\right)\right).$$

- Множину $\mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}\right)$ будемо називати ***множиною індексів*** універсальної кінематики $\mathcal{F}$.
- Множина $\mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$ називається ***множиною систем відліку*** кінематики $\mathcal{F}$.

c) Нехай $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right) = \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$ довільна система відліку кінематики $\mathcal{F}$. Тоді:

- зберігаються без змін всі позначення, введені для системи відліку $\mathfrak{l}$ в теорії мінливих множин, а саме позначення $\mathtt{ind}\left(\mathfrak{l}\right)$, $\mathfrak{l}\hat{}$, $\mathfrak{Bs}(\mathfrak{l})$, $\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}$, $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$, $\underset{\mathfrak{l}}{\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\leftarrow}}$, $\mathbf{Tm}(\mathfrak{l})$, $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l})$, $\mathbb{L}l\left(\mathfrak{l}\right)$, $\mathbb{L}d\left(\mathfrak{l}\right)$, $\leq_{\mathfrak{l}}$, $<_{\mathfrak{l}}$, $\geq_{\mathfrak{l}}$, $>_{\mathfrak{l}}$, $\psi_{\mathfrak{l}}$, $\mathsf{BE}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{l}\hat{}$.
- індукуються наступні позначення, введені в теорії кінематичних множин:

$$\mathsf{BG}(\mathfrak{l};\, \mathcal{F}) := \mathsf{BG}(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C}); \quad \mathbb{L}s(\mathfrak{l};\, \mathcal{F}) := \mathbb{L}s(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C});$$
$$\mathbf{Zk}(\mathfrak{l};\, \mathcal{F}) := \mathbf{Zk}(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C}); \quad \mathcal{T}p(\mathfrak{l};\, \mathcal{F}) := \mathcal{T}p(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C});$$

- Якщо $\mathbb{L}s(\mathfrak{l}) \neq \emptyset$ і $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$, $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$ то індукується, також, наступне позначення:

$$\left(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n\right)_{\mathfrak{l},\mathcal{F}} := \left(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{C}}.$$

d) Для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F}) = \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ переносяться позначення:

$$\begin{array}{ll}
\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\ \mathcal{F} \rangle := \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C} \rangle\,; & \langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F} \rangle\ := \langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C} \rangle\ ; \\
\mathbb{M}k(\mathfrak{l}; \mathcal{F}) := \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l}; \mathfrak{C}) & \mathcal{F} \restriction \mathfrak{l} := \mathfrak{C} \restriction \mathfrak{l}; \\
\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega; \mathcal{F}) := \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega; \mathfrak{C}); & \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle}(\omega; \mathcal{F}) := \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle}(\omega; \mathfrak{C}) \quad (\text{де } \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})) \\
\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}(x; \mathcal{F}) := \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}(x; \mathfrak{C}); \quad (\text{де } x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})). &
\end{array}$$

Зауважимо, що із введених позначень випливає, що для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ довільної універсальної кінематики $\mathcal{F}$ справедлива рівність:

$$\mathsf{BE}\,(\mathcal{F} \restriction \mathfrak{l}) = \mathsf{BE}(\mathfrak{l}).$$

Власні позначення для універсальних кінематик Для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ будемо використовувати таке позначення:

$$[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}]\,\mathrm{w} = [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}]\,(\mathrm{w}) := \widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}(\mathrm{w}), \quad \mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}).$$

Таким чином, $[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}]$ є відображенням з $\mathbb{M}k(\mathfrak{l}) := \mathbb{M}k(\mathfrak{l}; \mathcal{F})$ в $\mathbb{M}k(\mathfrak{m})$ ($[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}] : \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l}) \to \mathbb{M}k\,(\mathfrak{m})$). Зауважимо, що, як правило, замість $[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}]\,(\mathrm{w})$ ми будемо використовувати скорочене позначення $[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}]\,\mathrm{w}$.

Скорочені варіанти позначень

- У тих випадках, коли наперед відомо про яку універсальну кінематику $\mathcal{F}$ йде мова, замість позначень $\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\cdot; \mathcal{F})$, $\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle}(\cdot; \mathcal{F})$, $[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\ \mathcal{F}]$ будемо використовувати позначення $\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\cdot)$, $\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle}(\cdot)$, $[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]$ (відповідно).
- Також будемо користуватися скороченими варіантами позначень для систем відліку кінематичних множин, описаними пункті **ж**) параграфа 2.2.4 (при цьому, символ $\mathfrak{C}$ слід замінити на символ $\mathcal{F}$ і термін "кінематична множина" на термін "універсальна кінематика"). Зокрема, залишаються в силі всі скорочені варіанти позначень для систем відліку мінливих множин, описані в параграфі 1.12.2 (див. текст після пункту 5)).

3.2.3. Деякі базові елементарні властивості універсальних кінематик

Нехай, $\mathcal{F}$ — універсальна кінематика. Використовуючи позначення, прийняті в попередньому параграфі, а також означення 2.6 (пункти 2, 4) для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ отримуємо рівність:

$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle}(\omega) = [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega) \quad (\forall \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}))\,, \tag{3.1}$$

Звідси, враховуючи означення 2.6 (пункт 1) маємо рівність:

$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \rangle}\left(\langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\,\omega\right) = [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega) \quad (\forall \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}))\,. \tag{3.2}$$

Крім того, за означенням 2.6 (пункт 4), для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ отримуємо рівності:

$$[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w} = \mathrm{w}; \quad (\forall \mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}))\,; \tag{3.3}$$

$$[\mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{m}]\,[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w} = [\mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w} \quad (\forall \mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}))\,. \tag{3.4}$$

Нехай $\mathfrak{C}$ — довільна кінематична множина або універсальна кінематика і $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ — довільна система відліку $\mathfrak{C}$. Застосовуючи прийняті в попередньому параграфі позначення, а також позначення для кінематичних множин (див. параграф 2.2.4), одержуємо рівності:

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathsf{BE}(\mathfrak{l})) = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}); \quad \mathfrak{B}\mathfrak{s}\,(\mathsf{BE}(\mathfrak{l})) = \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}); \quad \mathbb{L}d\,(\mathsf{BE}(\mathfrak{l})) = \mathbb{L}d(\mathfrak{l}). \tag{3.5}$$

Твердження 3.2. ***Нехай*** $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ *— довільні універсальні кінематики, причому:*

1. $\mathcal{L}k\,(\mathcal{F}_1) = \mathcal{L}k\,(\mathcal{F}_2)$.
2. *Для довільної системи відліку* $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F}_1) = \mathcal{L}k\,(\mathcal{F}_2)$ *справедливі рівності:*
   $\mathsf{BG}\,(\mathfrak{l};\, \mathcal{F}_1) = \mathsf{BG}\,(\mathfrak{l};\, \mathcal{F}_2)\,; \quad \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\,(x;\, \mathcal{F}_1) = \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\,(x;\, \mathcal{F}_2)\ \ (\forall x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}))\,.$
3. *Для довільних* $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F}_1) = \mathcal{L}k\,(\mathcal{F}_2)$ *виконуються такі рівності:*
   $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}_1 \rangle = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}_2 \rangle\,; \quad [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}_1] = [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}_2]\,.$

Тоді $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$.

Доведення. Нехай, $\mathcal{F}_1 = \left(\mathfrak{C}_1, \overleftarrow{\mathcal{Q}_1}\right)$, $\mathcal{F}_2 = \left(\mathfrak{C}_2, \overleftarrow{\mathcal{Q}_2}\right)$, де $\overleftarrow{\mathcal{Q}_1} = \left(\widetilde{Q}^{(1)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C}_1)}$, $\overleftarrow{\mathcal{Q}_2} = \left(\widetilde{Q}^{(2)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C}_2)}$ — універсальні кінематики, що задовольняють умови даного твердження. Тоді, за першою умовою твердження і згідно із системою позначень, прийнятою в параграфі 3.2.2, отримуємо:

$$\mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{L}k\,(\mathcal{F}_1) = \mathcal{L}k\,(\mathcal{F}_2) = \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_2)\,. \tag{3.6}$$

Далі, використовуючи другу і третю умови твердження, згідно із системою позначень, прийнятою в параграфі 3.2.2, для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_2)$ маємо:

$$\mathsf{BG}\,(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C}_1) = \mathsf{BG}\,(\mathfrak{l};\, \mathcal{F}_1) = \mathsf{BG}\,(\mathfrak{l};\, \mathcal{F}_2) = \mathsf{BG}\,(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C}_2)\,; \tag{3.7}$$

$$\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\,(x;\, \mathfrak{C}_1) = \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\,(x;\, \mathcal{F}_1) = \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\,(x;\, \mathcal{F}_2) = \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\,(x;\, \mathfrak{C}_2)\ \ (\forall x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}))\,; \tag{3.8}$$

$$\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C}_1 \rangle = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}_1 \rangle = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}_2 \rangle = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C}_2 \rangle \tag{3.9}$$

З рівностей (3.6), (3.7), (3.8), (3.9), враховуючи наслідок 2.5, виводимо рівність:

$$\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2. \tag{3.10}$$

Розглянемо довільні системи відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}_1\right) = \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}_2\right) = \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}_1\right) = \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}_2\right)$. Оскільки, за формулою (3.10), $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2$, то, згідно із позначеннями, прийнятими в пункті **d)** параграфа 3.2.2, отримуємо:

$$\mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}; \mathcal{F}_1\right) = \mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}; \mathfrak{C}_1\right) = \mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}; \mathfrak{C}_2\right) = \mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}; \mathcal{F}_2\right).$$

Тому, використовуючи третю умову даного твердження, а також позначення, прийняті в параграфі 3.2.2, для довільного елемента $\mathrm{w} \in \mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}; \mathfrak{C}_1\right) = \mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}; \mathfrak{C}_2\right) = \mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}; \mathcal{F}_1\right) = \mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}; \mathcal{F}_2\right)$ одержуємо:

$$\widetilde{Q}^{(1)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}(\mathrm{w}) = \left[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}_1\right] \mathrm{w} = \left[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}_2\right] \mathrm{w} = \widetilde{Q}^{(2)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}(\mathrm{w}),$$

тобто $\widetilde{Q}^{(1)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}} = \widetilde{Q}^{(2)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}$. Звідси, враховуючи довільність систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}_1\right) = \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}_2\right)$, отримуємо, $\overleftarrow{\mathcal{Q}_1} = \left(\widetilde{Q}^{(1)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathfrak{C}_1)} = \left(\widetilde{Q}^{(2)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathfrak{C}_2)} = \overleftarrow{\mathcal{Q}_2}$. Таким чином, $\mathcal{F}_1 = \left(\mathfrak{C}_1, \overleftarrow{\mathcal{Q}_1}\right) = \left(\mathfrak{C}_2, \overleftarrow{\mathcal{Q}_2}\right) = \mathcal{F}_2$. □

Зауваження 3.3.

► Із зауваження 2.3 та системи позначень для універсальних кінематик, прийнятої в параграфі 3.2.2 випливає, що для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$ довільної універсальної кінематики $\mathcal{F}$ залишаються істинними властивості 1.60 (з заміною символу "$\mathcal{B}$" на символ "$\mathfrak{l}$" і терміну "базова мінлива множина" на термін "система відліку").

► З аналогічної причини для довільної універсальної кінематики $\mathcal{F}$ залишаються справедливими властивості 1.126 (з заміною символа "$\mathcal{Z}$" на символ "$\mathcal{F}$" і терміну "мінлива множина" на термін "універсальна кінематика").

Основні результати підрозділу 3.2 були опубліковані в [100, розділ 5], а також представлені на конференціях [97, 98].

3.3. Теорема про мультиобраз для універсальних кінематик

Означення 3.4.

1. Упорядковану п'ятірку $(\mathbb{T}, \mathcal{X}, U, \mathfrak{Q}, \mathcal{K})$ (де $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — лінійно упорядкована множина), будемо називати (ін'єктивним) **універсальним кінематичним проектором** для базової кінематичної множини $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$, якщо:

   1.1. $(\mathbb{T}, \mathcal{X}, U)$ є ін'єктивним еволюційним проектором для $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$.

1.2. $\mathfrak{Q}$ — координатний простір.

1.3. $\mathcal{K}$ — бієкція з $\mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$ на $\mathbf{T} \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$.

1.4. Для довільних $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$ з умови $\mathsf{bs}\left(U\left(\omega_1\right)\right) = \mathsf{bs}\left(U\left(\omega_2\right)\right)$ випливає рівність $\mathsf{bs}\left(\mathcal{K}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\rangle}\left(\omega_1\right)\right)\right) = \mathsf{bs}\left(\mathcal{K}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\rangle}\left(\omega_2\right)\right)\right)$.

1.5. Для довільного $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$ справедлива рівність, $\mathsf{tm}\left(U(\omega)\right) = \mathsf{tm}\left(\mathcal{K}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\rangle}\left(\omega\right)\right)\right)$.

2. Довільну індексовану сім'ю $((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha, \mathfrak{Q}_\alpha, \mathcal{K}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$ (де $\mathcal{A} \neq \emptyset$) ін'єктивних універсальних кінематичних проекторів для базової кінематичної множини $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$ називатимемо **універсальним кінематичним мультипроектором** для $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$.

Надалі будуть розглядатися лише ін'єктивні універсальні кінематичні проектори. Тому ми вживатимемо термін "універсальний кінематичний проектор" замість "ін'єктивний універсальний кінематичний проектор"

Нехай, $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha, \mathfrak{Q}_\alpha, \mathcal{K}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$ — універсальний кінематичний мультипроектор для базової кінематичної множини $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$. Тоді, за означенням 3.4, індексована сім'я:

$$\mathfrak{P}^{[e]} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$$

є еволюційним мультипроектором для базової мінливої множини $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$.

Теорема 3.5 (про мультиобраз для універсальних кінематик). *Нехай* $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha, \mathfrak{Q}_\alpha, \mathcal{K}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$ *(де* $\mathcal{A} \neq \emptyset$*) — універсальний кінематичний мультипроектор для базової кінематичної множини* $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$*. Тоді існує, причому єдина, універсальна кінематика* $\mathcal{F}$ *така, що:*

1. $\mathbb{BE}\left(\mathcal{F}\right) = \mathcal{Z}\mathsf{im}\left[\mathfrak{P}^{[e]}, \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right]$.
2. *Для будь-якої системи відліку* $\mathfrak{l} = \left(\alpha, U_\alpha\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right), \mathbb{T}_\alpha\right]\right) \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$ *(*$\alpha \in \mathcal{A}$*) і для будь-якого елементарно-часового стану* $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ *справедливі рівності:*
$$\mathsf{BG}\left(\mathfrak{l}, \mathcal{F}\right) = \mathfrak{Q}_\alpha; \quad \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\omega, \mathcal{F}\right) = \mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\rangle}\left(U_\alpha^{[-1]}(\omega)\right)\right).$$
3. *Для довільних систем відліку* $\mathfrak{l} = \left(\alpha, U_\alpha\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right), \mathbb{T}_\alpha\right]\right) \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$, $\mathfrak{m} = \left(\beta, U_\beta\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right), \mathbb{T}_\beta\right]\right) \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$ *(*$\alpha, \beta \in \mathcal{A}$*) і для довільного елемента* $\mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}; \mathcal{F})$ *справедлива наступна рівність:*
$$[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\ \mathcal{F}]\,\mathrm{w} = \mathcal{K}_\beta\left(\mathcal{K}_\alpha^{[-1]}(\mathrm{w})\right).$$

Доведення. Нехай, $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha, \mathfrak{Q}_\alpha, \mathcal{K}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$, (де $\mathcal{A} \neq \emptyset$ і $\mathbb{T}_\alpha = (\mathbf{T}_\alpha, \leq_\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{A}$) — універсальний кінематичний мультипроектор для базової кінематичної множини $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$. Зафіксуємо довільний індекс $\alpha \in \mathcal{A}$. За означенням 3.4, трійка $(\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha)$

є (ін'єктивним) еволюційним проектором для базової мінливої множини $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$. Отже, за означенням еволюційного проектора (означення 1.132), U_α є відображенням з множини $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$ в множину $\mathbf{T}_\alpha \times \mathcal{X}_\alpha$. Покладемо:

$$\widetilde{\mathcal{X}}_\alpha := \left\{\mathsf{bs}\left(U_\alpha(\omega)\right) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right\}.$$

Тоді отримаємо, $\widetilde{\mathcal{X}}_\alpha \subseteq \mathcal{X}_\alpha$.

Для довільного $x = \mathsf{bs}\left(U_\alpha(\omega)\right) \in \widetilde{\mathcal{X}}_\alpha$ (де $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$) введемо таке позначення:

$$\widetilde{\mathbf{k}}_\alpha(x) := \mathsf{bs}\left(\mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\rangle}(\omega)\right)\right).$$

З умови 1.4 означення 3.4 випливає, що відображення $\widetilde{\mathbf{k}}_\alpha$ визначено коректно.

За означенням 3.4, $\mathcal{K}_\alpha$ є відображенням з $\mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$ в $\mathbf{T}_\alpha \times \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_\alpha\right)$. Тому $\widetilde{\mathbf{k}}_\alpha$ є відображенням з $\widetilde{\mathcal{X}}_\alpha$ в $\mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_\alpha\right)$. Продовжимо довільним чином відображення $\widetilde{\mathbf{k}}_\alpha$ на множину $\mathcal{X}_\alpha$ до відображення $\mathbf{k}_\alpha : \mathcal{X}_\alpha \mapsto \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_\alpha\right)$ (де $\mathbf{k}_\alpha(x) = \widetilde{\mathbf{k}}_\alpha(x)$ для $x \in \widetilde{\mathcal{X}}_\alpha$). Враховуючи довільність індексу $\alpha \in \mathcal{A}$, отримуємо індексовану сім'ю:

$$\mathfrak{P}^{[k]} := \left(\left(\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha, \mathfrak{Q}_\alpha, \mathbf{k}_\alpha\right) \mid \alpha \in \mathcal{A}\right).$$

За означенням 2.12, $\mathfrak{P}^{[k]}$ є кінематичним мультипроектором для базової мінливої множини $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$. Покладемо:

$$\mathfrak{C} := \mathfrak{Kim}\left[\mathfrak{P}^{[k]}, \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right].$$

Оскільки $\left(\mathfrak{P}^{[k]}\right)^{[e]} = \mathfrak{P}^{[e]}$, то, за теоремою 2.14, отримуємо:

$$\mathbb{BE}\left(\mathfrak{C}\right) = \mathcal{Z}\mathsf{im}\left[\mathfrak{P}^{[e]}, \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right]. \tag{3.11}$$

Розглянемо довільну систему відліку $\mathfrak{l} = \left(\alpha, U_\alpha\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right), \mathbb{T}_\alpha\right]\right) \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$. За теоремою 2.14, маємо:

$$\mathsf{BG}\left(\mathfrak{l}, \mathfrak{C}\right) = \mathfrak{Q}_\alpha. \tag{3.12}$$

А на основі теореми 1.133, одержуємо:

$$\begin{aligned}\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) &= \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(U_\alpha\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right), \mathbb{T}_\alpha\right]\right) = U_\alpha\left(\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right)\right) = \\ &= U_\alpha\left(\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right) = \left\{U_\alpha(\omega) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right\}.\end{aligned}$$

Тому, враховуючи властивість 1.60(9) і зауваження 2.3, приходимо до рівності:

$$\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = \left\{\mathsf{bs}\left(\widetilde{\omega}\right) \mid \widetilde{\omega} \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\right\} = \left\{\mathsf{bs}\left(U_\alpha(\omega)\right) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right\} = \widetilde{\mathcal{X}}_\alpha.$$

Звідси, за теоремою 2.14, для довільного елементарного стану $x = \mathsf{bs}\left(U_\alpha(\omega)\right) \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = \widetilde{\mathcal{X}}_\alpha$ (де $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$), отримуємо, $\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\left(x, \mathfrak{C}\right) = \mathbf{k}_\alpha(x) = \widetilde{\mathbf{k}}_\alpha(x) = \mathsf{bs}\left(\mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\rangle}(\omega)\right)\right)$. Отже:

$$\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\left(\mathsf{bs}\left(U_\alpha(\omega)\right), \mathfrak{C}\right) = \mathsf{bs}\left(\mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\rangle}(\omega)\right)\right) \quad \left(\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right). \tag{3.13}$$

За означенням 3.4, пункт 2, $(\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha, \mathfrak{Q}_\alpha, \mathcal{K}_\alpha)$ є універсальним кінематичним проектором для $\mathfrak{C}^\mathfrak{b}$. Тому, за означенням 3.4 (пункт **1.5**) маємо:

$$\mathsf{tm}\left(U_\alpha(\omega)\right) = \mathsf{tm}\left(\mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{C}^\mathfrak{b}\rangle}(\omega)\right)\right), \quad \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^\mathfrak{b}\right).$$

Отже, з рівності (3.13) для $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^\mathfrak{b}\right)$ отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}\rangle}\left(U_\alpha(\omega), \mathfrak{C}\right) &= \left(\mathsf{tm}\left(U_\alpha(\omega)\right), \mathsf{q}_\mathfrak{l}\left(\mathsf{bs}\left(U_\alpha(\omega)\right), \mathfrak{C}\right)\right) = \\ &= \left(\mathsf{tm}\left(\mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{C}^\mathfrak{b}\rangle}(\omega)\right)\right), \mathsf{bs}\left(\mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{C}^\mathfrak{b}\rangle}(\omega)\right)\right)\right) = \mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{C}^\mathfrak{b}\rangle}(\omega)\right).\end{aligned}$$

Звідси:

$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}\rangle}\left(\omega, \mathfrak{C}\right) = \mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{C}^\mathfrak{b}\rangle}\left(U_\alpha^{[-1]}(\omega)\right)\right), \ \omega \in U_\alpha\left(\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^\mathfrak{b}\right)\right) = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}). \tag{3.14}$$

Згідно властивостями 2.16, для довільної системи відліку $\mathfrak{l} = \left(\alpha, U_\alpha\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^\mathfrak{b}\right), \mathbb{T}_\alpha\right]\right) \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$ мамо:

$$\begin{aligned}&\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}) = \mathbb{T}_\alpha; \ \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) = \mathbf{T}_\alpha; \ \mathbf{Zk}(\mathfrak{l}; \mathfrak{C}) = \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_\alpha\right); \\ &\mathbb{M}k(\mathfrak{l}; \mathfrak{C}) = \mathbf{T}_\alpha \times \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_\alpha\right).\end{aligned} \tag{3.15}$$

Для довільних систем відліку $\mathfrak{l} = \left(\alpha, U_\alpha\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^\mathfrak{b}\right), \mathbb{T}_\alpha\right]\right) \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$, $\mathfrak{m} = \left(\beta, U_\beta\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^\mathfrak{b}\right), \mathbb{T}_\beta\right]\right) \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$ введемо наступне позначення

$$\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}(\mathrm{w}) := \mathcal{K}_\beta\left(\mathcal{K}_\alpha^{[-1]}(\mathrm{w})\right), \quad \mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}, \mathfrak{C}) = \mathbf{T}_\alpha \times \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_\alpha\right). \tag{3.16}$$

За означенням 3.4 (пункт **1.3**), відображення $\mathcal{K}_\alpha$ є бієкцією між $\mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^\mathfrak{b}\right)$ і $\mathbf{T}_\alpha \times \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_\alpha\right) = \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$. Тому, відображення $\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}$ є бієкцією між $\mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ і $\mathbb{M}k(\mathfrak{m})$ (для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$). Доведемо, що сім'я бієкцій $\left(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}} \mid \mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)\right)$ є універсальним перетворенням координат для кінематичної множини $\mathfrak{C}$.

Використовуючи властивість 2.16(5) і формулу (3.14), для довільних систем відліку $\mathfrak{l} = \left(\alpha, U_\alpha\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^\mathfrak{b}\right), \mathbb{T}_\alpha\right]\right) \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$, $\mathfrak{m} = \left(\beta, U_\beta\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^\mathfrak{b}\right), \mathbb{T}_\beta\right]\right) \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$ і довільного $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle}\left(\omega; \mathfrak{C}\right) &= \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m}\rangle}\left(\langle ! \ \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \ \mathfrak{C}\rangle \, \omega; \ \mathfrak{C}\right) = \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m}\rangle}\left(U_\beta\left(U_\alpha^{[-1]}(\omega)\right)\right) = \\ &= \mathcal{K}_\beta\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{C}^\mathfrak{b}\rangle}\left(U_\beta^{[-1]}\left(U_\beta\left(U_\alpha^{[-1]}(\omega)\right)\right)\right)\right) = \mathcal{K}_\beta\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{C}^\mathfrak{b}\rangle}\left(U_\alpha^{[-1]}(\omega)\right)\right) = \\ &= \mathcal{K}_\beta\left(\mathcal{K}_\alpha^{[-1]}\left(\mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{C}^\mathfrak{b}\rangle}\left(U_\alpha^{[-1]}(\omega)\right)\right)\right)\right) = \\ &= \mathcal{K}_\beta\left(\mathcal{K}_\alpha^{[-1]}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}\rangle}\left(\omega; \mathfrak{C}\right)\right)\right) = \widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}\rangle}\left(\omega; \mathfrak{C}\right)\right).\end{aligned}$$

Отже, за означенням 2.6 (пункт 2), $\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}$ є універсальним перетворенням координат з системи відліку $\mathfrak{l}$ в систему відліку $\mathfrak{m}$ (для довільних $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$). З формули (3.16)

випливає, що для будь-яких $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$ і $\mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ виконуються рівності:

$$\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{l},\mathfrak{l}}(\mathrm{w}) = \mathrm{w} \quad \text{і} \quad \widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{p},\mathfrak{m}}\left(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}(\mathrm{w})\right) = \widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{p},\mathfrak{l}}(\mathrm{w}).$$

Тому, за означенням 2.6, пункт 4, сім'я відображень $\left(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}} \,|\, \mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)\right)$ є універсальним перетворенням координат для кінематичної множини $\mathfrak{C}$. Покладемо:

$$\overleftarrow{\mathcal{Q}} := \left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathfrak{C})}; \quad \mathcal{F} := \left(\mathfrak{C}, \overleftarrow{\mathcal{Q}}\right) = \left(\mathfrak{C}, \left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathfrak{C})}\right).$$

За означенням 3.1, $\mathcal{F}$ є універсальною кінематикою. Згідно із системою позначень, введеною в параграфі 3.2.2 і формулою (3.11), маємо:

$$\mathbb{BE}\left(\mathcal{F}\right) = \mathbb{BE}(\mathfrak{C}) = \mathcal{Z}\mathsf{im}\left[\mathfrak{P}^{[e]}, \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right]; \quad \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right) = \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right).$$

При цьому, використовуючи формули (3.12), (3.14), (3.15), (3.16), для довільних систем відліку $\mathfrak{l} = \left(\alpha, U_\alpha\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right), \mathbb{T}_\alpha\right]\right) \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$, $\mathfrak{m} = \left(\beta, U_\beta\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right), \mathbb{T}_\beta\right]\right) \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$ отримуємо:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{BG}\left(\mathfrak{l};\, \mathcal{F}\right) = \mathsf{BG}\left(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C}\right) = \mathfrak{Q}_\alpha\,;\\
&\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\omega; \mathcal{F}\right) = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\omega; \mathfrak{C}\right) = \mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\rangle}\left(U_\alpha^{[-1]}(\omega)\right)\right) \ \left(\forall\, \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = U_\alpha\left(\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right)\right);\\
&\left[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathcal{F}\right]\mathrm{w} = \widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}(\mathrm{w}) = \mathcal{K}_\beta\left(\mathcal{K}_\alpha^{[-1]}(\mathrm{w})\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left(\forall\, \mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}, \mathcal{F}) = \mathbb{M}k(\mathfrak{l}, \mathfrak{C}) = \mathbf{T}_\alpha \times \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_\alpha\right)\right).
\end{aligned}$$

Отже, універсальна кінематика $\mathcal{F}$ задовольняє умови 1–3 даної теореми.

Доведемо, що кінематика $\mathcal{F}$, яка задовольняє умови 1–3 даної теореми — єдина. Припустимо, що універсальна кінематика $\mathcal{F}_1$ також задовольняє умови 1–3 даної теореми. Тоді, в силу першої умови, маємо, $\mathbb{BE}\left(\mathcal{F}\right) = \mathcal{Z}\mathsf{im}\left[\mathfrak{P}^{[e]}, \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right] = \mathbb{BE}\left(\mathcal{F}_1\right)$. Отже, в силу системи позначень, прийнятої у параграфі 3.2.2 отримуємо:

$$\mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right) = \mathcal{L}k\left(\mathbb{BE}\left(\mathcal{F}\right)\right) = \mathcal{L}k\left(\mathbb{BE}\left(\mathcal{F}_1\right)\right) = \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}_1\right); \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
\langle\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}\rangle = \langle\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathbb{BE}\left(\mathcal{F}\right)\rangle = \langle\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathbb{BE}\left(\mathcal{F}_1\right)\rangle = \langle\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}_1\rangle \qquad (3.18)\\
\left(\forall \mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right) = \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}_1\right)\right).
\end{aligned}$$

Далі, використовуючи другу умову даної теореми для будь-якої системи відліку $\mathfrak{l} = \left(\alpha, U_\alpha\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right), \mathbb{T}_\alpha\right]\right) \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right) = \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}_1\right)$ $(\alpha \in \mathcal{A})$ і для будь-якого елементарно-часового стану $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ маємо:

$$\mathsf{BG}\left(\mathfrak{l}; \mathcal{F}\right) = \mathfrak{Q}_\alpha = \mathsf{BG}\left(\mathfrak{l}; \mathcal{F}_1\right); \tag{3.19}$$

$$\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\omega; \mathcal{F}\right) = \mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\rangle}\left(U_\alpha^{[-1]}(\omega)\right)\right) = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\omega; \mathcal{F}_1\right). \tag{3.20}$$

Розглянемо довільний елементарний стан $x \in \mathfrak{Bs}(\mathfrak{l})$. Згідно з зауваженням 3.3 та з властивістю 1.60(9), існує елементарно-часовий стан $\omega_x \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ такий, що $x = \mathsf{bs}\left(\omega_x\right)$.

І, використовуючи рівності (2.4) та (3.20), отримуємо:

$$(\mathsf{tm}\,(\omega_x)\,,\mathsf{q}_{\mathfrak{l}}(x;\mathcal{F})) = (\mathsf{tm}\,(\omega_x)\,,\mathsf{q}_{\mathfrak{l}}\,(\mathsf{bs}\,(\omega_x)\,;\mathcal{F})) = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\,(\omega_x;\mathcal{F}) = \\ = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\,(\omega_x;\mathcal{F}_1) = (\mathsf{tm}\,(\omega_x)\,,\mathsf{q}_{\mathfrak{l}}\,(x;\mathcal{F}_1))\,.$$

Звідси:

$$\mathsf{q}_{\mathfrak{l}}(x;\mathcal{F}) = \mathsf{q}_{\mathfrak{l}}\,(x;\mathcal{F}_1) \quad (\forall x \in \mathfrak{Bs}(\mathfrak{l}))\,. \tag{3.21}$$

Використовуючи рівність (3.19) та третю умову даної теореми для довільних систем відліку $\mathfrak{l} = \left(\alpha, U_\alpha\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right),\mathbb{T}_\alpha\right]\right) \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$, $\mathfrak{m} = \left(\beta, U_\beta\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right),\mathbb{T}_\beta\right]\right) \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ $(\alpha,\beta \in \mathcal{A})$ і для довільного елемента $\mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l};\mathcal{F})$ отримуємо:

$$\mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l};\mathcal{F}) = \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l};\mathcal{F}_1)\,; \\ [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\mathcal{F}]\,\mathrm{w} = \mathcal{K}_\beta\left(\mathcal{K}_\alpha^{[-1]}(\mathrm{w})\right) = [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\mathcal{F}_1]\,\mathrm{w}. \tag{3.22}$$

Беручи до уваги твердження 3.2, та співвідношення (3.17), (3.19), (3.21), (3.18), (3.22), приходимо до рівності $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$. □

Означення 3.6. Нехай $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha,\mathcal{X}_\alpha,U_\alpha,\mathfrak{Q}_\alpha,\mathcal{K}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$ (де $\mathcal{A} \neq \emptyset$ і $\mathbb{T}_\alpha = (\mathbf{T}_\alpha,\leq_\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{A}$) — універсальний кінематичний мультипроектор для базової кінематичної множини $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$. Універсальну кінематику $\mathcal{F}$, що задовольняє умови 1–3 теореми 3.5 будемо називати **універсальним кінематичним мультиобразом** базової кінематичної множини $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$ відносно мультипроектора $\mathfrak{P}$, і будемо її позначати через $\mathfrak{Ku}\left[\mathfrak{P},\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right]$:

$$\mathfrak{Ku}\left[\mathfrak{P},\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right] := \mathcal{F}.$$

Властивості 3.7. *Нехай* $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha,\mathcal{X}_\alpha,U_\alpha,\mathfrak{Q}_\alpha,\mathcal{K}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$ *(де* $\mathcal{A} \neq \emptyset$ *і* $\mathbb{T}_\alpha = (\mathbf{T}_\alpha,\leq_\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{A}$*) — універсальний кінематичний мультипроектор для базової кінематичної множини* $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$ *і* $\mathcal{F} = \mathfrak{Ku}\left[\mathfrak{P},\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right]$. *Тоді:*

1. $\mathcal{L}k\,(\mathcal{F}) = \left\{\left(\alpha, U_\alpha\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right),\mathbb{T}_\alpha\right]\right) \mid \alpha \in \mathcal{A}\right\}$.
2. $\mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}) = \mathcal{A}$.
3. *Для довільної системи відліку* $\mathfrak{l} = \left(\alpha, U_\alpha\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right),\mathbb{T}_\alpha\right]\right) \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ *справедливі наступні рівності:*

$$\mathbb{Bs}(\mathfrak{l}) = U_\alpha\left(\mathbb{Bs}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right) = \left\{U_\alpha(\omega) \mid \omega \in \mathbb{Bs}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right\}; \\ \mathfrak{Bs}(\mathfrak{l}) = \left\{\mathsf{bs}\,(U_\alpha(\omega)) \mid \omega \in \mathbb{Bs}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right\}; \quad \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}) = \mathbb{T}_\alpha; \quad \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) = \mathbf{T}_\alpha;$$

4. *Для довільної системи відліку* $\mathfrak{l} = \left(\alpha, U_\alpha\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right),\mathbb{T}_\alpha\right]\right) \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ *мають місце такі рівності:*

$$\mathbf{Zk}(\mathfrak{l};\mathcal{F}) = \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{Q}_\alpha)\,; \tag{3.23}$$

$$\mathbb{M}k(\mathfrak{l};\mathcal{F}) = \mathbf{T}_\alpha \times \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{Q}_\alpha)\,; \tag{3.24}$$

$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega; \mathcal{F}) = \mathcal{K}_\alpha \left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{e}^\mathfrak{b} \rangle} \left(U_\alpha^{[-1]}(\omega) \right) \right) \qquad (\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}))\,. \tag{3.25}$$

5. *Нехай,* $\mathfrak{l} = \left(\alpha, U_\alpha \left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{e}^\mathfrak{b}\right), \mathbb{T}_\alpha\right]\right) \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$*, де* $\alpha \in \mathcal{A}$*. Якщо* $\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ *і* $\mathsf{tm}\left(\widetilde{\omega}_1\right) \neq \mathsf{tm}\left(\widetilde{\omega}_2\right)$*, то елементарно-часові стани* $\widetilde{\omega}_1$ *та* $\widetilde{\omega}_2$ *є об'єднані долею в* $\mathfrak{l}$ *тоді і тільки тоді, коли існують об'єднані долею в* $\mathfrak{e}^\mathfrak{b}$ *елементарно-часові стани* $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{e}^\mathfrak{b}\right)$ *такі, що* $\widetilde{\omega}_1 = U_\alpha\left(\omega_1\right)$*,* $\widetilde{\omega}_2 = U_\alpha\left(\omega_2\right)$*.*

6. *Для довільних систем відліку* $\mathfrak{l} = \left(\alpha, U_\alpha \left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{e}^\mathfrak{b}\right), \mathbb{T}_\alpha\right]\right) \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$*,* $\mathfrak{m} = \left(\beta, U_\beta \left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{e}^\mathfrak{b}\right), \mathbb{T}_\beta\right]\right) \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$ *(*$\alpha, \beta \in \mathcal{A}$*) справедлива рівність:*

$$\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathcal{F} \rangle\, \omega = U_\beta \left(U_\alpha^{[-1]}(\omega) \right) \quad \left(\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = U_\alpha \left(\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{e}^\mathfrak{b}\right)\right)\right);$$

7. *Для довільних систем відліку* $\mathfrak{l} = \left(\alpha, U_\alpha \left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{e}^\mathfrak{b}\right), \mathbb{T}_\alpha\right]\right) \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$*,* $\mathfrak{m} = \left(\beta, U_\beta \left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{e}^\mathfrak{b}\right), \mathbb{T}_\beta\right]\right) \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$ *(*$\alpha, \beta \in \mathcal{A}$*) виконується рівність:*

$$[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathcal{F}]\, \mathrm{w} = \mathcal{K}_\beta \left(\mathcal{K}_\alpha^{[-1]}(\mathrm{w}) \right) \quad (\mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}; \mathcal{F}))\,.$$

Доведення. Нехай $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha, \mathfrak{Q}_\alpha, \mathcal{K}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$ (де $\mathbb{T}_\alpha = (\mathbf{T}_\alpha, \leq_\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{A}$) — універсальний кінематичний мультипроектор для $\mathfrak{e}^\mathfrak{b}$ і $\mathcal{F} = \mathfrak{Ku}\left[\mathfrak{P}, \mathfrak{e}^\mathfrak{b}\right]$.

1,2,3,5,6: Згідно з теоремою 3.5 (пункт 1), маємо:

$$\mathbb{BE}\left(\mathcal{F}\right) = \mathcal{Z}\mathsf{im}\left[\mathfrak{P}^{[e]}, \mathsf{BE}\left(\mathfrak{e}^\mathfrak{b}\right)\right].$$

Отже, згідно із прийнятою системою позначень для універсальних кінематик, значення всіх компонент мінливої множини $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}\mathsf{im}\left[\mathfrak{P}^{[e]}, \mathsf{BE}\left(\mathfrak{e}^\mathfrak{b}\right)\right]$ збігаються із значеннями відповідних компонент універсальної кінематики $\mathcal{F}$. Тому, властивості 3.7(1,2,3,5,6) випливають з властивостей 1.145(1-4) та наслідка 1.188.

4: Розглянемо довільну систему відліку $\mathfrak{l} = (\alpha, U_\alpha [\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$, де $\alpha \in \mathcal{A}$. Згідно з теоремою 3.5 (пункт 2), маємо:

$$\mathsf{BG}\left(\mathfrak{l};\, \mathcal{F}\right) = \mathfrak{Q}_\alpha. \tag{3.26}$$

Із системи позначень, прийнятої для кінематичних множин та універсальних кінематик, випливає, що для довільної системи відліку $\mathfrak{k} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{Y}\right)$ довільної кінематичної множини або універсальної кінематики $\mathcal{Y}$ справедлива рівність: $\mathbf{Zk}\left(\mathfrak{k}, \mathcal{Y}\right) = \mathbf{Zk}\left(\mathsf{BG}\left(\mathfrak{k}, \mathcal{Y}\right)\right)$. З останньої рівності, враховуючи рівність (3.26), отримуємо рівність (3.23). Рівність (3.24) випливає з рівності (3.23), властивості 3.7(3) і означення множини Мінковського. Рівність (3.25) випливає з теореми 3.5 (пункт 2).

7: Властивість 3.7(7) випливає з теореми 3.5 (пункт 3). □

Основні результати підрозділу 3.3 були опубліковані в [100, підрозділ 6.4], а також представлені на конференції [98].

3.4. Універсальні кінематики, породжені спеціальною теорією відносності та її узагальненнями

3.4.1. Універсальні кінематики, пов'язані з узагальненими перетвореннями Лоренца в сенсі E. Recami, B. Ольховського та R. Goldoni

Нехай, $\mathfrak{Q}$ — координатний простір. Довільна базова мінлива множина $\mathcal{B}$ така, що $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ {3.1} породжує наступну базову кінематичну множину:

$$\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})} = \left(\mathcal{B}, \left(\mathfrak{Q}, \mathbb{I}_{\mathfrak{Bs}(\mathcal{B})}\right)\right), \tag{3.27}$$

де $\mathbb{I}_{\mathfrak{Bs}(\mathcal{B})}$ — тотожне відображення на $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$. Для цієї кінематичної множини мають місце такі рівності:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Zk}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right) &= \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q});\\
\mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right) &= \mathbf{Tm}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right) \times \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right) = \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q});\\
\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}}(x) &= x, \quad x \in \mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right) = \mathfrak{Bs}(\mathcal{B});
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})} \right\rangle}(\omega) &= \left(\mathsf{tm}\left(\omega\right), \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}}\left(\mathsf{bs}\left(\omega\right)\right)\right) =\\
&= \left(\mathsf{tm}\left(\omega\right), \mathsf{bs}\left(\omega\right)\right) = \omega \quad \left(\omega \in \mathbb{Bs}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right) = \mathbb{Bs}(\mathcal{B})\right).
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Нехай, $\mathbb{U}$ — довільна трансформуюча множина бієкцій відносно $\mathcal{B}$ на $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ (в сенсі прикладу 1.146).

Твердження 3.8. *Для довільного відображення* $\mathbf{U} \in \mathbb{U}$ *упорядкована п'ятірка* $(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}), \mathbf{U}, \mathfrak{Q}, \mathbf{U})$ *є універсальним кінематичним проектором для* $\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}$.

Доведення. Розглянемо довільне відображення $\mathbf{U} \in \mathbb{U}$. Згідно з означенням трансформуючої множини бієкцій відносно, $\mathbf{U}$ є бієкцією виду $\mathbf{U} : \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}) \longleftrightarrow \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$, де $\mathbb{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$. Отже, трійка $(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}), \mathbf{U})$ є ін'єктивним еволюційним проектором для базової мінливої множини $\mathcal{B} = \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right)$ {3.2}. Далі, згідно з (3.28), $\mathbf{U}$ є бієкцією типу $\mathbf{U} : \mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right) \longleftrightarrow \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$. Отже, умови **1.1–1.3** означення 3.4 — виконані. Перевіримо виконання умов **1.4** і **1.5**. Використовуючи (3.29), для довільних елементарно-часових станів $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Bs}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right)$ таких, що $\mathsf{bs}\left(\mathbf{U}\left(\omega_1\right)\right) = \mathsf{bs}\left(\mathbf{U}\left(\omega_2\right)\right)$ і

{3.1} Для того, щоб побудувати базову мінливу множину $\mathcal{B}$, що задовольняє умову $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ достатньо покласти $\mathcal{B} := \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \mathcal{R}\right)$, де $\mathcal{R}$ — система абстрактних траєкторій з деякої лінійно упорядкованої множини $\mathbb{T}$ в множину $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ (див. означення базової мінливої множини $\mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \mathcal{R}\right)$ в прикладі 1.62, також див. теорему 1.63).

{3.2} Нагадаємо, що, згідно із домовленістю, прийнятою в прикладі 1.146, ми інколи ототожнюємо відображення $\mathbf{U}_{\restriction \mathbb{Bs}(\mathcal{B})}$ з відображенням $\mathbf{U}$ (де $\mathbf{U}_{\restriction \mathbb{Bs}(\mathcal{B})}$ — звуження відображення $\mathbf{U}$ на множину $\mathbb{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$).

довільного $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right)$ отримуємо:

$$\mathsf{bs}\left(\mathbf{U}\left(\mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right\rangle}(\omega_1)\right)\right) = \mathsf{bs}\left(\mathbf{U}\left(\omega_1\right)\right) = \mathsf{bs}\left(\mathbf{U}\left(\omega_2\right)\right) = \mathsf{bs}\left(\mathbf{U}\left(\mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right\rangle}(\omega_2)\right)\right);$$
$$\mathsf{tm}\left(\mathbf{U}(\omega)\right) = \mathsf{tm}\left(\mathbf{U}\left(\mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right\rangle}(\omega)\right)\right).$$

Отже, умови **1.4**, **1.5** означення 3.4 також виконуються. Твердження доведено. □

Для довільної трансформуючої множини бієкцій $\mathbb{U}$ відносно $\mathcal{B}$ на $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ покладемо:

$$\widehat{\mathbb{U}}_{\mathsf{UK}} := \left((\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}), \mathbf{U}, \mathfrak{Q}, \mathbf{U}) \mid \mathbf{U} \in \mathbb{U}\right).$$

Беручи до уваги твердження 3.8 та означення 3.4, бачимо, що $\widehat{\mathbb{U}}_{\mathsf{UK}}$ є універсальним кінематичним мультипроектором для базової кінематич. множини $\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}$. Покладемо:

$$\mathfrak{Ku}\left(\mathbb{U}, \mathcal{B}, \mathfrak{Q}\right) := \mathfrak{Ku}\left[\widehat{\mathbb{U}}_{\mathsf{UK}}, \mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right]. \tag{3.30}$$

Зауважимо, що універсальні кінематики типу $\mathfrak{Ku}\left(\mathbb{U}, \mathcal{B}, \mathfrak{Q}\right)$ можна побудувати іншим шляхом:

Твердження 3.9. *Справедлива наступна рівність:*

$$\mathfrak{Ku}\left(\mathbb{U}, \mathcal{B}, \mathfrak{Q}\right) = \left(\mathfrak{Kim}\left(\mathbb{U}, \mathcal{B}, \mathfrak{Q}\right), \overleftarrow{\mathcal{Q}}\right), \quad \text{де } \overleftarrow{\mathcal{Q}} = \left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathfrak{Kim}(\mathbb{U},\mathcal{B},\mathfrak{Q}))}, \text{ і}$$
$$\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}(\mathrm{w}) = \mathbf{V}\left(\mathbf{U}^{[-1]}(\mathrm{w})\right) \tag{3.31}$$
$$\left(\mathfrak{l} = (\mathbf{U}, \mathbf{U}\left[\mathcal{B}\right]) \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{Kim}\left(\mathbb{U}, \mathcal{B}, \mathfrak{Q}\right)\right), \ \mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}) = \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}),\right.$$
$$\left.\mathfrak{m} = (\mathbf{V}, \mathbf{V}\left[\mathcal{B}\right]) \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{Kim}\left(\mathbb{U}, \mathcal{B}, \mathfrak{Q}\right)\right)\right).$$

Доведення. Позначимо, $\mathfrak{C} := \mathfrak{Kim}\left(\mathbb{U}, \mathcal{B}, \mathfrak{Q}\right)$. Згідно з теоремою 2.17, система відображень $\overleftarrow{\mathcal{Q}}$, що задається формулою (3.31) є універсальним перетворенням координат для $\mathfrak{C}$. Отже, пара:

$$\mathcal{F} = \left(\mathfrak{C}, \overleftarrow{\mathcal{Q}}\right) = \left(\mathfrak{Kim}\left(\mathbb{U}, \mathcal{B}, \mathfrak{Q}\right), \overleftarrow{\mathcal{Q}}\right)$$

є універсальною кінематикою.

В силу формули (2.15), маємо:

$$\mathfrak{Kim}\left(\mathbb{U}, \mathcal{B}, \mathfrak{Q}\right) = \mathfrak{Kim}\left[\widehat{\mathbb{U}}, \mathcal{B}\right], \qquad \text{де} \tag{3.32}$$
$$\widehat{\mathbb{U}} = \left(\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}), \mathbf{U}, \mathfrak{Q}, \mathbb{I}_{\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})}\right) \mid \mathbf{U} \in \mathbb{U}\right)$$

де $\mathbb{I}_{\mathcal{M}}$ — тотожне відображення на деякій множині $\mathcal{M}$. Згідно з (3.30) отримуємо,

$$\mathfrak{Ku}\left(\mathbb{U}, \mathcal{B}, \mathfrak{Q}\right) = \mathfrak{Ku}\left[\widehat{\mathbb{U}}_{\mathsf{UK}}, \mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right], \qquad \text{де} \tag{3.33}$$

$$\widehat{\mathbb{U}}_{\mathsf{UK}} = ((\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}), \mathbf{U}, \mathfrak{Q}, \mathbf{U}) \mid \mathbf{U} \in \mathbb{U}) \quad \text{і} \quad \mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})} = \left(\mathcal{B}, \left(\mathfrak{Q}, \mathbb{I}_{\mathfrak{Bs}(\mathcal{B})}\right)\right). \tag{3.34}$$

Використовуючи (3.34), для довільного $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right)$ одержуємо:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right) = \mathbf{Tm}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right) \times \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right) = \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q});\\
&\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right\rangle}(\omega) = \left(\mathsf{tm}\left(\omega\right), \mathsf{q}_{\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}}\left(\mathsf{bs}\left(\omega\right)\right)\right) =\\
&\qquad = \left(\mathsf{tm}\left(\omega\right), \mathbb{I}_{\mathfrak{Bs}(\mathcal{B})}\left(\mathsf{bs}\left(\omega\right)\right)\right) = \omega \ \left(\forall \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right)\right).
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Застосовуючи (3.32), (3.33), (3.35), а також властивості 2.16, теорему 2.14, і властивості 3.7, виводимо наступні результати:

1. $\mathbb{BE}\left(\mathcal{F}\right) = \mathcal{Z}\mathsf{im}\left[\widehat{\mathbb{U}}^{[e]}, \mathcal{B}\right] = \mathcal{Z}\mathsf{im}\left(\widehat{\mathbb{U}}^{[e]}_{\mathsf{UK}}, \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right)\right)$;
2. якщо $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$ то $\mathfrak{l} = (\mathbf{U}, \mathbf{U}\left[\mathcal{B}\right]) = \left(\mathbf{U}, \mathbf{U}\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right), \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})\right]\right)$ для деякого відображення $\mathbf{U} \in \mathbb{U}$, причому
$$\begin{aligned}
\mathsf{BG}\left(\mathfrak{l}, \mathcal{F}\right) &= \mathsf{BG}\left(\mathfrak{l},\ \mathfrak{Kim}\left(\mathbb{U}, \mathcal{B}, \mathfrak{Q}\right)\right) = \mathfrak{Q};\\
\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}\rangle}\left(\omega, \mathcal{F}\right) &= \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}\rangle}\left(\omega,\ \mathfrak{Kim}\left(\mathbb{U}, \mathcal{B}, \mathfrak{Q}\right)\right) = \left(\mathsf{tm}\left(\omega\right), \mathbb{I}_{\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})}(\mathsf{bs}\left(\omega\right))\right) =\\
&= \omega = \mathbf{U}\left(\mathbf{U}^{[-1]}(\omega)\right) = \mathbf{U}\left(\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right\rangle}\left(\mathbf{U}^{[-1]}(\omega)\right)\right)\\
&\qquad \left(\forall \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\right) = \mathbf{U}\left(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})\right) = \mathbf{U}\left(\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right)\right)\right);
\end{aligned}$$
3. якщо $\mathfrak{l} = (\mathbf{U}, \mathbf{U}\left[\mathcal{B}\right]) \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$, $\mathfrak{m} = (\mathbf{V}, \mathbf{V}\left[\mathcal{B}\right]) \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$ $(\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{U})$ і $\mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$, то $\left[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\ \mathcal{F}\right]\mathrm{w} = \widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}(\mathrm{w}) = \mathbf{V}\left(\mathbf{U}^{[-1]}(\mathrm{w})\right)$.

Згідно з теоремою 3.5, з тверджень, отриманих вище в пунктах 1,2,3 випливає, що $\mathcal{F} = \mathfrak{Ku}\left[\widehat{\mathbb{U}}_{\mathsf{UK}}, \mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right] = \mathfrak{Ku}\left(\mathbb{U}, \mathcal{B}, \mathfrak{Q}\right)$, тобто

$$\left(\mathfrak{Kim}\left(\mathbb{U}, \mathcal{B}, \mathfrak{Q}\right), \overleftarrow{\mathcal{Q}}\right) = \mathfrak{Ku}\left(\mathbb{U}, \mathcal{B}, \mathfrak{Q}\right). \qquad \square$$

Нехай $(\mathfrak{H}, \|\cdot\|, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — дійсний гільбертовий простір і $\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}\right)$ простір Мінковського над $\mathfrak{H}$. Як було показано в підрозділі 2.5, $\mathfrak{H}$ породжує координатний простір виду:

$$\widehat{\mathfrak{H}} = \left(\mathfrak{H}, \mathcal{T}_{\mathfrak{H}}, \mathbb{L}_{\mathfrak{H}}, \rho_{\mathfrak{H}}, \|\cdot\|, \langle\cdot,\cdot\rangle\right), \tag{3.36}$$

де $\rho_{\mathfrak{H}}$ і $\mathcal{T}_{\mathfrak{H}}$ — метрика та топологія, породжені нормою $\|\cdot\|$ на просторі $\mathfrak{H}$, а $\mathbb{L}_{\mathfrak{H}}$ — природна лінійна структура простору $\mathfrak{H}$.

Нехай, $\mathcal{B}$ — довільна базова мінлива множина така, що $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathfrak{H} = \mathbf{Zk}\left(\widehat{\mathfrak{H}}\right)$ і $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \leq)$, де $\leq$ — стандартний порядок на полі дійсних чисел $\mathbb{R}$. Тоді $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{R} \times \mathfrak{H} = \mathcal{M}\left(\mathfrak{H}\right)$. Довільна множина $\mathbb{S} \subseteq \mathbf{Pk}\left(\mathfrak{H}\right)$ є трансформуючою множиною бієкцій відносно $\mathcal{B}$ на $\mathfrak{H} = \mathbf{Zk}\left(\widehat{\mathfrak{H}}\right)$ (де клас операторів $\mathbf{Pk}\left(\mathfrak{H}\right)$ було визначено в підрозділі 2.5). Отже, можна покласти:

$$\mathfrak{Ku}\left(\mathbb{S}, \mathcal{B};\ \mathfrak{H}\right) := \mathfrak{Ku}\left(\mathbb{S}, \mathcal{B}, \widehat{\mathfrak{H}}\right). \tag{3.37}$$

Підставляючи замість $\mathbb{S}$ класи операторів $\mathfrak{PT}(\mathfrak{H},c)$, $\mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H},c)$, $\mathfrak{P}(\mathfrak{H},c)$, $\mathfrak{P}_+(\mathfrak{H},c)$, введені в формулі (2.18), отримуємо наступні універсальні кінематики:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{UPT}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c) &:= \mathfrak{Ku}(\mathfrak{PT}(\mathfrak{H},c),\mathcal{B};\mathfrak{H});\\
\mathfrak{UPT}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c) &:= \mathfrak{Ku}(\mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H},c),\mathcal{B};\mathfrak{H});\\
\mathfrak{UP}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c) &:= \mathfrak{Ku}(\mathfrak{P}(\mathfrak{H},c),\mathcal{B};\mathfrak{H});\\
\mathfrak{UP}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c) &:= \mathfrak{Ku}(\mathfrak{P}_+(\mathfrak{H},c),\mathcal{B};\mathfrak{H}).
\end{aligned}\right\} \tag{3.38}$$

Зрозуміло, що, враховуючи твердження 3.9, універсальні кінематики $\mathfrak{UPT}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$, $\mathfrak{UPT}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$, $\mathfrak{UP}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$, $\mathfrak{UP}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ можна було б визначити на основі кінематичних множин $\mathfrak{KPT}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$, $\mathfrak{KPT}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$, $\mathfrak{KP}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$, $\mathfrak{KP}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$, приєднуючи до них відповідні універсальні перетворення координат.

У випадку $\dim(\mathfrak{H})=3$, $c<\infty$ універсальна кінематика $\mathfrak{UP}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ являє собою найпростішу математично строгу модель кінематики спеціальної теорії відносності в інерційних системах відліку. Універсальна кінематика $\mathfrak{UP}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ побудована на основі загальної групи Лоренца-Пуанкаре, і містить крім звичайних систем відліку "з додатним напрямком часу", які мають зрозумілу фізичну інтерпретацію, також системи відліку з "від'ємним напрямком часу". Універсальні кінематики $\mathfrak{UPT}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ і $\mathfrak{UPT}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ містять крім стандартних ("тардіонних") систем відліку також і "тахіонні" системи відліку, які рухаються відносно "тардіонних" систем відліку зі швидкістю більшою за швидкість світла c. У випадку $\dim(\mathfrak{H})=3$, $c=\infty$ універсальна кінематика $\mathfrak{UP}(\mathfrak{H},\mathcal{B},\infty)=\mathfrak{UPT}(\mathfrak{H},\mathcal{B},\infty)$ являє собою математично строгу модель класичної кінематики Галілея в інерційних системах відліку.

З наслідка 2.19 випливає, що множини операторів $\mathfrak{P}(\mathfrak{H},c)$ та $\mathfrak{P}_+(\mathfrak{H},c)$ утворюють групи операторів над простором $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$. В той же час, наслідок 2.21 стверджує, що класи операторів $\mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H},c)$ та $\mathfrak{PT}(\mathfrak{H},c)$ (при $\dim(\mathfrak{H})>1$) не утворюють групи операторів над $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Це означає, що побудовані на основі цих класів операторів кінематики типу $\mathfrak{UPT}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ та $\mathfrak{UPT}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$, не задовольняють умовам принципу відносності (симетрії інерційних систем відліку), оскільки, за властивістю 3.7(7), для кінематики $\mathcal{F}\in\{\mathfrak{UPT}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c),\mathfrak{UPT}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)\}$ множина універсальних перетворень координат:

$$\mathbb{UP}(\mathfrak{l})=\{[\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l},\mathcal{F}]\mid\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathcal{F})\}, \tag{3.39}$$

що забезпечують перехід від деякої системи відліку $\mathfrak{l}\in\mathcal{L}k(\mathcal{F})$ до всіх інших систем відліку $\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathcal{F})$ буде різною для різних систем відліку $\mathfrak{l}$. В той же час, принцип відносності в цих кінематиках порушується лише на надсвітловому діапазоні, оскільки універсальні кінематики $\mathfrak{UPT}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ та $\mathfrak{UPT}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ побудовані шляхом "дода-

вання" нових, надсвітлових, систем відліку до універсальних кінематик $\mathfrak{UP}_0(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$ та $\mathfrak{UP}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$, які задовольняють умовам принципу відносності.

3.4.2. Зауваження про деякі інші тахіонові кінематики Крім узагальнених перетворень Лоренца в сенсі E. Recami, В. Ольховського та R. Goldoni в фізичній літературі можна знайти деякі інші спроби розширення класичних перетворень Лоренца за межі світлового бар'єру. Зокрема, цікавий варіант узагальнених перетворень Лоренца було запропоновано в роботах M.E. Hassani (див, наприклад, [59]). Подібно до узагальнених перетворень Лоренца в сенсі E. Recami, В. Ольховського та R. Goldoni, перетворення M. Hassani співпадають із класичними перетвореннями Лоренца коли швидкість системи відліку менша за швидкість світла. Виявляється, що перетворення M. Hassani можна узагальнити і, зокрема, записати для загального випадку простору Мінковського над довільним дійсним гільбертовим простором, а також, використовуючи отримані узагальнені перетворення Лоренца в сенсі M. Hassani, побудувати універсальні кінематики, схожі до кінематик (3.38). Детально побудову зазначених кінематик описано в додатку Б.

Також, певні спроби узагальнити перетворення Лоренца для за межі світлового бар'єру були зроблені в роботах [132–134]. Проте, на жаль, ці роботи містять серйозні помилки, а тому запропоновані там перетворення не можна використати для побудови математичних теорій. Детально помилки роботи D. Faroughy [132] проаналізовано в [135] (див., також, препринт [136]). Зокрема, там показано, що лінійні "узагальнені" перетворення Лоренца, запропоновані D. Faroughy, насправді збігаються з добре відомими класичними перетвореннями Лоренца, в яких неправильно позначена швидкість системи відліку. Схожі помилки також є в роботах [133, 134].

Основні результати підрозділу 3.4 були опубліковані в [100, розділ 7], а також представлені на конференціях [96–98].

3.5. Про еквівалентність універсальних кінематик відносно перетворення координат

3.5.1. Зауваження про системи відліку та їхні індекси. Нехай, $\mathcal{Y}$ — довільна мінлива множина або довільна кінематична множина або довільна універсальна кінематика. Згідно з властивостями 1.126(1, 2) [3.3] для довільного індекса $\alpha \in \mathcal{I}nd(\mathcal{Y})$ існує єдина система відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Y})$ така, що $\mathtt{ind}(\mathfrak{l}) = \alpha$. Надалі цю систему відліку будемо позначати через $\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{Y})$:

[3.3] Підкреслимо, що, відповідно до зауважень 2.3 та 3.3, властивості 1.126 поширюються на кінематичні множини та універсальні кінематики.

$$\forall \alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathcal{Y}): \qquad \mathbf{lk}_{\alpha}\,(\mathcal{Y}) = \mathfrak{l}, \quad \text{де} \quad \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Y})\,,\ \mathtt{ind}\,(\mathfrak{l}) = \alpha.$$

Безпосередньо з означення системи відліку $\mathbf{lk}_{\alpha}\,(\mathcal{Y})$, враховуючи властивість 1.126(1) отримуємо такі властивості:

Властивості 3.10. *Нехай $\mathcal{Y}, \mathcal{Y}_1$ — довільні мінливі множини або кінематичні множини або універсальні кінематики. Тоді:*

1. *Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Y})$ справедлива рівність, $\mathfrak{l} = \mathbf{lk}_{\mathtt{ind}(\mathfrak{l})}\,(\mathcal{Y})$, при цьому*

$$\mathcal{L}k\,(\mathcal{Y}) = \{\mathbf{lk}_{\alpha}\,(\mathcal{Y}) \mid \alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathcal{Y})\}\,. \tag{3.40}$$

2. *Якщо $\mathcal{L}k\,(\mathcal{Y}_1) = \mathcal{L}k\,(\mathcal{Y})$, то $\mathcal{I}nd\,(\mathcal{Y}) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{Y}_1)$ і для довільного індекса $\alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathcal{Y}) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{Y}_1)$ справедлива рівність, $\mathbf{lk}_{\alpha}\,(\mathcal{Y}) = \mathbf{lk}_{\alpha}\,(\mathcal{Y}_1)$.*

3.5.2. Еквівалентність універсальних кінематик відносно перетворення координат.

Означення 3.11. Будемо говорити, що базові кінематичні множини $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}$ і $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$ є **хроногеометрично спорідненими**, якщо виконуються рівності:
1) $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right)$; 2) $\mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}\right) = \mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right)$.

Означення 3.12. Універсальні кінематики $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ будемо називати **еквівалентними відносно перетворення координат**, якщо:

1. $\mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_2)$;
2. Для довільного індекса $\alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_2)$ базові кінематичні множини $\mathcal{F}_1 \restriction \mathbf{lk}_{\alpha}\,(\mathcal{F}_1)$ і $\mathcal{F}_2 \restriction \mathbf{lk}_{\alpha}\,(\mathcal{F}_2)$ є хроногеометрично спорідненими, тобто виконуються рівності:

$$\mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathbf{lk}_{\alpha}\,(\mathcal{F}_1)) = \mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathbf{lk}_{\alpha}\,(\mathcal{F}_2))\,; \tag{3.41}$$

$$\mathsf{BG}\,(\mathbf{lk}_{\alpha}\,(\mathcal{F}_1)\,;\mathcal{F}_1) = \mathsf{BG}\,(\mathbf{lk}_{\alpha}\,(\mathcal{F}_2)\,;\mathcal{F}_2) \tag{3.42}$$

   (зауважимо, що з рівностей (3.41) і (3.42) випливають рівності $\mathbf{Zk}\,(\mathbf{lk}_{\alpha}\,(\mathcal{F}_1)\,;\mathcal{F}_1) = \mathbf{Zk}\,(\mathbf{lk}_{\alpha}\,(\mathcal{F}_2)\,;\mathcal{F}_2)$ та $\mathbb{M}k\,(\mathbf{lk}_{\alpha}\,(\mathcal{F}_1)\,;\mathcal{F}_1) = \mathbb{M}k\,(\mathbf{lk}_{\alpha}\,(\mathcal{F}_2)\,;\mathcal{F}_2)$.
3. Для довільних індексів $\alpha, \beta \in \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_2)$ справедлива рівність:

$$[\mathbf{lk}_{\beta}\,(\mathcal{F}_1) \leftarrow \mathbf{lk}_{\alpha}\,(\mathcal{F}_1)\,,\mathcal{F}_1] = [\mathbf{lk}_{\beta}\,(\mathcal{F}_2) \leftarrow \mathbf{lk}_{\alpha}\,(\mathcal{F}_2)\,,\mathcal{F}_2]\,.$$

Той факт, що універсальні кінематики $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ еквівалентні відносно перетворення координат будемо позначати наступним чином:

$$\mathcal{F}_1\,[\equiv]\,\mathcal{F}_2.$$

Безпосереднім і прямим наслідком означення 3.12 є наступне твердження.

Твердження 3.13. *Бінарне відношення* $[\equiv]$ *є відношенням еквівалентності на будь-якій множині* $\mathcal{M}$*, що складається з універсальних кінематик.*

Зауваження 3.14. Нехай $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ — універсальні кінематики такі, що $\mathcal{F}_1\,[\equiv]\,\mathcal{F}_2$. Тоді кінематики $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ можна трактувати як два різні сценарії еволюції, що діють в одному й тому ж геометрично-часовому оточенні в рамках одного і того ж універсального перетворення координат. Підтвердженням цієї думки може служити наступне твердження:

Твердження 3.15. *Нехай, виконуються такі умови:*

1. $\mathfrak{Q}$ *— координатний простір.*
2. $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ *— довільні базові мінливі множини такі, що* $\mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathcal{B}_1) = \mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathcal{B}_2)$ *і* $\mathfrak{Bs}\,(\mathcal{B}_i) \subseteq \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ $(i \in \overline{1,2})$*;*
3. $\mathbb{U}$ *— трансформуюча множина бієкцій відносно* $\mathcal{B}_1$ *на* $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$*.*

Тоді $\mathbb{U}$ *є трансформуючою множиною бієкцій відносно* $\mathcal{B}_2$ *на* $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$*. При цьому виконується наступне співвідношення:*

$$\mathfrak{Ku}\,(\mathbb{U}, \mathcal{B}_1, \mathfrak{Q})\ [\equiv]\ \mathfrak{Ku}\,(\mathbb{U}, \mathcal{B}_2, \mathfrak{Q})\,.$$

Доведення. **А**. Оскільки $\mathbb{U}$ — трансформуюча множина бієкцій відносно $\mathcal{B}_1$ на $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$, то довільне відображення $\mathbf{U} \in \mathbb{U}$ є бієкцією на $\mathbf{Tm}\,(\mathcal{B}_1) \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ $(\mathbf{U} : \mathbf{Tm}\,(\mathcal{B}_1) \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}) \longleftrightarrow \mathbf{Tm}\,(\mathcal{B}_1) \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}))$. Згідно з другою умовою даного твердження, маємо, $\mathbf{Tm}\,(\mathcal{B}_1) = \mathbf{Tm}\,(\mathcal{B}_2)$. Отже, будь-яке відображення $\mathbf{U} \in \mathbb{U}$ є бієкцією на $\mathbf{Tm}\,(\mathcal{B}_2) \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ $(\mathbf{U} : \mathbf{Tm}\,(\mathcal{B}_2) \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}) \longleftrightarrow \mathbf{Tm}\,(\mathcal{B}_2) \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}))$. Тому, $\mathbb{U}$ є трансформуючою множиною бієкцій відносно $\mathcal{B}_2$ на $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$.

Б. Покладемо, $\mathcal{F}_i := \mathfrak{Ku}\,(\mathbb{U}, \mathcal{B}_i, \mathfrak{Q})$ $(i \in \overline{1,2})$. Згідно з рівністю (3.30), для $i \in \overline{1,2}$ маємо:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Ku}\,(\mathbb{U}, \mathcal{B}_i, \mathfrak{Q}) &= \mathfrak{Ku}\left[\widehat{\mathbb{U}}_{\mathsf{UK}}, \mathfrak{C}^{(\mathcal{B}_i, \mathfrak{Q})}\right], \quad \text{де} \\
\widehat{\mathbb{U}}_{\mathsf{UK}} &= ((\mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathcal{B}_i)\,, \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}), \mathbf{U}, \mathfrak{Q}, \mathbf{U}) \mid \mathbf{U} \in \mathbb{U}) \quad (i \in \overline{1,2}); \\
\mathfrak{C}^{(\mathcal{B}_i, \mathfrak{Q})} &= \left(\mathcal{B}_i, \left(\mathfrak{Q}, \mathbb{I}_{\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}_i)}\right)\right) \quad (i \in \overline{1,2}).
\end{aligned}$$

Звідси, використовуючи властивість 3.7(2), одержуємо:

$$\mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_1) = \mathbb{U} = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_2)\,. \tag{3.43}$$

Далі, застосовуючи властивості 3.7 і теорему 3.5, для довільних двох індексів-відображень $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{U}$ отримуємо:

$$\mathbf{lk}_{\mathbf{U}}\,(\mathcal{F}_i) = (\mathbf{U}, \mathbf{U}\,[\mathcal{B}_i, \mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathcal{B}_i)])\,, \quad \mathbf{lk}_{\mathbf{V}}\,(\mathcal{F}_i) = (\mathbf{V}, \mathbf{V}\,[\mathcal{B}_i, \mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathcal{B}_i)]) \quad (i \in \overline{1,2});$$

$$\left.\begin{array}{l}
\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathbf{lk}_{\mathbf{U}}\left(\mathcal{F}_1\right)\right)=\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{B}_1\right)=\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{B}_2\right)=\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathbf{lk}_{\mathbf{U}}\left(\mathcal{F}_2\right)\right);\\
\mathsf{BG}\left(\mathbf{lk}_{\mathbf{U}}\left(\mathcal{F}_1\right);\mathcal{F}_1\right)=\mathfrak{Q}=\mathsf{BG}\left(\mathbf{lk}_{\mathbf{U}}\left(\mathcal{F}_2\right);\mathcal{F}_2\right);\\
\left[\mathbf{lk}_{\mathbf{V}}\left(\mathcal{F}_1\right)\leftarrow\mathbf{lk}_{\mathbf{U}}\left(\mathcal{F}_1\right),\mathcal{F}_1\right]\ \mathrm{w}=\mathbf{V}\left(\mathbf{U}^{[-1]}(\mathrm{w})\right)=\\
\qquad=\left[\mathbf{lk}_{\mathbf{V}}\left(\mathcal{F}_2\right)\leftarrow\mathbf{lk}_{\mathbf{U}}\left(\mathcal{F}_2\right),\mathcal{F}_2\right]\mathrm{w}\\
\qquad\quad\left(\forall\mathrm{w}\in\mathbb{M}k\left(\mathbf{lk}_{\mathbf{U}}\left(\mathcal{F}_1\right);\mathcal{F}_1\right)=\mathbb{M}k\left(\mathbf{lk}_{\mathbf{U}}\left(\mathcal{F}_2\right);\mathcal{F}_2\right)\right).
\end{array}\right\}\tag{3.44}$$

Враховуючи (3.43), (3.44) та означення 3.12, отримуємо співвідношення, $\mathcal{F}_1\,[\equiv]\,\mathcal{F}_2$. □

Основні результати підрозділу 3.5 були опубліковані в [137, розділ 4].

3.6. Еволюційні розширення універсальних кінематик та їхні властивості

3.6.1. Еволюційні розширення базових кінематичних множин.

Зауваження 3.16. Нехай, $\mathcal{B}_0$ і $\mathcal{B}_1$ — базові мінливі множини такі, що $\mathcal{B}_0\underset{\rightarrow}{\subseteq}\mathcal{B}_1$. Тоді, згідно з твердженням 1.94, маємо, $\mathfrak{Bs}\left(\mathcal{B}_0\right)\subseteq\mathfrak{Bs}\left(\mathcal{B}_1\right)$. Отже, якщо для хроногеометрично споріднених базових кінематичних множин $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}$ і $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$ справедливе співвідношення $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}\right)\underset{\rightarrow}{\subseteq}\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right)$, то:

$$\mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}\right)=\mathfrak{Bs}\left(\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}\right)\right)\subseteq\mathfrak{Bs}\left(\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right)\right)=\mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right).$$

Зокрема, якщо $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}\right)\underset{\rightarrow}{\subseteq}\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right)$, то, згідно з твердженням 1.95, маємо $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}\right)\underset{\rightarrow}{\subseteq}\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right)$, а отже, $\mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}\right)\subseteq\mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right)$.

Означення 3.17.

1. Базову кінематичну множину $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$ будемо називати **еволюційним розширенням** базової кінематичної множини $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}$, якщо:

   (1.а) $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}$ і $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$ є хроногеометрично спорідненими;

   (1.б) базова мінлива множина $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right)$ є еволюційним розширенням базової мінливої множини $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}\right)$ (тобто $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}\right)\underset{\rightarrow}{\subseteq}\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right)$);

   (1.в) для довільного $x\in\mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}\right)(\subseteq\mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right))$ справедлива рівність $\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}}(x)=\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}}(x)$ (тобто, іншими словами, $\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}}\subseteq\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}}$).

   Якщо базова кінематична множина $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$ є еволюційним розширенням базової кінематичної множини $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}$, то будемо, також говорити, що $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}$ **еволюційно включається** в $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$ і позначати цей факт через $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}\underset{\rightarrow}{\subseteq}\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$ або через $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\underset{\leftarrow}{\supseteq}\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}$.

2. Базову кінематичну множину $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$ будемо називати **супереволюційним розширенням** базової кінематичної множини $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}$, якщо:

(2.а) $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}$ і $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$ є хроногеометрично спорідненими;

(2.б) $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}\right) \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right)$;

(2.в) для довільного $x \in \mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}\right)(\subseteq \mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right))$ справедлива рівність $\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}}(x) = \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}}(x)$ (тобто, іншими словами, $\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}} \subseteq \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}}$).

Якщо базова кінематична множина $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$ є супереволюційним розширенням базової кінематичної множини $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}$, то будемо, також говорити, що $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}$ супереволюційно включається в $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$ і позначати цей факт через $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$ або через $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}} \underset{\leftarrow}{\sqsupseteq} \mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}$.

Також будемо використовувати позначення $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\not\subseteq} \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$ та $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\not\sqsubseteq} \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$ у випадках, коли співвідношення $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$ та $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$ не мають місця (відповідно).

Згідно з твердженням 1.95, для довільних базових мінливих множин $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}_1$ з умови $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{B}_1$ випливає співвідношення $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_1$. Звідси отримуємо наступний наслідок з означення 3.17.

Наслідок 3.18. *Будь-яке супереволюційне розширення довільної базової кінематичної множини $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}$ є її еволюційним розширенням, тобто якщо $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$, то $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$.*

Зауваження 3.19. Нехай, $\mathcal{B}_0$ та $\mathcal{B}_1$ — базові мінливі множини такі, що $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{B}_1$, але $\mathcal{B}_0 \underset{\rightarrow}{\not\sqsubseteq} \mathcal{B}_1$ (див. приклад 1.96). Розглянемо довільний координатний простір $\mathfrak{Q}$ і будь-яке відображення $\mathbf{k}_1 : \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{B}_1\right) \to \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$. Згідно з твердженням 1.94, маємо, $\mathfrak{Bs}\left(\mathcal{B}_0\right) \subseteq \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{B}_1\right)$. Отже, можна покласти, $\mathbf{k}_0 := \left(\mathbf{k}_1\right)_{\restriction \mathfrak{Bs}(\mathcal{B}_0)}$, де $\left(\mathbf{k}_1\right)_{\restriction \mathfrak{Bs}(\mathcal{B}_0)}$ — звуження відображення $\mathbf{k}_1$ на множину $\mathfrak{Bs}\left(\mathcal{B}_0\right)$. Тому можна визначити такі базові кінематичні множини, $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}} := (\mathcal{B}_0, (\mathfrak{Q}, \mathbf{k}_0))$, $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}} := (\mathcal{B}_1, (\mathfrak{Q}, \mathbf{k}_1))$.

Згідно з означенням 3.17, маємо, $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$, але $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\not\sqsubseteq} \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$. Таким чином, ***твердження, обернене до наслідка 3.18, взагалі кажучи — неправильне***.

Твердження 3.20. *Еволюційне включення базових кінематичних множин має такі властивості:*

1. $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}$ *для довільної базової кінематичної множини* $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}$*;*
2. *якщо* $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}$ *і* $\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$ *то* $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}} = \mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}$*;*
3. *якщо* $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}$ *і* $\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_3^{\mathfrak{b}}$ *то* $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_3^{\mathfrak{b}}$.

Доведення. **1**. 1. У випадку $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}} = \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$ умови (1.а) та (1.в) означення 3.17 виконуються тривіальним чином. Умова (1.б) також виконується, оскільки, в силу твердження 1.97, має місце еволюційне включення $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}\right) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}\right)$.

2. Нехай, $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}$ і $\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$. Тоді, згідно з означенням 3.17, отримуємо:

$$\mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) = \mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right), \quad \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right), \quad \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right),$$

$$\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}} \subseteq \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}} \qquad \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}} \subseteq \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}}.$$

Отже, враховуючи твердження 1.97, отримуємо рівності $\mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) = \mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right)$, $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) = \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right)$ та $\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}} = \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}}$. Отже, $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}} = \left(\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right), \left(\mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right), \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}}\right)\right) = \left(\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right), \left(\mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right), \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}}\right)\right) = \mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}$.

3. Нехай, $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}$ і $\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_3^{\mathfrak{b}}$. Тоді, за означенням 3.17, отримуємо:

$$\mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) = \mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right) = \mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}_3^{\mathfrak{b}}\right), \quad \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}_3^{\mathfrak{b}}\right),$$
$$\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right), \quad \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_3^{\mathfrak{b}}\right), \quad \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}} \subseteq \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}}, \quad \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}} \subseteq \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_3^{\mathfrak{b}}}.$$

Тому, враховуючи твердження 1.97, маємо, $\mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) = \mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}_3^{\mathfrak{b}}\right)$, $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}_3^{\mathfrak{b}}\right)$, $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_3^{\mathfrak{b}}\right)$, $\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}} \subseteq \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_3^{\mathfrak{b}}}$. Звідси, за означенням 3.17, отримуємо, $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_3^{\mathfrak{b}}$. □

Твердження 3.21. *Супереволюційне включення базових кінематичних множин має такі властивості:*

1. $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}$ *довільної базової кінематичної множини* $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}$*;*
2. *Якщо* $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}$ *і* $\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$ *то* $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}} = \mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}$*;*
3. *Якщо* $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}$ *і* $\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}_3^{\mathfrak{b}}$ *то* $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}_3^{\mathfrak{b}}$.

Доведення. **1**. У випадку $\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}} = \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$ умови (2.а) та (2.в) означення 3.17 виконуються тривіальним чином. Умова (2.б) також виконується, оскільки, в силу твердження 1.101, справедливе (супереволюційне) включення $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}\right) \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_0^{\mathfrak{b}}\right)$.

2. Нехай, $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}$ і $\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$. Тоді, за наслідком 3.18, $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}$ і $\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}$. Отже, за твердженням 3.20, отримуємо рівність, $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}} = \mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}$.

3. Нехай, $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}$ і $\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}_3^{\mathfrak{b}}$. Тоді, за означенням 3.17, маємо:

$$\mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) = \mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right) = \mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}_3^{\mathfrak{b}}\right), \quad \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}_3^{\mathfrak{b}}\right),$$
$$\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right), \quad \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right) \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_3^{\mathfrak{b}}\right), \quad \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}} \subseteq \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}}, \quad \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}} \subseteq \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_3^{\mathfrak{b}}}.$$

Отже, враховуючи твердження 1.101, отримуємо, $\mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) = \mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}_3^{\mathfrak{b}}\right)$, $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}_3^{\mathfrak{b}}\right)$, $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_3^{\mathfrak{b}}\right)$, $\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}} \subseteq \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_3^{\mathfrak{b}}}$. Звідси, за означенням 3.17, маємо включення $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}_3^{\mathfrak{b}}$. □

Твердження 3.22. *Нехай,* $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}, \mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}$ *— базові кінематичні множини, причому* $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}$*. Тоді:*

1. $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right)$*;* 2. $\mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) \subseteq \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right)$*;*
3. *якщо ж, додатково,* $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}$*, то* $\mathbb{L}d\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) \subseteq \mathbb{L}d\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right)$.

Доведення. **1**. Перша властивість випливає з означень еволюційного включення для базових кінематичних множин та базових мінливих множин (див. означення 3.17, 1.92), а також з системи позначень для базових кінематичних множин.

2. Друга властивість випливає з твердження 1.94, означення еволюційного включення для базових кінематичних множин (див. означення 3.17), а також з системи позначень для базових кінематичних множин.

3. Нехай, $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}} \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}$. Тоді, за означенням 3.17, маємо, $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right)$. Отже, за означенням 1.93, отримуємо співвідношення, $\mathbb{L}d\left(\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right)\right) \subseteq \mathbb{L}d\left(\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right)\right)$. Звідси, враховуючи систему позначень для базових кінематичних множин, отримуємо включення $\mathbb{L}d\left(\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{b}}\right) \subseteq \mathbb{L}d\left(\mathfrak{C}_2^{\mathfrak{b}}\right)$. □

3.6.2. Еволюційні розширення кінематичних множин.

Означення 3.23. Будемо говорити, що кінематичні множини $\mathfrak{C}_1$ і $\mathfrak{C}_2$ **хроногеометрично споріднені**, якщо виконуються наступні умови:

1. $\mathcal{I}nd\left(\mathfrak{C}_1\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathfrak{C}_2\right)$.
2. Для довільного індекса $\alpha \in \mathcal{I}nd\left(\mathfrak{C}_1\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathfrak{C}_2\right)$ базові кінематичні множини $\mathfrak{C}_1 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_1\right)$ і $\mathfrak{C}_2 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_2\right)$ є хроногеометрично спорідненими.

Твердження 3.24. *Якщо для універсальних кінематик* $\mathcal{F}_1 = \left(\mathfrak{C}_1, \overleftarrow{\mathcal{Q}_1}\right)$ *і* $\mathcal{F}_2 = \left(\mathfrak{C}_2, \overleftarrow{\mathcal{Q}_2}\right)$ *виконується співвідношення* $\mathcal{F}_1 \left[\equiv\right] \mathcal{F}_2$, *то кінематичні множини* $\mathfrak{C}_1$ *і* $\mathfrak{C}_2$ *є хроногеометрично спорідненими.*

Доведення. Якщо $\mathcal{F}_1 \left[\equiv\right] \mathcal{F}_2$, то, за означенням 3.12, маємо, $\mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_1\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_2\right)$. Згідно з системою позначень теорії універсальних кінематик (див. параграф 3.2.2), $\mathcal{L}k\left(\mathcal{F}_i\right) = \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}_i\right)$ $(i \in \{1,2\})$. Тому, згідно з властивістю 3.10(2), маємо рівність $\mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_i\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathfrak{C}_i\right)$ $(i \in \{1,2\})$ причому:

$$\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_i\right) = \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_i\right) \quad \left(\forall \alpha \in \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_1\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_2\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathfrak{C}_i\right),\ i \in \overline{1,2}\right).$$

Отже, згідно з системою позначень теорії універсальних кінематик за означенням 3.12, для довільного $\alpha \in \mathcal{I}nd\left(\mathfrak{C}_1\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathfrak{C}_2\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_1\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_2\right)$ отримуємо:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}_1 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_1\right)\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_1\right)\right) = \\
&\qquad = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right)\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}_2 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_2\right)\right); \\
&\mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}_1 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_1\right)\right) = \mathsf{BG}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_1\right); \mathfrak{C}_1\right) = \mathsf{BG}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right); \mathfrak{C}_1\right) = \\
&\qquad = \mathsf{BG}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right); \mathcal{F}_1\right) = \mathsf{BG}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right); \mathcal{F}_2\right) = \mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}_2 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_2\right)\right).
\end{aligned}$$

Отже, за означенням 3.11, базові кінематичні множини $\mathfrak{C}_1 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_1\right)$ і $\mathfrak{C}_2 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_2\right)$ є хроногеометрично спорідненими (для довільного $\alpha \in \mathcal{I}nd\left(\mathfrak{C}_1\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathfrak{C}_2\right)$). Тому, за означенням 3.23, хроногеометрично спорідненими є кінематичні множини $\mathfrak{C}_1$ і $\mathfrak{C}_2$. □

Застосовуючи твердження 3.24, а також твердження 3.15 та твердження 3.9, отримуємо наступний наслідок:

Наслідок 3.25. *Нехай виконуються такі умови:*

1. *$\mathfrak{Q}$ — довільний координатний простір;*
2. *$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ — довільні базові мінливі множини такі, що $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}_1) = \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}_2)$ і $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}_i) \subseteq \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ $(i \in \overline{1,2})$;*
3. *$\mathbb{U}$ — довільна трансформуюча множина бієкцій відносно $\mathcal{B}_1$ (а отже (згідно з твердженням 3.15) і відносно $\mathcal{B}_2$) на $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$.*

Тоді кінематичні множини $\mathfrak{Kim}(\mathbb{U}, \mathcal{B}_1, \mathfrak{Q})$ і $\mathfrak{Kim}(\mathbb{U}, \mathcal{B}_2, \mathfrak{Q})$ є хроногеометрично спорідненими.

Зауваження 3.26. Нехай, $(\mathfrak{H}, \|\cdot\|, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — довільний дійсний гільбертовий простір, а $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ — довільні базові мінливі множини такі, що $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}_i) \subseteq \mathfrak{H}$ і $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}_i) = (\mathbb{R}, \leq)$ $(i \in \overline{1,2})$, де $\leq$ — стандартний порядок на полі дійсних чисел $\mathbb{R}$. Тоді, використовуючи наслідок 3.25, неважко довести, що для довільної множини операторів $\mathbb{S} \subseteq \mathbf{Pk}(\mathfrak{H})$ кінематичні множини $\mathfrak{Kim}(\mathbb{S}, \mathcal{B}_1; \mathfrak{H})$ та $\mathfrak{Kim}(\mathbb{S}, \mathcal{B}_2; \mathfrak{H})$ — хроногеометрично споріднені. Зокрема при $c \in (0, \infty]$ хроногеометрично спорідненими будуть такі пари кінематичних множин:

а) $\mathfrak{KP}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}_1, c)$ і $\mathfrak{KP}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}_2, c)$; **б)** $\mathfrak{KP}_0(\mathfrak{H}, \mathcal{B}_1, c)$ і $\mathfrak{KP}_0(\mathfrak{H}, \mathcal{B}_2, c)$;

в) $\mathfrak{KPT}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}_1, c)$ і $\mathfrak{KPT}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}_2, c)$; **г)** $\mathfrak{KPT}_0(\mathfrak{H}, \mathcal{B}_1, c)$ і $\mathfrak{KPT}_0(\mathfrak{H}, \mathcal{B}_2, c)$.

Означення 3.27. 1. Будемо говорити, що кінематична множина $\mathfrak{C}_2$ є, відповідно, **еволюційним (супереволюційним) розширенням** кінематичної множини $\mathfrak{C}_1$, якщо:

(а) Кінематичні множини $\mathfrak{C}_1$ і $\mathfrak{C}_2$ хроногеометрично споріднені.

(б) Для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{I}nd(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{I}nd(\mathfrak{C}_2)$ має місце еволюційне (супереволюційне) включення:

$$\mathfrak{C}_1 \restriction \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_1) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_2 \restriction \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_2) \quad \left(\mathfrak{C}_1 \restriction \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_1) \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}_2 \restriction \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_2)\right) \tag{3.45}$$

(в) Для довільних індексів $\alpha, \beta \in \mathcal{I}nd(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{I}nd(\mathfrak{C}_2)$ і довільної мінливої системи $A \subseteq \mathbb{Bs}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_1)) \subseteq \mathbb{Bs}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_2))$ {[3.4]} виконується рівність:

$$\langle \mathbf{lk}_\beta(\mathfrak{C}_1) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_1), \mathfrak{C}_1 \rangle A = \langle \mathbf{lk}_\beta(\mathfrak{C}_2) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_2), \mathfrak{C}_2 \rangle A.$$

2. Якщо кінематична множина $\mathfrak{C}_2$ є, відповідно, еволюційним (супереволюційним) розширенням $\mathfrak{C}_1$ будемо також говорити, що $\mathfrak{C}_1$ **еволюційно (супереволюційно) включається** в $\mathfrak{C}_2$, використовуючи, відповідно, наступні позначення:

$$\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_2 \text{ або } \mathfrak{C}_2 \underset{\leftarrow}{\supseteq} \mathfrak{C}_1 \qquad \left(\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}_2 \text{ або } \mathfrak{C}_2 \underset{\leftarrow}{\sqsupseteq} \mathfrak{C}_1\right).$$

[3.4] З еволюційного (супереволюційного) включення (3.45), за означенням 3.17 і твердженням 1.95 випливає еволюційне включення $\mathsf{BE}(\mathfrak{C}_1 \restriction \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_1)) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathsf{BE}(\mathfrak{C}_2 \restriction \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_2))$. Звідси, за означенням 1.92, отримуємо включення, $\mathbb{Bs}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_1)) = \mathbb{Bs}(\mathsf{BE}(\mathfrak{C}_1 \restriction \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_1))) \subseteq \mathbb{Bs}(\mathsf{BE}(\mathfrak{C}_2 \restriction \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_2))) = \mathbb{Bs}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_2))$.

Твердження 3.28. *Для довільних кінематичних множин* $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ *і* $\mathfrak{C}_3$ *виконуються наступні твердження:*

1. $\mathfrak{C} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}$.
2. *Якщо* $\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_2$ *і* $\mathfrak{C}_2 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_1$ *то* $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2$.
3. *Якщо* $\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_2$ *і* $\mathfrak{C}_2 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_3$ *то* $\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_3$.

Доведення. **1,3**: Перший та третій пункти твердження 3.28 випливають безпосередньо з означень 3.23, 3.27 та твердження 1.97. Отже, потребує доведення лише другий пункт даного твердження.

2: Розглянемо довільні кінематичні множини $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ такі, що $\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_2$ і $\mathfrak{C}_2 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_1$. За означеннями 3.23 і 3.27, маємо, $\mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_2)$, причому для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_2)$ мають місце еволюційні включення:

$$\mathfrak{C}_1 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_2 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2) \quad \text{і} \quad \mathfrak{C}_2 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_1 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1)\,.$$

Отже, згідно з твердженням 3.20, маємо:

$$\mathfrak{C}_1 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1) = \mathfrak{C}_2 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2) \quad (\forall\, \alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_2))\,. \tag{3.46}$$

Звідси, згідно з (2.1), отримуємо, $\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1)\,\hat{}\, = \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2)\,\hat{}$. А тому, враховуючи властивість 1.126(3) і зауваження 2.3, одержуємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1) &= (\mathtt{ind}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1))\,, \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1)\,\hat{}\,) = (\alpha, \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1)\,\hat{}\,) = \\ &= (\alpha, \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2)\,\hat{}\,) = \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2) \quad (\forall\, \alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_2))\,. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Отже, згідно з формулою (3.40) маємо:

$$\mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_1) = \{\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1) \mid \alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_1)\} = \{\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2) \mid \alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_2)\} = \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_2)\,. \tag{3.48}$$

З рівностей (3.46) та (3.40) випливає рівність:

$$\mathfrak{C}_1 \restriction \mathfrak{l} = \mathfrak{C}_2 \restriction \mathfrak{l} \qquad (\forall \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_2))\,. \tag{3.49}$$

Згідно з рівністю (3.48), маємо, $\mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_2)$. Нехай $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_2)$ — довільні системи відліку кінематичних множин $\mathfrak{C}_1$ та $\mathfrak{C}_2$. Тоді, згідно з формулами (3.40) та (3.47), існують такі індекси $\alpha, \beta \in \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_2)$, що:

$$\mathfrak{l} = \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1) = \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2)\,; \qquad \mathfrak{m} = \mathbf{lk}_\beta\,(\mathfrak{C}_1) = \mathbf{lk}_\beta\,(\mathfrak{C}_2)\,.$$

Використовуючи останні дві рівності, а також означення 3.27 (пункт 1в), для довільної мінливої системи $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1)) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2))$ одержуємо:

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C}_1 \rangle\, A &= \langle \mathbf{lk}_\beta\,(\mathfrak{C}_1) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1)\,, \mathfrak{C}_1 \rangle\, A = \\ &= \langle \mathbf{lk}_\beta\,(\mathfrak{C}_2) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2)\,, \mathfrak{C}_2 \rangle\, A = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C}_2 \rangle\, A. \end{aligned}$$

Звідси отримуємо:

$$\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C}_1 \rangle = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C}_2 \rangle \qquad (\forall\, \mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_2))\,. \tag{3.50}$$

Враховуючи рівності (3.48), (3.49), (3.50), а також твердження 2.4, отримуємо рівність, $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2$. □

Твердження 3.29. *Якщо $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ — кінематичні множини і $\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathfrak{C}_2$, то $\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_2$.*

Доведення. Дане твердження є безпосереднім наслідком означення 3.27 та наслідку 3.18. □

Твердження 3.30. *Нехай $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ — кінематичні множини, причому $\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_2$. Тоді для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_2)$ справедливі наступні твердження:*

1. $\mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1)) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2))$;
2. $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1)) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2))$;
3. $\mathfrak{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1)) \subseteq \mathfrak{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2))$;
4. *якщо ж, додатково,* $\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathfrak{C}_2$, *то*
   $\mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1)) \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2))$ *і* $\mathbb{L}d\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1)) \subseteq \mathbb{L}d\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2))$;
5. *для довільного* $x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1))$ *виконується рівність,*
   $\mathfrak{q}_{\mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_1)}\,(x, \mathfrak{C}_1) = \mathfrak{q}_{\mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_2)}\,(x, \mathfrak{C}_2)$;
6. *для довільного* $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1))$ *справедлива рівність,*
   $\mathbf{Q}^{\langle \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_1)\rangle}\,(\omega, \mathfrak{C}_1) = \mathbf{Q}^{\langle \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_2)\rangle}\,(\omega, \mathfrak{C}_2)$.

Доведення. Оскільки $\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_2$, то, за означеннями 3.27 та 3.23, маємо, $\mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_2)$. Розглянемо довільний індекс $\alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}_2)$.

1. За означенням 3.27, маємо $\mathfrak{C}_1 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_2 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2)$. Звідси, за означенням 3.17, отримуємо, $\mathsf{BE}\,(\mathfrak{C}_1 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1)) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathsf{BE}\,(\mathfrak{C}_2 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2))$. Згідно з позначеннями, введеними параграфі 2.2.4, маємо, $\forall \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_i)$ $(\mathsf{BE}(\mathfrak{l}) := \mathsf{BE}\,(\mathfrak{C}_i \restriction \mathfrak{l}) = \mathfrak{l}\hat{\ })$ $(i \in \{1, 2\})$. Тому, отримуємо, $\mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1)) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2))$.

2,3. Оскільки $\mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1)) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2))$, то, використовуючи рівності (3.5), означення 1.92 та твердження 1.94, отримуємо:

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1)) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1))) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2))) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2))\,;$$

$$\mathfrak{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1)) = \mathfrak{B}\mathfrak{s}\,(\mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1))) \subseteq \mathfrak{B}\mathfrak{s}\,(\mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2))) = \mathfrak{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2))\,.$$

4. Нехай, додатково, $\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathfrak{C}_2$. Тоді, за означенням 3.27, маємо включення, $\mathfrak{C}_1 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_1) \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathfrak{C}_2 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathfrak{C}_2)$. Звідси, за означенням 3.17

(пункт 2), маємо, $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_1 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_1\right)\right) \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_2 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_2\right)\right)$. Тому, враховуючи позначеннями, введені в параграфі 2.2.4, отримуємо, $\mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_1\right)\right) \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_2\right)\right)$. Із останнього супереволюційного включення, за означенням 1.93, випливає включення $\mathbb{L}d\left(\mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_1\right)\right)\right) \subseteq \mathbb{L}d\left(\mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_2\right)\right)\right)$. Звідси, використовуючи рівності (3.5), маємо включення $\mathbb{L}d\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_1\right)\right) \subseteq \mathbb{L}d\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_2\right)\right)$.

5. Нехай, $x \in \mathfrak{Bs}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_1\right)\right)$. За означенням 3.27, маємо, $\mathfrak{C}_1 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_1\right) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_2 \restriction \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_2\right)$. Тому, використовуючи позначення введені в параграфі 2.2.4, а також означення 3.17, отримуємо:

$$\mathfrak{q}_{\mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_1)}\left(x, \mathfrak{C}_1\right) = \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_1 \restriction \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_1)}(x) = \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_2 \restriction \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_2)}(x) = \mathfrak{q}_{\mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_2)}\left(x, \mathfrak{C}_2\right).$$

6. Використовуючи результат, отриманий в попередньому пункті, а також означення координат Мінковського (див. формулу (2.4)), для довільного $\omega \in \mathbb{Bs}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_1\right)\right)$ одержуємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}^{\langle \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_1)\rangle}\left(\omega, \mathfrak{C}_1\right) &= \left(\mathsf{tm}\left(\omega\right), \mathfrak{q}_{\mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_1)}\left(\mathsf{bs}\left(\omega\right), \mathfrak{C}_1\right)\right) = \\ &= \left(\mathsf{tm}\left(\omega\right), \mathfrak{q}_{\mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_2)}\left(\mathsf{bs}\left(\omega\right), \mathfrak{C}_2\right)\right) = \mathbf{Q}^{\langle \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_2)\rangle}\left(\omega, \mathfrak{C}_2\right).\end{aligned}$$

□

Твердження 3.31. *Нехай $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ і $\mathfrak{C}_3$ — довільні кінематичні множини. Тоді:*

1. $\mathfrak{C} \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}$.
2. *Якщо* $\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}_2$ *і* $\mathfrak{C}_2 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}_1$ *то* $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2$.
3. *Якщо* $\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}_2$ *і* $\mathfrak{C}_2 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}_3$ *то* $\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}_3$.

Доведення. Перший та третій пункти даного твердження випливають безпосередньо з означень 3.23, 3.27 та твердження 3.21. Другий пункт випливає з твердження 3.29 та другого пункту твердження 3.28. □

3.6.3. Еволюційні розширення універсальних кінематик

Означення 3.32. Будемо говорити, що універсальна кінематика $\mathcal{F}_2 = \left(\mathfrak{C}_2, \overleftarrow{\mathcal{Q}_2}\right)$ є, відповідно, **еволюційним (супереволюційним) розширенням** універсальної кінематики $\mathcal{F}_1 = \left(\mathfrak{C}_1, \overleftarrow{\mathcal{Q}_1}\right)$, якщо виконуються такі умови:

1. $\mathcal{F}_1 \left[\equiv\right] \mathcal{F}_2$;
2. $\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_2$ ($\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}_2$ у випадку супереволюційного розширення)

Якщо $\mathcal{F}_2$ є еволюційним (супереволюційним) розширенням $\mathcal{F}_1$, то будемо використовувати позначення:

$$\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{F}_2 \quad \left(\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{F}_2\right) \qquad \text{(відповідно).}$$

Твердження 3.33. *Для довільних універсальних кінематик $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ співвідношення $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{F}_2$ виконується тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:*

1. $\mathcal{F}_1 [\equiv] \mathcal{F}_2$ (підкреслимо, що звідси, за означенням 3.12, випливає рівність, $\mathcal{I}nd(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_2)$).
2. *Для довільного* $\alpha \in \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_2)$ *має місце еволюційне включення:*

$$\mathcal{F}_1 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{F}_2 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2) \tag{3.51}$$

(підкреслимо, що звідси, за твердженням 3.22, випливає включення $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2))$).

3. *Для довільних індексів* $\alpha, \beta \in \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_2)$ *і довільної мінливої системи* $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2))$ *виконується рівність:*

$$\langle \mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_1) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1), \mathcal{F}_1 \rangle A = \langle \mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_2) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2), \mathcal{F}_2 \rangle A. \tag{3.52}$$

Доведення. **A)**. Нехай, $\mathcal{F}_1 = \left(\mathfrak{C}_1, \overleftarrow{\mathcal{Q}_1}\right)$, $\mathcal{F}_2 = \left(\mathfrak{C}_2, \overleftarrow{\mathcal{Q}_2}\right)$ — універсальні кінематики і при цьому $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{F}_2$. Тоді, за означенням 3.32, мусять виконуватись умови:

$\mathcal{F}_1 [\equiv] \mathcal{F}_2$ і $\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_2$.

З умови $\mathcal{F}_1 [\equiv] \mathcal{F}_2$, за означенням 3.12, випливає рівність $\mathcal{I}nd(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_2)$. Отже:

$\mathcal{I}nd(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_2) = \mathcal{I}nd(\mathfrak{C}_2)$.

Оскільки, $\mathcal{L}k(\mathcal{F}_i) = \mathcal{L}k(\mathfrak{C}_i)$ $(i \in \{1,2\})$, то згідно з властивістю 3.10(2), маємо:

$$\mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_i) = \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_i) \quad (i \in \{1,2\},\ \alpha \in \mathcal{I}nd(\mathfrak{C}_i) = \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_i)). \tag{3.53}$$

Отже, враховуючи систему позначень теорії універсальних кінематик (див. параграф 3.2.2), при $i \in \{1,2\}$, $\alpha, \beta \in \mathcal{I}nd(\mathfrak{C}_i) = \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_i)$ і $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_i)) = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_i))$ отримуємо:

$$\mathfrak{C}_i \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_i) = \mathfrak{C}_i \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_i) = \mathcal{F}_i \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_i); \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{lk}_\beta(\mathfrak{C}_i) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_i), \mathfrak{C}_i \rangle A &= \langle \mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_i) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_i), \mathfrak{C}_i \rangle A = \\ &= \langle \mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_i) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_i), \mathcal{F}_i \rangle A. \end{aligned} \tag{3.55}$$

З умови $\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_2$, за означенням 3.27, випливає, що для довільних індексів $\alpha, \beta \in \mathcal{I}nd(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{I}nd(\mathfrak{C}_2)$ і довільної мінливої системи $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_1)) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_2))$ виконуються співвідношення:

$$\mathfrak{C}_1 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_1) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_2 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_2); \tag{3.56}$$

$$\langle \mathbf{lk}_\beta(\mathfrak{C}_1) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_1), \mathfrak{C}_1 \rangle A = \langle \mathbf{lk}_\beta(\mathfrak{C}_2) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_2), \mathfrak{C}_2 \rangle A. \tag{3.57}$$

Звідси, враховуючи (3.54), (3.55) і (3.53), отримуємо співвідношення (3.51), (3.52). Таким чином, умови 1-3 даного твердження — виконані.

B) Навпаки, припустимо, що умови 1-3 даного твердження виконуються для кінематик $\mathcal{F}_1 = \left(\mathfrak{C}_1, \overleftarrow{\mathcal{Q}_1}\right)$, $\mathcal{F}_2 = \left(\mathfrak{C}_2, \overleftarrow{\mathcal{Q}_2}\right)$. Тоді справедливе співвідношення, $\mathcal{F}_1 [\equiv] \mathcal{F}_2$. З рівностей $\mathcal{F}_1 = \left(\mathfrak{C}_1, \overleftarrow{\mathcal{Q}_1}\right)$, $\mathcal{F}_2 = \left(\mathfrak{C}_2, \overleftarrow{\mathcal{Q}_2}\right)$ легко виводяться співвідношення (3.54), (3.55). Тому, із формул (3.51), (3.52) випливають співвідношення (3.56), (3.57) (для довільних $\alpha, \beta \in \mathcal{I}nd(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{I}nd(\mathfrak{C}_2)$ і $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_1)) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_2))$). І, враховуючи, що, згідно з твердженням 3.24, кінематичні множини $\mathfrak{C}_1$ і $\mathfrak{C}_2$ — хроногеометрично споріднені, отримуємо еволюційне включення $\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_2$. Таким чином, ми довели, що $\mathcal{F}_1 [\equiv] \mathcal{F}_2$ і $\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_2$. Отже, за означенням 3.32 отримуємо евол. включення $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{F}_2$. □

Аналогічно до твердження 3.33 доводиться наступне твердження.

Твердження 3.34. *Для універсальних кінематик $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ співвідношення $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{F}_2$ виконується тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:*

1. $\mathcal{F}_1 [\equiv] \mathcal{F}_2$ (підкреслимо, що звідси, за означенням 3.12, випливає рівність $\mathcal{I}nd(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_2)$).
2. *Для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_2)$ має місце супереволюційне включення:*

$$\mathcal{F}_1 \restriction \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1) \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{F}_2 \restriction \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2). \tag{3.58}$$

(підкреслимо, що звідси за твердженням 3.22, випливає включення $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2))$).

3. *Для довільних індексів $\alpha, \beta \in \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_2)$ і довільної мінливої системи $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2))$ виконується рівність:*

$$\langle \mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_1) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1), \mathcal{F}_1 \rangle A = \langle \mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_2) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2), \mathcal{F}_2 \rangle A. \tag{3.59}$$

Твердження 3.35. *Нехай, $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ і $\mathcal{F}_3$ — довільні універсальні кінематики. Тоді:*

1. $\mathcal{F} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{F}$.
2. *Якщо $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{F}_2$ і $\mathcal{F}_2 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{F}_1$ то $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$.*
3. *Якщо $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{F}_2$ і $\mathcal{F}_2 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{F}_3$ то $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{F}_3$.*

Доведення. Перший і третій пункти даного твердження випливають безпосередньо з означення 3.32, а також з тверджень 3.13 та 3.28.

Отже, залишилось довести лише другий пункт твердження. Нехай, $\mathcal{F}_1 = \left(\mathfrak{C}_1, \overleftarrow{\mathcal{Q}_1}\right)$, $\mathcal{F}_2 = \left(\mathfrak{C}_2, \overleftarrow{\mathcal{Q}_2}\right)$ — універсальні кінематики, де $\overleftarrow{\mathcal{Q}_i} = \left(\widetilde{Q}^{(i)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C}_i) = \mathcal{L}k(\mathcal{F}_i)}$ $(i \in \overline{1,2})$, причому, $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{F}_2$ і $\mathcal{F}_2 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{F}_1$. Тоді, за означенням 3.32, маємо, $\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_2 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_1$ і $\mathcal{F}_1 [\equiv] \mathcal{F}_2$. Отже, з твердження 3.28 випливає рівність, $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2$. Тому:

$$\mathcal{L}k(\mathcal{F}_1) = \mathcal{L}k(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{L}k(\mathfrak{C}_2) = \mathcal{L}k(\mathcal{F}_2);$$

$$\mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_1\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathfrak{C}_1\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathfrak{C}_2\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_2\right);$$
$$\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right) = \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_1\right) = \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_2\right) = \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right) \quad \left(\forall \alpha \in \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_1\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_2\right)\right).$$

Оскільки $\mathcal{F}_1 \left[\equiv\right] \mathcal{F}_2$, то, використовуючи означення 3.12 а також позначення, прийняті в параграфі 3.2.2, для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}_1\right) = \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}_2\right)$ виду $\mathfrak{l} = \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right) = \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right)$, $\mathfrak{m} = \mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}_1\right) = \mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}_2\right)$ $\left(\alpha, \beta \in \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_1\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_2\right)\right)$ отримуємо:

$$\widetilde{Q}^{(1)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}} = \left[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}_1\right] = \left[\mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}_1\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right), \mathcal{F}_1\right] =$$
$$= \left[\mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}_2\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right), \mathcal{F}_2\right] = \left[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}_2\right] = \widetilde{Q}^{(2)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}.$$

Тобто, $\overleftarrow{\mathcal{Q}_1} = \left(\widetilde{Q}^{(1)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathcal{F}_1)} = \left(\widetilde{Q}^{(2)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathcal{F}_2)} = \overleftarrow{\mathcal{Q}_2}$. Таким чином, $\mathcal{F}_1 = \left(\mathfrak{C}_1, \overleftarrow{\mathcal{Q}_1}\right) = \left(\mathfrak{C}_2, \overleftarrow{\mathcal{Q}_2}\right) = \mathcal{F}_2$. □

Безпосередньо з означення 3.32, а також з твердження 3.29, випливає наступне твердження:

Твердження 3.36. *Якщо $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ — універсальні кінематики і $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathcal{F}_2$, то $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\subset} \mathcal{F}_2$.*

Твердження 3.37. *Нехай, $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ і $\mathcal{F}_3$ — довільні універсальні кінематики. Тоді:*

1. *$\mathcal{F} \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathcal{F}$.*
2. *Якщо $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathcal{F}_2$ і $\mathcal{F}_2 \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathcal{F}_1$ то $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$.*
3. *Якщо $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathcal{F}_2$ і $\mathcal{F}_2 \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathcal{F}_3$ то $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathcal{F}_3$.*

Доведення. Перший і третій пункти даного твердження випливають безпосередньо з означення 3.32, а також з тверджень 3.13 та 3.31. Другий пункт випливає з тверджень 3.36 та 3.35 (пункт 2). □

Твердження 3.38. *Нехай $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ — універсальні кінематики, причому $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\subset} \mathcal{F}_2$. Тоді для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_1\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_2\right)$ справедливі наступні твердження:*

1. $\mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right) \underset{\rightarrow}{\subset} \mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right)\right)$.
2. $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right)\right)$.
3. $\mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right) \subseteq \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right)\right)$.
4. *Якщо ж, додатково, $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathcal{F}_2$, то*
   $\mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right) \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right)\right)$ *і* $\mathbb{L}d\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right) \subseteq \mathbb{L}d\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right)\right)$.
5. *Для довільного $x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right)$ справедлива рівність:*
   $\mathfrak{q}_{\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)}\left(x, \mathcal{F}_1\right) = \mathfrak{q}_{\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2)}\left(x, \mathcal{F}_2\right)$.
6. *Для довільного $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right)$ виконується рівність:*
   $\mathbf{Q}^{\langle \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)\rangle}\left(\omega, \mathcal{F}_1\right) = \mathbf{Q}^{\langle \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2)\rangle}\left(\omega, \mathcal{F}_2\right)$.

Доведення. Нехай $\mathcal{F}_1 = \left(\mathfrak{C}_1, \overleftarrow{\mathcal{Q}_1}\right)$ і $\mathcal{F}_2 = \left(\mathfrak{C}_2, \overleftarrow{\mathcal{Q}_2}\right)$ — універсальні кінематики, такі, що $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{F}_2$. Тоді, за означенням 3.32, $\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathfrak{C}_2$, а при додатковій умові $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathcal{F}_2$, отримаємо супереволюційне включення $\mathfrak{C}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubseteq} \mathfrak{C}_2$.

Згідно позначень, прийнятих в параграфі 3.2.2, маємо, $\mathcal{L}k\left(\mathcal{F}_i\right) = \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}_i\right)$ $(i \in \overline{1,2})$. Звідси, згідно з властивістю 3.10(2), при $i \in \overline{1,2}$ отримуємо:

$$\mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_i\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathfrak{C}_i\right); \tag{3.60}$$

$$\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_i\right) = \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_i\right) \qquad \left(\forall \alpha \in \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_i\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathfrak{C}_i\right)\right). \tag{3.61}$$

Отже, використовуючи пункт d) параграфа 3.2.2, для $\alpha \in \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_i\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathfrak{C}_i\right)$, $x \in \mathfrak{Bs}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_i\right)\right) = \mathfrak{Bs}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_i\right)\right)$ і $\omega \in \mathbb{Bs}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_i\right)\right) = \mathbb{Bs}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathfrak{C}_i\right)\right)$ отримуємо:

$$\mathfrak{q}_{\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_i)}\left(x, \mathcal{F}_i\right) = \mathfrak{q}_{\mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_i)}\left(x, \mathfrak{C}_i\right); \tag{3.62}$$

$$\mathbf{Q}^{\langle \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_i)\rangle}\left(\omega, \mathcal{F}_i\right) = \mathbf{Q}^{\langle \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C}_i)\rangle}\left(\omega, \mathfrak{C}_i\right). \tag{3.63}$$

Застосовуючи рівності (3.60)–(3.63), а також твердження 3.30 отримуємо всі пункти твердження 3.38. □

Основні результати підрозділу 3.6 були опубліковані в [137, розділи 5-7], а також представлені на конференціях [90, 91].

3.7. Еволюційне об'єднання універсальних кінематик

3.7.1. Означення еволюційного об'єднання.

Означення 3.39. Нехай, $\left(\mathcal{F}_\alpha\right)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ $(\mathcal{A} \neq \emptyset)$ — довільна індексована сім'я універсальних кінематик. Універсальну кінематику $\mathcal{F}$ будемо називати **еволюційним об'єднанням** сім'ї $\left(\mathcal{F}_\alpha\right)_{\alpha\in\mathcal{A}}$, якщо:

(EOk$_1$) $\mathcal{F}_\alpha \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{F}$ для довільного $\alpha \in \mathcal{A}$.

(EOk$_2$) Якщо $\mathcal{F}'$ — універсальна кінематика і $\mathcal{F}_\alpha \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{F}'$ при всіх $\alpha \in \mathcal{A}$, то $\mathcal{F} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{F}'$.

Твердження 3.40. *Довільна сім'я універсальних кінематик $\left(\mathcal{F}_\alpha\right)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ $(\mathcal{A} \neq \emptyset)$ може мати не більш, ніж одне еволюційне об'єднання.*

Доведення. Справді, нехай універсальні кінематики $\mathcal{F}$ і $\widetilde{\mathcal{F}}$ є еволюційним об'єднанням сім'ї універсальних кінематик $\left(\mathcal{F}_\alpha\right)_{\alpha\in\mathcal{A}}$. Тоді, за означенням 3.39, маємо $\mathcal{F} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \widetilde{\mathcal{F}}$ і $\widetilde{\mathcal{F}} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{F}$. Отже, згідно з твердженням 3.35, отримуємо $\mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{F}}$. □

Враховуючи твердження 3.40 (про єдиність еволюційного об'єднання), еволюційне об'єднання $\mathcal{F}$ сім'ї універсальних кінематик $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ (якщо воно існує) будемо позначати наступним чином:

$$\mathcal{F} = \overset{\leftarrow}{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}} \mathcal{F}_\alpha.$$

Зокрема, якщо $\mathcal{A} = \{1, ...n\}$ $(n \in \mathbb{N})$, то будемо використовувати позначення:

$$\mathcal{F}_1 \overset{\leftarrow}{\cup} \cdots \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{F}_n := \overset{\leftarrow}{\bigcup_{k=1}^{n}} \mathcal{F}_k := \overset{\leftarrow}{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}} \mathcal{F}_\alpha.$$

Використовуючи означення 3.39 неважко довести, що якщо $\mathcal{F}_\alpha \equiv \widetilde{\mathcal{F}}$ для будь-якого індекса $\alpha \in \mathcal{A}$, то еволюційне об'єднання сім'ї кінематик $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ існує, причому $\overset{\leftarrow}{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}} \mathcal{F}_\alpha = \widetilde{\mathcal{F}}$. Зокрема, для довільної кінематики $\mathcal{F}$ справедлива рівність:

$$\mathcal{F} \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{F} = \mathcal{F}.$$

В наступному параграфі буде розглянуто інший випадок, коли еволюційне об'єднання сім'ї універсальних кінематик обов'язково існує, а саме — випадок сім'ї з двох диз'юнктних універсальних кінематик.

3.7.2. Диз'юнктне еволюційне об'єднання універсальних кінематик.

Означення 3.41. Універсальні кінематики $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ будемо називати **диз'юнктними**, якщо виконуються такі умови:

1. $\mathcal{F}_1 [\equiv] \mathcal{F}_2$.
2. Для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_2)$ $\{^{3.5}\}$ справедлива рівність:

$$\mathfrak{Bs}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)) \cap \mathfrak{Bs}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2)) = \emptyset.$$

Якщо універсальні кінематики $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ є диз'юнктними, також будемо говорити, що універсальна кінематика $\mathcal{F}_1$ **диз'юнктна з** $\mathcal{F}_2$.

Твердження 3.42. *Якщо універсальні кінематики $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ — диз'юнктні, то для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_2)$ справедлива рівність:*

$$\mathbb{Bs}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)) \cap \mathbb{Bs}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2)) = \emptyset.$$

Доведення. Використовуючи властивість 1.60(4) (з врахуванням зауваження 3.3)), означення 3.41 (пункт 2) для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_2)$ отримуємо, $\mathbb{Bs}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)) \cap \mathbb{Bs}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2)) \subseteq (\mathbf{Tm}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)) \times \mathfrak{Bs}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1))) \cap (\mathbf{Tm}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2)) \times \mathfrak{Bs}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2))) = \emptyset$ □

[3.5] Оскільки $\mathcal{F}_1 [\equiv] \mathcal{F}_2$, то, за означенням 3.12, маємо $\mathcal{I}nd(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_2)$. Тому, друга умова означення 3.41 сформульована коректно.

Означення 3.43. Нехай $\mathcal{F}, \mathcal{F}_1$ — довільні універсальні кінематики або кінематичні чи мінливі множини такі, що $\mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_1)$. Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ покладемо:

$$\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_1} := \mathbf{lk}_{\mathtt{ind}(\mathfrak{l})}\,(\mathcal{F}_1)\,. \tag{3.64}$$

Систему відліку $\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_1}$ будемо називати **спорідненою** з $\mathfrak{l}$ в універсальній кінематиці (або кінематичній чи мінливій множині) $\mathcal{F}_1$.

З на основі означення 3.43 отримуємо наступні властивості.

Властивості 3.44. *Нехай $\mathcal{F}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ — довільні універсальні кінематики або кінематичні чи мінливі множини такі, що $\mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_2)$. Операція виділення спорідненої системи відліку має такі властивості:*

1. *$\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}} = \mathfrak{l}$ для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$;*
2. *Якщо $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$, то $\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_1}\lfloor_{\mathcal{F}_2} = \mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_2}$, зокрема $\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_1}\lfloor_{\mathcal{F}} = \mathfrak{l}$ $(\forall \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F}))$.*

Твердження 3.45. *Нехай, $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ — диз'юнктні універсальні кінематики і $\mathcal{F}$ довільна універсальна кінематика така, що $\mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_2)$. Тоді для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ справедлива рівність:*

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_1}) \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_2}) = \mathfrak{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_1}) \cap \mathfrak{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_2}) = \emptyset.$$

Доведення. Дане твердження є безпосереднім наслідком означення 3.41 та твердження 3.42, отримуємо бажану рівність. □

Означення 3.46. Будемо говорити, що універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є **диз'юнктним еволюційним об'єднанням** диз'юнктних універсальних кінематик $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$, якщо виконуються такі умови:

1. $\mathcal{F}\,[\equiv]\,\mathcal{F}_1\,[\equiv]\,\mathcal{F}_2$.
2. Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ справедлива рівність:[3.6]

   $$\mathsf{BE}(\mathfrak{l}) = \mathsf{BE}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_1}) \overset{\leftarrow}{\cup} \mathsf{BE}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_2})\,.$$

3. Для довільних $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ і $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ справедлива рівність:[3.7]

$$\langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}\rangle\,\omega = \begin{cases} \langle !\,\mathfrak{m}\,\lfloor_{\mathcal{F}_1} \leftarrow \mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_1}, \mathcal{F}_1\rangle\,\omega, & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_1}) \\ \langle !\,\mathfrak{m}\,\lfloor_{\mathcal{F}_2} \leftarrow \mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_2}, \mathcal{F}_2\rangle\,\omega, & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_2})\,. \end{cases} \tag{3.65}$$

[3.6] З умови $\mathcal{F}\,[\equiv]\,\mathcal{F}_1\,[\equiv]\,\mathcal{F}_2$ випливає рівність $\mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_2)$. Отже, за означенням 3.43, для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ існують системи відліку $\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_1}$ і $\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_2}$.

[3.7] З умови $\mathsf{BE}(\mathfrak{l}) = \mathsf{BE}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_1}) \overset{\leftarrow}{\cup} \mathsf{BE}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_2})$, згідно з наслідком 1.108, випливає рівність $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathsf{BE}(\mathfrak{l})) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathsf{BE}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_1})) \cup \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathsf{BE}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_2}))$, тобто рівність $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l}) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_1}) \cup \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_2})$, де, згідно із твердженням 3.45, $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_1}) \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_2}) = \emptyset$. Тому рівність (3.65) записана коректно.

4. Для довільних $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ і $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ справедлива рівність:

$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega; \mathcal{F}) = \begin{cases} \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}|_{\mathcal{F}_1} \rangle}(\omega, \mathcal{F}_1), & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}) \\ \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}|_{\mathcal{F}_2} \rangle}(\omega, \mathcal{F}_2), & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2}). \end{cases}$$

Твердження 3.47. *Нехай універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є диз'юнктним еволюційним об'єднанням диз'юнктних універсальних кінематик $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$. Тоді для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ мають місце такі твердження:*

1. $\mathsf{BE}(\mathfrak{l}) = \mathsf{BE}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}) \overset{\leftarrow}{\vee} \mathsf{BE}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2})$.
2. $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}) \sqcup \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2})$.
3. $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}) \sqcup \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2})$.
4. *Для довільного елемента $x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ справедлива рівність:*

$$\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}(x, \mathcal{F}) = \begin{cases} \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}|_{\mathcal{F}_1}}(x, \mathcal{F}_1), & x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}); \\ \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}|_{\mathcal{F}_2}}(x, \mathcal{F}_2), & x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2}). \end{cases}$$

Доведення. Розглянемо довільну систему відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$.

1. Згідно з твердженням 3.45, маємо, $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathsf{BE}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1})) \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathsf{BE}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2})) = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}) \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2}) = \emptyset$. Отже, за лемою 1.118 (пункт 3) сім'я з двох базових мінливих множин $\mathsf{BE}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1})$ і $\mathsf{BE}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2})$ є еволюційно насиченою. Тому, згідно з твердженням 1.117, існує супереволюційне об'єднання $\mathsf{BE}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}) \overset{\leftarrow}{\vee} \mathsf{BE}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2})$. Отже, використовуючи означення 3.46, а також наслідок 1.113, отримуємо, $\mathsf{BE}(\mathfrak{l}) = \mathsf{BE}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}) \overset{\leftarrow}{\cup} \mathsf{BE}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2}) = \mathsf{BE}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}) \overset{\leftarrow}{\vee} \mathsf{BE}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2})$.

2. Беручи до уваги пункт 2 означення 3.46, а також наслідок 1.108, одержуємо:

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathsf{BE}(\mathfrak{l})) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathsf{BE}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}) \overset{\leftarrow}{\cup} \mathsf{BE}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2})\right) =$$
$$= \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathsf{BE}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1})) \cup \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathsf{BE}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2})) = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}) \cup \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2}),$$

де, згідно з твердженням 3.45, $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}) \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2}) = \emptyset$. Отже, $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}) \sqcup \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2})$.

3. Використовуючи пункт 2 означення 3.46 та наслідок 1.108, отримуємо:

$$\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathsf{BE}(\mathfrak{l})) = \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathsf{BE}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}) \overset{\leftarrow}{\cup} \mathsf{BE}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2})\right) =$$
$$= \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathsf{BE}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1})) \cup \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathsf{BE}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2})) = \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}) \cup \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2}),$$

де, згідно з твердженням 3.45, $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}) \cap \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2}) = \emptyset$. Тому, $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}) \sqcup \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2})$.

4. Зафіксуємо довільний елемент $x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$. Тоді, згідно з третім пунктом даного твердження, має місце одна і тільки одна з умов: $x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1})$ або $x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2})$.

а) Розглянемо випадок $x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1})$. Згідно з властивістю 1.60(9), існує елементарно-часовий стан $\omega_x \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1})$ такий, що $x = \mathsf{bs}(\omega_x)$. Оскільки

$\omega_x \in \mathbb{Bs}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right)$, то, згідно з другим пунктом даного твердження маємо, $\omega_x \in \mathbb{Bs}(\mathfrak{l})$. Отже, згідно з пунктом 4 означення 3.46, отримуємо, $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\omega_x;\mathcal{F}\right) = \mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right\rangle}\left(\omega_x;\mathcal{F}_1\right)$. Звідси, використовуючи означення координат Мінковського (див. (2.4)), маємо:

$$\left(\mathsf{tm}\left(\omega_x\right), \mathsf{q}_{\mathfrak{l}}\left(\mathsf{bs}\left(\omega_x\right);\mathcal{F}\right)\right) = \left(\mathsf{tm}\left(\omega_x\right), \mathsf{q}_{\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}}\left(\mathsf{bs}\left(\omega_x\right);\mathcal{F}_1\right)\right).$$

Отже, $\mathsf{q}_{\mathfrak{l}}\left(x;\mathcal{F}\right) = \mathsf{q}_{\mathfrak{l}}\left(\mathsf{bs}\left(\omega_x\right),\mathcal{F}\right) = \mathsf{q}_{\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}}\left(\mathsf{bs}\left(\omega_x\right);\mathcal{F}_1\right) = \mathsf{q}_{\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}}\left(x;\mathcal{F}_1\right)$.

б) Аналогічно у випадку $x \in \mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right)$ отримуємо, $\mathsf{q}_{\mathfrak{l}}\left(x;\mathcal{F}\right) = \mathsf{q}_{\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}}\left(x;\mathcal{F}_2\right)$. □

Твердження 3.48. *Нехай універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є диз'юнктним еволюційним об'єднанням диз'юнктних універсальних кінематик $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$. Тоді:*

1. $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathcal{F}$.
2. *Якщо $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \underset{\rightarrow}{\subset} \widetilde{\mathcal{F}}$ (для деякої універсальної кінематики $\widetilde{\mathcal{F}}$), то $\mathcal{F} \underset{\rightarrow}{\subset} \widetilde{\mathcal{F}}$.*

Доведення.

$\boxed{\mathbf{1.}}$ Доведемо, що $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathcal{F}$.

1.1) Оскільки $\mathcal{F}$ є диз'юнктним еволюційним об'єднанням $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$, то, за означенням 3.46 (пункт 1), маємо, $\mathcal{F}\left[\equiv\right]\mathcal{F}_1$.

1.2) Оскільки $\mathcal{F}\left[\equiv\right]\mathcal{F}_1$, то, за означенням 3.12 (пункт 1), маємо $\mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_1\right)$. Тому використовуючи означення 3.12 (пункт 2) та систему позначень теорії універсальних кінематик (див. параграф 3.2.2), для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_1\right)$ отримуємо:

$$\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{F}\restriction\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right)\right) = \mathbf{Tm}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right)\right) = \mathbf{Tm}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{F}_1\restriction\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right);$$
$$\mathsf{BG}\left(\mathcal{F}\restriction\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right)\right) = \mathsf{BG}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right),\mathcal{F}\right) = \mathsf{BG}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right),\mathcal{F}_1\right) = \mathsf{BG}\left(\mathcal{F}_1\restriction\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right).$$

Отже, за означенням 3.11, базові кінематичні множини $\mathcal{F}\restriction\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right)$ і $\mathcal{F}_1\restriction\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)$ — хроногеометрично споріднені.

1.3) Нехай $\alpha \in \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_1\right)$ — довільний індекс. Покладемо:

$$\mathfrak{l} := \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right).$$

Тоді, за означенням 3.43, маємо: $\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_i} = \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_i\right)$ $(i \in \overline{1,2})$. Згідно з твердженням 3.47 отримуємо, $\mathsf{BE}(\mathfrak{l}) = \mathsf{BE}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right) \overset{\leftarrow}{\vee} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right)$. Отже, за означенням 1.110, маємо $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right) \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathsf{BE}(\mathfrak{l})$, тобто $\mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right) \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right)\right)$. Звідси, враховуючи систему позначень теорії універсальних кінематик (див. параграф 2.2.4), одержуємо:

$$\mathsf{BE}\left(\mathcal{F}_1\restriction\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right) = \mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right) \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right)\right) = \mathsf{BE}\left(\mathcal{F}\restriction\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right)\right) \tag{3.66}$$

Використовуючи твердження 3.47 (пункт 4), для довільного елементарного стану $x \in \mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right)$ отримуємо: $\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\left(x,\mathcal{F}\right) = \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}}\left(x,\mathcal{F}_1\right)$, тобто $\mathfrak{q}_{\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})}\left(x,\mathcal{F}\right) = \mathfrak{q}_{\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)}\left(x,\mathcal{F}_1\right)$.

Звідси, враховуючи систему позначень теорії кінематичних множин (див. параграф 2.2.4), для довільного $x \in \mathfrak{Bs}\left(\mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}_1\right)\right) = \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{F}_1 \restriction \mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}_1\right)\right)$ маємо:

$$\mathfrak{q}_{\mathcal{F}_1 \restriction \mathbf{lk}_{\alpha}(\mathcal{F}_1)}(x) = \mathfrak{q}_{\mathcal{F} \restriction \mathbf{lk}_{\alpha}(\mathcal{F})}(x) \tag{3.67}$$

Згідно з пунктом 1.2) даного доведення, базові кінематичні множини $\mathcal{F} \restriction \mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}\right)$ і $\mathcal{F}_1 \restriction \mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}_1\right)$ — хроногеометрично споріднені. Тому, враховуючи співвідношення (3.66), (3.67) та означення 3.17 (пункт 2), отримуємо супереволюційне включення:

$$\mathcal{F}_1 \restriction \mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}_1\right) \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathcal{F} \restriction \mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}\right) \qquad \left(\forall \alpha \in \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_1\right)\right).$$

З останнього включення, зокрема, випливає включення:

$$\mathbb{Bs}\left(\mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}_1\right)\right) \subseteq \mathbb{Bs}\left(\mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}\right)\right) \quad \left(\forall \alpha \in \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_1\right)\right), \tag{3.68}$$

яке буде необхідне нам далі.

1.4) Розглянемо довільні індекси $\alpha, \beta \in \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_1\right)$. Покладемо:

$$\mathfrak{l} := \mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}\right), \quad \mathfrak{m} := \mathbf{lk}_{\beta}\left(\mathcal{F}\right). \quad \text{Тоді:} \tag{3.69}$$

$$\mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_1} = \mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}_1\right), \quad \mathfrak{m} \lfloor_{\mathcal{F}_1} = \mathbf{lk}_{\beta}\left(\mathcal{F}_1\right). \tag{3.70}$$

Розглянемо довільну мінливу систему $A \subseteq \mathbb{Bs}\left(\mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}_1\right)\right)$. Враховуючи (3.68), бачимо, що $A \subseteq \mathbb{Bs}\left(\mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}_1\right)\right) \subseteq \mathbb{Bs}\left(\mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}\right)\right)$. Тому, беручи до уваги формули (3.70) і (3.69), маємо, $A \subseteq \mathbb{Bs}\left(\mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_1}\right) \subseteq \mathbb{Bs}\left(\mathfrak{l}\right)$. Застосовуючи теорему 1.185 а також пункт 3 означення 3.46, отримуємо:

$$\begin{aligned}
&\left\langle \mathbf{lk}_{\beta}\left(\mathcal{F}\right) \leftarrow \mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}\right), \mathcal{F}\right\rangle A = \left\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}\right\rangle A = \\
&= \bigcup_{\omega \in A} \left\{\left\langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}\right\rangle \omega\right\} = \bigcup_{\omega \in A} \left\{\left\langle ! \, \mathfrak{m} \lfloor_{\mathcal{F}_1} \leftarrow \mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_1}, \mathcal{F}_1\right\rangle \omega\right\} = \\
&\qquad = \left\langle \mathfrak{m} \lfloor_{\mathcal{F}_1} \leftarrow \mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_1}, \mathcal{F}_1\right\rangle A = \left\langle \mathbf{lk}_{\beta}\left(\mathcal{F}_1\right) \leftarrow \mathbf{lk}_{\alpha}\left(\mathcal{F}_1\right), \mathcal{F}_1\right\rangle A.
\end{aligned}$$

З результатів, доведених в пунктах 1.1)–1.4), згідно з твердженням 3.34, випливає, що $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathcal{F}$. Аналогічно доводиться, що $\mathcal{F}_2 \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathcal{F}$.

$\boxed{\mathbf{2.}}$ Нехай $\widetilde{\mathcal{F}}$ — універсальна кінематика, і $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \widetilde{\mathcal{F}}$. За означенням 3.1, універсальні кінематики $\mathcal{F}$, $\widetilde{\mathcal{F}}$ можна подати у вигляді:

$$\mathcal{F} = \left(\mathfrak{C}, \overleftarrow{\mathcal{Q}}\right), \quad \widetilde{\mathcal{F}} = \left(\widetilde{\mathfrak{C}}, \overleftarrow{\mathcal{Q}^{\sim}}\right),$$

де $\mathfrak{C}$, $\widetilde{\mathfrak{C}}$ — кінематичні множини.

2.1) Оскільки $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \widetilde{\mathcal{F}}$ і $\mathcal{F}_1 \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathcal{F}$, то, згідно з першим пунктом тверджень 3.33 та 3.34, маємо, $\mathcal{F}_1 \left[\equiv\right] \mathcal{F}$ і $\mathcal{F}_1 \left[\equiv\right] \widetilde{\mathcal{F}}$. Отже, за твердженням 3.13, $\mathcal{F} \left[\equiv\right] \widetilde{\mathcal{F}}$. З останнього співвідношення, зокрема, випливає, рівність:

$$\mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}) = \mathcal{I}nd\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right).$$

Згідно з твердженням 3.24, кінематичні множини $\mathfrak{C}$ і $\widetilde{\mathfrak{C}}$ — хроногеометрично споріднені. Тому, за означенням 3.23, для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}) = \mathcal{I}nd\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right) = \mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}) = \mathcal{I}nd\left(\widetilde{\mathfrak{C}}\right)$ базові кінематичні множини $\mathcal{F} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}) = \mathfrak{C} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathfrak{C})$ і $\widetilde{\mathcal{F}} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right) = \widetilde{\mathfrak{C}} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\left(\widetilde{\mathfrak{C}}\right)$ — хроногеометрично споріднені.

2.2) Зафіксуємо довільний індекс $\alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}) = \mathcal{I}nd\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right)$.

2.2.1) Оскільки $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \widetilde{\mathcal{F}}$, то, згідно з другим пунктом твердження 3.33, маємо:

$$\mathcal{F}_i \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_i) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \widetilde{\mathcal{F}} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right) \quad \left(i \in \overline{1,2}\right). \tag{3.71}$$

Тому, за означенням 3.17, для $i \in \overline{1,2}$ маємо:

$$\mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_i)) = \mathsf{BE}\,(\mathcal{F}_i \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_i)) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathsf{BE}\left(\widetilde{\mathcal{F}} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right)\right) = \mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right)\right).$$

Звідси, використовуючи означення 3.46 (п. 2) та твердження 1.109 (п. 4), отримуємо:

$$\mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})) = \mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}) \downharpoonleft_{\mathcal{F}_1}) \overset{\leftarrow}{\cup} \mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}) \downharpoonleft_{\mathcal{F}_2}) =$$
$$= \mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)) \overset{\leftarrow}{\cup} \mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2)) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right)\right). \qquad \text{Отже:}$$
$$\mathsf{BE}\,(\mathcal{F} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathsf{BE}\left(\widetilde{\mathcal{F}} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right)\right).$$

2.2.2) Згідно з (3.71), маємо, $\mathcal{F}_1 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \widetilde{\mathcal{F}} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right)$. Тому, за означенням 3.17, базові кінематичні множини $\mathcal{F}_1 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)$ і $\widetilde{\mathcal{F}} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right)$ є хроногеометрично споріднені. Згідно з доведеним вище першим пунктом даного твердження, маємо $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{F}$. Отже, згідно з твердженням 3.33, отримуємо, $\mathcal{F}_1 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{F} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})$. Тому, за означенням 3.17, базові кінематичні множини $\mathcal{F}_1 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)$ і $\mathcal{F} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})$ також хроногеометрично споріднені. З (попарної) хроногеометричної спорідненості $\mathcal{F}_1 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)$ і $\widetilde{\mathcal{F}} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right)$ та $\mathcal{F}_1 \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)$ і $\mathcal{F} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})$ випливає хроногеометрична спорідненість базових кінематичних множин $\mathcal{F} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})$ і $\widetilde{\mathcal{F}} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right)$.

2.2.3) Використовуючи (3.71), означення 3.17 і твердження 1.94, отримуємо включення $\mathfrak{Bs}\,(\mathcal{F}_i \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_i)) \subseteq \mathfrak{Bs}\left(\widetilde{\mathcal{F}} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right)\right)$ $(i \in \overline{1,2})$, а також рівність:

$$\mathfrak{q}_{\mathcal{F}_i \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_i)}(x) = \mathfrak{q}_{\widetilde{\mathcal{F}} \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right)}(x) \quad \left(\forall x \in \mathfrak{Bs}\,(\mathcal{F}_i \upharpoonright \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_i)) = \mathfrak{Bs}\,(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_i))\right), \tag{3.72}$$

де $\left(i \in \overline{1,2}\right)$. Із співвідношення (3.72), використовуючи твердження 3.47 (пункт 4),

для $x \in \mathfrak{Bs}\left(\mathcal{F} \restriction \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right)\right)$ отримуємо:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{q}_{\mathcal{F}\restriction \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})}(x) &= \mathfrak{q}_{\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})}(x, \mathcal{F}) = \\
&= \begin{cases} \mathfrak{q}_{\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})\downharpoonleft_{\mathcal{F}_1}}\left(x, \mathcal{F}_1\right), & x \in \mathfrak{Bs}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right)\downharpoonleft_{\mathcal{F}_1}\right) \\ \mathfrak{q}_{\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})\downharpoonleft_{\mathcal{F}_2}}\left(x, \mathcal{F}_2\right), & x \in \mathfrak{Bs}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right)\downharpoonleft_{\mathcal{F}_2}\right) \end{cases} = \\
&= \begin{cases} \mathfrak{q}_{\mathcal{F}_1\restriction \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)}(x), & x \in \mathfrak{Bs}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right) \\ \mathfrak{q}_{\mathcal{F}_2\restriction \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2)}(x), & x \in \mathfrak{Bs}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right)\right) \end{cases} = \mathfrak{q}_{\widetilde{\mathcal{F}}\restriction \mathbf{lk}_\alpha\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right)}(x).
\end{aligned}$$

З підпунктів 2.2.1), 2.2.2), 2.2.3), за означенням 3.17, для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}\right) = \mathcal{I}nd\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right)$ випливає наступне еволюційне включення:

$$\mathcal{F} \restriction \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \widetilde{\mathcal{F}} \restriction \mathbf{lk}_\alpha\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right).$$

2.3) Нехай $\alpha, \beta \in \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}\right) = \mathcal{I}nd\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right)$ — довільні індекси. Оскільки $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \underset{\rightarrow}{\subseteq} \widetilde{\mathcal{F}}$, то, за твердженням 3.33, для довільного $\omega \in \mathbb{Bs}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_i\right)\right)$ $(i \in \overline{1,2})$, отримуємо:

$$\left\langle \mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}_i\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_i\right), \mathcal{F}_i \right\rangle \{\omega\} = \left\langle \mathbf{lk}_\beta\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right), \widetilde{\mathcal{F}} \right\rangle \{\omega\}.$$

Отже, враховуючи рівність (1.63), маємо:

$$\left\langle ! \, \mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}_i\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_i\right), \mathcal{F}_i \right\rangle \omega = \left\langle ! \, \mathbf{lk}_\beta\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right), \widetilde{\mathcal{F}} \right\rangle \omega$$
$$\left(\omega \in \mathbb{Bs}\left(\mathcal{F}_i\right), \ i \in \{1,2\}\right).$$

Звідси, використовуючи означення 3.46 (пункт 3), для довільного $\omega \in \mathbb{Bs}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right)\right)$ отримуємо:

$$\begin{aligned}
&\left\langle ! \, \mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right), \mathcal{F} \right\rangle \omega = \\
&= \begin{cases} \left\langle ! \, \mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}_1\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right), \mathcal{F}_1 \right\rangle \omega, & \omega \in \mathbb{Bs}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right) \\ \left\langle ! \, \mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}_2\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right), \mathcal{F}_2 \right\rangle \omega, & \omega \in \mathbb{Bs}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right)\right) \end{cases} = \\
&\qquad = \left\langle ! \, \mathbf{lk}_\beta\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right), \widetilde{\mathcal{F}} \right\rangle \omega. \qquad (3.73)
\end{aligned}$$

Враховуючи рівність (3.73), а також властивість 1.187(2), для довільної мінливої системи$\forall\, A \subseteq \mathbb{Bs}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right)\right)$ одержуємо:

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right), \mathcal{F} \right\rangle A &= \bigcup_{\omega \in A} \left\{ \left\langle ! \, \mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}\right), \mathcal{F} \right\rangle \omega \right\} = \\
&= \bigcup_{\omega \in A} \left\{ \left\langle ! \, \mathbf{lk}_\beta\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right), \widetilde{\mathcal{F}} \right\rangle \omega \right\} = \left\langle \mathbf{lk}_\beta\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right), \widetilde{\mathcal{F}} \right\rangle A.
\end{aligned}$$

В пункті 2.1) було доведено, що $\mathcal{F}\,[\equiv]\,\widetilde{\mathcal{F}}$. Тому, з результатів, встановлених у підпунктах 2.2)–2.3), згідно з твердженням 3.33, випливає включення:

$$\mathcal{F} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \widetilde{\mathcal{F}}. \qquad \square$$

З тверджень 3.48 і 3.36, а також означення 3.39 випливає такий наслідок.

Наслідок 3.49. *Якщо диз'юнктне еволюційне об'єднання (диз'юнктних) універсальних кінематик $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ існує, то воно єдине. При цьому:*

- *Еволюційне об'єднання $\mathcal{F}_1 \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{F}_2$ також існує.*
- *Диз'юнктне еволюційне об'єднання кінематик $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ збігається з їхнім еволюційним об'єднанням $\mathcal{F}_1 \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{F}_2$.*

Позначення 3.50. Враховуючи наслідок 3.49, надалі, у випадку, якщо $\mathcal{F}$ є диз'юнктним еволюційним об'єднанням (диз'юнктних) універсальних кінематик $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$, будемо використовувати таке позначення:

$$\mathcal{F}_1 \overset{\leftarrow}{\sqcup} \mathcal{F}_2 := \mathcal{F}.$$

Теорема 3.51. *Довільні диз'юнктні універсальні кінематики $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ мають диз'юнктне еволюційне об'єднання $\mathcal{F}_1 \overset{\leftarrow}{\sqcup} \mathcal{F}_2$.*

Доведення. **I.** Нехай, $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ — диз'юнктні універсальні кінематики. Тоді, за означенням 3.41, $\mathcal{F}_1\,[\equiv]\,\mathcal{F}_2$. Тому, за означенням 3.12, маємо, $\mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_2)$. Покладемо:

$$\mathcal{A} := \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_2)\,.$$

За означенням 3.12, для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{A}$ базові мінливі множини $\mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_1))$ і $\mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_2))$ — хронологічно споріднені. Отже, можна покласти:

$$\mathcal{B}_\alpha := \mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_1)) \overset{\leftarrow}{\cup} \mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_2))\,, \quad \alpha \in \mathcal{A}. \tag{3.74}$$

Згідно з наслідком 1.108, для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{A}$ отримуємо:

$$\begin{aligned} \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha) &= \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_1))) \cup \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_2))) = \\ &= \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_1)) \cup \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_2))\,. \end{aligned} \tag{3.75}$$

При цьому, згідно з твердженням 3.42, маємо:

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_1)) \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_2)) = \emptyset, \quad \alpha \in \mathcal{A}. \tag{3.76}$$

II. Для довільних $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ і $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha)$ покладемо:

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_{\beta\alpha} A := \quad & \langle \mathbf{lk}_\beta\,(\mathcal{F}_1) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_1)\,,\, \mathcal{F}_1 \rangle\,(A \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_1))) \cup \\ & \cup \langle \mathbf{lk}_\beta\,(\mathcal{F}_2) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_2)\,,\, \mathcal{F}_2 \rangle\,(A \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_2)))\,. \end{aligned} \tag{3.77}$$

Доведемо, що сім'я відображень $(\mathfrak{U}_{\beta\alpha} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{A})$ є уніфікацією сприймання для сім'ї базових мінливих множин $(\mathcal{B}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A})$.

а) Очевидно, що $A \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_i\right)\right) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_i\right)\right)$ (для будь-яких $\alpha \in \mathcal{A}$, $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right)$ і $i \in \overline{1,2}$). Згідно з означенням 1.124, відображення уніфікації $\langle \mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}_i\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_i\right), \mathcal{F}_i \rangle$ переводить довільну множину, що належить до $2^{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_i))}$ в множину, що належить до $2^{\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_i)\right)}$. Отже, $\langle \mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}_i\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_i\right), \mathcal{F}_i \rangle \left(A \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_i\right)\right)\right) \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}_i\right)\right)$ $(i \in \overline{1,2})$. Тому, права частина рівності (3.77) є підмножиною множини $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}_1\right)\right) \cup \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}_2\right)\right)$. Тобто, згідно з (3.75), маємо $\mathfrak{U}_{\beta\alpha} A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\beta\right)$. Таким чином:

- $\mathfrak{U}_{\beta\alpha}$ *є відображенням з* $2^{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_\alpha)}$ *в* $2^{\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\beta\right)}$ *(для довільних індексів* $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$*).*

б) Нехай $\alpha \in \mathcal{A}$ і $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right)$. Тоді, використовуючи властивість 1.126(5) і рівність (3.75), отримуємо:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U}_{\alpha\alpha} A = \quad & \langle \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right), \mathcal{F}_1 \rangle \left(A \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right)\right) \cup \\
\cup \, & \langle \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right), \mathcal{F}_2 \rangle \left(A \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right)\right)\right) = \\
= \quad & \left(A \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right)\right) \cup \left(A \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right)\right)\right) = A.
\end{aligned}$$

в) Нехай $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ і $A \subseteq B \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right)$. Тоді, використовуючи властивість 1.126(8) та формулу (3.77), одержуємо:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U}_{\beta\alpha} A = \quad & \langle \mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}_1\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right), \mathcal{F}_1 \rangle \left(A \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right)\right) \cup \\
\cup \, & \langle \mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}_2\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right), \mathcal{F}_2 \rangle \left(A \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right)\right)\right) \subseteq \\
\subseteq \quad & \langle \mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}_1\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right), \mathcal{F}_1 \rangle \left(B \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right)\right) \cup \\
\cup \, & \langle \mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}_2\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right), \mathcal{F}_2 \rangle \left(B \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right)\right)\right) = \mathfrak{U}_{\beta\alpha} B.
\end{aligned}$$

г) Нехай, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$ і $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right)$. Покладемо:

$$A_i := A \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_i\right)\right) \quad \left(i \in \overline{1,2}\right); \qquad \widetilde{A} := \mathfrak{U}_{\beta\alpha} A. \tag{3.78}$$

Тоді, згідно (3.75) і (3.77), отримуємо:

$$\begin{aligned}
& A = A_1 \cup A_2; \quad \widetilde{A} = \widetilde{A}_1 \cup \widetilde{A}_2, \quad \text{де} \\
& \widetilde{A}_i = \langle \mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}_i\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_i\right), \mathcal{F}_i \rangle A_i \quad \left(i \in \overline{1,2}\right).
\end{aligned}$$

Враховуючи співвідношення (3.78), маємо, $A_i \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_i\right)\right)$ $(i \in \overline{1,2})$. За означенням 1.124, відображення уніфікації $\langle \mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}_i\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_i\right), \mathcal{F}_i \rangle$ є відображеннями з $2^{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_i))}$ в $2^{\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_i)\right)}$. Тому, $\widetilde{A}_i \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}_i\right)\right)$ $(i \in \overline{1,2})$. Отже, враховуючи рівність (3.76), для множини $\widetilde{A} = \widetilde{A}_1 \cup \widetilde{A}_2$ отримуємо:

$$\widetilde{A} \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}_i\right)\right) = \widetilde{A}_i \quad \left(i \in \overline{1,2}\right).$$

Тому, використовуючи (3.77) і властивість 1.126(9), отримуємо:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U}_{\gamma\beta}\mathfrak{U}_{\beta\alpha}A = \mathfrak{U}_{\gamma\beta}\widetilde{A} &= \langle \mathbf{lk}_\gamma\left(\mathcal{F}_1\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}_1\right), \mathcal{F}_1\rangle \widetilde{A}_1 \cup \\
&\cup \langle \mathbf{lk}_\gamma\left(\mathcal{F}_2\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}_2\right), \mathcal{F}_2\rangle \widetilde{A}_2 = \\
= &\quad \langle \mathbf{lk}_\gamma\left(\mathcal{F}_1\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}_1\right), \mathcal{F}_1\rangle \langle \mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}_1\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right), \mathcal{F}_1\rangle A_1 \cup \\
&\cup \langle \mathbf{lk}_\gamma\left(\mathcal{F}_2\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}_2\right), \mathcal{F}_2\rangle \langle \mathbf{lk}_\beta\left(\mathcal{F}_2\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right), \mathcal{F}_2\rangle A_2 \subseteq \\
\subseteq &\quad \langle \mathbf{lk}_\gamma\left(\mathcal{F}_1\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right), \mathcal{F}_1\rangle A_1 \cup \\
&\cup \langle \mathbf{lk}_\gamma\left(\mathcal{F}_2\right) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right), \mathcal{F}_2\rangle A_2 = \mathfrak{U}_{\gamma\alpha}A.
\end{aligned}$$

Підсумовуючи результати, отримані в пунктах б), в), г) і враховуючи означення 1.124, бачимо, що сім'я відображень $(\mathfrak{U}_{\beta\alpha} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{A})$ є уніфікацією сприймання на $(\mathcal{B}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A})$, тому трійка:

$$\mathcal{Z} = \left(\mathcal{A}, \left(\mathcal{B}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\right), \left(\mathfrak{U}_{\beta\alpha} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{A}\right)\right)$$

є мінливою множиною. При цьому, згідно з позначеннями, прийнятими в теорії мінливих множин (див. параграф 1.12.2), маємо:

$$\mathcal{I}nd\left(\mathcal{Z}\right) = \mathcal{A} = \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_1\right) = \mathcal{I}nd\left(\mathcal{F}_2\right); \tag{3.79}$$

$$\mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right) = \left\{\left(\alpha, \mathcal{B}_\alpha\right) \mid \alpha \in \mathcal{A}\right\}. \tag{3.80}$$

Далі, використовуючи позначення, прийняті в теорії мінливих множин, а також формули (3.75), (3.76), (3.74) для будь-якої сист. відліку $\mathfrak{l} = \left(\alpha, \mathcal{B}_\alpha\right) \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right)$ отримуємо:

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{B}_\alpha\right) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right) \sqcup \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right)\right) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_1}\right) \sqcup \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_2}\right); \tag{3.81}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}) &= \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{B}_\alpha\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right) \overset{\leftarrow}{\cup} \mathsf{BE}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right)\right)\right) = \\
&= \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_1\right)\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathbf{lk}_\alpha\left(\mathcal{F}_2\right)\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_1}\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_2}\right).
\end{aligned} \tag{3.82}$$

З формули (3.81), враховуючи властивість 1.60(9), одержуємо:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) &= \left\{\mathsf{bs}\left(\omega\right) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\right\} = \left\{\mathsf{bs}\left(\omega\right) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_1}\right) \cup \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_2}\right)\right\} = \\
&= \left\{\mathsf{bs}\left(\omega\right) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_1}\right)\right\} \cup \left\{\mathsf{bs}\left(\omega\right) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_2}\right)\right\} = \\
&= \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_1}\right) \cup \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_2}\right).
\end{aligned} \tag{3.83}$$

За умовою, кінематики $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ — диз'юнктні. Тому, згідно з твердженням 3.45, маємо, $\mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_1}\right) \cap \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_2}\right) = \emptyset$. Звідси, враховуючи (3.83), отримуємо:

$$\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_1}\right) \sqcup \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_2}\right) \quad \left(\forall\, \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right)\right). \tag{3.84}$$

Крім того, згідно (3.77), для довільних систем відліку $\mathfrak{l} = (\alpha, \mathcal{B}_\alpha) \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$, $\mathfrak{m} = (\beta, \mathcal{B}_\beta) \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ і довільної мінливої системи $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ одержуємо:

$$\begin{aligned}\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathcal{Z}\rangle A = \mathfrak{U}_{\beta\alpha} A = \langle \mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_1) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1),\, \mathcal{F}_1\rangle (A \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1))) \cup \\ \cup \langle \mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_2) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2),\, \mathcal{F}_2\rangle (A \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_2))) = \\ = \quad \langle \mathfrak{m} \lfloor_{\mathcal{F}_1} \leftarrow \mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_1},\, \mathcal{F}_1\rangle (A \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_1})) \cup \\ \cup \langle \mathfrak{m} \lfloor_{\mathcal{F}_2} \leftarrow \mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_2},\, \mathcal{F}_2\rangle (A \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_2})).\end{aligned} \tag{3.85}$$

Розглянемо довільні системи відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ і довільну мінливу систему $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ таку, що $A \neq \emptyset$. Згідно з (3.81), хоч одна з множин $A \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_1})$ або $A \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_2})$ — непорожня. Оскільки $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ — універсальні кінематики, то, за означенням 3.1, вони є чітко видимими. Тому, враховуючи означення 1.167, наслідок 1.172 та твердження 1.158 (пункт **(nVi3)**), бачимо, що хоч одна з множин $\langle \mathfrak{m} \lfloor_{\mathcal{F}_i} \leftarrow \mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_i},\, \mathcal{F}_i\rangle (A \cap \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_i}))$ $(i \in \overline{1,2})$ непорожня. Отже, беручи до уваги (3.85), отримуємо, що:

$$\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathcal{Z}\rangle A \neq \emptyset \qquad (\text{для будь-яких} \quad A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}),\ A \neq \emptyset \quad \text{і} \quad \mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})).$$

Враховуючи наслідок 1.172, твердження 1.158 (пункт **(nVi3)**), та означення 1.167, приходимо до висновку, що мінлива множина $\mathcal{Z}$ є чітко видимою. Використовуючи рівності (3.81), (3.85), і (1.63), для довільних $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ і $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ отримуємо:

$$\begin{aligned}\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathcal{Z}\rangle \{\omega\} &= \begin{cases} \langle \mathfrak{m} \lfloor_{\mathcal{F}_1} \leftarrow \mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_1},\, \mathcal{F}_1\rangle \{\omega\}, & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_1}) \\ \langle \mathfrak{m} \lfloor_{\mathcal{F}_2} \leftarrow \mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_2},\, \mathcal{F}_2\rangle \{\omega\}, & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_2}) \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \{\langle ! \mathfrak{m} \lfloor_{\mathcal{F}_1} \leftarrow \mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_1},\, \mathcal{F}_1\rangle \omega\}, & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_1}) \\ \{\langle ! \mathfrak{m} \lfloor_{\mathcal{F}_2} \leftarrow \mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_2},\, \mathcal{F}_2\rangle \omega\}, & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_2}). \end{cases}\end{aligned}$$

Звідси, враховуючи рівність (1.63), одержуємо:

$$\langle ! \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathcal{Z}\rangle \omega = \begin{cases} \langle ! \mathfrak{m} \lfloor_{\mathcal{F}_1} \leftarrow \mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_1},\, \mathcal{F}_1\rangle \omega, & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_1}) \\ \langle ! \mathfrak{m} \lfloor_{\mathcal{F}_2} \leftarrow \mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_2},\, \mathcal{F}_2\rangle \omega, & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_2}). \end{cases} \tag{3.86}$$

Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ покладемо:

$$k_{\mathfrak{l}}(x) := \begin{cases} \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}|_{\mathcal{F}_1}}(x; \mathcal{F}_1), & x \in \mathfrak{Bs}(\mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_1}) \\ \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}|_{\mathcal{F}_2}}(x; \mathcal{F}_2), & x \in \mathfrak{Bs}(\mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_2}) \end{cases} \qquad (x \in \mathfrak{Bs}(\mathfrak{l})) \tag{3.87}$$

Оскільки об'єднання в рівності (3.84) — диз'юнктне, то позначення (3.87) — коректне.

Оскільки $\mathcal{F}_1 [\equiv] \mathcal{F}_2$, то, за означенням 3.12, для довільної системи відліку $\mathfrak{l} =$

$(\alpha, \mathcal{B}_\alpha) \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ маємо:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{BG}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_1}; \mathcal{F}_1) = \mathsf{BG}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_1)\,; \mathcal{F}_1) = \mathsf{BG}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_2)\,; \mathcal{F}_2) = \mathsf{BG}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_2}; \mathcal{F}_2)\,;\\
&\mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_1}; \mathcal{F}_1) = \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_2}; \mathcal{F}_2)\,.
\end{aligned} \tag{3.88}$$

Покладемо:

$$\mathfrak{Q}_\mathfrak{l} := \mathsf{BG}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_1}; \mathcal{F}_1) = \mathsf{BG}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_2}; \mathcal{F}_2) \quad (\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})). \tag{3.89}$$

Тоді, $\quad \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{Q}_\mathfrak{l}) = \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_1}; \mathcal{F}_1) = \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_2}; \mathcal{F}_2) \quad (\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}))$.
Отже, $k_\mathfrak{l}$ є відображенням з $\mathfrak{Bs}(\mathfrak{l})$ в $\mathbf{Zk}\,(\mathfrak{Q}_\mathfrak{l})$ (для будь-якої системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$). Тому, за означенням 2.2 (пункт 2), пара:

$$\mathfrak{C} = (\mathcal{Z}, ((\mathfrak{Q}_\mathfrak{l}, k_\mathfrak{l}) \mid \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})))$$

є кінематичною множиною. Для цієї кінематичної множини, враховуючи позначення, прийняті в параграфі 2.2.4 та рівності (3.79), (3.80), (3.81), (3.84), (3.82) отримуємо:

$$\mathcal{I}nd\,(\mathfrak{C}) = \mathcal{A} = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_2)\,; \tag{3.90}$$

$$\mathbb{BE}(\mathfrak{C}) = \mathcal{Z}; \quad \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}) = \{(\alpha, \mathcal{B}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}\,; \tag{3.91}$$

$$\mathbb{Bs}(\mathfrak{l}) = \mathbb{Bs}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_1}) \sqcup \mathbb{Bs}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_2}) \quad (\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}))\,; \tag{3.92}$$

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{Bs}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{Bs}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_1}) \sqcup \mathfrak{Bs}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_2}) \quad (\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}))\,;\\
&\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}) = \mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_1}) = \mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_2}) \quad (\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}))\,.
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Оскільки (за доведеним вище) мінлива множина $\mathcal{Z}$ є чітко видимою, то, згідно з пунктом **г)** параграфу 2.2.4) кінематична множина $\mathfrak{C}$ також є чітко видимою. При цьому, враховуючи позначення, прийняті в параграфі 2.2.4 та рівність (3.86), для довільних $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ і $\omega \in \mathbb{Bs}(\mathfrak{l})$ маємо:

$$\langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\ \mathfrak{C}\rangle\,\omega = \begin{cases} \langle !\,\mathfrak{m}\,\lfloor_{\mathcal{F}_1} \leftarrow \mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_1},\ \mathcal{F}_1\rangle\,\omega, & \omega \in \mathbb{Bs}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_1})\\ \langle !\,\mathfrak{m}\,\lfloor_{\mathcal{F}_2} \leftarrow \mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_2},\ \mathcal{F}_2\rangle\,\omega, & \omega \in \mathbb{Bs}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_2})\,. \end{cases} \tag{3.94}$$

Далі, використовуючи рівності (3.87), (3.88), (3.89) (3.93), і враховуючи позначення, прийняті в параграфі 2.2.4 та позначення (2.4), для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ отримуємо:

$$\mathsf{BG}(\mathfrak{l}; \mathfrak{C}) = \mathfrak{Q}_\mathfrak{l} = \mathsf{BG}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_1}; \mathcal{F}_1) = \mathsf{BG}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_2}; \mathcal{F}_2)\,; \tag{3.95}$$

$$\mathbf{Zk}(\mathfrak{l}; \mathfrak{C}) = \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{Q}_\mathfrak{l}) = \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_1}; \mathcal{F}_1) = \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_2}; \mathcal{F}_2)\,; \tag{3.96}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}k(\mathfrak{l}; \mathfrak{C}) &= \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{l}; \mathfrak{C}) = \mathbf{Tm}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_1}) \times \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_1}; \mathcal{F}_1) =\\
&= \mathbf{Tm}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_2}) \times \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_2}; \mathcal{F}_2) = \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_1}; \mathcal{F}_1) = \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_2}; \mathcal{F}_2)\,;
\end{aligned} \tag{3.97}$$

$$\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\left(x;\mathfrak{C}\right)=k_{\mathfrak{l}}(x)=\begin{cases}\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}}\left(x;\mathcal{F}_1\right), & x\in\mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right)\\ \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2}}\left(x,\mathcal{F}_2\right), & x\in\mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2}\right)\end{cases},\ x\in\mathfrak{Bs}(\mathfrak{l});$$

$$\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\omega;\,\mathfrak{C}\right)=\left(\mathsf{tm}\left(\omega\right),\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\left(\mathsf{bs}\left(\omega\right);\mathfrak{C}\right)\right)=$$

$$=\begin{cases}\left(\mathsf{tm}\left(\omega\right),\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}}\left(\mathsf{bs}\left(\omega\right);\mathcal{F}_1\right)\right), & \mathsf{bs}\left(\omega\right)\in\mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right)\\ \left(\mathsf{tm}\left(\omega\right),\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2}}\left(\mathsf{bs}\left(\omega\right);\mathcal{F}_2\right)\right), & \mathsf{bs}\left(\omega\right)\in\mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2}\right).\end{cases}\tag{3.98}$$

У випадку $\omega\in\mathbb{Bs}\left(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right)$, згідно з властивістю 1.60(9), маємо $\mathsf{bs}\left(\omega\right)\in\mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right)$. Отже, в цьому випадку, згідно (3.98), одержуємо:

$$\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\omega;\,\mathfrak{C}\right)=\left(\mathsf{tm}\left(\omega\right),\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}}\left(\mathsf{bs}\left(\omega\right);\mathcal{F}_1\right)\right)=\mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\rangle}\left(\omega;\mathcal{F}_1\right).$$

Аналогічно, у випадку $\omega\in\mathbb{Bs}\left(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2}\right)$ отримуємо, $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\omega;\,\mathfrak{C}\right)=\mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2}\right\rangle}\left(\omega;\mathcal{F}_2\right)$. Отже, враховуючи (3.92), для довільних $\mathfrak{l}\in\mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$ і $\omega\in\mathbb{Bs}(\mathfrak{l})$ маємо:

$$\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\omega;\,\mathfrak{C}\right)=\begin{cases}\mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\rangle}\left(\omega;\mathcal{F}_1\right), & \omega\in\mathbb{Bs}\left(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right)\\ \mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2}\right\rangle}\left(\omega;\mathcal{F}_2\right), & \omega\in\mathbb{Bs}\left(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2}\right).\end{cases}\tag{3.99}$$

Використовуючи формули (3.99), (3.94) і означення 2.6 (пункт 1) для довільних $\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$ і $\omega\in\mathbb{Bs}(\mathfrak{l})$ отримуємо:

$$\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}\left(\omega,\mathfrak{C}\right)=\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\rangle}(\langle!\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l},\mathfrak{C}\rangle\,\omega;\,\mathfrak{C})=$$

$$=\begin{cases}\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\rangle}\left(\langle!\,\mathfrak{m}\lfloor_{\mathcal{F}_1}\leftarrow\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1},\,\mathcal{F}_1\rangle\,\omega;\,\mathfrak{C}\right), & \omega\in\mathbb{Bs}\left(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right)\\ \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\rangle}\left(\langle!\,\mathfrak{m}\lfloor_{\mathcal{F}_2}\leftarrow\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2},\,\mathcal{F}_2\rangle\,\omega;\,\mathfrak{C}\right), & \omega\in\mathbb{Bs}\left(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2}\right)\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{m}\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\rangle}\left(\langle!\,\mathfrak{m}\lfloor_{\mathcal{F}_1}\leftarrow\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1},\,\mathcal{F}_1\rangle\,\omega;\,\mathcal{F}_1\right), & \omega\in\mathbb{Bs}\left(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right)\\ \mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{m}\lfloor_{\mathcal{F}_2}\right\rangle}\left(\langle!\,\mathfrak{m}\lfloor_{\mathcal{F}_2}\leftarrow\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2},\,\mathcal{F}_2\rangle\,\omega;\,\mathcal{F}_2\right), & \omega\in\mathbb{Bs}\left(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2}\right)\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{m}\lfloor_{\mathcal{F}_1}\leftarrow\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\rangle}\left(\omega;\,\mathcal{F}_1\right), & \omega\in\mathbb{Bs}\left(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right)\\ \mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{m}\lfloor_{\mathcal{F}_2}\leftarrow\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2}\right\rangle}\left(\omega;\,\mathcal{F}_2\right), & \omega\in\mathbb{Bs}\left(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2}\right).\end{cases}$$

Звідси, використовуючи формулу (3.1), маємо:

$$\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}\left(\omega,\mathfrak{C}\right)=\begin{cases}\left[\mathfrak{m}\lfloor_{\mathcal{F}_1}\leftarrow\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1},\,\mathcal{F}_1\right]\mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\rangle}\left(\omega;\mathcal{F}_1\right), & \omega\in\mathbb{Bs}\left(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right)\\ \left[\mathfrak{m}\lfloor_{\mathcal{F}_2}\leftarrow\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2},\,\mathcal{F}_2\right]\mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2}\right\rangle}\left(\omega;\mathcal{F}_2\right), & \omega\in\mathbb{Bs}\left(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2}\right).\end{cases}\tag{3.100}$$

Покладемо:

$$\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}:=\left[\mathfrak{m}\lfloor_{\mathcal{F}_1}\leftarrow\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1},\,\mathcal{F}_1\right],\quad\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right).$$

Нехай $\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$ — довільні системи відліку $\mathfrak{C}$. Оскільки $\mathcal{F}_1\left[\equiv\right]\mathcal{F}_2$, то, враховуючи означення 3.12, отримуємо наступну (еквівалентну) формулу для зображення

відображення $\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}$:

$$\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}} = [\mathfrak{m} \lfloor_{\mathcal{F}_1} \leftarrow \mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_1}, \mathcal{F}_1] = \left[\mathbf{lk}_{\mathtt{ind}(\mathfrak{m})}(\mathcal{F}_1) \leftarrow \mathbf{lk}_{\mathtt{ind}(\mathfrak{l})}(\mathcal{F}_1), \mathcal{F}_1\right] = \\ = \left[\mathbf{lk}_{\mathtt{ind}(\mathfrak{m})}(\mathcal{F}_2) \leftarrow \mathbf{lk}_{\mathtt{ind}(\mathfrak{l})}(\mathcal{F}_2), \mathcal{F}_2\right] = [\mathfrak{m} \lfloor_{\mathcal{F}_2} \leftarrow \mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_2}, \mathcal{F}_2]. \tag{3.101}$$

Звідси, застосовуючи формули (3.100), (3.99) для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ отримуємо рівність:

$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle}(\omega, \mathfrak{C}) = \widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega; \mathfrak{C})\right),$$

де $\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}} : \mathbb{M}k(\mathfrak{l}; \mathfrak{C}) \mapsto \mathbb{M}k(\mathfrak{m}; \mathfrak{C})$ є бієктивним відображенням з $\mathbb{M}k(\mathfrak{l}; \mathfrak{C})$ в $\mathbb{M}k(\mathfrak{m}; \mathfrak{C})$ (згідно з (3.101), (3.97)). І, використовуючи означення 2.6 (пункт 4), та рівності (3.3)–(3.4) легко переконатись, що сім'я відображень $\left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}} \mid \mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})\right)$ є універсальним перетворенням координат для кінематичної множини $\mathfrak{C}$. Тобто пара:

$$\mathcal{F} = \left(\mathfrak{C}, \left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}} \mid \mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})\right)\right) \tag{3.102}$$

є універсальною кінематикою. При цьому універсальне перетворення координат для кінематики $\mathcal{F}$ задається формулою:

$$[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}] = [\mathfrak{m} \lfloor_{\mathcal{F}_1} \leftarrow \mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_1}, \mathcal{F}_1] = \\ = [\mathfrak{m} \lfloor_{\mathcal{F}_2} \leftarrow \mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_2}, \mathcal{F}_2], \quad \mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F}) = \mathcal{L}k(\mathfrak{C}). \tag{3.103}$$

Рівності (3.90)–(3.99) для $\mathcal{F}$ також залишаються справедливими (з заміною символу $\mathfrak{C}$ на $\mathcal{F}$).

III. Доведемо, що універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є диз'юнктним еволюційним об'єднанням кінематик $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$.

1. Спочатку доведемо, що $\mathcal{F}\,[\equiv]\,\mathcal{F}_1$.

1.а) Враховуючи рівність (3.90), отримуємо: $\mathcal{I}nd(\mathcal{F}) = \mathcal{A} = \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_1)$.

1.б) Нехай, $\alpha \in \mathcal{I}nd(\mathcal{F}) = \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_1)$. Тоді, використовуючи формули (3.93), (3.95) та означення 3.43, маємо:

$$\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})) = \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}) \lfloor_{\mathcal{F}_1}) = \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1))$$
$$\mathsf{BG}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}); \mathcal{F}) = \mathsf{BG}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}) \lfloor_{\mathcal{F}_1}; \mathcal{F}_1) = \mathsf{BG}(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1); \mathcal{F}_1).$$

1.в) Для довільних $\alpha, \beta \in \mathcal{I}nd(\mathcal{F}) = \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_1)$, згідно (3.103), маємо:

$$[\mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}), \mathcal{F}] = [\mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}) \lfloor_{\mathcal{F}_1} \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}) \lfloor_{\mathcal{F}_1}, \mathcal{F}_1] = \\ = [\mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_1) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1), \mathcal{F}_1].$$

З підпунктів **1.а**)–**1.в**), за означенням 3.12 випливає, що $\mathcal{F}\,[\equiv]\,\mathcal{F}_1$, тобто що $\mathcal{F}\,[\equiv]\,\mathcal{F}_1\,[\equiv]\,\mathcal{F}_2$.

2. Нехай, $\mathfrak{l} = (\alpha, \mathcal{B}_\alpha) \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F}) = \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ — **довільна система відліку** $\mathcal{F}$ (де $\alpha \in \mathcal{A} = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F})$). Тоді, згідно (3.74), отримуємо:

$$\mathsf{BE}(\mathfrak{l}) = \mathcal{B}_\alpha = \mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_1)) \overset{\leftarrow}{\cup} \mathsf{BE}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}_2)) = \mathsf{BE}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_1}) \overset{\leftarrow}{\cup} \mathsf{BE}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_2})\,.$$

3. Нехай, $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ і $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$. Тоді, згідно (3.94) та (3.99), одержуємо:

$$\langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathcal{F}\rangle\,\omega = \begin{cases} \langle !\,\mathfrak{m}\,\lfloor_{\mathcal{F}_1} \leftarrow \mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_1},\, \mathcal{F}_1\rangle\,\omega, & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_1}) \\ \langle !\,\mathfrak{m}\,\lfloor_{\mathcal{F}_2} \leftarrow \mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_2},\, \mathcal{F}_2\rangle\,\omega, & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_2})\,. \end{cases}$$

$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}\,(\omega;\, \mathcal{F}) = \begin{cases} \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1} \rangle}\,(\omega; \mathcal{F}_1)\,, & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_1}) \\ \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2} \rangle}\,(\omega; \mathcal{F}_2)\,, & \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l}\,\lfloor_{\mathcal{F}_2})\,. \end{cases}$$

З тверджень, доведених вище в пунктах 1,2,3 та означення 3.46 випливає, що універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є диз'юнктним еволюційним об'єднанням універсальних кінематик $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$, тобто $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \overset{\leftarrow}{\sqcup} \mathcal{F}_2$. □

Комбінуючи теорему 3.51 та наслідок 3.49, отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 3.52. *Нехай, $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ — диз'юнктні універсальні кінематики. Тоді існують еволюційні об'єднання $\mathcal{F}_1 \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{F}_2$ та $\mathcal{F}_1 \overset{\leftarrow}{\sqcup} \mathcal{F}_2$, причому $\mathcal{F}_1 \overset{\leftarrow}{\cup} \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1 \overset{\leftarrow}{\sqcup} \mathcal{F}_2$.*

3.7.3. Про еволюційно видимі універсальні кінематики та їхнє диз'юнктне еволюційне об'єднання.

Означення 1.143 (об'єднаних долею елементарно-часових станів в системі відліку мінливої множини) можна легко поширити на елементарно-часові стани в системах відліку кінематичної множини або універсальної кінематики.

Означення 3.53. Нехай $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Y})$, де $\mathcal{Y}$ — довільна мінлива множина або довільна кінематична множина або довільна універсальна кінематика. Будемо говорити, що елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ **об'єднані долею в системі відліку** $\mathfrak{l}$, якщо вони об'єднані долею в базовій мінливій множині $\mathfrak{l}\hat{} = \mathsf{BE}(\mathfrak{l})$, тобто якщо виконується хоч одна з умов $\omega_2 \underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow} \omega_1$ або $\omega_1 \underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow} \omega_2$. (Див., також, твердження 1.74, пункт 2)).

Означення 3.54. 1. Мінливу множину $\mathcal{Z}$ будемо називати **еволюційно видимою**, якщо:

(а) $\mathcal{Z}$ є чітко видимою;

(б) Для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ і для довільних об'єднаних долею в системі відліку $\mathfrak{l}$ елементарно-часових станів $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ таких, що $\mathsf{tm}\,(\langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle\,\omega_1) \neq \mathsf{tm}\,(\langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle\,\omega_2)$ елементарно-часові стани $\langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle\,\omega_1$ та $\langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle\,\omega_2$ є об'єднані долею в $\mathfrak{m}$.

2. Кінематичну множину $\mathfrak{C}$ (універсальну кінематику $\mathcal{F}$) будемо називати **еволюційно видимою**, якщо еволюційно видимою є мінлива множина $\mathbb{BE}(\mathfrak{C})$ ($\mathbb{BE}(\mathcal{F})$) відповідно.

Безпосередньо з означення 3.54, враховуючи систему позначень для кінематичних множин (див. параграф 2.2.4), випливає наступне твердження.

Твердження 3.55. *Кінематична множина $\mathfrak{C}$ є еволюційно видимою тоді і тільки тоді, коли виконуються умови (a) та (b) першого пункту означення 3.54 (із заміною символу $\mathcal{Z}$ на символ $\mathfrak{C}$).*

Нехай, $\mathcal{F} = \left(\mathfrak{C}, \overleftarrow{\mathcal{Q}}\right)$ — універсальна кінематика. Тоді, за означенням 3.1, кінематична множина $\mathfrak{C}$, а отже і мінлива множина $\mathbb{BE}(\mathcal{F}) = \mathbb{BE}(\mathfrak{C})$ є чітко видимою. Тому, справедливе наступне твердження:

Твердження 3.56. *Універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є еволюційно видимою тоді і тільки тоді, коли виконується умова (b) першого пункту означення 3.54 (із заміною символу $\mathcal{Z}$ на символ $\mathcal{F}$).*

Твердження 3.57. *Нехай, $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$ — еволюційний мультипроектор для базової мінливої множини $\mathcal{B}$. Тоді мінлива множина $\mathcal{Z}\mathsf{im}[\mathfrak{P}, \mathcal{B}]$ є еволюційно видимою.*

Доведення. Нехай, $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$, де — еволюційний мультипроектор для $\mathcal{B}$. Покладемо:

$$\mathcal{Z} := \mathcal{Z}\mathsf{im}[\mathfrak{P}, \mathcal{B}].$$

(a) Згідно з наслідком 1.169, мінлива множина $\mathcal{Z}$ є чітко видимою.

(b) Згідно з властивістю 1.145(1), маємо $\mathcal{L}k(\mathcal{Z}) = ((\alpha, U_\alpha[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \mid \alpha \in \mathcal{A})$. Розглянемо довільні дві системи відліку $\mathfrak{l} = (\alpha, U_\alpha[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$, $\mathfrak{m} = (\beta, U_\beta[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\beta]) \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$, де $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$. Нехай, елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ об'єднані долею в $\mathfrak{l}$ і $\mathsf{tm}(\langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle\,\omega_1) \neq \mathsf{tm}(\langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle\,\omega_2)$. Зрозуміло, що тоді, $\omega_1 \neq \omega_2$. Оскільки ω_1, ω_2 — об'єднані долею в системі відліку $\mathfrak{l}$, то мусить виконуватись хоча б одне із співвідношень, $\omega_2 \underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow} \omega_1$ або $\omega_1 \underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow} \omega_2$. Проте, оскільки $\omega_1 \neq \omega_2$, то, за властивістю 1.60(7), в обох випадках ($\omega_2 \underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow} \omega_1$ і $\omega_1 \underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow} \omega_2$) отримуємо $\mathsf{tm}(\omega_1) \neq \mathsf{tm}(\omega_2)$. Таким чином, ω_1, ω_2 — об'єднані долею в системі відліку $\mathfrak{l}$ і $\mathsf{tm}(\omega_1) \neq \mathsf{tm}(\omega_2)$. Тому, згідно з властивістю 1.145(4) існують об'єднані долею в $\mathcal{B}$ елементарно-часові стани $\omega_1', \omega_2' \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ такі, що $\omega_1 = U_\alpha(\omega_1')$, $\omega_2 = U_\alpha(\omega_2')$. За означенням 1.138, відображення U_α є ін'єктивним відображенням (бієкцією з $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ на множину $\mathfrak{R}(U_\alpha)$). Отже, можна записати, $\omega_1' = U_\alpha^{[-1]}(\omega_1)$, $\omega_2' = U_\alpha^{[-1]}(\omega_2)$, де $U_\alpha^{[-1]}$ — відображення, обернене до U_α. Звідси, використовуючи наслідок 1.188, одержуємо:

$$\langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle\,\omega_1 = U_\beta\left(U_\alpha^{[-1]}(\omega_1)\right) = U_\beta(\omega_1'); \quad \langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle\,\omega_2 = U_\beta(\omega_2'),$$

де, як було показано вище, елементарно-часові стани $\omega_1', \omega_2' \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ об'єднані долею в $\mathcal{B}$ і $\mathsf{tm}\left(\langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega_1\right) \neq \mathsf{tm}\left(\langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega_2\right)$. Тому, за властивістю 1.145(4), елементарно-часові стани $\langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega_1$ і $\langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega_2$ є об'єднаними долею в системі відліку $\mathfrak{m}$.

З результатів, встановлених в пунктах (a) і (b), за означенням 3.54, випливає, що мінлива множина $\mathcal{Z}$ є еволюційно видимою. □

Згідно з пунктом 2 означення 3.54, кінематична множина $\mathfrak{C}$ (універсальна кінематика $\mathcal{F}$) є еволюційно видимою тоді і тільки тоді, коли еволюційно видимою є мінлива множина $\mathbb{BE}\left(\mathfrak{C}\right)$ ($\mathbb{BE}(\mathcal{F})$) відповідно. Тому, використовуючи теореми про мультиобраз для кінематичних множин та універсальних кінематик (теореми 2.14 та 3.5), отримуємо наступні наслідки з твердження 3.57:

Наслідок 3.58. *Нехай, $\mathfrak{P}$ — кінематичний мультипроектор для базової мінливої множини $\mathcal{B}$. Тоді кінематична множина $\mathfrak{Kim}\left[\mathfrak{P}, \mathcal{B}\right]$ є еволюційно видимою.*

Наслідок 3.59. *Нехай, $\mathfrak{P}$ — універсальний кінематичний мультипроектор для базової кінематичної множини $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$. Тоді універсальна кінематика $\mathfrak{Ku}\left[\mathfrak{P}, \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right]$ є еволюційно видимою.*

З наслідків 3.58 та 3.59 випливає, що всі кінематичні множини і універсальні кінематики, пов'язані із спеціальною теорією відносності та її тахіоновими розширеннями, введені в підрозділах 2.5, 2.6 та 3.4 є еволюційно видимими. Також еволюційно видимими є і тахіонові кінематики в сенсі M. Hassani, розглянуті в додатку Б.

Теорема 3.60. *Якщо диз'юнктні універсальні кінематики $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ є еволюційно видимими, то універсальна кінематика $\mathcal{F}_1 \overset{\leftarrow}{\sqcup} \mathcal{F}_2$ також є еволюційно видимою.*

Доведення. Нехай, $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ — диз'юнктні еволюційно видимі універсальні кінематики. Покладемо:

$$\mathcal{F} := \mathcal{F}_1 \overset{\leftarrow}{\sqcup} \mathcal{F}_2.$$

Розглянемо довільні системи відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$. За означенням 3.46, маємо, $\mathsf{BE}(\mathfrak{l}) = \mathsf{BE}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right) \overset{\leftarrow}{\cup} \mathsf{BE}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right)$. Отже, використовуючи наслідок 1.108, отримуємо:

$$\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}} = \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathsf{BE}(\mathfrak{l})}{\longleftarrow}} = \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathsf{BE}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}\right)}{\longleftarrow}} \cup \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathsf{BE}\left(\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}\right)}{\longleftarrow}} = \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_1}}{\longleftarrow}} \cup \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{l}\restriction_{\mathcal{F}_2}}{\longleftarrow}}. \tag{3.104}$$

Припустимо, що елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}\right)$ — об'єднані долею в системі відліку $\mathfrak{l}$ і:

$$\mathsf{tm}\left(\langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega_1\right) \neq \mathsf{tm}\left(\langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega_2\right). \tag{3.105}$$

Оскільки ω_1 і ω_2 — об'єднані долею в $\mathfrak{l}$, то повинна виконуватись хоч одна з умов:

$$\omega_2 \underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow} \omega_1 \quad \text{або} \quad \omega_1 \underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow} \omega_2. \tag{3.106}$$

На мові теорії множин сукупність умов (3.106) переписується у вигляді, $\{(\omega_2,\omega_1),(\omega_1,\omega_2)\}\cap\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}}\neq\emptyset$. Звідси, в силу (3.104), випливає, що мусить виконуватись хоч одна з умов:

$$\{(\omega_2,\omega_1),(\omega_1,\omega_2)\}\cap\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}}{\longleftarrow}}\neq\emptyset \tag{3.107}$$

$$\{(\omega_2,\omega_1),(\omega_1,\omega_2)\}\cap\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_2}}{\longleftarrow}}\neq\emptyset. \tag{3.108}$$

Спочатку розглянемо випадок, коли виконується умова (3.107). В цьому випадку мамо, $\omega_1,\omega_2\in\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1})$ і ω_1 та ω_2 — об'єднані долею в системі відліку $\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}\in\mathcal{L}k(\mathcal{F}_1)$. Оскільки $\omega_1,\omega_2\in\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1})$, то, за пунктом 3 означення 3.46, маємо:

$$\langle!\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l},\mathcal{F}\rangle\,\omega_i=\langle!\,\mathfrak{m}\lfloor_{\mathcal{F}_1}\leftarrow\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1},\mathcal{F}_1\rangle\,\omega_i,\quad i\in\overline{1,2}. \tag{3.109}$$

Отже, згідно з (3.105), отримуємо, $\mathsf{tm}(\langle!\,\mathfrak{m}\lfloor_{\mathcal{F}_1}\leftarrow\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1},\mathcal{F}_1\rangle\,\omega_1)\neq\mathsf{tm}(\langle!\,\mathfrak{m}\lfloor_{\mathcal{F}_1}\leftarrow\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1},\mathcal{F}_1\rangle\,\omega_2)$. Звідси (оскільки ω_1,ω_2 об'єднані долею в системі відліку $\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}\in\mathcal{L}k(\mathcal{F}_1)$ і універсальна кінематика $\mathcal{F}_1$ є еволюційно видимою) випливає, що елементарно-часові стани $\langle!\,\mathfrak{m}\lfloor_{\mathcal{F}_1}\leftarrow\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1},\mathcal{F}_1\rangle\,\omega_1$ і $\langle!\,\mathfrak{m}\lfloor_{\mathcal{F}_1}\leftarrow\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1},\mathcal{F}_1\rangle\,\omega_2$ об'єднані долею в системі відліку $\mathfrak{m}\lfloor_{\mathcal{F}_1}\in\mathcal{L}k(\mathcal{F}_1)$ (за означенням 3.54). Отже:

$$\begin{aligned}&\{(\langle!\,\mathfrak{m}\lfloor_{\mathcal{F}_1}\leftarrow\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1},\mathcal{F}_1\rangle\,\omega_1,\langle!\,\mathfrak{m}\lfloor_{\mathcal{F}_1}\leftarrow\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1},\mathcal{F}_1\rangle\,\omega_2),\\&\quad(\langle!\,\mathfrak{m}\lfloor_{\mathcal{F}_1}\leftarrow\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1},\mathcal{F}_1\rangle\,\omega_2,\langle!\,\mathfrak{m}\lfloor_{\mathcal{F}_1}\leftarrow\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1},\mathcal{F}_1\rangle\,\omega_1)\}\cap\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{m}\lfloor_{\mathcal{F}_1}}{\longleftarrow}}\neq\emptyset.\end{aligned}$$

Звідси, застосовуючи рівність (3.104) до системи відліку $\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathcal{F})$, а також використовуючи рівність (3.109), отримуємо:

$$\begin{aligned}&\{(\langle!\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l},\mathcal{F}\rangle\,\omega_1,\langle!\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l},\mathcal{F}\rangle\,\omega_2),\\&\quad(\langle!\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l},\mathcal{F}\rangle\,\omega_2,\langle!\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l},\mathcal{F}\rangle\,\omega_1)\}\cap\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{m}}{\leftarrow}}\neq\emptyset.\end{aligned} \tag{3.110}$$

Аналогічно доводиться, що співвідношення (3.110) виконується і у випадку (3.108). Таким чином, в обох випадках елементарно-часові стани $\langle!\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l},\mathcal{F}\rangle\,\omega_1$ і $\langle!\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l},\mathcal{F}\rangle\,\omega_2$ об'єднані долею в системі відліку $\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathcal{F})$. Враховуючи, що системи відліку $\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathcal{F})$ і об'єднані долею в $\mathfrak{l}$ елементарно-часові стани ω_1,ω_2 вибрано довільним чином, за означенням 3.54 і твердженням 3.56, отримуємо, що універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є еволюційно видимою. □

Основні результати підрозділу 3.7 були опубліковані в [137, розділ 8]. Результати представлені в параграфі 3.7.1 (а саме загальне означення еволюційного об'єднання універсальних кінематик) було сформульоване в роботі [138, розділ 2].

3.8. Теорема про еволюційне розширення для універсальних кінематик

Нехай $\mathcal{F}$ — довільна універсальна кінематика і $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ довільна система відліку $\mathcal{F}$. Для довільної мінливої системи $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ покладемо:

$$\mathfrak{tr}\mathfrak{j}_{\mathfrak{l}}\,[A;\,\mathcal{F}] := \mathfrak{tr}\mathfrak{j}_{\mathcal{F}\restriction\mathfrak{l}}\,[A] = \left\{\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega)\,|\,\omega \in A\right\} \tag{3.111}$$

Теорема 3.61. *Нехай, $\mathcal{F}$ — універсальна кінематика, $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ — довільна система відліку $\mathcal{F}$ і $\mathcal{R}$ — система абстрактних траєкторій з $\mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathfrak{l})$ в M така, що $M \subseteq \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l})$. Тоді:*

1. *Існує супереволюційне розширення $\mathcal{F}_1 \underset{\leftarrow}{\sqsupset} \mathcal{F}$ універсальної кінематики $\mathcal{F}$ таке, що всі траєкторії $r \in \mathcal{R}$ є траєкторіями ліній долі [3.8] системи відліку $\mathfrak{l} \downharpoonleft \mathcal{F}_1$ (тобто $\forall\, r \in \mathcal{R}\ \exists\, L \in \mathbb{L}d\,(\mathfrak{l} \downharpoonleft \mathcal{F}_1)\,(r = \mathfrak{tr}\mathfrak{j}_{\mathfrak{l}\downharpoonleft\mathcal{F}_1}\,[L, \mathcal{F}_1])$).*
2. *Якщо, додатково, універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є еволюційно видимою, то існує еволюційно видиме супереволюційне розширення $\mathcal{F}_1 \underset{\leftarrow}{\sqsupset} \mathcal{F}$ універсальної кінематики $\mathcal{F}$, таке, що $\forall\, r \in \mathcal{R}\ \exists\, L \in \mathbb{L}d\,(\mathfrak{l} \downharpoonleft \mathcal{F}_1)\,(r = \mathfrak{tr}\mathfrak{j}_{\mathfrak{l}\downharpoonleft\mathcal{F}_1}\,[L, \mathcal{F}_1])$.*

Доведення теореми 3.61 викладено в додатку B. □

Основні результати підрозділу 3.8 були опубліковані в [138].

3.9. Про часонезворотність універсальних кінематик

3.9.1. Вступні зауваження. Загальновідомо, що в середовищі фізиків поширена думка, про те, що гіпотеза про існування тахіонів веде до часових парадоксів, пов'язаних з порушенням принципу причинності, тобто з наявністю теоретичної можливості змінити власне минуле. Подібна думка з'явилась ще в роботах А. Ейнштейна [139] та Р. Толмана [140, стор. 54–55] і повторюється в багатьох більш сучасних статтях, монографіях та підручниках (див., наприклад, [141–150]). Зокрема в роботі [150] на фізичному рівні строгості детально проаналізовані умови виникнення часових парадоксів, пов'язаних з порушенням принципу причинності. На жаль, в роботі [150] дозволеним є лише надсвітловий рух для частинок або сигналів, а надсвітловий рух для систем відліку — заборонений. Ця обставина не дає можливості

[3.8] Нагадаємо, що згідно з означенням 1.90, лінії долі $\mathfrak{l}$ є мінливими системами, що генерують елементарні процеси в системі відліку $\mathfrak{l}$.

прив'язати до тахіонової частинки власну систему відліку і власний час, а отже, коректно визначити справжній напрямок її руху. В роботі [151] для тахіонових частинок аксіоматично вводяться власні системи відліку у випадку, коли простір геометричних змінних є одновимірним, а у випадку, більшої розмірності простору геометричних змінних до тахіонових частинок прив'язується лише власний час. Такий підхід дозволяє більш коректно визначити справжній напрямок руху тахіонової частинки, а отже отримати більш точні результати. Зокрема в роботі [151] показано, що гіпотеза про існування матеріальних об'єктів, що рухаються з надсвітловими швидкостями, взагалі кажучи, не приводить до до часових парадоксів, пов'язаних з порушенням принципу причинності, тобто до можливості повернення у власне минуле. Слід зауважити, що спроби розв'язання зазначених часових парадоксів на фізичному рівні строгості робились і в більш ранніх роботах (див., напр. [53, 152–157]).

Нагадаємо, що розділі 3.4 даної роботи, базуючись на узагальнених перетвореннях Лоренца в сенсі E. Recami, B. Ольховського та R. Goldoni, побудовано математично строгі моделі кінематик, які дозволяють надсвітловий рух не лише для частинок, але і для інерційних систем відліку в гільбертовому просторі довільної розмірності (див. кінематики $\mathfrak{UPT}_0(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$ та $\mathfrak{UPT}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$ в формулах (3.38)). В той же час, в роботі [151] надсвітлові системи відліку вводяться лише для випадку, коли простір геометричних змінних є одновимірним. Крім того, можна довести, що аксіома "AxSameFuture" (див. [151, subsection 2.1]), на основі якої автори цієї роботи будують свої міркування, для кінематик типу $\mathfrak{UPT}_0(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$ та $\mathfrak{UPT}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$ не виконується. Отже, ці кінематики неможливо проаналізувати на часонезворотність (тобто відсутність можливості повернення у власне минуле), використовуючи математичний апарат роботи [151]. Саме тому, в даному підрозділі побудовано інший, абстрактний, математичний апарат, завдяки якому встановлено достатні ознаки часозворотності і часонезворотності для універсальних кінематик і отримано розв'язання поставленої вище задачі.

3.9.2. Елементарно-часові стани і мінливі системи чітко видимих мінливих та кінематичних множин.

Означення 3.62. 1. Множину $\mathcal{Z}$ будемо називати об'єктом ***типу чітко видимої мінливої множини*** (скорочено — ***чітко видимим об'єктом***, або ***чв-об'єктом***), якщо $\mathcal{Z}$ є чітко видимою мінливою множиною, або чітко видимою кінематичною множиною або універсальною кінематикою.

2. Нехай, $\mathcal{Z}$ — довільний чв-об'єкт, $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ — довільна система відліку $\mathcal{Z}$ і $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ — довільний елементарно-часовий стан в системі відліку $\mathfrak{l}$. Множину:

$$\omega^{\{\mathfrak{l},\mathcal{Z}\}} = \{(\mathfrak{m}, \langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega) \mid \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})\},$$

(де $(\mathfrak{m}, \langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega)$ — упорядкована пара) називатимемо **елементарно-часовим станом чв-об'єкта** $\mathcal{Z}$, породженим ω у системі відліку $\mathfrak{l}$.

Зауваження 3.63. У випадку, коли наперед відомо, про який чв-об'єкт йде мова, замість позначення $\omega^{\{\mathfrak{l},\mathcal{Z}\}}$ будемо використовувати позначення $\omega^{\{\mathfrak{l}\}}$.

Твердження 3.64. *Нехай $\mathcal{Z}$ — довільний чв-об'єкт і $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$. Тоді для елементарно-часових станів $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$, $\omega_1 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m})$ наступні твердження рівносильні:*

1) $\omega^{\{\mathfrak{l}\}} = \omega_1^{\{\mathfrak{m}\}}$; ***2)*** $\omega_1 = \langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega$.

Доведення. **1.** Спочатку доведемо, що з твердження 2) випливає твердження 1). Нехай $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$, $\omega_1 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m})$ і $\omega_1 = \langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega$. Тоді, використовуючи означення 3.62 та властивість 1.187(3), отримуємо:

$$\begin{aligned}
\omega_1^{\{\mathfrak{m}\}} &= \{(\mathfrak{p}, \langle ! \, \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \, \omega_1) \mid \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})\} = \\
&= \{(\mathfrak{p}, \langle ! \, \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \, \langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega) \mid \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})\} = \\
&= \{(\mathfrak{p}, \langle ! \, \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega) \mid \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})\} = \omega^{\{\mathfrak{l}\}}.
\end{aligned}$$

2. Навпаки, нехай $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$, $\omega_1 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m})$ і $\omega^{\{\mathfrak{l}\}} = \omega_1^{\{\mathfrak{m}\}}$. Тоді, за означенням 3.62, маємо:

$$\{(\mathfrak{p}, \langle ! \, \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega) \mid \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})\} = \{(\mathfrak{p}, \langle ! \, \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \, \omega_1) \mid \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})\}. \tag{3.112}$$

Згідно з властивістю 1.187(1), $\langle ! \, \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega = \omega$. Отже, згідно (3.112), для елемента $(\mathfrak{l}, \omega) = (\mathfrak{l}, \langle ! \, \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega) \in \{(\mathfrak{p}, \langle ! \, \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega) \mid \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})\}$ мусить виконуватись співвідношення $(\mathfrak{l}, \omega) \in \{(\mathfrak{p}, \langle ! \, \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \, \omega_1) \mid \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})\}$. Тому існує система відліку $\mathfrak{p}_0 \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ така, що $(\mathfrak{l}, \omega) = (\mathfrak{p}_0, \langle ! \, \mathfrak{p}_0 \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \, \omega_1)$. Звідси отримуємо $\mathfrak{l} = \mathfrak{p}_0$, а також, $\omega = \langle ! \, \mathfrak{p}_0 \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \, \omega_1 = \langle ! \, \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \, \omega_1$. Тому, на основі властивостей 1.187(1,3), робимо висновок, що $\omega_1 = \langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \, \omega_1 = \langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \langle ! \, \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \, \omega_1 = \langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega$. □

З твердження 3.64 випливає такий наслідок.

Наслідок 3.65. *Нехай $\mathcal{Z}$ — довільний чв-об'єкт. Тоді для довільних $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ і $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ справедлива рівність:*

$$\omega^{\{\mathfrak{l}\}} = (\langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega)^{\{\mathfrak{m}\}}. \tag{3.113}$$

Твердження 3.66. *Нехай $\mathcal{Z}$ — довільний чв-об'єкт. Тоді множина:*

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}\,[\mathfrak{l}, \mathcal{Z}] = \left\{\omega^{\{\mathfrak{l},\mathcal{Z}\}} \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\right\} \tag{3.114}$$

не залежить від системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ (тобто $\forall \mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,[\mathfrak{l}, \mathcal{Z}] = \mathbb{B}\mathfrak{s}\,[\mathfrak{m}, \mathcal{Z}]$).

Доведення. Розглянемо довільні системи відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$. Використовуючи наслідок 3.65, отримуємо:

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}\,[\mathfrak{l}, \mathcal{Z}] = \left\{\omega^{\{\mathfrak{l}\}} \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\right\} = \left\{(\langle!\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle\,\omega)^{\{\mathfrak{m}\}} \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\right\}.$$

Отже, згідно з наслідком 1.186, маємо:

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}\,[\mathfrak{l}, \mathcal{Z}] = \left\{(\langle!\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle\,\omega)^{\{\mathfrak{m}\}} \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\right\} = \left\{\omega_1^{\{\mathfrak{m}\}} \mid \omega_1 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m})\right\} = \mathbb{B}\mathfrak{s}\,[\mathfrak{m}, \mathcal{Z}]\,. \qquad \square$$

Означення 3.67. Нехай $\mathcal{Z}$ — довільний чв-об'єкт.

1. Множину $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z}) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\,[\mathfrak{l}, \mathcal{Z}]$ $(\forall \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}))$ будемо називати множиною елементарно-часових станів $\mathcal{Z}$.
2. Будь-яку підмножину $\widehat{\mathbf{A}} \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$ будемо називати (загальною) мінливою системою $\mathcal{Z}$.

Твердження 3.68. *Нехай $\mathcal{Z}$ — довільний чв-об'єкт і $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ — довільна система відліку $\mathcal{Z}$. Тоді для довільного елемента $\hat{\omega} \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$ існує, причому єдиний елемент $\omega_0 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ такий, що $\hat{\omega} = \omega_0^{\{\mathfrak{l}\}}$.*

Доведення. Нехай, $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ і $\hat{\omega} \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$. За означенням 3.67 і твердженням 3.66 (формула (3.114)), маємо, $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z}) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\,[\mathfrak{l}, \mathcal{Z}] = \left\{\omega^{\{\mathfrak{l}\}} \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\right\}$. Отже, оскільки $\hat{\omega} \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$, то існує елемент $\omega_0 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ такий, що виконується рівність:

$$\hat{\omega} = \omega_0^{\{\mathfrak{l}\}}. \tag{3.115}$$

Доведемо, що такий елемент ω_0 — єдиний. Припустимо, що $\hat{\omega} = \omega_1^{\{\mathfrak{l}\}}$, де $\omega_1 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$. Тоді з рівності (3.115) маємо $\omega_0^{\{\mathfrak{l}\}} = \omega_1^{\{\mathfrak{l}\}}$. Отже, за твердженням 3.64 і властивістю 1.187 (1), $\omega_1 = \langle!\,\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle\,\omega_0 = \omega_0$. $\square$

Означення 3.69. Нехай, $\mathcal{Z}$ — довільний чв-об'єкт $\hat{\omega} \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$ і $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$. Елементарно-часовий стан $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ будемо називати **образом** елементарно-часового стану $\hat{\omega}$ **в системі відліку** $\mathfrak{l}$, якщо $\hat{\omega} = \omega^{\{\mathfrak{l}\}}$.

Згідно з твердженням 3.68, довільний елементарно-часовий стан $\hat{\omega} \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$ в довільній системі відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ має, причому лише один, образ. Образ елементарно-часового стану $\hat{\omega} \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$ в системі відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ будемо позначати через $\hat{\omega}_{\{\mathfrak{l},\mathcal{Z}\}}$ (або через $\hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}\}}$ у тих випадках, коли наперед відомо, про який чв-об'єкт $\mathcal{Z}$ йде мова).

Таким чином, за означенням 3.69, для довільного $\hat{\omega} \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$ справедлива рівність:

$$\left(\hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}\}}\right)^{\{\mathfrak{l}\}} = \hat{\omega}. \tag{3.116}$$

З іншої сторони, для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ і довільного елементарно-часового стану $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$, поклавши $\hat{\omega} := \omega^{\{\mathfrak{l}\}}$, за означенням 3.69, маємо $\omega = \hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}\}}$, тобто:

$$\left(\omega^{\{\mathfrak{l}\}}\right)_{\{\mathfrak{l}\}} = \omega \quad (\forall \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})\ \forall \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}))\,. \tag{3.117}$$

З рівностей (3.116) і (3.117) отримуємо такий наслідок:

Наслідок 3.70. *Нехай, $\mathcal{Z}$ — довільний чв-об'єкт. Тоді для $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ маємо:*

1. *Відображення $(\cdot)^{\{\mathfrak{l}\}}$ є бієкцією з $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ на $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$.*
2. *Відображення $(\cdot)_{\{\mathfrak{l}\}}$ є бієкцією з $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$ на $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$.*
3. *Відображення $(\cdot)_{\{\mathfrak{l}\}}$ обернене до відображення $(\cdot)^{\{\mathfrak{l}\}}$.*

Твердження 3.71. *Нехай, $\mathcal{Z}$ — довільний чв-об'єкт і $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ — довільні системи відліку $\mathcal{Z}$. Тоді:*

1. *Для довільного $\hat{\omega} \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$ справедлива рівність, $\hat{\omega}_{\{\mathfrak{m}\}} = \langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle\, \hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}\}}$.*
2. *Для довільного $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ справедлива рівність, $\left(\omega^{\{\mathfrak{l}\}}\right)_{\{\mathfrak{m}\}} = \langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle\, \omega$.*

Доведення. **1.** Нехай, $\hat{\omega} \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$. Застосовуючи наслідок 3.65 до елементарно-часового стану $\hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}\}} \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ і використовуючи рівність (3.116), отримуємо, $\left(\langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle\, \hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}\}}\right)^{\{\mathfrak{m}\}} = \left(\hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}\}}\right)^{\{\mathfrak{l}\}} = \hat{\omega}$. Звідси, використовуючи рівність (3.117), маємо, $\hat{\omega}_{\{\mathfrak{m}\}} = \left(\left(\langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle\, \hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}\}}\right)^{\{\mathfrak{m}\}}\right)_{\{\mathfrak{m}\}} = \langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle\, \hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}\}}$.

2. Розглянемо довільний елементарно-часовий стан, $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$. Застосовуючи наслідок 3.65 і використовуючи рівність (3.117), отримуємо:

$$\left(\omega^{\{\mathfrak{l}\}}\right)_{\{\mathfrak{m}\}} = \left(\left(\langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle\, \omega\right)^{\{\mathfrak{m}\}}\right)_{\{\mathfrak{m}\}} = \langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle\, \omega. \qquad \square$$

Означення 3.72.

1. Нехай, $\mathcal{Z}$ — довільний чв-об'єкт. ***Образом мінливої системи*** $\widehat{\mathbf{A}} \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$ у системі відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ будемо називати множину, $\widehat{\mathbf{A}}_{\{\mathfrak{l},\mathcal{Z}\}} = \left\{\hat{\omega}_{\{\mathfrak{l},\mathcal{Z}\}} \mid \hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{A}}\right\}$. Зокрема $\widehat{\mathbf{A}}_{\{\mathfrak{l},\mathcal{Z}\}} = \emptyset$, якщо $\widehat{\mathbf{A}} = \emptyset$.
2. Будь-яка мінлива система $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ в системі відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ породжує (загальну) мінливу систему, $A^{\{\mathfrak{l},\mathcal{Z}\}} := \left\{\omega^{\{\mathfrak{l},\mathcal{Z}\}} \mid \omega \in A\right\}$. Зокрема $A^{\{\mathfrak{l},\mathcal{Z}\}} = \emptyset$, якщо $A = \emptyset$.

Зауваження 3.73. У тих випадках, коли наперед відомо, про який чв-об'єкт йде мова, замість позначень $\widehat{\mathbf{A}}_{\{\mathfrak{l},\mathcal{Z}\}}$ і $A^{\{\mathfrak{l},\mathcal{Z}\}}$ будемо використовувати позначення $\widehat{\mathbf{A}}_{\{\mathfrak{l}\}}$ і $A^{\{\mathfrak{l}\}}$ відповідно.

Використовуючи рівності (3.116) і (3.117), для довільного чв-об'єкта $\mathcal{Z}$ отримуємо такі рівності:

$$\left(\widehat{\mathbf{A}}_{\{\mathfrak{l}\}}\right)^{\{\mathfrak{l}\}} = \widehat{\mathbf{A}}. \quad \left(\forall \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right) \ \forall \widehat{\mathbf{A}} \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})\right); \tag{3.118}$$

$$\left(A^{\{\mathfrak{l}\}}\right)_{\{\mathfrak{l}\}} = A \quad \left(\forall \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right) \ \forall A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\right). \tag{3.119}$$

3.9.3. Ланцюгові шляхи універсальних кінематик і означення часонезворотності.

Означення 3.74. Нехай, $\mathcal{Z}$ — довільний чв-об'єкт. Мінливу систему $\widehat{\mathbf{A}} \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$ будемо називати **кусково-ланцюговою**, якщо існують послідовності мінливих систем $\widehat{\mathbf{A}}_1, \cdots, \widehat{\mathbf{A}}_n \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$ і систем відліку $\mathfrak{l}_1, \cdots, \mathfrak{l}_n \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right)$ $(n \in \mathbb{N})$ такі, що:

(а) $\left(\widehat{\mathbf{A}}_k\right)_{\{\mathfrak{l}_k\}} \in \mathbb{L}l\left(\mathfrak{l}_k\right) \ \left(\forall k \in \overline{1,n}\right)$;

(б) $\bigcup_{k=1}^{n} \widehat{\mathbf{A}}_k = \widehat{\mathbf{A}}$;

і при цьому у випадку $n \geq 2$ виконуються такі додаткові умови:

(в) $\widehat{\mathbf{A}}_k \cap \widehat{\mathbf{A}}_{k+1} \neq \emptyset \ \left(\forall k \in \overline{1,n-1}\right)$;

(г) для довільного $k \in \overline{1,n-1}$ і для довільних $\omega_1 \in \left(\widehat{\mathbf{A}}_k \setminus \widehat{\mathbf{A}}_{k+1}\right)_{\{\mathfrak{l}_k\}}$ і $\omega_2 \in \left(\widehat{\mathbf{A}}_k \cap \widehat{\mathbf{A}}_{k+1}\right)_{\{\mathfrak{l}_k\}}$ виконується нерівність $\mathsf{tm}\left(\omega_1\right) <_{\mathfrak{l}_k} \mathsf{tm}\left(\omega_2\right)$;

(д) для довільного $k \in \overline{2,n}$ і для довільних $\omega_1 \in \left(\widehat{\mathbf{A}}_{k-1} \cap \widehat{\mathbf{A}}_k\right)_{\{\mathfrak{l}_k\}}$ і $\omega_2 \in \left(\widehat{\mathbf{A}}_k \setminus \widehat{\mathbf{A}}_{k-1}\right)_{\{\mathfrak{l}_k\}}$ виконується нерівність $\mathsf{tm}\left(\omega_1\right) <_{\mathfrak{l}_k} \mathsf{tm}\left(\omega_2\right)$.

При цьому упорядкований набір з $n+1$ елементів виду, $\mathcal{A} = \left(\widehat{\mathbf{A}}, \left(\widehat{\mathbf{A}}_1, \mathfrak{l}_1\right), \cdots \left(\widehat{\mathbf{A}}_n, \mathfrak{l}_n\right)\right)$ називатимемо **ланцюговим шляхом** чв-об'єкта $\mathcal{Z}$.

Зауваження 3.75. Підкреслимо, що коли в умовах (г) або (д) означення 3.74 $\widehat{\mathbf{A}}_k \setminus \widehat{\mathbf{A}}_{k+1} = \emptyset$ або $\widehat{\mathbf{A}}_k \setminus \widehat{\mathbf{A}}_{k-1} = \emptyset$, то, користуючись правилами формальної логіки, відповідну умову будемо вважати виконаною.

Означення 3.76. Нехай, $\mathfrak{C}$ — довільна кінематична множина або універсальна кінематика.

(а) Мінливу систему $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ будемо називати **геометрично-стаціонарною** в системі відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$, якщо $A \in \mathbb{L}l(\mathfrak{l})$ і для довільних $\omega_1, \omega_2 \in A$ виконується рівність $\mathsf{bs}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\omega_1\right)\right) = \mathsf{bs}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\omega_2\right)\right)$.

(б) Множину всіх геометрично-стаціонарних мінливих систем у системі відліку $\mathfrak{l}$ будемо позначати через $\mathbb{L}g(\mathfrak{l}, \mathfrak{C})$. У тих випадках, коли наперед відомо, про яку кінематичну множину або універсальну кінематику $\mathfrak{C}$ йде мова, будемо використовувати позначення $\mathbb{L}g(\mathfrak{l})$.

(в) Ланцюговий шлях $\mathcal{A} = \left(\widehat{\mathbf{A}},\ \left(\widehat{\mathbf{A}}_1, \mathfrak{l}_1\right), \cdots, \left(\widehat{\mathbf{A}}_n, \mathfrak{l}_n\right)\right)$ в $\mathfrak{C}$ $(n \in \mathbb{N})$ будемо називати **кусково геометрично-стаціонарним**, якщо $\forall k \in \overline{1,n}$ $\left(\widehat{\mathbf{A}}_k\right)_{\{\mathfrak{l}_k\}} \in \mathbb{L}g\left(\mathfrak{l}_k\right)$.

З фізичної точки зору кусково геометрично-стаціонарний шлях можна трактувати, як процес "мандрів" спостерігача (або якоїсь матеріальної частинки), що рухається, "перескакуючи" скінченну кількість разів з однієї системи відліку в іншу.

Означення 3.77. Нехай, $\mathcal{Z}$ — довільний чв-об'єкт і $\mathcal{A} = \left(\widehat{\mathbf{A}},\ \left(\widehat{\mathbf{A}}_1, \mathfrak{l}_1\right), \ldots, \left(\widehat{\mathbf{A}}_n, \mathfrak{l}_n\right)\right)$ — довільний ланцюговий шлях в $\mathcal{Z}$.

1. Елемент $\hat{\omega}_s \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$ називатимемо **початковим** елем. шляху $\mathcal{A}$, якщо $\hat{\omega}_s \in \widehat{\mathbf{A}}_1$ і для довільного $\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{A}}_1$ справедлива нерівність $\mathsf{tm}\left(\left(\hat{\omega}_s\right)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right) \leq_{\mathfrak{l}_1} \mathsf{tm}\left(\hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right)$.
2. Елемент $\hat{\omega}_f \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{Z})$ будемо називати **кінцевим** елементом шляху $\mathcal{A}$, якщо $\hat{\omega}_f \in \widehat{\mathbf{A}}_n$ і для довільного $\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{A}}_n$ справедлива нерівність $\mathsf{tm}\left(\hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}_n\}}\right) \leq_{\mathfrak{l}_n} \mathsf{tm}\left(\left(\hat{\omega}_f\right)_{\{\mathfrak{l}_n\}}\right)$.
3. Ланцюговий шлях, що має (хоча б один) початковий і (хоча б один) кінцевий елемент будемо називати **замкнутим**.

Твердження 3.78. *Будь-який ланцюговий шлях $\mathcal{A}$ довільного чв-об'єкта $\mathcal{Z}$ може мати не більш, ніж один початковий і не більш, ніж один кінцевий елемент.*

Доведення. **(а)** Нехай, $\hat{\omega}_s$, $\hat{\omega}_x$ — два початкових елемента ланцюгового шляху $\mathcal{A} = \left(\widehat{\mathbf{A}},\ \left(\widehat{\mathbf{A}}_1, \mathfrak{l}_1\right), \cdots, \left(\widehat{\mathbf{A}}_n, \mathfrak{l}_n\right)\right)$. Тоді, за означенням 3.77, $\hat{\omega}_s, \hat{\omega}_x \in \widehat{\mathbf{A}}_1$, $\mathsf{tm}\left(\left(\hat{\omega}_s\right)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right) \leq_{\mathfrak{l}_1} \mathsf{tm}\left(\left(\hat{\omega}_x\right)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right)$ і $\mathsf{tm}\left(\left(\hat{\omega}_x\right)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right) \leq_{\mathfrak{l}_1} \mathsf{tm}\left(\left(\hat{\omega}_s\right)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right)$. Отже:

$$\mathsf{tm}\left(\left(\hat{\omega}_s\right)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right) = \mathsf{tm}\left(\left(\hat{\omega}_x\right)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right). \tag{3.120}$$

Оскільки $\hat{\omega}_s, \hat{\omega}_x \in \widehat{\mathbf{A}}_1$, то $\left(\hat{\omega}_s\right)_{\{\mathfrak{l}_1\}}, \left(\hat{\omega}_x\right)_{\{\mathfrak{l}_1\}} \in \left(\widehat{\mathbf{A}}_1\right)_{\{\mathfrak{l}_1\}}$, де, за означенням 3.74 (підпункт (а)), $\left(\widehat{\mathbf{A}}_1\right)_{\{\mathfrak{l}_1\}} \in \mathbb{L}l\left(\mathfrak{l}_1\right)$. Тобто, згідно з твердженням 1.77 (пункт 1), математичний об'єкт $\mathbf{L} = \left(\widehat{\mathbf{A}}_1\right)_{\{\mathfrak{l}_1\}}$ є функцією з $\mathbf{Tm}\left(\mathfrak{l}_1\right)$ в $\mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{l}_1\right)$. Тому, використовуючи рівність $\omega = \left(\mathsf{tm}\left(\omega\right), \mathsf{bs}\left(\omega\right)\right)$ $\left(\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}_1\right)\right)$ і формулу (3.120), отримуємо:

$$\mathsf{bs}\left(\left(\hat{\omega}_s\right)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right) = \mathbf{L}\left(\mathsf{tm}\left(\left(\hat{\omega}_s\right)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right)\right) = \mathbf{L}\left(\mathsf{tm}\left(\left(\hat{\omega}_x\right)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right)\right) = \mathsf{bs}\left(\left(\hat{\omega}_x\right)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right).$$

З останньої рівності і рівності (3.120) маємо:

$$\left(\hat{\omega}_s\right)_{\{\mathfrak{l}_1\}} = \left(\mathsf{tm}\left(\left(\hat{\omega}_s\right)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right), \mathsf{bs}\left(\left(\hat{\omega}_s\right)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right)\right) = \left(\mathsf{tm}\left(\left(\hat{\omega}_x\right)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right), \mathsf{bs}\left(\left(\hat{\omega}_x\right)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right)\right) = \left(\hat{\omega}_x\right)_{\{\mathfrak{l}_1\}}.$$

Отже, згідно з формулою (3.116), маємо, $\hat{\omega}_s = \left(\left(\hat{\omega}_s\right)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right)^{\{\mathfrak{l}_1\}} = \left(\left(\hat{\omega}_x\right)_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right)^{\{\mathfrak{l}_1\}} = \hat{\omega}_x$.

(б) Аналогічно доводиться, що ланцюговий шлях $\mathcal{A}$ може мати не більш, ніж один кінцевий елемент. □

Позначення 3.79. Початковий елемент ланцюгового шляху $\mathcal{A}$ чв-об'єкта $\mathcal{Z}$ (якщо він існує) будемо позначати через $\mathsf{po}\,(\mathcal{A},\mathcal{Z})$, або через $\mathsf{po}\,(\mathcal{A})$. Кінцевий елемент ланцюгового шляху $\mathcal{A}$ будемо позначати через $\mathsf{ki}\,(\mathcal{A},\mathcal{Z})$, або через $\mathsf{ki}\,(\mathcal{A})$. При цьому позначення $\mathsf{po}\,(\mathcal{A})$ і $\mathsf{ki}\,(\mathcal{A})$ використовуються у випадках, коли це не викликає непорозумінь. Таким чином, для довільного замкнутого ланцюгового шляху $\mathcal{A}$ завжди існує $\mathsf{po}\,(\mathcal{A})$ і $\mathsf{ki}\,(\mathcal{A})$.

Означення 3.80. Замкнутий ланцюговий шлях $\mathcal{A}$ чітко видимої кінематичної множини або універсальної кінематики $\mathfrak{C}$ будемо називати **геометрично-циклічним** відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$, якщо $\mathsf{bs}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\mathsf{po}\,(\mathcal{A})_{\{\mathfrak{l}\}}\right)\right) = \mathsf{bs}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\mathsf{ki}\,(\mathcal{A})_{\{\mathfrak{l}\}}\right)\right)$.

Зауваження 3.81. Нехай, $\mathfrak{C}$ — кінематична множина або універсальна кінематика. За означенням координат Мінковського (див. формулу 2.4), для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ і довільного елементарно-часового стану $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ мають місце такі рівності:

$$\mathsf{tm}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega)\right) = \mathsf{tm}\,(\omega)\,; \qquad \mathsf{bs}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega)\right) = \mathsf{q}_{\mathfrak{l}}\,(\mathsf{bs}\,(\omega))\,. \tag{3.121}$$

Звідси випливає, що замкнутий ланцюговий шлях $\mathcal{A}$ чітко видимої кінематичної множини або універсальної кінематики $\mathfrak{C}$ є геометрично-циклічним відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ тоді і тільки тоді, коли:

$$\mathsf{q}_{\mathfrak{l}}\left(\mathsf{bs}\left(\mathsf{po}\,(\mathcal{A})_{\{\mathfrak{l}\}}\right)\right) = \mathsf{q}_{\mathfrak{l}}\left(\mathsf{bs}\left(\mathsf{ki}\,(\mathcal{A})_{\{\mathfrak{l}\}}\right)\right).$$

Означення 3.82. Універсальну кінематику $\mathcal{F}$ будемо називати **часонезворотною**, якщо для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ і для довільного геометрично-циклічного відносно $\mathfrak{l}$ кусково геометрично-стаціонарного в $\mathcal{F}$ ланцюгового шляху $\mathcal{A}$ справедлива нерівність, $\mathsf{tm}\left(\mathsf{po}\,(\mathcal{A})_{\{\mathfrak{l}\}}\right) \leq_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}\left(\mathsf{ki}\,(\mathcal{A})_{\{\mathfrak{l}\}}\right)$.

Універсальну кінематику $\mathcal{F}$ будемо називати **часозворотною**, якщо вона не є часонезворотною.

Фізичний зміст поняття часонезворотної кінематики полягає в тому, що в таких кінематиках реально відсутні "часозворотні" об'єкти або процеси, що потрапляють у власне минуле, "мандруючи" між системами відліку. Навпаки, в часозворотних кінематиках "часозворотні" об'єкти або процеси існують.

3.9.4. Про напрямок часу між системами відліку універсальних кінематик.

Означення 3.83. Нехай, $\mathcal{F}$ — універсальна кінематика.

1. Будемо говорити, що система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ є **часоневід'ємною** в $\mathcal{F}$ відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ (позначення $\mathfrak{m} \Uparrow_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$), якщо для довільних $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l})$ з умов $\mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_2)$ і $\mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_1) \leq_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_2)$ випливає нерівність: $\mathsf{tm}\,([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1) \leq_{\mathfrak{m}} \mathsf{tm}\,([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2)$.

2. Будемо говорити, що система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є **часододатною** в $\mathcal{F}$ відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ (позначення $\mathfrak{m} \Uparrow^{+}_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$), якщо для довільних $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ з умов $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2)$ і $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) <_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$ випливає нерівність, $\mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1) <_{\mathfrak{m}} \mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2)$.
3. Будемо говорити, що система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є **часонедодатною** в $\mathcal{F}$ відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ (позначення $\mathfrak{m} \Downarrow_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$), якщо для довільних $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ з умов $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2)$ і $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) \leq_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$ випливає нерівність: $\mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1) \geq_{\mathfrak{m}} \mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2)$.
4. Будемо говорити, що система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є **часовід'ємною** в $\mathcal{F}$ відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ (позначення $\mathfrak{m} \Downarrow^{-}_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$), якщо для довільних $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ з умов $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2)$ і $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) <_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$ випливає нерівність, $\mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1) >_{\mathfrak{m}} \mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2)$.

Твердження 3.84. *Нехай, $\mathcal{F}$ — універсальна кінематика.*

1) Якщо $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ і $\mathfrak{m} \Uparrow^{+}_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$, то $\mathfrak{m} \Uparrow_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$.

2) Якщо $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ і $\mathfrak{m} \Downarrow^{-}_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$, то $\mathfrak{m} \Downarrow_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$.

(Іншими словами, з часододатності випливає часоневід'ємність, а з часовід'ємності — часонедодатність.)

Доведення. **1)** Справді, нехай $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ і $\mathfrak{m} \Uparrow^{+}_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$. Тоді, для довільних $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ таких, що $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2)$ і $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) \leq_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$, маємо:

(а) У випадку $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) <_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$, за означенням 3.83, пункт 2, $\mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1) <_{\mathfrak{m}} \mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2)$. **(б)** У випадку $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$, з умови $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2)$ маємо $\mathrm{w}_1 = \mathrm{w}_2$, а отже $\mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1) = \mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2)$.

2) Другий пункт твердження доводиться аналогічно. □

Нехай $(\mathfrak{H}, \|\cdot\|, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — дійсний гільбертовий простір, $\mathbb{S} \subseteq \mathbf{Pk}(\mathfrak{H})$, а $\mathcal{B}$ — довільна базова мінлива множина така, що $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathfrak{H} = \mathbf{Zk}\left(\widehat{\mathfrak{H}}\right)$ і $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \leq)$, де $\leq$ — стандартний порядок на полі дійсних чисел $\mathbb{R}$, а координатний простір $\widehat{\mathfrak{H}}$ визначається за формулою (3.36). Розглянемо універсальну кінематику:

$$\mathcal{F} := \mathfrak{Ku}(\mathbb{S}, \mathcal{B}; \mathfrak{H}).$$

Згідно з формулами (3.37), (3.30), (3.27), маємо:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} = \mathfrak{Ku}\left(\mathbb{S}, \mathcal{B}, \widehat{\mathfrak{H}}\right) &= \mathfrak{Ku}\left[\widehat{\mathbb{S}}_{\mathsf{UK}}, \mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\widehat{\mathfrak{H}})}\right], \quad \text{де} \\
\widehat{\mathbb{S}}_{\mathsf{UK}} &= \left(\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), \mathbf{Zk}\left(\widehat{\mathfrak{H}}\right), \mathbf{U}, \widehat{\mathfrak{H}}, \mathbf{U}\right) \mid \mathbf{U} \in \mathbb{S}\right) = \\
&= \left(\left((\mathbb{R}, \leq), \mathfrak{H}, \mathbf{U}, \widehat{\mathfrak{H}}, \mathbf{U}\right) \mid \mathbf{U} \in \mathbb{S}\right), \\
\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\widehat{\mathfrak{H}})} &= \left(\mathcal{B}, \left(\widehat{\mathfrak{H}}, \mathbb{I}_{\mathfrak{Bs}(\mathcal{B})}\right)\right).
\end{aligned} \tag{3.122}$$

Отже, беручи до уваги властивості 3.7, отримуємо наступні властивості універсальних кінематик типу $\mathfrak{Ku}\,(\mathbb{S}, \mathcal{B};\, \mathfrak{H})$:

Властивості 3.85. *Нехай,* $\mathcal{F} = \mathfrak{Ku}\,(\mathbb{S}, \mathcal{B};\, \mathfrak{H})$. *Тоді:*

1. $\mathcal{L}k\,(\mathcal{F}) = \{(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}\,[\mathcal{B}, \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})]) \mid \boldsymbol{U} \in \mathbb{S}\} = \{(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}\,[\mathcal{B}]) \mid \boldsymbol{U} \in \mathbb{S}\}$.
2. $\mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}) = \mathbb{S}$.
3. *Для довільної системи відліку* $\mathfrak{l} = (\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}\,[\mathcal{B}]) \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ *справедливі рівності:*

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = \boldsymbol{U}\,(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})) = \{\boldsymbol{U}(\omega) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})\}\,;$$
$$\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = \{\mathsf{bs}\,(\boldsymbol{U}(\omega)) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})\}\,;$$
$$\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}) = \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \leq)\,; \quad \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) = \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) = \mathbb{R}.$$

4. *Для довільної системи відліку* $\mathfrak{l} = (\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}\,[\mathcal{B}]) \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ *справедливі рівності:*

$$\mathbf{Zk}(\mathfrak{l}; \mathcal{F}) = \mathfrak{H}; \tag{3.123}$$
$$\mathbb{M}k(\mathfrak{l}; \mathcal{F}) = \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathfrak{H} = \mathbb{R} \times \mathfrak{H} = \mathcal{M}\,(\mathfrak{H})\,; \tag{3.124}$$
$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega; \mathcal{F}) = \boldsymbol{U}\left(\mathbb{I}_{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}\left(\boldsymbol{U}^{-1}(\omega)\right)\right) = \omega \qquad (\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}))\,, \tag{3.125}$$

   де $\mathbb{I}_{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}$ *— тотожне відображення на* $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$. [3.9]

5. *Нехай,* $\mathfrak{l} = (\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}\,[\mathcal{B}]) \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$, *де* $\boldsymbol{U} \in \mathbb{S}$. *Якщо* $\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ *і* $\mathsf{tm}\,(\widetilde{\omega}_1) \neq \mathsf{tm}\,(\widetilde{\omega}_2)$, *то* $\widetilde{\omega}_1$ *і* $\widetilde{\omega}_2$ *є об'єднані долею в* $\mathfrak{l}$ *тоді і тільки тоді, коли існують об'єднані долею в* $\mathcal{B}$ *елементарно-часові стани* $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ *такі, що* $\widetilde{\omega}_1 = \boldsymbol{U}\,(\omega_1)$, $\widetilde{\omega}_2 = \boldsymbol{U}\,(\omega_2)$.
6. *Для довільних систем відліку* $\mathfrak{l} = (\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}\,[\mathcal{B}]) \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$, $\mathfrak{m} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V}\,[\mathcal{B}]) \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ *(*$\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V} \in \mathbb{S}$*) справедлива рівність:*

$$\langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathcal{F}\rangle\, \omega = \boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{U}^{-1}(\omega)\right) \quad (\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = \boldsymbol{U}\,(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})))\,.$$

7. *Для довільних систем відліку* $\mathfrak{l} = (\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}\,[\mathcal{B}]) \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$, $\mathfrak{m} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V}\,[\mathcal{B}]) \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ *(*$\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V} \in \mathbb{S}$*) справедлива рівність:*

$$[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathcal{F}]\,\mathrm{w} = \boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{U}^{-1}(\mathrm{w})\right) \quad (\mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}; \mathcal{F}) = \mathcal{M}\,(\mathfrak{H}))\,.$$

Нехай $\mathcal{F} = \mathfrak{Ku}\,(\mathbb{S}, \mathcal{B};\, \mathfrak{H})$, де $(\mathfrak{H}, \|\cdot\|\,, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — дійсний гільбертовий простір, $\mathbb{S} \subseteq \mathbf{Pk}\,(\mathfrak{H})$, а $\mathcal{B}$ — довільна базова мінлива множина така, що $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathfrak{H}$ і $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \leq)$. Для систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ покладемо:

$$\mathbf{t}^{(0)}_{[\mathfrak{m},\mathfrak{l}]} := \mathsf{tm}\,([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathbf{0}) = \mathcal{T}\,([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathbf{0})$$
$$\mathbf{S}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\mathrm{w} := [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w} - [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathbf{0} \quad (\forall\, \mathrm{w} \in \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l}) = \mathcal{M}\,(\mathfrak{H}))\,, \tag{3.126}$$

[3.9] Для отримання формули (3.125) крім властивостей 3.7 (формула (3.25)) слід, також, скористатися формулою (3.29).

де (нагадуємо) $\mathbf{0} = \mathbf{0}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}$ — це нульовий вектор простору $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Тоді для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ і довільного вектора $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}) = \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ отримаємо:

$$\begin{aligned}
\mathrm{w} &= \mathcal{T}(\mathrm{w})\mathbf{e}_0 + \mathbf{X}\mathrm{w} = \mathsf{tm}(\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0 + \mathsf{bs}(\mathrm{w})\,; \\
\mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}) &= \mathcal{T}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}) = \mathcal{T}(\mathbf{S}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\mathrm{w} + [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathbf{0}) = \\
&= \mathcal{T}(\mathbf{S}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\mathrm{w}) + \mathcal{T}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathbf{0}) = \mathcal{T}(\mathbf{S}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\mathrm{w}) + \mathbf{t}^{(0)}_{[\mathfrak{m},\mathfrak{l}]} = \\
&= \mathcal{T}(\mathbf{S}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}(\mathsf{tm}(\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0 + \mathsf{bs}(\mathrm{w}))) + \mathbf{t}^{(0)}_{[\mathfrak{m},\mathfrak{l}]} = \\
&= \mathcal{T}(\mathbf{S}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}(\mathsf{tm}(\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0)) + \mathcal{T}(\mathbf{S}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\mathsf{bs}(\mathrm{w})) + \mathbf{t}^{(0)}_{[\mathfrak{m},\mathfrak{l}]} = \\
&= \mathsf{tm}(\mathrm{w})\,\mathcal{T}(\mathbf{S}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\mathbf{e}_0) + \mathcal{T}(\mathbf{S}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\mathsf{bs}(\mathrm{w})) + \mathbf{t}^{(0)}_{[\mathfrak{m},\mathfrak{l}]}.
\end{aligned} \tag{3.127}$$

Твердження 3.86. *Нехай $\mathcal{F}$ — універсальна кінематика виду $\mathcal{F} = \mathfrak{Ku}(\mathbb{S}, \mathcal{B}; \mathfrak{H})$. Покладемо:*

$$\mathbf{t}_{[\mathfrak{m},\mathfrak{l}]} := \mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathbf{e}_0 - [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathbf{0}) \quad (\forall \mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F}))\,. \tag{3.128}$$

Тоді для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ маємо:

1. $\mathfrak{m} \Uparrow_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$ *тоді і тільки тоді, коли* $\mathbf{t}_{[\mathfrak{m},\mathfrak{l}]} \geq 0$*;*
2. $\mathfrak{m} \Downarrow_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$ *тоді і тільки тоді, коли* $\mathbf{t}_{[\mathfrak{m},\mathfrak{l}]} \leq 0$*;*
3. $\mathfrak{m} \Uparrow^{+}_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$ *тоді і тільки тоді, коли* $\mathbf{t}_{[\mathfrak{m},\mathfrak{l}]} > 0$*;*
4. $\mathfrak{m} \Downarrow^{-}_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$ *тоді і тільки тоді, коли* $\mathbf{t}_{[\mathfrak{m},\mathfrak{l}]} < 0$.

Доведення. Нехай, $\mathcal{F} = \mathfrak{Ku}(\mathbb{S}, \mathcal{B}; \mathfrak{H})$ і $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$. З урахуванням формул (3.128) та (3.126) маємо:

$$\mathbf{t}_{[\mathfrak{m},\mathfrak{l}]} = \mathcal{T}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathbf{e}_0 - [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathbf{0}) = \mathcal{T}(\mathbf{S}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\mathbf{e}_0)\,. \tag{3.129}$$

Тому формулу (3.127) можна переписати у вигляді:

$$\mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}) = \mathsf{tm}(\mathrm{w})\,\mathbf{t}_{[\mathfrak{m},\mathfrak{l}]} + \mathcal{T}(\mathbf{S}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\,\mathsf{bs}(\mathrm{w})) + \mathbf{t}^{(0)}_{[\mathfrak{m},\mathfrak{l}]} \quad (\forall \mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}))\,. \tag{3.130}$$

Припустимо, що $\mathfrak{m} \Uparrow_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$. Для векторів $\mathrm{w}^{(0)}_1 = \mathbf{0}$ і $\mathrm{w}^{(0)}_2 = \mathbf{e}_0$ маємо:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{bs}\left(\mathrm{w}^{(0)}_1\right) = \mathsf{bs}\left(\mathrm{w}^{(0)}_1\right) = \mathbf{0}_{\mathfrak{H}}; \\
&\mathsf{tm}\left(\mathrm{w}^{(0)}_1\right) = 0 \leq 1 = \mathsf{tm}\left(\mathrm{w}^{(0)}_2\right),
\end{aligned} \tag{3.131}$$

причому, згідно з властивістю 3.85(3), відношення $\leq_{\mathfrak{l}}, \leq_{\mathfrak{m}}$ часового порядку в системах відліку $\mathfrak{l}$ та $\mathfrak{m}$ збігаються з відношенням $\leq$ порядку в полі дійсних чисел. Тому, за означенням 3.83 (пункт 1), отримаємо нерівність,

$\mathsf{tm}\left([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_1^{(0)}\right) \leq \mathsf{tm}\left([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_2^{(0)}\right)$. З останньої нерівності, враховуючи рівність (3.130), маємо:

$$\mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_1^{(0)}\right) \mathbf{t}_{[\mathfrak{m},\mathfrak{l}]} + \mathcal{T}\left(\mathbf{S}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}} \mathsf{bs}\left(\mathrm{w}_1^{(0)}\right)\right) + \mathbf{t}_{[\mathfrak{m},\mathfrak{l}]}^{(0)} \leq$$
$$\leq \mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_2^{(0)}\right) \mathbf{t}_{[\mathfrak{m},\mathfrak{l}]} + \mathcal{T}\left(\mathbf{S}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}} \mathsf{bs}\left(\mathrm{w}_2^{(0)}\right)\right) + \mathbf{t}_{[\mathfrak{m},\mathfrak{l}]}^{(0)}.$$

Звідси, враховуючи рівність (3.131), одержуємо нерівність, $\left(\mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_2^{(0)}\right) - \mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_1^{(0)}\right)\right) \mathbf{t}_{[\mathfrak{m},\mathfrak{l}]} \geq 0$, з якої, враховуючи, що $\mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_1^{(0)}\right) = \mathsf{tm}(\mathbf{0}) = 0$, $\mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_2^{(0)}\right) = \mathsf{tm}(\mathbf{e}_0) = 1$, випливає нерівність, $\mathbf{t}_{[\mathfrak{m},\mathfrak{l}]} \geq 0$. Отже, якщо $\mathfrak{m} \Uparrow_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$, то $\mathbf{t}_{[\mathfrak{m},\mathfrak{l}]} \geq 0$.

Навпаки, припустимо, що $\mathbf{t}_{[\mathfrak{m},\mathfrak{l}]} \geq 0$. Розглянемо довільні вектори $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}) = \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ такі, що $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2)$ і $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) \leq \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$. Використовуючи рівність (3.130), отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_1) &= \mathsf{tm}(\mathrm{w}_1)\, \mathbf{t}_{[\mathfrak{m},\mathfrak{l}]} + \mathcal{T}(\mathbf{S}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\, \mathsf{bs}(\mathrm{w}_1)) + \mathbf{t}_{[\mathfrak{m},\mathfrak{l}]}^{(0)} \leq \\ &\leq \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)\, \mathbf{t}_{[\mathfrak{m},\mathfrak{l}]} + \mathcal{T}(\mathbf{S}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\, \mathsf{bs}(\mathrm{w}_1)) + \mathbf{t}_{[\mathfrak{m},\mathfrak{l}]}^{(0)} = \\ &= \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)\, \mathbf{t}_{[\mathfrak{m},\mathfrak{l}]} + \mathcal{T}(\mathbf{S}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\, \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2)) + \mathbf{t}_{[\mathfrak{m},\mathfrak{l}]}^{(0)} = \mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_2).\end{aligned}$$

З останньої нерівності, враховуючи довільність вибору векторів $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}) = \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ таких, що $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2)$ і $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) \leq \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$, за означенням 3.83 (пункт 1), отримуємо співвідношення $\mathfrak{m} \Uparrow_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$. Отже, отримуємо зворотню імплікацію: якщо $\mathbf{t}_{[\mathfrak{m},\mathfrak{l}]} \geq 0$, то $\mathfrak{m} \Uparrow_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$.

Перший пункт твердження повністю доведено.

Всі інші пункти твердження доводяться аналогічно. □

Нехай $\mathcal{F} = \mathfrak{Ku}(\mathbb{S}, \mathcal{B}; \mathfrak{H})$ і $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ — системи відліку такі, що універсальне перетворення координат $[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}] \in \mathbf{Pk}(\mathfrak{H})$ має вигляд:

$$[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}] = \mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J; \mathbf{a}],$$

де $c \in (0, \infty]$, $\lambda \in [0, \infty] \setminus \{c\}$, $s \in \{-1, 1\}$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ і $\mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ {[3.10]}. Тоді, застосовуючи (3.126), та (2.17) отримуємо:

$$\mathbf{S}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\mathrm{w} = \mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J; \mathbf{a}]\, \mathrm{w} - \mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J; \mathbf{a}]\, \mathbf{0} = \mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J]\, \mathrm{w}.$$

Використовуючи останню рівність, а також формули (3.126) та (A.155), отримуємо:

$$\mathbf{t}_{[\mathfrak{m},\mathfrak{l}]} := \mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathbf{e}_0 - [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathbf{0}) = \mathsf{tm}(\mathbf{S}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\mathbf{e}_0) = \mathsf{tm}(\mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J]\, \mathbf{e}_0) =$$

[3.10] Такі системи відліку існують якщо виконується умова, $\{[\mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{k}] \mid \mathfrak{k}, \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})\} \cap \mathfrak{PT}(\mathfrak{H}, c) \neq \emptyset$.

$$= \mathsf{tm}\left(\begin{cases} \frac{s}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}\mathbf{e}_0 + \frac{\lambda}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}J\mathbf{n}, & \lambda < \infty,\ c < \infty; \\ cJ\mathbf{n}, & \lambda = \infty,\ c < \infty; \\ s\mathbf{e}_0 + \lambda J\mathbf{n}, & \lambda < \infty,\ c = \infty \end{cases}\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{s}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}, & \lambda < \infty,\ c < \infty; \\ 0, & \lambda = \infty,\ c < \infty; \\ s, & \lambda < \infty,\ c = \infty. \end{cases} \tag{3.132}$$

Враховуючи формулу (3.132) отримуємо такий наслідок з твердження 3.86.

Наслідок 3.87. *Нехай $\mathcal{F}$ — універсальна кінематика виду $\mathcal{F} = \mathfrak{Ku}(\mathbb{S}, \mathcal{B}; \mathfrak{H})$ і $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ — системи відліку такі, що $[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}] = \mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J; \mathbf{a}]$, де $c \in (0, \infty]$, $\lambda \in [0, \infty] \setminus \{c\}$, $s \in \{-1, 1\}$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ і $\mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Тоді:*

1. *$\mathfrak{m} \Uparrow_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$ тоді і тільки тоді, коли $s = 1$ або $\lambda = \infty$;*
2. *$\mathfrak{m} \Downarrow_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$ тоді і тільки тоді, коли $s = -1$ або $\lambda = \infty$;*
3. *$\mathfrak{m} \Uparrow^{+}_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$ тоді і тільки тоді, коли $s = 1$ і $\lambda < \infty$;*
4. *$\mathfrak{m} \Downarrow^{-}_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$ тоді і тільки тоді, коли $s = -1$ і $\lambda < \infty$;.*

Аналогічно доводиться наступний наслідок (для узагальнених перетворень Лоренца із скінченною швидкістю світла, записаних у формі (A.74)).

Наслідок 3.88. *Нехай $\mathcal{F}$ — універсальна кінематика виду $\mathcal{F} = \mathfrak{Ku}(\mathbb{S}, \mathcal{B}; \mathfrak{H})$ і $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ — системи відліку такі, що $[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}] = \mathbf{U}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}, J; \mathbf{a}]$, де $c \in (0, \infty)$, $\theta \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, $s \in \{-1, 1\}$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ і*

$$\mathbf{U}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}, J; \mathbf{a}]\,\mathrm{w} := \mathbf{U}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}, J](\mathrm{w} + \mathbf{a}) \qquad (\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})).$$

Тоді:

1. *$\mathfrak{m} \Uparrow_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$ тоді і тільки тоді, коли $s = 1$ або $\theta = -1$;*
2. *$\mathfrak{m} \Downarrow_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$ тоді і тільки тоді, коли $s = -1$ або $\theta = -1$;*
3. *$\mathfrak{m} \Uparrow^{+}_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$ тоді і тільки тоді, коли $s = 1$ і $\theta \neq -1$;*
4. *$\mathfrak{m} \Downarrow^{-}_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$ тоді і тільки тоді, коли $s = -1$ і $\theta \neq -1$;.*

Зауваження 3.89. Підкреслимо, що, в силу формули (A.76), наслідок 3.88 перестає бути істинним, якщо в ньому умову $\theta \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ замінити на умову $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Зауваження 3.90. Нехай, $\mathcal{F}$ універсальна кінематика і $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ — довільна система відліку $\mathcal{F}$. Тоді з означення 3.83 (пункт 2) випливає, що $\mathfrak{l} \Uparrow^{+}_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$. Отже:

- Бінарне відношення $\Uparrow_{\mathcal{F}}^{+}$ є рефлексивним на множині $\mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ систем відліку довільної універсальної кінематики $\mathcal{F}$.

Проте виявляється, що:

- В загальному випадку це відношення не є ні симетричним ні транзитивним.

Обґрунтуванням останнього висновку може служити наступний приклад.

Приклад 3.91. Нехай $(\mathfrak{H}, \|\cdot\|, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — дійсний гільбертовий простір, а $\mathcal{B}$ — довільна базова мінлива множина така, що $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathfrak{H}$ і $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \leq)$. Розглянемо універсальну кінематику:

$$\mathcal{F} := \mathfrak{Ku}\,(\mathbf{Pk}\,(\mathfrak{H})\,, \mathcal{B};\, \mathfrak{H})\,.$$

Нехай, $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ — довільна система відліку кінематики $\mathcal{F}$. Тоді, згідно з властивістю 3.85(1), існує оператор $\mathbf{U} \in \mathbf{Pk}\,(\mathfrak{H})$ такий, що $\mathfrak{l} = (\mathbf{U}, \mathbf{U}[\mathcal{B}])$. Нехай, $\mathbb{UP}(\mathfrak{l})$ — множина універсальних перетворень координат, які забезпечують перехід від системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ до всіх інших систем відліку, що задається формулою (3.39). Легко бачити, що клас операторів $\mathbf{Pk}\,(\mathfrak{H})$ утворює групу операторів над простором $\mathcal{M}\,(\mathfrak{H})$. Тому, використовуючи властивість 3.85(7), отримуємо:

$$\mathbb{UP}(\mathfrak{l}) = \{[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}] \,|\, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})\} = \left\{\mathbf{V}\mathbf{U}^{-1} \,|\, \mathbf{V} \in \mathbf{Pk}\,(\mathfrak{H})\right\} = \mathbf{Pk}\,(\mathfrak{H})\,, \tag{3.133}$$

причому рівність (3.133), справедлива для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$.

1. Зафіксуємо довільну систему відліку $\mathfrak{l}_0 \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$, а також зафіксуємо довільні значення $c \in (0, \infty)$, $\theta \in (-1, 0)$, $J \in \mathfrak{U}\,(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1\,(\mathfrak{H}_1)$. Згідно з формулою (3.133), існує система відліку $\mathfrak{m}_0 \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ така, що:

$$[\mathfrak{m}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_0] = \mathbf{U}_{\theta,c}\,[1, \mathbf{n}, J] = \mathbf{U}_{\theta,c}\,[1, \mathbf{n}, J;\, \mathbf{0}]\,.$$

Згідно з наслідком 3.88 маємо $\mathfrak{m}_0 \Uparrow_{\mathcal{F}}^{+} \mathfrak{l}_0$. З формул (3.3) та (3.4) випливає, що $[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{m}_0] = \mathbf{U}_{\theta,c}\,[1, \mathbf{n}, J]^{-1}$. Тому, враховуючи, що $\theta \in (-1, 0)$ $(\operatorname{sign}\theta = -1)$ і використовуючи формулу (A.133), отримуємо:

$$[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{m}_0] = \mathbf{U}_{\theta,c}\,[1, \mathbf{n}, J]^{-1} = \mathbf{U}_{\theta,c}\,[-1, -J\mathbf{n}, J^{-1}]\,.$$

Отже, згідно з наслідком 3.88, $\mathfrak{l}_0 \Downarrow_{\mathcal{F}}^{-} \mathfrak{m}_0$. Таким чином, маємо $\mathfrak{m}_0 \Uparrow_{\mathcal{F}}^{+} \mathfrak{l}_0$ і $\mathfrak{l}_0 \Downarrow_{\mathcal{F}}^{-} \mathfrak{m}_0$. Зрозуміло, що співвідношення $\mathfrak{l}_0 \Downarrow_{\mathcal{F}}^{-} \mathfrak{m}_0$ і $\mathfrak{l}_0 \Uparrow_{\mathcal{F}}^{+} \mathfrak{m}_0$ одночасно виконуватись не можуть. Тому бінарне відношення $\Uparrow_{\mathcal{F}}^{+}$ не є симетричним на множині $\mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$.

2. Зафіксуємо довільну систему відліку $\mathfrak{l}_1 \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$, а також зафіксуємо довільні значення $c \in (0, \infty)$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1\,(\mathfrak{H}_1)$, $\theta, \theta_1 \in (-1, 0)$ такі, що $\theta_1 \leq \theta$. Згідно з формулою (3.133), існують системи відліку $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{p}_1 \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ такі, що $[\mathfrak{m}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_1] = \mathbf{E}_{\theta_1,c}\,[1, \mathbf{n}]$ і $[\mathfrak{p}_1 \leftarrow \mathfrak{m}_1] = \mathbf{E}_{\theta,c}\,[1, \mathbf{n}]$, де $\mathbf{E}_{\theta,c}\,[1, \mathbf{n}]$, $\mathbf{E}_{\theta_1,c}\,[1, \mathbf{n}]$ — елементарні узагальнені перетворення Лоренца, що задаються формулою (A.110), тобто $\mathbf{E}_{\theta,c}\,[1, \mathbf{n}] = \mathbf{U}_{\theta,c}\,[1, \mathbf{n}, \mathbb{I}_{\mathfrak{H}_1}] = \mathbf{U}_{\theta,c}\,[1, \mathbf{n}, \mathbb{I}_{\mathfrak{H}_1}; \mathbf{0}]$, $\mathbf{E}_{\theta_1,c}\,[1, \mathbf{n}] = \mathbf{U}_{\theta_1,c}\,[1, \mathbf{n}, \mathbb{I}_{\mathfrak{H}_1}; \mathbf{0}]$. Тому,

згідно з наслідком 3.88, отримуємо співвідношення:

$$\mathfrak{p}_1 \Uparrow^{+}_{\mathcal{F}} \mathfrak{m}_1, \qquad \mathfrak{m}_1 \Uparrow^{+}_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}_1. \tag{3.134}$$

З іншої сторони, використовуючи формулу (3.4) та лему A.36, отримуємо:

$$[\mathfrak{p}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_1] = [\mathfrak{p}_1 \leftarrow \mathfrak{m}_1]\,[\mathfrak{m}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_1] = \mathbf{E}_{\theta,c}\,[1,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1,c}\,[1,\mathbf{n}] = \mathbf{U}_{\theta\theta_1^{-1},c}\,[-1,\mathbf{n},\mathbb{I}_{-1,1}\,[\mathbf{n}]]\,,$$

де, згідно з формулою (A.120), $\mathbb{I}_{-1,1}\,[\mathbf{n}] \in \mathfrak{U}\,(\mathfrak{H}_1)$, а з нерівностей $\theta, \theta_1 \in (-1,0)$ і $\theta_1 \leq \theta$ випливає, що $\theta\theta_1^{-1} \in (0,1)$. Отже, згідно з наслідком 3.88, маємо $\mathfrak{p}_1 \Downarrow^{-}_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}_1$. Таким чином, для систем відліку $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{m}_1, \mathfrak{p}_1$ виконуються співвідношення (3.134), проте не виконується співвідношення $\mathfrak{p}_1 \Uparrow^{+}_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}_1$. Таким чином, бінарне відношення $\Uparrow^{+}_{\mathcal{F}}$ не є транзитивним на множині $\mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$.

3.9.5. Теорема про неповернення.

Означення 3.92. Універсальну кінематику $\mathcal{F}$ будемо називати **слабко часопозитивною**, якщо існує хоч одна система відліку $\mathfrak{l}_0 \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ така, що для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ має місце співвідношення, $\mathfrak{l}_0 \Uparrow^{+}_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$.

Зауваження 3.93. Крім слабкої часопозитивності можна ввести також іншу (сильнішу) форму часопозитивності. Універсальну кінематику $\mathcal{F}$ будемо називати **часопозитивною**, якщо для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ має місце співвідношення $\mathfrak{l} \Uparrow^{+}_{\mathcal{F}} \mathfrak{m}$.

Розглянемо довільну кінематику виду, $\mathcal{F} = \mathfrak{UP}\,(\mathfrak{H},\mathcal{B},c) = \mathfrak{Ku}\,(\mathfrak{P}_+\,(\mathfrak{H},c)\,,\mathcal{B};\,\mathfrak{H})$ (нагадаємо, що кінематики виду $\mathfrak{UP}\,(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ були ведені в розділі 3.4 (див. формулу (3.38)), і пов'язані із (класичною) спеціальною теорією відносності. Оскільки, згідно з наслідком 2.19, клас операторів $\mathfrak{P}_+\,(\mathfrak{H},c)$ утворює групу операторів над простором $\mathcal{M}\,(\mathfrak{H})$, то аналогічно до формули (3.133) довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ отримуємо рівність:

$$\mathbb{UP}(\mathfrak{l}) = \{[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}] \mid \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})\} = \left\{\mathbf{V}\mathbf{U}^{-1} \mid \mathbf{V} \in \mathfrak{P}_+\,(\mathfrak{H},c)\right\} = \mathfrak{P}_+\,(\mathfrak{H},c)\,. \tag{3.135}$$

Використовуючи формулу (3.135) та наслідок 3.87, отримуємо такий наслідок:

Наслідок 3.94. *Нехай, $\mathcal{B}$ — довільна базова мінлива множина така, що $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathfrak{H}$ і $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = (\mathbb{R},\leq)$. Тоді універсальна кінематика $\mathfrak{UP}\,(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ є часопозитивною (а отже і слабко часопозитивною).*

Наступна теорема встановлює достатню ознаку часонезворотності для універсальних кінематик.

Теорема 3.95 (про неповернення)**.** *Будь-яка слабко часопозитивна універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є часонезворотною.*

Для доведення теореми нам знадобляться деякі допоміжні твердження.

Твердження 3.96. *Нехай* $\widehat{\mathbf{A}} \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{F})$ *— мінлива система універсальної кінематики* $\mathcal{F}$*, причому* $\widehat{\mathbf{A}}_{\{\mathfrak{l}_0\}} \in \mathbb{L}g\,(\mathfrak{l}_0)$ *для деякої системи відліку* $\mathfrak{l}_0 \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$*. І нехай* $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ *часоневід'ємна система відліку відносно* $\mathfrak{l}_0$ *(тобто* $\mathfrak{l} \Uparrow_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}_0$*).*

Тоді для довільних $\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2 \in \widehat{\mathbf{A}}$ *з нерівності* $\mathsf{tm}\left(\left(\hat{\omega}_1\right)_{\{\mathfrak{l}_0\}}\right) \leq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left(\left(\hat{\omega}_2\right)_{\{\mathfrak{l}_0\}}\right)$ *випливає нерівність* $\mathsf{tm}\left(\left(\hat{\omega}_1\right)_{\{\mathfrak{l}\}}\right) \leq_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}\left(\left(\hat{\omega}_2\right)_{\{\mathfrak{l}\}}\right)$.

Доведення. Нехай, при умовах твердження, $\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2 \in \widehat{\mathbf{A}}$ і $\mathsf{tm}\left(\left(\hat{\omega}_1\right)_{\{\mathfrak{l}_0\}}\right) \leq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left(\left(\hat{\omega}_2\right)_{\{\mathfrak{l}_0\}}\right)$. Тоді, за означенням координат Мінковського (див. формулу 2.4), маємо $\mathsf{tm}\,(\omega) = \mathsf{tm}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0 \rangle}(\omega)\right)$ $(\forall\, \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l}_0))$. Тому:

$$\mathsf{tm}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0 \rangle}\left(\left(\hat{\omega}_1\right)_{\{\mathfrak{l}_0\}}\right)\right) \leq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0 \rangle}\left(\left(\hat{\omega}_2\right)_{\{\mathfrak{l}_0\}}\right)\right). \tag{3.136}$$

Оскільки $\left(\hat{\omega}_1\right)_{\{\mathfrak{l}_0\}}, \left(\hat{\omega}_2\right)_{\{\mathfrak{l}_0\}} \in \widehat{\mathbf{A}}_{\{\mathfrak{l}_0\}}$ (де $\widehat{\mathbf{A}}_{\{\mathfrak{l}_0\}} \in \mathbb{L}g\,(\mathfrak{l}_0)$) то, за означенням 3.76 (пункти (а),(б)), маємо:

$$\mathsf{bs}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0 \rangle}\left(\left(\hat{\omega}_1\right)_{\{\mathfrak{l}_0\}}\right)\right) = \mathsf{bs}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0 \rangle}\left(\left(\hat{\omega}_2\right)_{\{\mathfrak{l}_0\}}\right)\right). \tag{3.137}$$

Оскільки $\mathfrak{l} \Uparrow_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}_0$ то, за означенням 3.83 (пункт 1) з нерівностей (3.136), (3.137), випливає нерівність, $\mathsf{tm}\left([\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l}_0]\,\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0 \rangle}\left(\left(\hat{\omega}_1\right)_{\{\mathfrak{l}_0\}}\right)\right) \leq_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}\left([\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l}_0]\,\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0 \rangle}\left(\left(\hat{\omega}_2\right)_{\{\mathfrak{l}_0\}}\right)\right)$. Звідси, використовуючи формулу (3.2), отримуємо, $\mathsf{tm}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}\left(\langle !\, \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l}_0 \rangle\,\left(\hat{\omega}_1\right)_{\{\mathfrak{l}_0\}}\right)\right) \leq_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}\left(\langle !\, \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l}_0 \rangle\,\left(\hat{\omega}_2\right)_{\{\mathfrak{l}_0\}}\right)\right)$. З останньої нерівності, використовуючи твердження 3.71, отримаємо нерівність:

$$\mathsf{tm}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}\left(\left(\hat{\omega}_1\right)_{\{\mathfrak{l}\}}\right)\right) \leq_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}\left(\left(\hat{\omega}_2\right)_{\{\mathfrak{l}\}}\right)\right). \tag{3.138}$$

За означенням координат Мінковського (див. формулу 2.4), для довільного $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ маємо рівність $\mathsf{tm}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega)\right) = \mathsf{tm}\,(\omega)$. Тому, з нерівності (3.138) випливає бажана нерівність $\mathsf{tm}\left(\left(\hat{\omega}_1\right)_{\{\mathfrak{l}\}}\right) \leq_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}\left(\left(\hat{\omega}_2\right)_{\{\mathfrak{l}\}}\right)$. □

Твердження 3.97. *Нехай,* $\mathcal{A} = \left(\widehat{\mathbf{A}},\, \left(\widehat{\mathbf{A}}_1, \mathfrak{l}_1\right), \cdots, \left(\widehat{\mathbf{A}}_n, \mathfrak{l}_n\right)\right)$ *(*$n \in \mathbb{N}$*) — замкнутий кусково геометрично-стаціонарний ланцюговий шлях універсальної кінематики* $\mathcal{F}$ *і* $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ *— система відліку така, що* $\mathfrak{l} \Uparrow_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}_i$ *для кожного* $i \in \overline{1,n}$*. Тоді для довільного* $\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{A}}$ *справедлива нерівність:*

$$\mathsf{tm}\left(\mathsf{po}\,(\mathcal{A})_{\{\mathfrak{l}\}}\right) \leq_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}\left(\hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}\}}\right) \leq_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}\left(\mathsf{ki}\,(\mathcal{A})_{\{\mathfrak{l}\}}\right). \tag{3.139}$$

Доведення. Нехай, $\mathcal{F}$ — універсальна кінематика і $\mathcal{A} = \left(\widehat{\mathbf{A}},\, \left(\widehat{\mathbf{A}}_1, \mathfrak{l}_1\right), \cdots, \left(\widehat{\mathbf{A}}_n, \mathfrak{l}_n\right)\right)$

$(n \in \mathbb{N})$ — замкнутий кусково геометрично-стаціонарний ланцюговий шлях $\mathcal{F}$. Нехай, $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ — система відліку така, що $\mathfrak{l} \Uparrow_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}_i \ \ (\forall\, i \in \overline{1,n})$.

1) Спочатку доведемо, що для довільного $\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{A}}$ справедлива нерівність:

$$\mathsf{tm}\left(\mathsf{po}\,(\mathcal{A})_{\{\mathfrak{l}\}}\right) \leq_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}\left(\hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}\}}\right). \tag{3.140}$$

За означенням 3.74 (пункт (б)), $\widehat{\mathbf{A}} = \bigcup_{k=1}^{n} \widehat{\mathbf{A}}_k$. Отже, нерівність (3.140) досить довести для $\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{A}}_k$ $(k \in \overline{1,n})$.

1.а) Спочатку доведемо нерівність (3.140) для $\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{A}}_1$. За означенням 3.77 (пункт 1), отримуємо, що $\mathsf{po}\,(\mathcal{A}) \in \widehat{\mathbf{A}}_1$ і для довільного $\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{A}}_1$ маємо:

$$\mathsf{tm}\left(\mathsf{po}\,(\mathcal{A})_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right) \leq_{\mathfrak{l}_1} \mathsf{tm}\left(\hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}_1\}}\right). \tag{3.141}$$

Як було зазначено вище, $\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{A}}_1$ і $\mathsf{po}\,(\mathcal{A}) \in \widehat{\mathbf{A}}_1$, де, за означенням 3.76 (пункт (в)), $\left(\widehat{\mathbf{A}}_1\right)_{\{\mathfrak{l}_1\}} \in \mathbb{L}g\,(\mathfrak{l}_1)$. Крім того, за умовою твердження, $\mathfrak{l} \Uparrow_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}_1$. Отже, на основі твердження 3.96, із співвідношення (3.141) випливає нерівність $\mathsf{tm}\left(\mathsf{po}\,(\mathcal{A})_{\{\mathfrak{l}\}}\right) \leq_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}\left(\hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}\}}\right)$. Отже, у випадку $\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{A}}_1$ нерівність (3.140) доведена. Крім того ця нерівність доведена для всіх $\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{A}}$ у випадку $n = 1$. Тому, надалі будемо вважати, що $n > 1$.

1.б) Припустимо, що нерівність (3.140) справедлива для всіх $\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{A}}_{k-1}$, де $k \in \overline{2,n}$. Доведемо, що тоді ця нерівність справедлива і для $\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{A}}_k$.

У випадку $\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{A}}_k \cap \widehat{\mathbf{A}}_{k-1}$ маємо (3.140) за індуктивним припущенням. Отже, залишилось довести цю нерівність для $\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{A}}_k \setminus \widehat{\mathbf{A}}_{k-1}$. Згідно з пунктом (в) означення 3.74, маємо, $\widehat{\mathbf{A}}_k \cap \widehat{\mathbf{A}}_{k-1} \neq \emptyset$. Отже, існує елемент $\hat{\eta} \in \widehat{\mathbf{A}}_k \cap \widehat{\mathbf{A}}_{k-1}$. З умов,

$$\hat{\eta} \in \widehat{\mathbf{A}}_k \cap \widehat{\mathbf{A}}_{k-1} \quad \text{і} \quad \hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{A}}_k \setminus \widehat{\mathbf{A}}_{k-1}, \tag{3.142}$$

випливає, що $\hat{\eta}_{\{\mathfrak{l}_k\}} \in \left(\widehat{\mathbf{A}}_k \cap \widehat{\mathbf{A}}_{k-1}\right)_{\{\mathfrak{l}_k\}}$, $\hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}_k\}} \in \left(\widehat{\mathbf{A}}_k \setminus \widehat{\mathbf{A}}_{k-1}\right)_{\{\mathfrak{l}_k\}}$. Отже, згідно з пунктом (д) означення 3.74, отримуємо:

$$\mathsf{tm}\left(\hat{\eta}_{\{\mathfrak{l}_k\}}\right) \leq_{\mathfrak{l}_k} \mathsf{tm}\left(\hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}_k\}}\right). \tag{3.143}$$

Згідно з (3.142), маємо, $\hat{\eta}$, $\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{A}}_k$, де, згідно з пунктом (в) означення 3.76, $\left(\widehat{\mathbf{A}}_k\right)_{\{\mathfrak{l}_k\}} \in \mathbb{L}g\,(\mathfrak{l}_k)$. Оскільки $\mathfrak{l} \Uparrow_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}_k$, то, згідно з твердженням 3.96 на основі нерівності (3.143) отримуємо нерівність:

$$\mathsf{tm}\left(\hat{\eta}_{\{\mathfrak{l}\}}\right) \leq_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}\left(\hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}\}}\right). \tag{3.144}$$

Згідно з (3.142), маємо, $\hat{\eta} \in \widehat{\mathbf{A}}_{k-1}$. Отже, за індуктивною гіпотезою, одержуємо:

$$\mathsf{tm}\left(\mathsf{po}\left(\mathcal{A}\right)_{\{\mathfrak{l}\}}\right) \leq_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}\left(\hat{\eta}_{\{\mathfrak{l}\}}\right). \tag{3.145}$$

З нерівностей (3.144) і (3.145) випливає нерівність (3.140).

Таким чином, за принципом математичної індукції, нерівність (3.140) справедлива для довільного $\hat{\omega} \in \bigcup_{k=1}^{n} \widehat{\mathbf{A}}_k = \widehat{\mathbf{A}}$.

2) Доведемо, що для довільного $\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{A}}$ справедлива нерівність:

$$\mathsf{tm}\left(\hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}\}}\right) \leq_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}\left(\mathsf{ki}\left(\mathcal{A}\right)_{\{\mathfrak{l}\}}\right). \tag{3.146}$$

2.а) Спочатку доведемо нерівність (3.146) для $\omega \in \widehat{\mathbf{A}}_n$. За означенням 3.77 (пункт 2), отримуємо, що $\mathsf{ki}\left(\mathcal{A}\right) \in \widehat{\mathbf{A}}_n$, і для $\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{A}}_n$ справедлива нерівність:

$$\mathsf{tm}\left(\hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}_n\}}\right) \leq_{\mathfrak{l}_n} \mathsf{tm}\left(\mathsf{ki}\left(\mathcal{A}\right)_{\{\mathfrak{l}_n\}}\right). \tag{3.147}$$

Як було зазначено вище, $\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{A}}_n$ і $\mathsf{ki}\left(\mathcal{A}\right) \in \widehat{\mathbf{A}}_n$, де, за означенням 3.76 (пункт (в)), $\left(\widehat{\mathbf{A}}_n\right)_{\{\mathfrak{l}_n\}} \in \mathbb{L}g\left(\mathfrak{l}_n\right)$. Крім того, за умовою твердження, $\mathfrak{l} \Uparrow_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}_n$. Отже, на основі твердження 3.96, із співвідношення (3.147) випливає нерівність (3.146). Отже, у випадку $\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{A}}_n$ нерівність (3.146) доведена. Крім того ця нерівність доведена для всіх $\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{A}}$ у випадку $n = 1$. Тому, надалі будемо вважати, що $n > 1$.

2.б) Припустимо, що нерівність (3.146) справедлива для $\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{A}}_{k+1}$, де $k \in \overline{1, n-1}$. Доведемо, що тоді ця нерівність справедлива і для $\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{A}}_k$.

У випадку $\omega \in \widehat{\mathbf{A}}_k \cap \widehat{\mathbf{A}}_{k+1}$ нерівність (3.146) справедлива за індуктивним припущенням. Отже, залишилось довести цю нерівність для всіх $\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{A}}_k \setminus \widehat{\mathbf{A}}_{k+1}$. Згідно з пунктом (в) означення 3.74, маємо $\widehat{\mathbf{A}}_k \cap \widehat{\mathbf{A}}_{k+1} \neq \emptyset$. Отже, існує хоча б один елемент $\hat{\eta}$ такий, що $\hat{\eta} \in \widehat{\mathbf{A}}_k \cap \widehat{\mathbf{A}}_{k+1}$. Враховуючи, що

$$\hat{\eta} \in \widehat{\mathbf{A}}_k \cap \widehat{\mathbf{A}}_{k+1} \quad \text{і} \quad \hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{A}}_k \setminus \widehat{\mathbf{A}}_{k+1}, \tag{3.148}$$

одержуємо співвідношення $\hat{\eta}_{\{\mathfrak{l}_k\}} \in \left(\widehat{\mathbf{A}}_k \cap \widehat{\mathbf{A}}_{k+1}\right)_{\{\mathfrak{l}_k\}}$, $\hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}_k\}} \in \left(\widehat{\mathbf{A}}_k \setminus \widehat{\mathbf{A}}_{k+1}\right)_{\{\mathfrak{l}_k\}}$. Отже, згідно з пунктом (г) означення 3.74, отримуємо:

$$\mathsf{tm}\left(\hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}_k\}}\right) \leq_{\mathfrak{l}_k} \mathsf{tm}\left(\hat{\eta}_{\{\mathfrak{l}_k\}}\right). \tag{3.149}$$

Згідно з (3.148), маємо $\hat{\eta}$, $\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{A}}_k$, де, згідно з пунктом (в) означення 3.76, $\left(\widehat{\mathbf{A}}_k\right)_{\{\mathfrak{l}_k\}} \in \mathbb{L}g\left(\mathfrak{l}_k\right)$. Тому, оскільки $\mathfrak{l} \Uparrow_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}_k$, то, згідно з твердженням 3.96 на основі нерівності

(3.149) отримуємо нерівність:

$$\mathsf{tm}\left(\hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}\}}\right) \leq_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}\left(\hat{\eta}_{\{\mathfrak{l}\}}\right). \tag{3.150}$$

Згідно з (3.148), маємо, $\hat{\eta} \in \widehat{\mathbf{A}}_{k+1}$. Отже, за індуктивним припущенням, одержуємо:

$$\mathsf{tm}\left(\hat{\eta}_{\{\mathfrak{l}\}}\right) \leq_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}\left(\mathsf{ki}\left(\mathcal{A}\right)_{\{\mathfrak{l}\}}\right). \tag{3.151}$$

З нерівностей (3.150) і (3.151) випливає нерівність (3.146). Таким чином, за принципом математичної індукції, нерівність (3.146) справедлива для довільного $\hat{\omega} \in \bigcup_{k=1}^{n} \widehat{\mathbf{A}}_k = \widehat{\mathbf{A}}$.

Нерівність (3.139) випливає з (3.140) та (3.146). □

Доведення теореми 3.95. Нехай, $\mathcal{F}$ — слабко часопозитивна універсальна кінематика. Тоді, за означенням 3.92, існує система відліку $\mathfrak{l}_0 \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$ така, що:

$$\forall\, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right) \quad \mathfrak{l}_0 \Uparrow^{+}_{\mathcal{F}} \mathfrak{m}. \tag{3.152}$$

Нехай, $\mathcal{A} = \left(\widehat{\mathbf{A}}, \left(\widehat{\mathbf{A}}_1, \mathfrak{l}_1\right), \cdots, \left(\widehat{\mathbf{A}}_n, \mathfrak{l}_n\right)\right)$ $(n \in \mathbb{N})$ — кусково геометрично-стаціонарний ланцюговий шлях в кінематиці $\mathcal{F}$, який є геометрично-циклічним відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$. Тоді, за означенням 3.80, $\mathcal{A}$ є замкнутим ланцюговим шляхом. Згідно з твердженням 3.84, із співвідношення (3.152) випливає, що $\mathfrak{l}_0 \Uparrow_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}_k$ $(\forall k \in \overline{1,n})$. Отже, використовуючи твердження 3.97, маємо:

$$\mathsf{tm}\left(\mathsf{po}\left(\mathcal{A}\right)_{\{\mathfrak{l}_0\}}\right) \leq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left(\mathsf{ki}\left(\mathcal{A}\right)_{\{\mathfrak{l}_0\}}\right). \tag{3.153}$$

Припустимо, що $\mathsf{tm}\left(\mathsf{ki}\left(\mathcal{A}\right)_{\{\mathfrak{l}\}}\right) <_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}\left(\mathsf{po}\left(\mathcal{A}\right)_{\{\mathfrak{l}\}}\right)$. Тоді, за означенням координат Мінковського (див. формулу 2.4), отримуємо:

$$\mathsf{tm}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\mathsf{ki}\left(\mathcal{A}\right)_{\{\mathfrak{l}\}}\right)\right) <_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\mathsf{po}\left(\mathcal{A}\right)_{\{\mathfrak{l}\}}\right)\right). \tag{3.154}$$

Оскільки шлях $\mathcal{A}$ є геометрично-циклічним відносно системи відліку $\mathfrak{l}$, то, за означенням 3.80, маємо:

$$\mathsf{bs}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\mathsf{po}\left(\mathcal{A}\right)_{\{\mathfrak{l}\}}\right)\right) = \mathsf{bs}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\mathsf{ki}\left(\mathcal{A}\right)_{\{\mathfrak{l}\}}\right)\right). \tag{3.155}$$

Оскільки (згідно (3.152)) $\mathfrak{l}_0 \Uparrow^{+}_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$, то із співвідношень (3.154), (3.155), за означенням 3.83 (пункт 2), випливає нерівність:

$$\mathsf{tm}\left(\left[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}\right] \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\mathsf{ki}\left(\mathcal{A}\right)_{\{\mathfrak{l}\}}\right)\right) <_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left(\left[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}\right] \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\mathsf{po}\left(\mathcal{A}\right)_{\{\mathfrak{l}\}}\right)\right).$$

Звідси, використовуючи формулу (3.2), отримуємо нерівність:

$$\mathsf{tm}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0\rangle}\left(\langle!\,\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}\rangle\,\mathsf{ki}\,(\mathcal{A})_{\{\mathfrak{l}\}}\right)\right) <_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0\rangle}\left(\langle!\,\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}\rangle\,\mathsf{po}\,(\mathcal{A})_{\{\mathfrak{l}\}}\right)\right).$$

З урахуванням твердження 3.71, остання нерівність набуває вигляду, $\mathsf{tm}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0\rangle}\left(\mathsf{ki}\,(\mathcal{A})_{\{\mathfrak{l}_0\}}\right)\right) <_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0\rangle}\left(\mathsf{po}\,(\mathcal{A})_{\{\mathfrak{l}_0\}}\right)\right)$, і за означенням координат Мінковського (див. формулу 2.4), отримуємо, $\mathsf{tm}\left(\mathsf{ki}\,(\mathcal{A})_{\{\mathfrak{l}_0\}}\right) <_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left(\mathsf{po}\,(\mathcal{A})_{\{\mathfrak{l}_0\}}\right)$. Але, остання нерівність суперечить співвідношенню (3.153). Отже, припущення про те, що $\mathsf{tm}\left(\mathsf{ki}\,(\mathcal{A})_{\{\mathfrak{l}\}}\right) <_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}\left(\mathsf{po}\,(\mathcal{A})_{\{\mathfrak{l}\}}\right)$ — помилкове. Тому:

$$\mathsf{tm}\left(\mathsf{po}\,(\mathcal{A})_{\{\mathfrak{l}\}}\right) \leq_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}\left(\mathsf{ki}\,(\mathcal{A})_{\{\mathfrak{l}\}}\right). \tag{3.156}$$

Таким чином, для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ і для довільного кусково геометрично-стаціонарного в кінематиці $\mathcal{F}$ ланцюгового шляху $\mathcal{A}$, який є геометрично-циклічним в системі відліку $\mathfrak{l}$ виконується нерівність (3.156). Тому, за означенням 3.82, кінематика $\mathcal{F}$ є часонезворотною, що й треба було довести. □

3.9.6. Безумовна часонезворотність. Підсилений варіант теореми про неповернення.

Нагадаємо, що в підрозділі 3.5 (див. означення 3.12) було введено поняття еквівалентних відносно перетворень координат універсальних кінематик $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{F}_2$ $(\mathcal{F}_1\,[\equiv]\,\mathcal{F}_2)$.

Означення 3.98. Будемо говорити, що універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є **безумовно часонезворотною**, якщо часонезворотною є довільна кінематика $\mathcal{F}_1$ така, що $\mathcal{F}\,[\equiv]\,\mathcal{F}_1$. В протилежному випадку говоритимемо, що $\mathcal{F}$ є **умовно часозворотною**.

Оскільки, згідно твердженням 3.13, $\mathcal{F}\,[\equiv]\,\mathcal{F}$ (для довільної універсальної кінематики $\mathcal{F}$), то отримуємо наступний наслідок з означення 3.98:

Наслідок 3.99. *Будь-яка безумовно часонезворотна універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є часонезворотною.*

Можна довести, що твердження, обернене до наслідка 3.99 — хибне, тобто існують часонезворотні універсальні кінематики, які не є безумовно часонезворотними (тобто є умовно часозворотними).

Фізичний зміст поняття безумовно часонезворотної кінематики полягає в тому, що в таких кінематиках, в принципі, неможливі "часові парадокси", що полягають в існуванні потенційної можливості вплинути на власне минуле. Навпаки, в умовно часозворотних кінематиках існує потенційна можливість "прийти" на початок власного шляху у минулому часі, а отже і змінити власне минуле, хоча, в часонезворотних, але умовно часозворотних, кінематиках така можливість реально не реалізована у тому сценарії еволюції, що діє у відповідній кінематиці.

Твердження 3.100. *Якщо універсальна кінематика $\mathcal{F}$ — слабко часопозитивна і $\mathcal{F}_1 [\equiv] \mathcal{F}$, то універсальна кінематика $\mathcal{F}_1$ також є слабко часопозитивною.*

Доведення. Нехай $\mathcal{F}$ — слабко часопозитивна універсальна кінематика і $\mathcal{F}_1 [\equiv] \mathcal{F}$. Нагадаємо, що в підрозділі 3.7 (див. формулу 3.64) для довільної системи відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ було введено споріднену з $\mathfrak{m}$ систему відліку у кінематиці $\mathcal{F}_1$: $\mathfrak{m} \lfloor_{\mathcal{F}_1} = \mathbf{lk}_{\mathtt{ind}(\mathfrak{m})}(\mathcal{F}_1)$. Оскільки кінематика $\mathcal{F}$ — слабко часопозитивна, то, за означенням 3.92, існує система відліку $\mathfrak{l}_0 \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ така, що для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ має місце співвідношення: $\mathfrak{l}_0 \Uparrow^{+}_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$. Покладемо: $\mathfrak{l}_0^{(1)} := \mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}$. Розглянемо довільну систему відліку $\mathfrak{l}^{(1)} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F}_1)$. Покладемо: $\mathfrak{l} := \mathfrak{l}^{(1)} \lfloor_{\mathcal{F}} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$. Тоді, згідно з властивістю 3.44(2) і формулою (3.64), маємо, $\mathfrak{l}^{(1)} = \mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_1} = \mathbf{lk}_{\mathtt{ind}(\mathfrak{l})}(\mathcal{F}_1)$. Отже, враховуючи формулу (3.64), означення 3.12 (пункт 2), і властивість 3.44(1), отримуємо:

$$\mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}_0^{(1)}; \mathcal{F}_1\right) = \mathbb{M}k\left(\mathbf{lk}_{\mathtt{ind}(\mathfrak{l}_0)}(\mathcal{F}_1); \mathcal{F}_1\right) = \mathbb{M}k\left(\mathbf{lk}_{\mathtt{ind}(\mathfrak{l}_0)}(\mathcal{F}); \mathcal{F}\right) = \mathbb{M}k(\mathfrak{l}_0; \mathcal{F});$$
$$\mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}^{(1)}; \mathcal{F}_1\right) = \mathbb{M}k(\mathfrak{l}; \mathcal{F}). \tag{3.157}$$

Аналогічно, з використанням означення 3.12 (пункт 2) доводяться рівності:

$$\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{l}_0^{(1)}\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}_0); \quad \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{l}^{(1)}\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}) \tag{3.158}$$

(де (за означенням) $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{m}) = (\mathbf{Tm}(\mathfrak{m}), \leq_{\mathfrak{m}})$ $(\forall\, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F}) \cup \mathcal{L}k(\mathcal{F}_1)))$. Далі, застосовуючи властивість 3.44(1), та означення 3.12 (пункт 3) отримуємо:

$$[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}] = \left[\mathbf{lk}_{\mathtt{ind}(\mathfrak{l}_0)}(\mathcal{F}) \leftarrow \mathbf{lk}_{\mathtt{ind}(\mathfrak{l})}(\mathcal{F}), \mathcal{F}\right] = \left[\mathbf{lk}_{\mathtt{ind}(\mathfrak{l}_0)}(\mathcal{F}_1) \leftarrow \mathbf{lk}_{\mathtt{ind}(\mathfrak{l})}(\mathcal{F}_1), \mathcal{F}_1\right] =$$
$$= [\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1} \leftarrow \mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_1}, \mathcal{F}_1] = \left[\mathfrak{l}_0^{(1)} \leftarrow \mathfrak{l}^{(1)}, \mathcal{F}_1\right]. \tag{3.159}$$

Беручи до уваги рівність (3.157), розглянемо довільні елементи $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}^{(1)}; \mathcal{F}_1\right) = \mathbb{M}k(\mathfrak{l}; \mathcal{F})$ такі, що $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2)$ і $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) <_{\mathfrak{l}^{(1)}} \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$. Тоді з рівностей (3.158), отримуємо нерівність $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) <_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$. Оскільки, за умовою, $\mathfrak{l}_0 \Uparrow^{+}_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$, то для елементів $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}; \mathcal{F})$, за означенням 3.83 (пункт 2), маємо нерівність $\mathsf{tm}([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}]\,\mathrm{w}_1) <_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}]\,\mathrm{w}_2)$. Звідси, використовуючи рівності (3.159) і (3.158), виводимо нерівність, $\mathsf{tm}\left(\left[\mathfrak{l}_0^{(1)} \leftarrow \mathfrak{l}^{(1)}, \mathcal{F}_1\right] \mathrm{w}_1\right) <_{\mathfrak{l}_0^{(1)}} \mathsf{tm}\left(\left[\mathfrak{l}_0^{(1)} \leftarrow \mathfrak{l}^{(1)}, \mathcal{F}_1\right] \mathrm{w}_2\right)$. Беручи до уваги довільність вибору елементів $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}^{(1)}; \mathcal{F}_1\right)$ таких, що $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2)$ і $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) <_{\mathfrak{l}^{(1)}} \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$, за означенням 3.83 (пункт 2), отримуємо співвідношення $\mathfrak{l}_0^{(1)} \Uparrow^{+}_{\mathcal{F}_1} \mathfrak{l}^{(1)}$ (для довільної системи відліку $\mathfrak{l}^{(1)} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F}_1)$. Тому, за означенням 3.92, кінематика $\mathcal{F}_1$ є слабко часопозитивною. □

Твердження 3.100 і теорема 3.95 дають можливість сформулювати наступний (підсилений) варіант теореми про неповернення:

Теорема 3.101. *Будь-яка слабко часопозитивна універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є* ***безумовно*** *часонезворотною.*

З теореми 3.101 та наслідку 3.94 отримуємо наступний наслідок (з якого випливає висновок про часонезворотність (класичної) спеціальної теорії відносності):

Наслідок 3.102. *Нехай, $\mathcal{B}$ — довільна базова мінлива множина така, що $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathfrak{H}$ і $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \leq)$. Тоді універсальна кінематика $\mathfrak{UP}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$ є безумовно часонезворотною.*

3.9.7. Про фізичну інтерпретацію теореми про неповернення.

З фізичної точки зору можна уявляти, що довільна універсальна кінематика $\mathcal{F}$ являє собою певний абстрактний "світ", який не обов'язково збігається з нашим. В кожному такому "світі" $\mathcal{F}$ існує фіксована для цього "світу" множина систем відліку $\mathcal{L}k(\mathcal{F})$. Домовимось уявляти, що для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ стрілки годинника, нерухомого відносно системи відліку $\mathfrak{l}$ обертаються за годинниковою стрілкою в системі відліку $\mathfrak{l}$. Будемо говорити, що система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є *часододатною* відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ (тобто, що $\mathfrak{m} \Uparrow^{+}_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}$) тоді і тільки тоді, коли спостерігач у системі відліку $\mathfrak{m}$ (нерухомий відносно $\mathfrak{m}$) бачить, що стрілки годинника нерухомого відносно системи відліку $\mathfrak{l}$ обертаються за годинниковою стрілкою також і в системі відліку $\mathfrak{m}$ (див. означення 3.83, пункт 2). Тут ми абстрагуємося від чисто фізичного питання, яким чином спостерігач в системі відліку $\mathfrak{m}$ може "бачити" годинник, що знаходиться в іншій системі відліку $\mathfrak{l}$. З математичної точки зору можливість спостерігати годинник, пов'язаний з іншою системою відліку, гарантується існуванням універсального перетворення координат між будь-якими двома системами відліку універсальної кінематики ("світу") $\mathcal{F}$ (за означенням 3.1). Згідно із зауваженням 3.90, бінарне відношення $\Uparrow^{+}_{\mathcal{F}}$ завжди є рефлексивним, проте, взагалі кажучи, не є ні симетричним ні транзитивним на множині $\mathcal{L}k(\mathcal{F})$ систем відліку $\mathcal{F}$.

Також будемо припускати, що у розглядуваному "світі" (універсальній кінематиці) $\mathcal{F}$ можуть існувати міжсистемні мандрівники. Такі мандрівники можуть скінченну кількість разів перескакувати з однієї системи відліку в іншу, що проходить повз них (подібно до того, як ми можемо заскочити у трамвай, що проходить повз нас).

З фізичної точки зору теорема 3.101 стверджує, що *якщо у розглядуваному "світі" $\mathcal{F}$ існує хоча б одна система відліку $\mathfrak{l}_0 \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$, яка є часододатною відносно довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$, то в цьому "світі" часові парадокси, пов'язані з можливістю повернення до власного минулого, — неможливі.* Це означає, що довільний міжсистемний мандрівник, що стартував в довільній точці x довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ не може закінчити свій шлях в тій же самій точці x тієї ж самої системи відліку $\mathfrak{l}$ у минулому часі.

3.9.8. Достатня ознака умовної часозворотності. Корисною для встановлення умовної часозворотності деяких тахіонових кінематик є наступна теорема.

Теорема 3.103. *Нехай, в універсальній кінематиці $\mathcal{F}$ існують системи відліку $\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2 \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ і елементи $\mathrm{w}_0 \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}_0) \cap \mathbb{M}k(\mathfrak{l}_1)$, $\mathrm{w}_1 \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}_1) \cap \mathbb{M}k(\mathfrak{l}_2)$, $\mathrm{w}_2 \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}_2)$, $\mathrm{w}_0' \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}_0)$, що задовольняють такі умови:*

1. $\mathfrak{l}_0 \Downarrow_{\mathcal{F}}^{-} \mathfrak{l}_1$ *і* $\mathfrak{l}_0 \Downarrow_{\mathcal{F}}^{-} \mathfrak{l}_2$.
2. $[\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_0]\,\mathrm{w}_0 = \mathrm{w}_0$; $[\mathfrak{l}_2 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1 = \mathrm{w}_1$; $[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_2]\,\mathrm{w}_2 = \mathrm{w}_0'$.
3. $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_0) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_0')$.
4. $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_0) \leq_{\mathfrak{l}_1} \mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) \leq_{\mathfrak{l}_2} \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$, *і при цьому має місце хоч одна із (строгих) нерівностей* $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_0) <_{\mathfrak{l}_1} \mathsf{tm}(\mathrm{w}_1)$ *або* $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) <_{\mathfrak{l}_2} \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$.

Тоді універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є умовно часозворотною.

Доведення. Нехай виконуються умови теореми. Покладемо:

$$\mathbf{r}_1 := \left\{ [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w} \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}_1),\ \mathsf{bs}(\mathrm{w}) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_0), \\ \quad \mathsf{tm}(\mathrm{w}_0) \leq_{\mathfrak{l}_1} \mathsf{tm}(\mathrm{w}) \leq_{\mathfrak{l}_1} \mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) \end{array} \right\}; \tag{3.160}$$

$$\mathbf{r}_2 := \left\{ [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_2]\,\mathrm{w} \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}_2),\ \mathsf{bs}(\mathrm{w}) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_1), \\ \quad \mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) \leq_{\mathfrak{l}_2} \mathsf{tm}(\mathrm{w}) \leq_{\mathfrak{l}_2} \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2); \end{array} \right\}; \tag{3.161}$$

$$\mathbf{r} := \mathbf{r}_1 \cup \mathbf{r}_2. \tag{3.162}$$

Для доведення теореми, нижче буде встановлено деякі властивості множин $\mathbf{r}$,$\mathbf{r}_1$ і $\mathbf{r}_2$

r1^0) $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r} \subseteq \mathbb{M}k(\mathfrak{l}_0)$.

Справді, дана властивість випливає з формул (3.160), (3.161), (3.162) та означень універсальних кінематик і універс. перетворень координат (див. означення 3.1 та 2.6).

r2^0) $\mathbf{r}_1$ *і* $\mathbf{r}_2$ *є абстрактними траєкторіями з* $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}_0)$ *в* $\mathbf{Zk}(\mathfrak{l}_0)$ (в сенсі означення 1.49).

Справді, нехай $\mathrm{w}_1', \mathrm{w}_2' \in \mathbf{r}_1$ і $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1') = \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2')$. Доведемо, що $\mathrm{w}_1' = \mathrm{w}_2'$. Припустимо супротивне, $\mathrm{w}_1' \neq \mathrm{w}_2'$. За означенням $\mathbf{r}_1$ (див. (3.160)), існують $\mathrm{w}_1^{\sim}, \mathrm{w}_2^{\sim} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}_1)$ такі, що $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1^{\sim}) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2^{\sim}) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_0)$ і $[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_i^{\sim} = \mathrm{w}_i'$ ($i \in \overline{1,2}$). Оскільки, за припущенням, $\mathrm{w}_1' \neq \mathrm{w}_2'$ і, згідно з формулами (3.3), (3.4), відображення $[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]$ є бієкцією з $\mathbb{M}k(\mathfrak{l}_1)$ на $\mathbb{M}k(\mathfrak{l}_0)$, то $\mathrm{w}_1^{\sim} \neq \mathrm{w}_2^{\sim}$. Тому, з рівності $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1^{\sim}) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2^{\sim})$ випливає, що $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1^{\sim}) \neq \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2^{\sim})$. Отже, можливі лише два випадки: $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1^{\sim}) <_{\mathfrak{l}_1} \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2^{\sim})$ або $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_2^{\sim}) <_{\mathfrak{l}_1} \mathsf{tm}(\mathrm{w}_1^{\sim})$. Але, оскільки $\mathfrak{l}_0 \Downarrow_{\mathcal{F}}^{-} \mathfrak{l}_1$ і $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1^{\sim}) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2^{\sim})$, то, за означенням 3.83 (пункт 4), в обох випадках отримуємо співвідношення $\mathsf{tm}([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1^{\sim}) \neq \mathsf{tm}([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_2^{\sim})$, тобто $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1') \neq \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2')$, що

суперечить умові $\mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_1') = \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_2')$, сформульованій на початку доведення даної властивості. Отже, припущення про те, що $\mathrm{w}_1' \neq \mathrm{w}_2'$ — помилкове тому для довільних $\mathrm{w}_1', \mathrm{w}_2' \in \mathbf{r}_1$ з умови $\mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_1') = \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_2')$ випливає рівність $\mathrm{w}_1' = \mathrm{w}_2'$. Таким чином, враховуючи властивість $\mathrm{r}1^0$), отримуємо, що $\mathbf{r}_1$ є функцією з множини $\mathfrak{D}\,(\mathbf{r}_1) = \{\mathsf{tm}\,(\mathrm{w}') \mid \mathrm{w}' \in \mathbf{r}_1\} \subseteq \mathbf{Tm}\,(\mathfrak{l}_0)$ в множину $\mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l}_0)$, тобто абстрактною траєкторією з $\mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathfrak{l}_0)$ в $\mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l}_0)$. Аналогічно доводиться, що $\mathbf{r}_2$ є траєкторією з $\mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathfrak{l}_0)$ в $\mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l}_0)$.

$\mathbf{r3}^0$) $[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1 \in \mathbf{r}_1 \cap \mathbf{r}_2$.

З рівності (3.160) та умов 3 і 4 даної теореми випливає, що $[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1 \in \mathbf{r}_1$. Використовуючи рівність (3.161), маємо $[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_2]\,\mathrm{w}_1 \in \mathbf{r}_2$. А, згідно з формулою (3.4), $[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_2]\,\mathrm{w}_1 = [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,[\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_2]\,\mathrm{w}_1$. Звідси використовуючи умову даної теореми (пункт 2), і формули (3.3), (3.4), отримуємо: $[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_2]\,\mathrm{w}_1 = [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,[\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_2]\,[\mathfrak{l}_2 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1 = [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,[\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1 = [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1$. Таким чином,

$$[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1 = [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_2]\,\mathrm{w}_1 \in \mathbf{r}_2, \tag{3.163}$$

що й необхідно було довести.

$\mathbf{r4}^0$) *Для довільного елемента* $\mathrm{u}_1 \in \mathbf{r}_1$ *справедлива нерівність* $\mathsf{tm}\,(\mathrm{u}_1) \geq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\,([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1)$. *При цьому, якщо* $\mathrm{u}_1 \neq [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1$, *то виконується строга нерівність* $\mathsf{tm}\,(\mathrm{u}_1) >_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\,([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1)$.

Нехай, $\mathrm{u}_1 \in \mathbf{r}_1$. Тоді, згідно (3.160), існує елемент $\mathrm{u}_1^{\sim} \in \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l}_1)$ такий, що $\mathsf{bs}\,(\mathrm{u}_1^{\sim}) = \mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_0)$,

$$\mathsf{tm}\,(\mathrm{u}_1^{\sim}) \leq_{\mathfrak{l}_1} \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_1) \tag{3.164}$$

і $\mathrm{u}_1 = [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{u}_1^{\sim}$. Отже, оскільки, за умовою теореми (пункти 3 і 1),

$$\mathsf{bs}\,(\mathrm{u}_1^{\sim}) = \mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_0) = \mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_1) \tag{3.165}$$

і $\mathfrak{l}_0 \Downarrow_{\mathcal{F}}^{-} \mathfrak{l}_1$, то, згідно з твердженням 3.84 і означенням 3.83 (пункт 3), з нерівності (3.164) отримуємо нерівність:

$$\mathsf{tm}\,(\mathrm{u}_1) = \mathsf{tm}\,([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{u}_1^{\sim}) \geq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\,([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1)\,. \tag{3.166}$$

Якщо ж, додатково $\mathrm{u}_1 \neq [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1$, то нерівність (3.164) перетворюється в строгу [3.11], і замість нерівності (3.166), використовуючи означення 3.83 (пункт 4), отримаємо строгу нерівність $\mathsf{tm}\,(\mathrm{u}_1) >_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\,([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1)$, що й необхідно було довести.

[3.11] Справді, якщо припустити рівність $\mathsf{tm}\,(\mathrm{u}_1^{\sim}) = \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_1)$, то з рівності (3.165), отримаємо рівність $\mathrm{u}_1^{\sim} = \mathrm{w}_1$, а отже і рівність $\mathrm{u}_1 = [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{u}_1^{\sim} = [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1$.

r5^0) *Для довільного елемента* $\mathrm{u}_2 \in \mathbf{r}_2$ *справедлива нерівність* $\mathsf{tm}\left([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1\right) \geq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left(\mathrm{u}_2\right)$. *При цьому, якщо* $\mathrm{u}_2 \neq [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1$, *то виконується строга нерівність* $\mathsf{tm}\left([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1\right) >_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left(\mathrm{u}_2\right)$.

Нехай, $\mathrm{u}_2 \in \mathbf{r}_2$. Тоді, згідно (3.161), існує елемент $\mathrm{u}_2^{\sim} \in \mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}_2\right)$ такий, що $\mathsf{bs}\left(\mathrm{u}_2^{\sim}\right) = \mathsf{bs}\left(\mathrm{w}_1\right)$,

$$\mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_1\right) \leq_{\mathfrak{l}_2} \mathsf{tm}\left(\mathrm{u}_2^{\sim}\right) \tag{3.167}$$

і $\mathrm{u}_2 = [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_2]\,\mathrm{u}_2^{\sim}$. Отже, оскільки, за умовою теореми (пункт 1), $\mathfrak{l}_0 \Downarrow_{\mathcal{F}}^{-} \mathfrak{l}_2$, то, згідно з твердженням 3.84 і означенням 3.83 (пункт 3), з нерівності (3.167) отримуємо нерівність, $\mathsf{tm}\left([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_2]\,\mathrm{w}_1\right) \geq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_2]\,\mathrm{u}_2^{\sim}\right) = \mathsf{tm}\left(\mathrm{u}_2\right)$. Звідси, враховуючи (3.163), отримуємо нерівність:

$$\mathsf{tm}\left([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1\right) \geq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left(\mathrm{u}_2\right). \tag{3.168}$$

Якщо ж, додатково $\mathrm{u}_2 \neq [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1$, то нерівність (3.167) перетворюється в строгу, і, використовуючи означення 3.83 (пункт 4), замість нерівності (3.168) отримаємо строгу нерівність $\mathsf{tm}\left([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1\right) >_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left(\mathrm{u}_2\right)$, що й необхідно було довести.

r6^0) $\mathbf{r}_1 \cap \mathbf{r}_2 = \{[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1\}$.

Справді, згідно з властивістю r3^0), $\{[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1\} \subseteq \mathbf{r}_1 \cap \mathbf{r}_2$. Нехай, $\mathrm{u} \in \mathbf{r}_1 \cap \mathbf{r}_2$. Тоді, на основі властивостей r4^0) і r5^0), отримуємо нерівності $\mathsf{tm}\left(\mathrm{u}\right) \geq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1\right)$ і $\mathsf{tm}\left([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1\right) \geq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left(\mathrm{u}\right)$. Отже, $\mathsf{tm}\left(\mathrm{u}\right) = \mathsf{tm}\left([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1\right)$. Звідси, на основі властивості r2^0) робимо висновок, що $\mathrm{u} = [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1$.

r7^0) $\mathbf{r}$ *є абстрактною траєкторією з* $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{l}_0\right)$ *в* $\mathbf{Zk}\left(\mathfrak{l}_0\right)$.

Нехай, $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2 \in \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 \cup \mathbf{r}_2$ і $\mathsf{tm}\left(\mathrm{u}_1\right) = \mathsf{tm}\left(\mathrm{u}_2\right)$. У випадку, коли $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2 \in \mathbf{r}_1$ або $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2 \in \mathbf{r}_2$, згідно з властивістю r2^0), отримуємо, $\mathrm{u}_1 = \mathrm{u}_2$. Отже, залишилось розглянути випадки $\mathrm{u}_1 \in \mathbf{r}_1 \setminus \mathbf{r}_2$, $\mathrm{u}_2 \in \mathbf{r}_2 \setminus \mathbf{r}_1$ і $\mathrm{u}_2 \in \mathbf{r}_1 \setminus \mathbf{r}_2$, $\mathrm{u}_1 \in \mathbf{r}_2 \setminus \mathbf{r}_1$. У випадку $\mathrm{u}_1 \in \mathbf{r}_1 \setminus \mathbf{r}_2$, $\mathrm{u}_2 \in \mathbf{r}_2 \setminus \mathbf{r}_1$ маємо $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2 \notin \mathbf{r}_1 \cap \mathbf{r}_2$, а отже, за властивістю r6^0), $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2 \neq [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1$. Тому, згідно з властивостями r4^0) і r5^0), маємо нерівності $\mathsf{tm}\left(\mathrm{u}_1\right) >_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1\right)$ і $\mathsf{tm}\left([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1\right) >_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left(\mathrm{u}_2\right)$. Отже, $\mathsf{tm}\left(\mathrm{u}_1\right) >_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left(\mathrm{u}_2\right)$, що суперечить умові $\mathsf{tm}\left(\mathrm{u}_1\right) = \mathsf{tm}\left(\mathrm{u}_2\right)$. Таким чином випадок $\mathrm{u}_1 \in \mathbf{r}_1 \setminus \mathbf{r}_2$, $\mathrm{u}_2 \in \mathbf{r}_2 \setminus \mathbf{r}_1$ — неможливий. Аналогічно неможливим є випадок $\mathrm{u}_2 \in \mathbf{r}_1 \setminus \mathbf{r}_2$, $\mathrm{u}_1 \in \mathbf{r}_2 \setminus \mathbf{r}_1$. Отже, у всіх можливих випадках із співвідношень $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2 \in \mathbf{r}$ і $\mathsf{tm}\left(\mathrm{u}_1\right) = \mathsf{tm}\left(\mathrm{u}_2\right)$ випливає рівність $\mathrm{u}_1 = \mathrm{u}_2$. Це, враховуючи властивість r1^0), означає, що $\mathbf{r}$ є функцією з $\mathfrak{D}\left(\mathbf{r}\right) = \{\mathsf{tm}\left(\mathrm{w}'\right) \mid \mathrm{w}' \in \mathbf{r}\} \subseteq \mathbf{Tm}\left(\mathfrak{l}_0\right)$ в множину $\mathbf{Zk}\left(\mathfrak{l}_0\right)$, тобто абстрактною траєкторією з $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{l}_0\right)$ в $\mathbf{Zk}\left(\mathfrak{l}_0\right)$.

r8^0) $\mathrm{w}_0 \in \mathbf{r}_1$; $\mathrm{w}_0' \in \mathbf{r}_2$.

Використовуючи умову 2 теореми та формули (3.3), (3.4), отримуємо, $[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_0 = [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,[\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_0]\,\mathrm{w}_0 = \mathrm{w}_0$, де, за умовою 4 даної теореми, $\mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_0) \leq_{\mathfrak{l}_1} \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_1)$. Отже, згідно з (3.160), $\mathrm{w}_0 \in \mathbf{r}_1$. Далі, згідно з умовами $2, 3, 4$ даної теореми, маємо, $[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_2]\,\mathrm{w}_2 = \mathrm{w}_0'$, де $\mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_2) = \mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_1)$ і $\mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_1) \leq_{\mathfrak{l}_2} \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_2)$. Отже, згідно (3.161), $\mathrm{w}_0' \in \mathbf{r}_2$.

Таким чином, властивості r1^0)–r8^0) доведено.

Оскільки, згідно з властивістю r7^0), $\mathbf{r}$ є абстрактною траєкторією з $\mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathfrak{l}_0)$ в $\mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l}_0)$, то, згідно з лемою B.3, існує еволюційно видима універсальна кінематика $\mathcal{F}_1$ така, що $\mathcal{F}_1$ диз'юнктна з $\mathcal{F}$ і траєкторія $\mathbf{r}$ є траєкторією елементарного процесу (тобто лінії долі) в системі відліку $\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1} = \mathbf{lk}_{\mathtt{ind}(\mathfrak{l}_0)}\,(\mathcal{F}_1)$. Отже, $\exists L \in \mathbb{L}d\,(\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1})\,\big(\mathbf{r} = \mathfrak{tr}\mathfrak{j}_{\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}}\,[L, \mathcal{F}_1]\big)$. За означенням лінії долі (див. означення 1.72), L є мінливою системою в системі відліку $\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}$, тобто $L \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1})$. За означенням траєкторії мінливої системи (див. формулу (2.8)), маємо:

$$\mathbf{r} = \mathfrak{tr}\mathfrak{j}_{\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}}\,[L, \mathcal{F}_1] = \Big\{\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1} \rangle}\,(\omega; \mathcal{F}_1) \mid \omega \in L\Big\}. \tag{3.169}$$

Надалі для систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ будемо використовувати скорочені позначення:

$$\left.\begin{aligned}
\omega^{\{\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}\}} &:= \omega^{\{\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}, \mathcal{F}_1\}}\ (\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_1}))\,;\\
(\hat{\omega})_{\{\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}\}} &:= (\hat{\omega})_{\{\mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1}, \mathcal{F}_1\}}\ (\hat{\omega} \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{F}_1))\,;\\
\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \lfloor \mathcal{F}_1 \rangle &:= \langle \mathfrak{m} \lfloor_{\mathcal{F}_1} \leftarrow \mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_1}, \mathcal{F}_1 \rangle\,;\\
\langle ! \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \lfloor \mathcal{F}_1 \rangle &:= \langle ! \mathfrak{m} \lfloor_{\mathcal{F}_1} \leftarrow \mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_1}, \mathcal{F}_1 \rangle\,;\\
\mathbb{M}k\,(\mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_1}) &:= \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_1}; \mathcal{F}_1)\,;\\
\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1} \rangle}\,(\omega) &:= \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}\lfloor_{\mathcal{F}_1} \rangle}\,(\omega; \mathcal{F}_1)\ (\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_1}))\,;\\
[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \lfloor \mathcal{F}_1] &:= [\mathfrak{m} \lfloor_{\mathcal{F}_1} \leftarrow \mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_1}, \mathcal{F}_1]\,.
\end{aligned}\right\} \tag{3.170}$$

З урахуванням скорочених позначень (3.170) формула (3.169) набуває вигляду:

$$\mathbf{r} = \Big\{\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1} \rangle}\,(\omega) \mid \omega \in L\Big\}. \tag{3.171}$$

$$\text{Покладемо:}\quad \widehat{\mathbf{L}} := L^{\{\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}\}}, \tag{3.172}$$

де $A^{\{\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}\}} = A^{\{\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}, \mathcal{F}_1\}} = \Big\{\omega^{\{\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}\}} \mid \omega \in A\Big\}$ $(A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}))$.

Розглянемо відображення $\boldsymbol{f} : \widehat{\mathbf{L}} \to \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1})$, що діє за формулою:

$$\boldsymbol{f}\,(\hat{\omega}) := \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1} \rangle}\Big(\hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}\}}\Big) \quad \Big(\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{L}}\Big). \tag{3.173}$$

Встановимо деякі властивості відображення $\boldsymbol{f}$.

$\boldsymbol{f}\mathbf{1}^0$) *$\boldsymbol{f}$ є бієкцією з $\widehat{\mathbf{L}}$ на $\mathbf{r}$.*

Відображення $\boldsymbol{f}$ можна розкласти на композицію двох відображень:

$$\boldsymbol{f}(\hat{\omega}) = \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{f}_1(\hat{\omega}))\ \left(\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{L}}\right), \quad \text{де}$$
$$\boldsymbol{f}_1(\hat{\omega}) = \hat{\omega}_{\left\{\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}\ \left(\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{L}}\right); \quad \boldsymbol{f}_2(\omega) = \mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\rangle}(\omega)\ (\omega \in L).$$

З формули (3.172), наслідка 3.70 (пункт 2) та формули (3.119) випливає, що $\boldsymbol{f}_1$ є бієкцією з $\widehat{\mathbf{L}}$ на $\widehat{\mathbf{L}}_{\left\{\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}} = \left(L^{\left\{\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}\right)_{\left\{\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}} = L$ (тобто з $\widehat{\mathbf{L}}$ на L). Отже, для доведення твердження $\boldsymbol{f}1^0$) досить показати, що $\boldsymbol{f}_2$ бієктивно відображає L на $\mathbf{r}$. З формули (3.171) випливає, що $\mathfrak{R}(\boldsymbol{f}_2) = \boldsymbol{f}_2(L) = \mathbf{r}$, де $\mathfrak{R}(\boldsymbol{f}_2)$ — область значень відображення $\boldsymbol{f}_2$. Отже, залишається довести, що відображення $\boldsymbol{f}_2$ — взаємно-однозначне.

Нехай, $\omega_1, \omega_2 \in L$ і $\omega_1 \neq \omega_2$. Оскільки $L \in \mathbb{L}d(\mathbb{L}d(\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}))$ то, за означенням 1.72, $L \in \mathbb{L}l(\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1})$. Отже, за позначенням 1.71 і означенням 1.3, мусить виконуватись хоча б одна з умов $\omega_2 \xleftarrow[\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}]{} \omega_1$ або $\omega_1 \xleftarrow[\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}]{} \omega_2$. Звідси, враховуючи, що $\omega_1 \neq \omega_2$, і використовуючи властивість 1.60(7), маємо, $\mathsf{tm}(\omega_1) <_{\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}} \mathsf{tm}(\omega_2)$ або $\mathsf{tm}(\omega_2) <_{\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}} \mathsf{tm}(\omega_1)$, тобто $\mathsf{tm}(\omega_1) \neq \mathsf{tm}(\omega_2)$. Тому, згідно з (3.121), отримуємо, $\mathsf{tm}\left(\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\rangle}(\omega_1)\right) \neq \mathsf{tm}\left(\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\rangle}(\omega_2)\right)$. Отже, $\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\rangle}(\omega_1) \neq \mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\rangle}(\omega_2)$, тобто $\boldsymbol{f}_2(\omega_1) \neq \boldsymbol{f}_2(\omega_2)$, що й треба було довести.

Для того, щоб сформулювати наступну властивість введемо додаткові позначення. Покладемо:

$$\widehat{\mathbf{L}}_i := \left\{\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{L}} \mid \boldsymbol{f}(\hat{\omega}) \in \mathbf{r}_i\right\} \quad \left(i \in \overline{1,2}\right). \tag{3.174}$$

Тоді, згідно з (3.162), маємо:

$$\widehat{\mathbf{L}} = \widehat{\mathbf{L}}_1 \cup \widehat{\mathbf{L}}_2, \tag{3.175}$$

а, згідно з властивостями r6^0) і $\boldsymbol{f}1^0$), отримуємо:

$$\widehat{\mathbf{L}}_1 \cap \widehat{\mathbf{L}}_2 = \left\{\boldsymbol{f}^{[-1]}\left([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}]\,\mathrm{w}_1\right)\right\}, \tag{3.176}$$

де $\boldsymbol{f}^{[-1]}$ — відображення, обернене до $\boldsymbol{f}$. Оскільки кінематика $\mathcal{F}_1$ — диз'юнктна з $\mathcal{F}$, то, згідно з означеннями 3.41 та 3.12 (пункт 2), маємо:

$$\mathcal{F}_1\,[\equiv]\,\mathcal{F}; \qquad \mathbb{M}k(\mathfrak{l} \lfloor_{\mathcal{F}_1}) = \mathbb{M}k(\mathfrak{l}; \mathcal{F})\ (\forall \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})). \tag{3.177}$$

$\boldsymbol{f}\mathbf{2}^0$) *Для довільних* $\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2 \in \widehat{\mathbf{L}}_1$ *наступні твердження рівносильні:*

$(\mathbf{i}_1)$ $(\hat{\omega}_2)_{\left\{\mathfrak{l}_1 \lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}} \xleftarrow[\mathfrak{l}_1 \lfloor_{\mathcal{F}_1}]{} (\hat{\omega}_1)_{\left\{\mathfrak{l}_1 \lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}$;

$(\mathbf{i}_2)$ $\mathsf{tm}\left((\hat{\omega}_1)_{\{\mathfrak{l}_1\downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\}}\right) \leq_{\mathfrak{l}_1\downharpoonright_{\mathcal{F}_1}} \mathsf{tm}\left((\hat{\omega}_2)_{\{\mathfrak{l}_1\downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\}}\right)$;

$(\mathbf{i}_3)$ $\mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_2\right)\right) \leq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_1\right)\right)$.

Підкреслимо, що нерівність (i_3) *слід розуміти в системі відліку* $\mathfrak{l}_0$ *кінематики* $\mathcal{F}$.

$\boxed{(\mathrm{i}_1) \Rightarrow (\mathrm{i}_2)}$ Імплікація $(\mathrm{i}_1) \Rightarrow (\mathrm{i}_2)$ випливає з властивості 1.60(7).

$\boxed{(\mathrm{i}_2) \Rightarrow (\mathrm{i}_3)}$ Нехай, $\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2 \in \widehat{\mathbf{L}}_1$ і

$$\mathsf{tm}\left((\hat{\omega}_1)_{\{\mathfrak{l}_1\downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\}}\right) \leq_{\mathfrak{l}_1\downharpoonright_{\mathcal{F}_1}} \mathsf{tm}\left((\hat{\omega}_2)_{\{\mathfrak{l}_1\downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\}}\right). \tag{3.178}$$

Використовуючи твердження 3.71 та формулу (3.1), для $i \in \overline{1,2}$ отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_1\downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\rangle}\left((\hat{\omega}_i)_{\{\mathfrak{l}_1\downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\}}\right) &= \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_1\downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\rangle}\left(\langle !\, \mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_0, \downharpoonleft \mathcal{F}_1\rangle\, (\hat{\omega}_i)_{\{\mathfrak{l}_0\downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\}}\right) = \\ &= [\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_0, \downharpoonleft \mathcal{F}_1]\, \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0\downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\rangle}\left((\hat{\omega}_i)_{\{\mathfrak{l}_0\downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\}}\right) = [\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_0, \downharpoonleft \mathcal{F}_1]\, \boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_i\right).\end{aligned}$$

Звідси, враховуючи перше співвідношення (3.177) та означення 3.12 (пункт 3), маємо, $\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_1\downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\rangle}\left((\hat{\omega}_i)_{\{\mathfrak{l}_1\downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\}}\right) = [\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_0, \mathcal{F}]\, \boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_i\right)$ $\left(i \in \overline{1,2}\right)$. З останньої рівності, враховуючи (3.121) отримуємо:

$$\mathsf{tm}\left((\hat{\omega}_i)_{\{\mathfrak{l}_1\downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\}}\right) = \mathsf{tm}\left([\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_0, \mathcal{F}]\, \boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_i\right)\right) \quad \left(i \in \overline{1,2}\right). \tag{3.179}$$

Згідно з (3.174), $\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_i\right) \in \mathbf{r}_1$ $(i \in \overline{1,2})$. Отже, за формулою (3.160), $\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_i\right)$ можна подати у вигляді:

$$\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_i\right) = [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}]\, \mathrm{v}_i, \quad \text{де} \quad \mathsf{bs}\left(\mathrm{v}_i\right) = \mathsf{bs}\left(\mathrm{w}_0\right) \quad \left(i \in \overline{1,2}\right). \tag{3.180}$$

Отже, згідно з формулами (3.3), (3.4), для $i \in \overline{1,2}$ маємо:

$$[\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_0, \mathcal{F}]\, \boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_i\right) = [\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_0, \mathcal{F}]\, [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}]\, \mathrm{v}_i = \mathrm{v}_i. \tag{3.181}$$

З формул (3.179) і (3.181) випливає, що $\mathsf{tm}\left((\hat{\omega}_i)_{\{\mathfrak{l}_1\downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\}}\right) = \mathsf{tm}\left(\mathrm{v}_i\right)$. Отже, враховуючи (3.178), маємо, $\mathsf{tm}\left(\mathrm{v}_1\right) \leq_{\mathfrak{l}_1\downharpoonright_{\mathcal{F}_1}} \mathsf{tm}\left(\mathrm{v}_2\right)$. Звідси, враховуючи співвідношення (3.177) та означення 3.12 (пункт 2), отримуємо, $\mathsf{tm}\left(\mathrm{v}_1\right) \leq_{\mathfrak{l}_1} \mathsf{tm}\left(\mathrm{v}_2\right)$, де, згідно (3.180), $\mathsf{bs}\left(\mathrm{v}_1\right) = \mathsf{bs}\left(\mathrm{v}_2\right) = \mathsf{bs}\left(\mathrm{w}_0\right)$. Тому, оскільки, за умовою теореми, $\mathfrak{l}_0 \Downarrow^{-}_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}_1$, використовуючи твердження 3.84 і означення 3.83 (пункт 3), маємо, $\mathsf{tm}\left([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}]\, \mathrm{v}_1\right) \geq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}]\, \mathrm{v}_2\right)$. Звідси, використовуючи рівність (3.180), маємо, $\mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_1\right)\right) \geq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_2\right)\right)$, що й необхідно було довести.

$\boxed{(\mathrm{i}_3) \Rightarrow (\mathrm{i}_1)}$ Нехай, $\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2 \in \widehat{\mathbf{L}}_1$ і

$$\mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_2\right)\right) \leq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_1\right)\right). \tag{3.182}$$

Розглянемо спочатку випадок $\mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_1\right)\right) = \mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_2\right)\right)$. Оскільки, згідно з властивістю r7^0), $\mathbf{r}$ є абстрактною траєкторією з $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{l}_0\right)$ в $\mathbf{Zk}\left(\mathfrak{l}_0\right)$ (тобто функцією з $\mathfrak{D}(\mathbf{r}) \subseteq \mathbf{Tm}\left(\mathfrak{l}_0\right)$ в $\mathbf{Zk}\left(\mathfrak{l}_0\right)$), і, згідно з властивістю $\boldsymbol{f}1^0$), $\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_1\right), \boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_2\right) \in \mathbf{r}$, то з умови $\mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_1\right)\right) = \mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_2\right)\right)$ випливає рівність $\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_1\right) = \boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_2\right)$. Отже, за властивістю $\boldsymbol{f}1^0$), маємо, $\hat{\omega}_1 = \hat{\omega}_2$. Тому, $\left(\hat{\omega}_1\right)_{\left\{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}} = \left(\hat{\omega}_2\right)_{\left\{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}$. Звідси, враховуючи властивість 1.60(6), отримуємо бажане співвідношення $\left(\hat{\omega}_2\right)_{\left\{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}} \xleftarrow[\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}]{} \left(\hat{\omega}_1\right)_{\left\{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}$.

Отже, надалі будемо вважати, що $\mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_1\right)\right) \neq \mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_2\right)\right)$. Тоді, згідно (3.182), маємо строгу нерівність:

$$\mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_2\right)\right) <_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_1\right)\right). \tag{3.183}$$

Звідси, використовуючи доведену вище імплікацію $(\mathrm{i}_2) \Rightarrow (\mathrm{i}_3)$, отримуємо нерівність:

$$\mathsf{tm}\left(\left(\hat{\omega}_1\right)_{\left\{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}\right) <_{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}} \mathsf{tm}\left(\left(\hat{\omega}_2\right)_{\left\{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}\right). \tag{3.184}$$

(Справді, в протилежному випадку, коли $\mathsf{tm}\left(\left(\hat{\omega}_1\right)_{\left\{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}\right) \geq_{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}} \mathsf{tm}\left(\left(\hat{\omega}_2\right)_{\left\{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}\right)$, користуючись імплікацією $(\mathrm{i}_2) \Rightarrow (\mathrm{i}_3)$, ми б отримали нерівність $\mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_1\right)\right) \leq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_2\right)\right)$, яка суперечить нерівності (3.183).)

Оскільки, за умовою, $\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2 \in \widehat{\mathbf{L}}_1$, то, згідно (3.175), $\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2 \in \widehat{\mathbf{L}}$. Отже, враховуючи (3.172) та (3.119), маємо, $\left(\hat{\omega}_1\right)_{\left\{\mathfrak{l}_0\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}, \left(\hat{\omega}_2\right)_{\left\{\mathfrak{l}_0\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}} \in \widehat{\mathbf{L}}_{\left\{\mathfrak{l}_0\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}} = L$. Оскільки $L \in \mathbb{L}d\left(\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}\right)$, то, за означенням 1.72, $L \in \mathbb{L}l\left(\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}\right)$. Тому елементарно-часові стани $\left(\hat{\omega}_1\right)_{\left\{\mathfrak{l}_0\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}, \left(\hat{\omega}_2\right)_{\left\{\mathfrak{l}_0\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}} \in L$ мусять бути об'єднані долею в системі відліку $\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}$ (тобто виконується хоча б одна з умов $\left(\hat{\omega}_2\right)_{\left\{\mathfrak{l}_0\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}} \xleftarrow[\mathfrak{l}_0\lfloor_{\mathcal{F}_1}]{} \left(\hat{\omega}_1\right)_{\left\{\mathfrak{l}_0\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}$ або $\left(\hat{\omega}_1\right)_{\left\{\mathfrak{l}_0\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}} \xleftarrow[\mathfrak{l}_0\lfloor_{\mathcal{F}_1}]{} \left(\hat{\omega}_2\right)_{\left\{\mathfrak{l}_0\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}$). Оскільки кінематика $\mathcal{F}_1$ — еволюційно видима і, згідно (3.184), $\mathsf{tm}\left(\left(\hat{\omega}_1\right)_{\left\{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}\right) \neq \mathsf{tm}\left(\left(\hat{\omega}_2\right)_{\left\{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}\right)$, то, згідно з твердженнями 3.71 та 3.56, елементарно-часові стани $\left(\hat{\omega}_1\right)_{\left\{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}} = \left\langle ! \, \mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_0, \lfloor \mathcal{F}_1 \right\rangle \left(\hat{\omega}_1\right)_{\left\{\mathfrak{l}_0\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}$ і $\left(\hat{\omega}_2\right)_{\left\{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}} = \left\langle ! \, \mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_0, \lfloor \mathcal{F}_1 \right\rangle \left(\hat{\omega}_2\right)_{\left\{\mathfrak{l}_0\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}$ мусять бути об'єднані долею в системі відліку $\mathfrak{l}_1 \lfloor_{\mathcal{F}_1}$. Тому, повинно виконуватись хоча б одне із співвідношень:

$$\left(\hat{\omega}_2\right)_{\left\{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}} \xleftarrow[\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}]{} \left(\hat{\omega}_1\right)_{\left\{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}} \quad \text{або} \tag{3.185}$$

$$\left(\hat{\omega}_1\right)_{\left\{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}} \xleftarrow[\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}]{} \left(\hat{\omega}_2\right)_{\left\{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}. \tag{3.186}$$

Але, співвідношення (3.186) — неможливе, оскільки в цьому випадку, за доведеною вище імплікацією $(\mathrm{i}_1) \Rightarrow (\mathrm{i}_3)$, ми б отримали нерівність $\mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_1\right)\right) \leq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_2\right)\right)$, яка суперечить нерівності (3.183). Отже, єдино можливим є співвідношення (3.185), що й треба було довести.

Аналогічно доводиться наступна властивість:

$\boldsymbol{f}\mathbf{3}^0)$ *Для довільних* $\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2 \in \widehat{\mathbf{L}}_2$ *наступні твердження рівносильні:*

$(\mathbf{j}_1)$ $(\hat{\omega}_2)_{\{\mathfrak{l}_2\lfloor_{\mathcal{F}_1}\}} \xleftarrow[\mathfrak{l}_2\lfloor_{\mathcal{F}_1}]{} (\hat{\omega}_1)_{\{\mathfrak{l}_2\lfloor_{\mathcal{F}_1}\}}$;

$(\mathbf{j}_2)$ $\mathsf{tm}\left((\hat{\omega}_1)_{\{\mathfrak{l}_2\lfloor_{\mathcal{F}_1}\}}\right) \leq_{\mathfrak{l}_2\lfloor_{\mathcal{F}_1}} \mathsf{tm}\left((\hat{\omega}_2)_{\{\mathfrak{l}_2\lfloor_{\mathcal{F}_1}\}}\right)$;

$(\mathbf{j}_3)$ $\mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_2\right)\right) \leq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}\left(\hat{\omega}_1\right)\right)$.

Покладемо:

$$\mathcal{L} = \left(\widehat{\mathbf{L}},\ \left(\widehat{\mathbf{L}}_1, \mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right),\ \left(\widehat{\mathbf{L}}_2, \mathfrak{l}_2\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right)\right). \tag{3.187}$$

Встановимо деякі властивості упорядкованого набору $\mathcal{L}$ та його компонентів.

$\mathcal{L}\mathbf{1}^0)$ $\left(\widehat{\mathbf{L}}_i\right)_{\{\mathfrak{l}_i\lfloor_{\mathcal{F}_1}\}} \in \mathbb{L}l\left(\mathfrak{l}_i\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right)$ $(i \in \overline{1,2})$.

Розглянемо, спочатку, випадок $i = 1$. Покладемо:

$$\boldsymbol{g}(\omega) := \mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}\left(\omega^{\{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\}}\right)\right) \quad \left(\omega \in \left(\widehat{\mathbf{L}}_1\right)_{\{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\}}\right).$$

З властивості $\boldsymbol{f}2^0)$ (рівносильність $(\mathrm{i}_1) \Leftrightarrow (\mathrm{i}_3)$) та формули (3.117) випливає, що для довільних $\omega_1, \omega_2 \in \left(\widehat{\mathbf{L}}_1\right)_{\{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\}}$ має місце рівносильність:

$$\omega_2 \xleftarrow[\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}]{} \omega_1 \ \Leftrightarrow \boldsymbol{g}\left(\omega_2\right) \leq_{\mathfrak{l}_0} \boldsymbol{g}\left(\omega_1\right). \tag{3.188}$$

Згідно з властивістю 1.60(3), відношення $\leq_{\mathfrak{l}_0}$ є транзитивним на $\mathbf{Tm}\left(\mathfrak{l}_0\right)$ і для довільних $t_1, t_2 \in \mathbf{Tm}\left(\mathfrak{l}_0\right)$ має місце хоч одна з умов $t_1 \leq_{\mathfrak{l}_0} t_2$ або $t_2 \leq_{\mathfrak{l}_0} t_1$. Звідси, використовуючи рівносильність (3.188) отримуємо, що $\left(\widehat{\mathbf{L}}_1\right)_{\{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\}}$ є ланцюгом в системі відліку $\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}$. Аналогічно, з використанням властивості $\boldsymbol{f}3^0)$ доводиться, що $\left(\widehat{\mathbf{L}}_2\right)_{\{\mathfrak{l}_2\lfloor_{\mathcal{F}_1}\}}$ є ланцюгом в системі відліку $\mathfrak{l}_2\lfloor_{\mathcal{F}_1}$.

$\mathcal{L}\mathbf{2}^0)$ *Якщо* $\omega_1 \in \left(\widehat{\mathbf{L}}_1 \setminus \widehat{\mathbf{L}}_2\right)_{\{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\}}$ *і* $\omega_2 \in \left(\widehat{\mathbf{L}}_1 \cap \widehat{\mathbf{L}}_2\right)_{\{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\}}$ *то* $\mathsf{tm}\left(\omega_1\right) <_{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}} \mathsf{tm}\left(\omega_2\right)$.

Нехай, $\omega_1 \in \left(\widehat{\mathbf{L}}_1 \setminus \widehat{\mathbf{L}}_2\right)_{\{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\}}$, $\omega_2 \in \left(\widehat{\mathbf{L}}_1 \cap \widehat{\mathbf{L}}_2\right)_{\{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\}}$. Тоді, за означенням 3.72, існують $\hat{\omega}_1 \in \widehat{\mathbf{L}}_1 \setminus \widehat{\mathbf{L}}_2$ і $\hat{\omega}_2 \in \widehat{\mathbf{L}}_1 \cap \widehat{\mathbf{L}}_2$ такі, що:

$$\omega_i = (\hat{\omega}_i)_{\{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\}} \quad \left(i \in \overline{1,2}\right). \tag{3.189}$$

Із співвідношення (3.176) випливає, що $\hat{\omega}_2 = \boldsymbol{f}^{[-1]}\left(\left[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}\right] \mathrm{w}_1\right)$, крім того, оскільки $\hat{\omega}_1 \in \widehat{\mathbf{L}}_1 \setminus \widehat{\mathbf{L}}_2$, то $\hat{\omega}_1 \in \widehat{\mathbf{L}}_1$ і $\hat{\omega}_1 \neq \boldsymbol{f}^{[-1]}\left(\left[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}\right] \mathrm{w}_1\right)$. Отже, використовуючи властивість

$\boldsymbol{f}1^0$) і формулу (3.174), маємо $\boldsymbol{f}(\hat{\omega}_1), \boldsymbol{f}(\hat{\omega}_2) \in \mathbf{r}_1$, $\boldsymbol{f}(\hat{\omega}_2) = [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}]\,\mathrm{w}_1$, $\boldsymbol{f}(\hat{\omega}_1) \neq [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}]\,\mathrm{w}_1$. Тому, згідно з властивістю r4^0):

$$\mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}(\hat{\omega}_2)\right) = \mathsf{tm}\left([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}]\,\mathrm{w}_1\right) <_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}(\hat{\omega}_1)\right). \tag{3.190}$$

Звідси, враховуючи властивість $\boldsymbol{f}2^0$) (рівносильність (i_2) $\Leftrightarrow$ (i_3)), отримуємо:

$$\mathsf{tm}\left((\hat{\omega}_1)_{\{\mathfrak{l}_1\downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\}}\right) <_{\mathfrak{l}_1\downharpoonright_{\mathcal{F}_1}} \mathsf{tm}\left((\hat{\omega}_2)_{\{\mathfrak{l}_1\downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\}}\right), \tag{3.191}$$

оскільки в протилежному випадку, згідно з рівносильністю (i_2) $\Leftrightarrow$ (i_3), ми б отримали нерівність $\mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}(\hat{\omega}_1)\right) \leq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}(\hat{\omega}_2)\right)$, яка суперечить нерівності (3.190).

Враховуючи (3.189), нерівність (3.191) набуває бажаного вигляду $\mathsf{tm}(\omega_1) <_{\mathfrak{l}_1\downharpoonright_{\mathcal{F}_1}} \mathsf{tm}(\omega_2)$.

Аналогічно з використанням властивостей r5^0) і $\boldsymbol{f}3^0$) замість r4^0) і $\boldsymbol{f}2^0$) доводиться наступна властивість:

$\mathcal{L}\mathbf{3}^0$) *Для довільних* $\omega_1 \in \left(\widehat{\mathbf{L}}_1 \cap \widehat{\mathbf{L}}_2\right)_{\{\mathfrak{l}_2\downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\}}$ *і* $\omega_2 \in \left(\widehat{\mathbf{L}}_2 \setminus \widehat{\mathbf{L}}_1\right)_{\{\mathfrak{l}_2\downharpoonright_{\mathcal{F}_1}\}}$ *виконується нерівність* $\mathsf{tm}(\omega_1) <_{\mathfrak{l}_2\downharpoonright_{\mathcal{F}_1}} \mathsf{tm}(\omega_2)$.

З властивості $\mathcal{L}1^0$), формул (3.175), (3.176), а також властивостей $\mathcal{L}2^0$) та $\mathcal{L}3^0$) випливає, що всі пункти означення 3.74 для упорядкованого набору $\mathcal{L}$, що задається формулою (3.187) виконані. Отже, ми довели, що:

$\mathcal{L}\mathbf{4}^0$) $\mathcal{L}$ *є ланцюговим шляхом кінематики* $\mathcal{F}_1$.

Доведемо наступну властивість:

$\mathcal{L}\mathbf{5}^0$) *Ланцюговий шлях* $\mathcal{L}$ *є замкнутим, причому:*

$$\mathsf{po}(\mathcal{L}, \mathcal{F}_1) = \boldsymbol{f}^{[-1]}(\mathrm{w}_0); \qquad \mathsf{ki}(\mathcal{L}, \mathcal{F}_1) = \boldsymbol{f}^{[-1]}(\mathrm{w}'_0).$$

Згідно з властивістю r8^0), $\mathrm{w}_0 \in \mathbf{r}_1$. Тому, згідно з властивістю $\boldsymbol{f}\mathbf{1}^0$) та формулою (3.174), $\boldsymbol{f}^{[-1]}(\mathrm{w}_0) \in \widehat{\mathbf{L}}_1$. Нехай, $\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{L}}_1$. Тоді, згідно з (3.174), $\boldsymbol{f}(\hat{\omega}) \in \mathbf{r}_1$. Отже, згідно (3.160), існує елемент $\mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}_1)$ такий, що

$$\mathsf{bs}(\mathrm{w}) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_0); \quad \mathsf{tm}(\mathrm{w}_0) \leq_{\mathfrak{l}_1} \mathsf{tm}(\mathrm{w}); \tag{3.192}$$

$$\boldsymbol{f}(\hat{\omega}) = [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}]\,\mathrm{w}. \tag{3.193}$$

Оскільки (за умовою) $\mathfrak{l}_0 \Downarrow^{-}_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}_1$, то із співвідношень (3.192), враховуючи твердження 3.84 і означення 3.83 (пункт 3), отримуємо, $\mathsf{tm}\left([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}]\,\mathrm{w}_0\right) \geq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}]\,\mathrm{w}\right)$. Звідси, враховуючи умову 2 теореми і співвідношення (3.193), маємо, $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_0) \geq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}(\hat{\omega})\right)$. Таким чином, враховуючи властивість $\boldsymbol{f}2^0$) (рівносильність (i_2) $\Leftrightarrow$ (i_3)), отримуємо, що для довільного $\hat{\omega} \in \widehat{\mathbf{L}}_1$ справедлива нерівність,

$\mathsf{tm}\left(\left(\boldsymbol{f}^{[-1]}(\mathrm{w}_0)\right)_{\{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\}}\right) \leq_{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}} \mathsf{tm}\left(\hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\}}\right)$. Тому, за означенням 3.77 (пункт 1), $\boldsymbol{f}^{[-1]}(\mathrm{w}_0)$ є початковим елементом шляху $\mathcal{L}$, тобто $\mathsf{po}(\mathcal{L},\mathcal{F}_1) = \boldsymbol{f}^{[-1]}(\mathrm{w}_0)$. Аналогічно доводиться, що шлях $\mathcal{L}$ має кінцевий елемент $\mathsf{ki}(\mathcal{L},\mathcal{F}_1) = \boldsymbol{f}^{[-1]}(\mathrm{w}'_0)$.

$\mathcal{L}\mathbf{6}^0$) *Шлях $\mathcal{L}$ є геометрично циклічним відносно системи відліку $\mathfrak{l}_0\lfloor_{\mathcal{F}_1}$ в кінематиці $\mathcal{F}_1$.*

Справді, використовуючи (3.173) та властивість $\mathcal{L}5^0$), отримуємо:

$$\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}_0\lfloor_{\mathcal{F}_1}\rangle}\left(\mathsf{po}(\mathcal{L},\mathcal{F}_1)_{\{\mathfrak{l}_0\lfloor_{\mathcal{F}_1}\}}\right) = \boldsymbol{f}(\mathsf{po}(\mathcal{L},\mathcal{F}_1)) = \mathrm{w}_0;$$

$$\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}_0\lfloor_{\mathcal{F}_1}\rangle}\left(\mathsf{ki}(\mathcal{L},\mathcal{F}_1)_{\{\mathfrak{l}_0\lfloor_{\mathcal{F}_1}\}}\right) = \mathrm{w}'_0.$$

При цьому, за умовою 3 теореми, $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_0) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}'_0)$. Отже, за означенням 3.80, шлях $\mathcal{L}$ є геометрично-циклічним відносно $\mathfrak{l}_0\lfloor_{\mathcal{F}_1}$ в кінематиці $\mathcal{F}_1$.

$\mathcal{L}\mathbf{7}^0$) *Шлях $\mathcal{L}$ є кусково геометрично-стаціонарним в кінематиці $\mathcal{F}_1$.*

Для того, щоб довести цю властивість необхідно показати, що $\left(\widehat{\mathbf{L}}_k\right)_{\{\mathfrak{l}_k\lfloor_{\mathcal{F}_1}\}} \in \mathbb{L}g(\mathfrak{l}_k\lfloor_{\mathcal{F}_1},\mathcal{F}_1)$ $(\forall k \in \overline{1,2})$.

Для прикладу розглянемо випадок $k = 1$. Для довільного $\omega = \hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\}} \in \left(\widehat{\mathbf{L}}_1\right)_{\{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\}}$, застосовуючи твердження 3.71 та формулу (3.2), маємо:

$$\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\rangle}(\omega) = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\rangle}\left(\hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\}}\right) = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\rangle}\left(\langle!\,\mathfrak{l}_1\leftarrow\mathfrak{l}_0,\lfloor\mathcal{F}_1\rangle\,\hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}_0\lfloor_{\mathcal{F}_1}\}}\right) =$$
$$= [\mathfrak{l}_1\leftarrow\mathfrak{l}_0,\lfloor\mathcal{F}_1]\,\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}_0\lfloor_{\mathcal{F}_1}\rangle}\left(\hat{\omega}_{\{\mathfrak{l}_0\lfloor_{\mathcal{F}_1}\}}\right) = [\mathfrak{l}_1\leftarrow\mathfrak{l}_0,\lfloor\mathcal{F}_1]\,\boldsymbol{f}(\hat{\omega}).$$

Оскільки, згідно (3.177), $\mathcal{F}_1\,[\equiv]\,\mathcal{F}$, то, враховуючи означення 3.12 (пункт 3), з останньої рівності отримуємо рівність $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\rangle}(\omega) = [\mathfrak{l}_1\leftarrow\mathfrak{l}_0,\mathcal{F}]\,\boldsymbol{f}(\hat{\omega})$, де, згідно (3.174), $\boldsymbol{f}(\hat{\omega}) \in \mathbf{r}_1$. Тому, враховуючи рівність (3.160) та формули (3.3), (3.4), маємо, $\mathsf{bs}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\rangle}(\omega)\right) = \mathsf{bs}\left([\mathfrak{l}_1\leftarrow\mathfrak{l}_0,\,\mathcal{F}]\,\boldsymbol{f}(\hat{\omega})\right) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_0)$ (для довільного $\omega \in \left(\widehat{\mathbf{L}}_1\right)_{\{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\}}$). Звідси, враховуючи властивість $\mathcal{L}1^0$), за означенням 3.76 отримуємо $\left(\widehat{\mathbf{L}}_1\right)_{\{\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1}\}} \in \mathbb{L}g(\mathfrak{l}_1\lfloor_{\mathcal{F}_1},\mathcal{F}_1)$.

Аналогічно доводиться, що $\left(\widehat{\mathbf{L}}_2\right)_{\{\mathfrak{l}_2\lfloor_{\mathcal{F}_1}\}} \in \mathbb{L}g(\mathfrak{l}_2\lfloor_{\mathcal{F}_1},\mathcal{F}_1)$.

Переходимо до завершення доведення теореми. Згідно з властивістю r8^0), маємо:

$$\mathrm{w}_0 \in \mathbf{r}_1;\quad \mathrm{w}'_0 \in \mathbf{r}_2. \tag{3.194}$$

При цьому з умови 4 даної теореми випливає, що $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_0) <_{\mathfrak{l}_1} \mathsf{tm}(\mathrm{w}_1)$ або $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) <_{\mathfrak{l}_2} \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$, тобто що $\mathrm{w}_0 \neq \mathrm{w}_1$ або $\mathrm{w}_1 \neq \mathrm{w}_2$. Звідси, враховуючи формули (3.3), (3.4), маємо $[\mathfrak{l}_0\leftarrow\mathfrak{l}_1,\mathcal{F}]\,\mathrm{w}_0 \neq [\mathfrak{l}_0\leftarrow\mathfrak{l}_1,\mathcal{F}]\,\mathrm{w}_1$ або

$[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_2, \mathcal{F}]\,\mathrm{w}_1 \neq [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_2, \mathcal{F}]\,\mathrm{w}_2$. Тому, враховуючи, що, згідно з пунктом 2 умови даної теореми, $[\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_0, \mathcal{F}]\,\mathrm{w}_0 = \mathrm{w}_0$, $[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_2, \mathcal{F}]\,\mathrm{w}_1 = [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_2, \mathcal{F}]\,[\mathfrak{l}_2 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}]\,\mathrm{w}_1 = [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}]\,\mathrm{w}_1$, $[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_2, \mathcal{F}]\,\mathrm{w}_2 = \mathrm{w}_0'$, маємо, що виконується хоча б одна з умов $\mathrm{w}_0 \neq [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}]\,\mathrm{w}_1$ або $[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}]\,\mathrm{w}_1 \neq \mathrm{w}_0'$. Отже, враховуючи (3.194) і властивості $\mathrm{r}4^0$), $\mathrm{r}5^0$), маємо, що $\mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_0) \geq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\,([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}]\,\mathrm{w}_1) \geq_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_0')$, причому має місце хоча б одна із строгих нерівностей $\mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_0) >_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\,([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}]\,\mathrm{w}_1)$ або $\mathsf{tm}\,([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1, \mathcal{F}]\,\mathrm{w}_1) >_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_0')$. Таким чином, $\mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_0) >_{\mathfrak{l}_0} \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_0')$. Тому, враховуючи співвідношення (3.177) і означення 3.12 (формула (3.41)), маємо нерівність $\mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_0) >_{\mathfrak{l}_0\lfloor_{\mathcal{F}_1}} \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_0')$. Звідси, враховуючи (3.121), (3.173) та властивість $\mathcal{L}5^0$), маємо:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{tm}\left(\mathsf{po}\,(\mathcal{L}, \mathcal{F}_1)_{\left\{\mathfrak{l}_0\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}\right) = \mathsf{tm}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0\lfloor_{\mathcal{F}_1}\rangle}\left(\mathsf{po}\,(\mathcal{L}, \mathcal{F}_1)_{\left\{\mathfrak{l}_0\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}\right)\right) = \\
&\quad = \mathsf{tm}\,(\boldsymbol{f}\,(\mathsf{po}\,(\mathcal{L}, \mathcal{F}_1))) = \mathsf{tm}\left(\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{f}^{[-1]}\,(\mathrm{w}_0)\right)\right) = \\
&\quad = \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_0) >_{\mathfrak{l}_0\lfloor_{\mathcal{F}_1}} \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_0') = \mathsf{tm}\left(\mathsf{ki}\,(\mathcal{L}, \mathcal{F}_1)_{\left\{\mathfrak{l}_0\lfloor_{\mathcal{F}_1}\right\}}\right).
\end{aligned} \tag{3.195}$$

Отже, $\mathcal{L}$ є кусково геометрично стаціонарним і геометрично циклічним в системі відліку $\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}$ кінематики $\mathcal{F}_1$ ланцюговим шляхом, що задовольняє умову (3.195). Тому, за означенням 3.82, кінематика $\mathcal{F}_1$ є часозворотною. Оскільки, згідно (3.177), $\mathcal{F}\,[\equiv]\,\mathcal{F}_1$, то кінематика $\mathcal{F}$ є умовно часозворотною (за означенням 3.98). □

Означення 3.104. Будемо говорити, що система відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ є **нерухомою** відносно системи відліку $\mathfrak{l}_0 \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ в універсальній кінематиці $\mathcal{F}$, якщо для довільних $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ з умови $\mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_2)$ випливає рівність $\mathsf{bs}\,([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}\,([\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2)$.

Наслідок 3.105. *Нехай в універсальній кінематиці $\mathcal{F}$ існують системи відліку $\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_1 \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ такі, що:*

1. *Система відліку $\mathfrak{l}_1$ нерухома відносно системи відліку $\mathfrak{l}_0$ в кінематиці $\mathcal{F}$.*
2. *Існує елемент $\mathrm{w}_0 \in \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l}_0) \cap \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l}_1)$ такий, що $[\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_0]\,\mathrm{w}_0 = \mathrm{w}_0$.*
3. *Існує момент часу $t_1 \in \mathbf{Tm}\,(\mathfrak{l}_1)$ такий, що $t_1 >_{\mathfrak{l}_1} \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_0)$.*
4. $\mathfrak{l}_0 \Downarrow^{-}_{\mathcal{F}} \mathfrak{l}_1$.

Тоді, кінематика $\mathcal{F}$ є умовно часозворотною.

Доведення. Покладемо:

$$\mathrm{w}_1 := (t_1, \mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_0)) \in \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l}_1)\,; \quad \mathfrak{l}_2 := \mathfrak{l}_1; \quad \mathrm{w}_2 := \mathrm{w}_1; \quad \mathrm{w}_0' := [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_2]\,\mathrm{w}_2. \tag{3.196}$$

Тоді, будемо мати, $\mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_2) = \mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_0)$. Отже, оскільки система відліку $\mathfrak{l}_1$ є нерухомою відносно $\mathfrak{l}_0$, використовуючи означення 3.104, другу умову наслідка і формули (3.3), (3.4), маємо:

$$\mathsf{bs}\left(\mathrm{w}_0'\right) = \mathsf{bs}\left(\left[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_2\right]\mathrm{w}_2\right) = \mathsf{bs}\left(\left[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1\right]\mathrm{w}_2\right) =$$
$$= \mathsf{bs}\left(\left[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1\right]\mathrm{w}_0\right) = \mathsf{bs}\left(\left[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_1\right]\left[\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_0\right]\mathrm{w}_0\right) = \mathsf{bs}\left(\mathrm{w}_0\right).$$

Крім того, згідно з третьою умовою наслідку, $\mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_0\right) <_{\mathfrak{l}_1} t_1 = \mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_1\right)$. Оскільки $\mathfrak{l}_2 = \mathfrak{l}_1$, то, згідно з формулою (3.3), маємо, $\left[\mathfrak{l}_2 \leftarrow \mathfrak{l}_1\right]\mathrm{w}_1 = \left[\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_1\right]\mathrm{w}_1 = \mathrm{w}_1$. Таким чином, системи відліку $\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2$ і елементи $\mathrm{w}_0, \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \mathrm{w}_0'$ задовольняють всі умови теореми 3.103. Тому, універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є умовно часозворотною. □

Зауваження 3.106. Умова 3 наслідку 3.105 автоматично виконується у випадку, якщо лінійно-упорядкована множина $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{l}_1\right)$ є необмеженою зверху, зокрема, якщо $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{l}_1\right) = \left(\mathbb{R}, \leq\right)$, де $\leq$ — стандартний порядок поля дійсних чисел.

3.9.9. Проблема часонезворотності і тахіонові кінематики.

Деякі технічні результати. Нехай, $\left(\mathfrak{H}, \|\cdot\|, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ — дійсний гільбертовий простір. Нагадаємо, що в додатку A.2 та розділі 2.5 для довільних фіксованих значень $c \in (0,\infty]$, $\lambda \in [0,\infty] \setminus \{c\}$, $s \in \{-1,1\}$, $J \in \mathfrak{U}\left(\mathfrak{H}_1\right)$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1\left(\mathfrak{H}_1\right)$, і $\mathbf{a} \in \mathcal{M}\left(\mathfrak{H}\right)$ було введено узагальнені перетворення Лоренца-Пуанкаре $\mathbf{W}_{\lambda,c}\left[s, \mathbf{n}, J; \mathbf{a}\right]$ (див. формули (A.155) та (2.17)). Для довільного вектора $\mathrm{w} \in \mathcal{M}\left(\mathfrak{H}\right)$ покладемо:

$$\mathbf{E}_{\lambda,c}^{[s,\mathbf{n}]}\mathrm{w} := \mathbf{W}_{\lambda,c}\left[s, \mathbf{n}, \mathbb{I}_{-1,1}\left[\mathbf{n}\right]\right]\mathrm{w} \tag{3.197}$$
$$\mathbf{E}_{\lambda,c}^{[s,\mathbf{n};\mathbf{a}]}\mathrm{w} := \mathbf{E}_{\lambda,c}^{[s,\mathbf{n}]}\left(\mathrm{w} + \mathbf{a}\right) = \mathbf{W}_{\lambda,c}\left[s, \mathbf{n}, \mathbb{I}_{-1,1}\left[\mathbf{n}\right]; \mathbf{a}\right]\mathrm{w}, \tag{3.198}$$

де оператор $\mathbb{I}_{\sigma,\mu}\left[\mathbf{n}\right]$ $\left(\sigma, \mu \in \{-1,1\}\right)$ визначається за формулою (A.120).

Зауваження 3.107. Оскільки $\mathbb{I}_{\sigma,\mu}\left[\mathbf{n}\right] \in \mathfrak{U}\left(\mathfrak{H}_1\right)$, то, згідно позначень (2.18), враховуючи рівність $\mathbf{E}_{\lambda,c}^{[s,\mathbf{n}]} = \mathbf{E}_{\lambda,c}^{[s,\mathbf{n};\mathbf{0}]}$, маємо

$$\mathbf{E}_{\lambda,c}^{[s,\mathbf{n};\mathbf{a}]}, \mathbf{E}_{\lambda,c}^{[s,\mathbf{n}]} \in \mathfrak{P}\mathfrak{T}\left(\mathfrak{H}, c\right), \quad \text{причому,} \quad \mathbf{E}_{\lambda,c}^{[s,\mathbf{n};\mathbf{a}]}, \mathbf{E}_{\lambda,c}^{[s,\mathbf{n}]} \in \mathfrak{P}\left(\mathfrak{H}, c\right) \quad \text{при } \lambda < c.$$

(для довільних $c \in (0,\infty]$, $\lambda \in [0,\infty] \setminus \{c\}$, $s \in \{-1,1\}$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1\left(\mathfrak{H}_1\right)$, і $\mathbf{a} \in \mathcal{M}\left(\mathfrak{H}\right)$). Крім того, у випадку $s = 1$, отримуємо:

$$\mathbf{E}_{\lambda,c}^{[1,\mathbf{n};\mathbf{a}]}, \mathbf{E}_{\lambda,c}^{[1,\mathbf{n}]} \in \mathfrak{P}\mathfrak{T}_+\left(\mathfrak{H}, c\right), \text{ причому, } \mathbf{E}_{\lambda,c}^{[1,\mathbf{n};\mathbf{a}]}, \mathbf{E}_{\lambda,c}^{[1,\mathbf{n}]} \in \mathfrak{P}_+\left(\mathfrak{H}, c\right) \text{ при } \lambda < c. \tag{3.199}$$

($c \in (0,\infty]$, $\lambda \in [0,\infty] \setminus \{c\}$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1\left(\mathfrak{H}_1\right)$, $\mathbf{a} \in \mathcal{M}\left(\mathfrak{H}\right)$).

Для довільного $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1\left(\mathfrak{H}_1\right)$, використовуючи (A.6), маємо:

$$\mathbf{E}_{0,c}^{[1,\mathbf{n}]}\mathrm{w} = \mathcal{T}(\mathrm{w})\mathbf{e}_0 + \langle\mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle\,\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathbf{n}\right]\mathrm{w} = \widehat{\mathbf{T}}\mathrm{w} + \mathbf{X}_1\left[\mathbf{n}\right]\mathrm{w} + \mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathbf{n}\right]\mathrm{w} = \mathrm{w}.$$

Отже, використовуючи зауваження 3.107, при довільному $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1\left(\mathfrak{H}_1\right)$ отримуємо:

$$\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})} = \mathbf{E}_{0,c}^{[1,\mathbf{n}]} \in \mathfrak{P}_+\left(\mathfrak{H}, c\right) \cap \mathfrak{P}\left(\mathfrak{H}, c\right) \cap \mathfrak{P}\mathfrak{T}_+\left(\mathfrak{H}, c\right) \cap \mathfrak{P}\mathfrak{T}\left(\mathfrak{H}, c\right). \tag{3.200}$$

Знайдемо обернений оператор до оператора виду $\mathbf{E}_{\lambda,c}^{[s,\mathbf{n}]}$ при $c<\infty$.

Нехай, $0<c<\infty$, $\lambda\in[0,\infty]\setminus\{c\}$, $s\in\{-1,1\}$, $J\in\mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{n}\in\mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$. Тоді, згідно з формулою (A.72), оператор $\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J]$ можна подати у вигляді,

$$\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J]=\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J],\quad \text{де} \tag{3.201}$$
$$\theta=\frac{1-\frac{\lambda}{c}}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}\quad\left(\lambda=c\frac{1-\theta\,|\theta|}{1+\theta\,|\theta|},\ -1\le\theta\le1,\ \theta\neq0\right)$$

(при цьому, у випадку $\lambda=\infty$ слід вважати, що $\theta=-1$). Отже, згідно з наслідком A.41, отримуємо:

$$(\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J])^{-1}=(\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J])^{-1}=\mathbf{U}_{\theta^s,c}\left[s_\theta,s_\theta J\mathbf{n},J^{-1}\right], \tag{3.202}$$
$$\text{де}\quad s_\theta=\mathfrak{S}(s,\theta)=\begin{cases}1, & s,\theta>0\\ -1, & s<0 \text{ або } \theta<0.\end{cases}$$

У випадку $s=1$ маємо, $s_\theta=\operatorname{sign}\theta=\operatorname{sign}\left(\frac{1-\frac{\lambda}{c}}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}\right)=\operatorname{sign}(c-\lambda)$, де у випадку $\lambda=\infty$ слід вважати, що $\operatorname{sign}(c-\lambda)=-1$. Отже, використовуючи (3.202), в цьому випадку отримуємо:

$$(\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J])^{-1}=\mathbf{U}_{\theta,c}\left[s_\theta,s_\theta J\mathbf{n},J^{-1}\right]=\mathbf{W}_{\lambda,c}\left[s_\theta,s_\theta J\mathbf{n},J^{-1}\right]=$$
$$=\mathbf{W}_{\lambda,c}\left[\operatorname{sign}(c-\lambda),\operatorname{sign}(c-\lambda)J\mathbf{n},J^{-1}\right]\quad(s=1). \tag{3.203}$$

Розглянемо, тепер, випадок $s=-1$ ($\theta^s=\theta^{-1}$, $s_\theta=-1$). Застосовуючи формули (3.202) і (A.76), в цьому випадку отримуємо:

$$(\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J])^{-1}=\mathbf{U}_{\theta^{-1},c}\left[s_\theta,s_\theta J\mathbf{n},J^{-1}\right]=\mathbf{U}_{\theta^{-1},c}\left[-1,-J\mathbf{n},J^{-1}\right]=$$
$$=\mathbf{U}_{\theta,c}\left[-\operatorname{sign}\theta,(\operatorname{sign}\theta)\,J\mathbf{n},J^{-1}\right]=\mathbf{U}_{\theta,c}\left[-\operatorname{sign}(c-\lambda),\operatorname{sign}(c-\lambda)J\mathbf{n},J^{-1}\right]=$$
$$=\mathbf{W}_{\lambda,c}\left[-\operatorname{sign}(c-\lambda),\operatorname{sign}(c-\lambda)J\mathbf{n},J^{-1}\right]\quad(s=-1). \tag{3.204}$$

З формул (3.203) і (3.204) в обох випадках маємо:

$$(\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J])^{-1}=\mathbf{W}_{\lambda,c}\left[s\operatorname{sign}(c-\lambda),\operatorname{sign}(c-\lambda)J\mathbf{n},J^{-1}\right], \tag{3.205}$$

$0<c<\infty$, $\lambda\in[0,\infty]\setminus\{c\}$, $s\in\{-1,1\}$, $J\in\mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{n}\in\mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ (де у випадку $\lambda=\infty$ слід вважати, що $\operatorname{sign}(c-\lambda)=-1$).

Зокрема, використовуючи формули (3.197), (3.205), а також очевидні тотожності

$\mathbb{I}_{-1,1}[\mathbf{n}]\,\mathbf{n} = -\mathbf{n}$ та $(\mathbb{I}_{-1,1}[\mathbf{n}])^{-1} = \mathbb{I}_{-1,1}[\mathbf{n}]$, неважко підрахувати, що при $0 < c < \infty$, $\lambda \in [0,\infty] \setminus \{c\}$, $s \in \{-1,1\}$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ справедлива рівність:

$$\left(\mathbf{E}_{\lambda,c}^{[s,\mathbf{n}]}\right)^{-1} = (\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},\mathbb{I}_{-1,1}[\mathbf{n}]])^{-1} = \mathbf{E}_{\lambda,c}^{[s\,\mathrm{sign}\,(c-\lambda),-\mathrm{sign}\,(c-\lambda)\mathbf{n}]}. \tag{3.206}$$

З формул (3.206) та (3.198), використовуючи нескладні обчислення, отримуємо:

$$\left(\mathbf{E}_{\lambda,c}^{[s,\mathbf{n};\mathbf{a}]}\right)^{-1}\mathrm{w} = \mathbf{E}_{\lambda,c}^{[s\,\mathrm{sign}\,(c-\lambda),-\mathrm{sign}\,(c-\lambda)\mathbf{n}]}\mathrm{w} - \mathbf{a} \quad (\mathrm{w},\mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})). \tag{3.207}$$

Про умовну часозворотність тахіонових кінематик типу $\mathfrak{UPT}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ та $\mathfrak{UPT}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$. Нехай, $\mathcal{B}$ — довільна базова мінлива множина така, що $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathfrak{H}$ і $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = (\mathbb{R},\leq)$. Покладемо:

$$\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}} := \left(\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})},\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}[\mathcal{B}]\right) = \left(\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})},\mathcal{B}\right), \tag{3.208}$$

де рівність $\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}[\mathcal{B}] = \mathcal{B}$ випливає з зауваження 1.137. Використовуючи позначення (3.38), властивість 3.85(1), та формулу (3.200), отримуємо:

$$\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{UP}\,(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)) \cap \mathcal{L}k\,(\mathfrak{UP}_0\,(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)) \cap \\ \cap\, \mathcal{L}k\,(\mathfrak{UPT}\,(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)) \cap \mathcal{L}k\,(\mathfrak{UPT}_0\,(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)).$$

Згідно з властивістю 3.85(1) і позначенням (3.38), $\mathcal{L}k\,(\mathfrak{UPT}\,(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)) = \{(\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}[\mathcal{B}]) \mid \boldsymbol{U} \in \mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H},c)\}$. Покладемо:

$$\mathcal{L}k\,(\mathfrak{UPT}\,(\mathfrak{H},\mathcal{B},c))_{\mathfrak{T},\mathsf{fin}} := \big\{(\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}[\mathcal{B}]) \mid \\ \boldsymbol{U} = \mathbf{W}_{\lambda,c}[1,\mathbf{n},J;\mathbf{a}] \in \mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H},c)\,;\ c < \lambda < \infty\big\}. \tag{3.209}$$

Легко бачити, що $\mathcal{L}k\,(\mathfrak{UPT}\,(\mathfrak{H},\mathcal{B},c))_{\mathfrak{T},\mathsf{fin}} \subseteq \mathcal{L}k\,(\mathfrak{UPT}\,(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)) \subseteq \mathcal{L}k\,(\mathfrak{UPT}_0\,(\mathfrak{H},\mathcal{B},c))$.

Лема 3.108. *Для довільної системи відліку* $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{UPT}\,(\mathfrak{H},\mathcal{B},c))_{\mathfrak{T},\mathsf{fin}}$ *справедливе співвідношення,* $\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}} \Downarrow^{-}_{\mathfrak{UPT}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)} \mathfrak{l}$.

Доведення. Нехай, $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{UPT}\,(\mathfrak{H},\mathcal{B},c))_{\mathfrak{T},\mathsf{fin}}$. Тоді систему відліку $\mathfrak{l}$, згідно (3.209) та позначенням (2.18), можна подати у вигляді:

$$\mathfrak{l} = (\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}[\mathcal{B}])\,, \quad \text{де} \tag{3.210}$$

$$\boldsymbol{U} = \mathbf{W}_{\lambda,c}[1,\mathbf{n},J;\mathbf{a}] \tag{3.211}$$

($\infty > \lambda > c$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$). З формул (3.208), (3.210), за властивостями 3.85(4,7), отримуємо, $\mathbb{M}k\,(\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}}) = \mathbb{M}k(\mathfrak{l}) = \mathcal{M}(\mathfrak{H})$, причому,

$[\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w} = \mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}\boldsymbol{U}^{-1}\mathrm{w} = \boldsymbol{U}^{-1}\mathrm{w}$ $(\mathrm{w} \in \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l}) = \mathcal{M}\,(\mathfrak{H}))$. Звідси, використовуючи (3.211), (2.17) та (3.205), маємо:

$$\begin{aligned}
&[\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w} = (\mathbf{W}_{\lambda,c}\,[1,\mathbf{n},J;\mathbf{a}])^{-1}\,\mathrm{w} = (\mathbf{W}_{\lambda,c}\,[1,\mathbf{n},J])^{-1}\,\mathrm{w} - \mathbf{a} = \\
&\quad = \mathbf{W}_{\lambda,c}\left[\mathrm{sign}\,(c-\lambda), \mathrm{sign}\,(c-\lambda)J\mathbf{n}, J^{-1}\right]\mathrm{w} - \mathbf{a} = \\
&\quad = \mathbf{W}_{\lambda,c}\left[-1, -J\mathbf{n}, J^{-1}\right]\mathrm{w} - \mathbf{a} = \mathbf{W}_{\lambda,c}\left[-1, -J\mathbf{n}, J^{-1};\,\mathbf{a}'\right]\mathrm{w}, \\
&\quad \text{де} \quad \mathbf{a}' = -\left(\mathbf{W}_{\lambda,c}\left[-1, -J\mathbf{n}, J^{-1}\right]\right)^{-1}\mathbf{a}.
\end{aligned}$$

Для завершення доведення леми залишається скористатися наслідком 3.87. □

Наслідок 3.109. *Довільна універсальна кінематика виду* $\mathfrak{UPT}\,(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ *(*$c < \infty$*) є умовно часозворотною.*

Доведення. Розглянемо довільні вектор $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1\,(\mathfrak{H}_1)$ і число $\lambda \in \mathbb{R}$ таке, що $\lambda > c$. Взявши число $\mathbf{a}_1 := \frac{2\lambda}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{c^2}-1}}\mathbf{n}$, покладемо:

$$\mathfrak{l}_1 := \left(\mathbf{E}^{[1,\mathbf{n}]}_{\lambda,c}, \mathbf{E}^{[1,\mathbf{n}]}_{\lambda,c}\,[\mathcal{B}]\right); \quad \mathfrak{l}_2 := \left(\mathbf{E}^{[1,-\mathbf{n};\mathbf{a}_1]}_{\lambda,c}, \mathbf{E}^{[1,-\mathbf{n};\mathbf{a}_1]}_{\lambda,c}\,[\mathcal{B}]\right).$$

Із властивості 3.85(1), співвідношення (3.199) і позначення (3.38) випливає, що $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2 \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{UPT}\,(\mathfrak{H},\mathcal{B},c))$. Покладемо:

$$\mathrm{w}_0 := \mathbf{0};\ \mathrm{w}_1 := (1,0) = \mathbf{e}_0;\ \mathrm{w}_2 := 2\mathbf{e}_0;\ \mathrm{w}'_0 := -\frac{2}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{c^2}-1}}\,\mathbf{e}_0. \tag{3.212}$$

Доведемо, що системи відліку $\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}}$, $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$ і елементи $\mathrm{w}_0, \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \mathrm{w}'_0 \in \mathcal{M}\,(\mathfrak{H}) = \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}}) = \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l}_1) = \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l}_2)$ задовольняють умови теореми 3.103 (для кінематики $\mathcal{F} = \mathfrak{UPT}\,(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$).

1) Згідно з лемою 3.108, маємо, $\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}} \Downarrow^{-}_{\mathfrak{UPT}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)} \mathfrak{l}_1$ і $\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}} \Downarrow^{-}_{\mathfrak{UPT}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)} \mathfrak{l}_2$.

2) Використовуючи властивість 3.85(7) і формули (3.197), (3.198), (3.206), (3.207), отримуємо:

$$[\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}}]\,\mathrm{w}_0 = \mathbf{E}^{[1,\mathbf{n}]}_{\lambda,c}\mathbb{I}^{-1}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}\mathrm{w}_0 = \mathbf{E}^{[1,\mathbf{n}]}_{\lambda,c}\mathrm{w}_0 = \mathbf{E}^{[1,\mathbf{n}]}_{\lambda,c}\mathbf{0} = \mathbf{0} = \mathrm{w}_0; \tag{3.213}$$

$$\begin{aligned}
&[\mathfrak{l}_2 \leftarrow \mathfrak{l}_1]\,\mathrm{w}_1 = \mathbf{E}^{[1,-\mathbf{n};\mathbf{a}_1]}_{\lambda,c}\left(\mathbf{E}^{[1,\mathbf{n}]}_{\lambda,c}\right)^{-1}\mathrm{w}_1 = \mathbf{E}^{[1,-\mathbf{n};\mathbf{a}_1]}_{\lambda,c}\mathbf{E}^{[-1,\mathbf{n}]}_{\lambda,c}\mathbf{e}_0 = \mathbf{E}^{[1,-\mathbf{n}]}_{\lambda,c}\left(\mathbf{E}^{[-1,\mathbf{n}]}_{\lambda,c}\mathbf{e}_0 + \mathbf{a}_1\right) = \\
&\quad = \mathbf{E}^{[1,-\mathbf{n}]}_{\lambda,c}\left(\frac{\left(-1\cdot 1 - \frac{\lambda}{c^2}\cdot 0\right)}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}\mathbf{e}_0 + \frac{-1\cdot 0 - \lambda\cdot 1}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}\mathbf{n} + \mathbf{0} + \mathbf{a}_1\right) = \\
&\quad = \mathbf{E}^{[1,-\mathbf{n}]}_{\lambda,c}\left(-\frac{\mathbf{e}_0 + \lambda\mathbf{n}}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}} + \frac{2\lambda}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{c^2}-1}}\mathbf{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{c^2}-1}}\,\mathbf{E}^{[1,-\mathbf{n}]}_{\lambda,c}\,(-\mathbf{e}_0 + \lambda\mathbf{n}) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{c^2}-1}}\left(\frac{\left(1\cdot(-1)-\frac{\lambda}{c^2}\cdot(-\lambda)\right)}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{c^2}-1}}\mathbf{e}_0+\frac{1\cdot(-\lambda)-\lambda\cdot(-1)}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{c^2}-1}}(-\mathbf{n})+\mathbf{0}\right)=$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{c^2}-1}}\frac{\frac{\lambda^2}{c^2}-1}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{c^2}-1}}\mathbf{e}_0=\mathbf{e}_0=\mathrm{w}_1; \tag{3.214}$$

$$[\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}}\leftarrow\mathfrak{l}_2]\,\mathrm{w}_2=\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}\left(\mathbf{E}_{\lambda,c}^{[1,-\mathbf{n};\mathbf{a}_1]}\right)^{-1}(2\mathbf{e}_0)=\left(\mathbf{E}_{\lambda,c}^{[1,-\mathbf{n};\mathbf{a}_1]}\right)^{-1}(2\mathbf{e}_0)=$$

$$=2\mathbf{E}_{\lambda,c}^{[1\cdot(-1),-(-1)(-\mathbf{n})]}\mathbf{e}_0-\mathbf{a}_1=2\mathbf{E}_{\lambda,c}^{[-1,-\mathbf{n}]}\mathbf{e}_0-\mathbf{a}_1=$$

$$=2\left(\frac{\left((-1)\cdot 1-\frac{\lambda}{c^2}\cdot 0\right)}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}\mathbf{e}_0+\frac{(-1)\cdot 0-\lambda\cdot 1}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}(-\mathbf{n})+\mathbf{0}\right)-\mathbf{a}_1=$$

$$=-2\left(\frac{\mathbf{e}_0-\lambda\mathbf{n}}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{c^2}-1}}\right)-\frac{2\lambda}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{c^2}-1}}\mathbf{n}=-\frac{2}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{c^2}-1}}\mathbf{e}_0=\mathrm{w}_0'. \tag{3.215}$$

З рівностей (3.213), (3.214), (3.215) випливає, що другий пункт умови теореми 3.103 виконаний.

3) З рівностей (3.212) випливає виконання третього пункту умови теореми 3.103 (тобто $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_0)=\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1)=\mathsf{bs}(\mathrm{w}_2)=\mathsf{bs}(\mathrm{w}_0')$).

4) З рівностей (3.212) маємо, $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_0)=0<1=\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1)<2=\mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$. Згідно з властивістю 3.85(3) та умовою наслідка, $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}_1)=\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}_2)=\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})=(\mathbb{R},\leq)$. Отже, часовий порядок в системах відліку $\mathfrak{l}_1$ і $\mathfrak{l}_2$ співпадає із стандартним порядком поля дійсних чисел. Тому четвертий пункт умови теореми 3.103 також виконується. Таким чином, за теоремою 3.103, кінематика $\mathfrak{UPT}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ є умовно часозворотною. □

Аналогічно до наслідка 3.109, за допомогою теореми 3.103 доводиться такий наслідок:

Наслідок 3.110. *Довільна універсальна кінематика виду $\mathfrak{UPT}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ $(c<\infty)$ є умовно часозворотною.*

Наслідок 3.111. *Довільна універсальна кінематика виду $\mathfrak{UP}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ $(c<\infty)$ є умовно часозворотною.*

Доведення. Згідно (3.200), $\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}\in\mathfrak{P}(\mathfrak{H},c)$. Оператор $-\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}$ також належить до $\mathfrak{P}(\mathfrak{H},c)$, згідно з позначенням (2.18), оскільки

$$-\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}=\mathbf{W}_{0,c}[-1,\mathbf{n},\mathbb{I}_{-1,-1}[\mathbf{n}]]\qquad(\forall\mathbf{n}\in\mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)). \tag{3.216}$$

Таким чином:

$$\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})},-\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}\in\mathfrak{P}(\mathfrak{H},c). \tag{3.217}$$

Нехай, $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина така, що $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathfrak{H}$ і $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \leq)$. Покладемо, $\mathfrak{l}_1 := \left(-\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}, \left(-\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}\right)[\mathcal{B}]\right)$. Згідно із (3.217) і властивістю 3.85(1), маємо, $\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}}, \mathfrak{l}_1 \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{UP}_0\left(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c\right)\right)$. Звідси, використовуючи властивість 3.85(7), отримуємо:

$$[\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}} \leftarrow \mathfrak{l}_1] = \mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}\left(-\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}\right)^{-1} = -\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}. \tag{3.218}$$

З (3.218), за означенням 3.104, випливає, що система відліку $\mathfrak{l}_1$ — нерухома відносно системи відліку $\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}}$ в кінематиці $\mathfrak{UP}_0\left(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c\right)$. Далі, застосовуючи (3.218), (3.216) та наслідок 3.87, отримуємо співвідношення $\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}} \Downarrow^{-}_{\mathfrak{UP}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)} \mathfrak{l}_1$. Крім того, для елемента $\mathrm{w}_0 = \mathbf{0} \in \mathcal{M}\left(\mathfrak{H}\right) = \mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}_1\right)$, використовуючи властивість 3.85(7), маємо:

$$[\mathfrak{l}_1 \leftarrow \mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}}]\,\mathrm{w}_0 = -\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}\mathbb{I}^{-1}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}\mathbf{0} = \mathbf{0} = \mathrm{w}_0.$$

Отже, враховуючи зауваження 3.106 і властивість 3.85(3), згідно з якою $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{l}_1\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \leq)$ є необмеженою зверху лінійно упорядкованою множиною, бачимо, що системи відліку $\mathfrak{l}_0$ і $\mathfrak{l}_1$ задовольняють всі умови наслідка 3.105 для універсальної кінематики $\mathfrak{UP}_0\left(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c\right)$. Тому, згідно з наслідком 3.105, кінематика $\mathfrak{UP}_0\left(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c\right)$ є умовно часозворотною. □

Приклад безумовно часонезворотної тахіонової кінематики. Із наслідків 3.109 та 3.110 випливає, що кінематики виду $\mathfrak{UPT}\left(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c\right)$ та $\mathfrak{UPT}_0\left(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c\right)$, тобто всі тахіонові кінематики, побудовані в параграфі 3.4.1, які допускають рух з надсвітловою швидкістю для систем відліку, є умовно часозворотними. У зв'язку з цим виникає запитання:

Чи можна, базуючись на узагальнених перетвореннях Лоренца-Пуанкаре в сенсі E. Recami, В. Ольховського та R. Goldoni побудувати безумовно часонезворотну універсальну кінематику, яка допускає для систем відліку рух з довільною швидкістю, відмінною від швидкості світла?

Нижче буде побудовано універсальну кінематику, яка дасть позитивну відповідь на поставлене питання.

Нехай, $0 < c < \infty$. Покладемо:

$$\mathfrak{PT}^{\mp}_{\mathsf{fin}}\left(\mathfrak{H}, c\right) := \left\{\mathbf{W}_{\lambda,c}\left[s, \mathbf{n}, J; \mathbf{a}\right] \in \mathfrak{PT}\left(\mathfrak{H}, c\right) \mid s = \operatorname{sign}\left(c - \lambda\right),\ \lambda < \infty\right\}. \tag{3.219}$$

Нехай, $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина така, що $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathfrak{H}$ і $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \leq)$. Покладемо:

$$\mathfrak{UPT}^{\mp}_{\mathsf{fin}}\left(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c\right) := \mathfrak{Ku}\left(\mathfrak{PT}^{\mp}_{\mathsf{fin}}\left(\mathfrak{H}, c\right), \mathcal{B};\ \mathfrak{H}\right). \tag{3.220}$$

З формули (3.219) і позначення (2.18) випливає, що $\mathfrak{P}_{+}\left(\mathfrak{H}, c\right) \subseteq \mathfrak{PT}^{\mp}_{\mathsf{fin}}\left(\mathfrak{H}, c\right)$. Отже, згідно з (3.200), $\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})} \in \mathfrak{PT}^{\mp}_{\mathsf{fin}}\left(\mathfrak{H}, c\right)$. Тому, згідно із властивістю 3.85(1),

$\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{UPT}^{\mp}_{\mathsf{fin}}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)\right)$, де система відліку $\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}}$ визначається за формулою (3.208).

Лема 3.112. *Для довільної системи відліку* $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{UPT}^{\mp}_{\mathsf{fin}}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)\right)$ *справедливе співвідношення,* $\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}} \Uparrow^{+}_{\mathfrak{UPT}^{\mp}_{\mathsf{fin}}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)} \mathfrak{l}$.

Доведення. Нехай, $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{UPT}^{\mp}_{\mathsf{fin}}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)\right)$. Тоді, згідно з властивістю 3.85(1) та формулами (3.220) і (3.219), систему відліку $\mathfrak{l}$ можна подати у вигляді:

$$\mathfrak{l} = (\mathbf{U}, \mathbf{U}[\mathcal{B}]), \quad \text{де} \tag{3.221}$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{W}_{\lambda,c}[\operatorname{sign}(c-\lambda), \mathbf{n}, J; \mathbf{a}], \ 0 \le \lambda < \infty, \ \lambda \ne c, \tag{3.222}$$

$$\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1), \ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1), \ \mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}).$$

З формул (3.208), (3.221), за властивостями 3.85(4,7), отримуємо, $\mathbb{M}k(\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}}) = \mathbb{M}k(\mathfrak{l}) = \mathcal{M}(\mathfrak{H})$, причому:

$$[\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w} = \mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}\mathbf{U}^{-1}\mathrm{w} = \mathbf{U}^{-1}\mathrm{w}, \quad \mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}}) = \mathcal{M}(\mathfrak{H}).$$

Звідси, використовуючи (3.222), (2.17) та (3.205), маємо:

$$\begin{aligned}
&[\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w} = \left(\mathbf{W}_{\lambda,c}[\operatorname{sign}(c-\lambda), \mathbf{n}, J; \mathbf{a}]\right)^{-1}\mathrm{w} = \\
&\quad = \left(\mathbf{W}_{\lambda,c}[\operatorname{sign}(c-\lambda), \mathbf{n}, J]\right)^{-1}\mathrm{w} - \mathbf{a} = \\
&\quad = \mathbf{W}_{\lambda,c}\left[1, \operatorname{sign}(c-\lambda)J\mathbf{n}, J^{-1}\right]\mathrm{w} - \mathbf{a} = \\
&\quad = \mathbf{W}_{\lambda,c}\left[1, \mathbf{n}_1, J^{-1}\right]\mathrm{w} - \mathbf{a} = \mathbf{W}_{\lambda,c}\left[1, \mathbf{n}_1, J^{-1}; \mathbf{a}_1\right]\mathrm{w}, \\
&\qquad \text{де} \quad \mathbf{n}_1 = \operatorname{sign}(c-\lambda)J\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1), \quad \mathbf{a}_1 = -\left(\mathbf{W}_{\lambda,c}\left[1, \mathbf{n}_1, J^{-1}\right]\right)^{-1}\mathbf{a}.
\end{aligned} \tag{3.223}$$

З рівності (3.223), використовуючи наслідок 3.87, отримуємо бажане співвідношення $\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}} \Uparrow^{+}_{\mathfrak{UPT}^{\mp}_{\mathsf{fin}}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)} \mathfrak{l}$. □

З леми 3.112 і теореми 3.101 отримуємо такий наслідок:

Наслідок 3.113. *Довільна універсальна кінематика виду* $\mathfrak{UPT}^{\mp}_{\mathsf{fin}}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ *(*$0 < c < \infty$*) є безумовно часонезворотною.*

Зауваження 3.114. Кінематика виду $\mathfrak{UPT}^{\mp}_{\mathsf{fin}}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ $(0 < c < \infty)$ є слабко часопозитивною, проте не є часопозитивною. Аналогічно до леми 3.108 можна довести, що для довільної (надсвітлової) системи відліку виду:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{l} = (\mathbf{U}, \mathbf{U}[\mathcal{B}]) \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{UPT}^{\mp}_{\mathsf{fin}}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)\right), \quad \text{де} \\
&\quad \mathbf{U} = \mathbf{W}_{\lambda,c}[\operatorname{sign}(c-\lambda), \mathbf{n}, J; \mathbf{a}] = \mathbf{W}_{\lambda,c}[-1, \mathbf{n}, J; \mathbf{a}], \\
&\qquad c < \lambda < +\infty, \ \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1), \ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1), \ \mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})
\end{aligned}$$

справедливе співвідношення $\mathfrak{l} \Downarrow^{-}_{\mathfrak{UPT}^{\mp}_{\mathsf{fin}}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)} \mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}}$ незважаючи на те, що $\mathfrak{l}_{0,\mathcal{B}} \Uparrow^{+}_{\mathfrak{UPT}^{\mp}_{\mathsf{fin}}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)} \mathfrak{l}$ (згідно з лемою 3.112). Про інший приклад безумовно часонезворотних тахіонових кінематик сказано в зауваженні Б.1 додатку Б.

3.9.10. Деякі висновки. **1.** Згідно з наслідком 3.113, кінематика виду $\mathfrak{UPT}^{\mp}_{\mathsf{fin}}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ (у випадку $\dim(\mathfrak{H})=3$) є прикладом безумовно часонезворотного тахіонового розширення кінематики спеціальної теорії відносності, яке дозволяє для матеріальних об'єктів і систем відліку рух з довільною швидкістю, відмінною від швидкості світла. Тому, на основі теореми 3.101, бачимо, що гіпотеза про існування матеріальних об'єктів та інерційних систем відліку, що рухаються із швидкостями, більшими за швидкість світла, взагалі кажучи, не приводить до часових парадоксів, пов'язаних з можливістю повернення до власного минулого.

2. В [58] було отримано наступні два варіанта узагальнених перетворень Лоренца для надсвітлових систем відліку (у спеціальному випадку, коли обидві системи рухаються вздовж спільної осі абсцис і мають однакову орієнтацію інших осей координат):

$$t'=\frac{t-\frac{vx}{c^2}}{\sqrt{\left(\frac{v}{c}\right)^2-1}},\ x'=\frac{x-vt}{\sqrt{\left(\frac{v}{c}\right)^2-1}},\ \begin{array}{l} y'=y,\\ z'=z,\end{array}\quad \text{або}: \tag{3.224}$$

$$t'=\frac{-t+\frac{vx}{c^2}}{\sqrt{\left(\frac{v}{c}\right)^2-1}},\ x'=\frac{-x+vt}{\sqrt{\left(\frac{v}{c}\right)^2-1}},\ \begin{array}{l} y'=y,\\ z'=z,\end{array} \tag{3.225}$$

де $v\in\mathbb{R}$, $|v|>c$ (див. [58, формула (3.16) та формула (3.18)]). Перетворення (3.224) є частинним випадком перетворень виду (A.155) при $\dim(\mathfrak{H})=3$, $\lambda>c$ і $s=1$, тоді, як перетворення (3.225) належать до перетворень виду (A.155) для $\dim(\mathfrak{H})=3$, $\lambda>c$ і $s=-1$. Якщо в формулах (A.155) та (2.17) покласти $s=1$ як для досвітлового так і для надсвітлового значення швидкості системи відліку, то отримаємо клас операторів $\mathfrak{PT}_{+}(\mathfrak{H},c)$ (див. (2.18)), а також побудовану на основі цього класу універсальну кінематику виду $\mathfrak{UPT}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$. Згідно з наслідком 3.109, ця кінематика є умовно часозворотною. Проте, якщо покласти в (2.17) значення $s=1$ для досвітлового діапазону, а значення $s=-1$ для надсвітлового діапазону швидкостей систем відліку, то отримаємо клас операторів $\mathfrak{PT}^{\mp}_{\mathsf{fin}}(\mathfrak{H},c)$, визначений в формулі (3.219) і побудовану на основі цього класу універсальну кінематику $\mathfrak{UPT}^{\mp}_{\mathsf{fin}}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$. Згідно з наслідком 3.113, кінематика $\mathfrak{UPT}^{\mp}_{\mathsf{fin}}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ є безумовно часонезворотною. Таким чином можна сформулювати наступний висновок стосовно двох варіантів надсвітлових перетворень Лоренца, отриманих в [58]:

З точки зору вимоги часонезворотності, перетворення (3.225) (тобто [58, формула (3.18)]) є більш прийнятними для побудови тахіонового розширення спеціальної теорії відносності, ніж перетворення (3.224) (тобто [58, формула (3.16)]).

Основні результати підрозділу 3.9 були анонсовані в [158] і опубліковані в [159, 160], а також, представлені на конференціях [98, 161–163].

3.10. Одностайно-поступальні системи відліку в універсальних кінематиках

3.10.1. Вступні зауваження Поняття інерційної системи відліку відіграє ключову роль в класичній механіці та спеціальній теорії відносності, оскільки в інерційних системах відліку основні фундаментальні закони фізики мають найпростіше формулювання. При цьому прийнято вважати, що всі інерційні системи відліку рухаються рівномірно прямолінійно (тобто зі сталою швидкістю) одна відносно іншої.

В даному та попередньому розділах дисертаційної роботи, використовуючи теорію мінливих множин, було побудовано новий клас математичних об'єктів — універсальні кінематики, які призначені для математичного моделювання еволюції фізичних систем в рамках різних законів кінематики, а також показано, що теорія універсальних кінематик може бути застосована для математично строгого обґрунтування кінематики спеціальної теорії відносності та її тахіонових розширень. Тому, у зв'язку із сказаним в першому абзаці, природним чином постає задача дослідити рівномірний прямолінійний рух систем відліку на рівні абстрактних універсальних кінематик. Але, оскільки, як було сказано вище, рівномірний прямолінійний рух систем відліку є рухом зі сталою швидкістю, то спершу доцільно дослідити на абстрактному рівні більш загальний випадок, коли системи відліку рухаються таким чином, що можна однозначно ввести поняття переміщення, а отже середньої або миттєвої швидкості руху однієї системи відліку відносно іншої. Саме такий вид руху систем відліку надалі буде називатись одностайно-поступальним.

В даному підрозділі формулюється строге означення одностайно-поступальних систем відліку в універсальних кінематиках, та досліджуються їхні властивості.

3.10.2. Різні варіанти означень одностайно-поступальних систем відліку.

Векторні універсальні кінематики та їх властивості.

Означення 3.115. (а) Кінематична множина $\mathfrak{C}$ називається **векторною**, якщо:

$$\forall\, \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}) \;\; (\mathbb{L}s(\mathfrak{l}) \neq \emptyset)\,.$$

(б) Універсальна кінематика $\mathcal{F} = \left(\mathfrak{C}, \overleftarrow{\mathcal{Q}}\right)$ називається **векторною**, якщо $\mathfrak{C}$ є векторною кінематичною множиною.

Використовуючи систему позначень, прийняту в даній роботі (див. підрозділи 2.2.4, 3.2.2), отримуємо наступний наслідок означення 3.115.

Наслідок 3.116. *Універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є векторною тоді і тільки тоді, коли* $\forall\, \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F}) \;\; (\mathbb{L}s(\mathfrak{l}) \neq \emptyset)$.

Наслідок 3.116 можна розглядати як альтернативний варіант означення векторної універсальної кінематики.

Нехай, $\mathfrak{C}$ — довільна **векторна** кінематична множина або універсальна кінематика. Тоді, згідно з означенням 3.115 та наслідком 3.116, для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ виконується співвідношення $\mathbb{L}s(\mathfrak{l};\mathfrak{C}) \neq \emptyset$. Звідси, враховуючи систему позначень, прийняту в даній роботі, випливає, що для будь-якої системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ і для довільних елементів $a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l},\mathfrak{C})$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ визначений елемент $(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)_{\mathfrak{l},\mathfrak{C}}$. Керуючись скороченими варіантами позначень, введеними в даній роботі, надалі у випадку, коли наперед відомо, про яку кінематичну множину або універсальну кінематику $\mathfrak{C}$ йде мова, замість позначень $\mathbb{L}s(\mathfrak{l};\mathfrak{C})$, $\mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l},\mathfrak{C})$, $(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)_{\mathfrak{l},\mathfrak{C}}$ будемо використовувати позначення $\mathbb{L}s(\mathfrak{l})$, $\mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l})$, $(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)_{\mathfrak{l}}$ відповідно. Крім того, коли зі змісту тексту можна визначити, про яку систему відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ йде мова, замість позначення $(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)_{\mathfrak{l}}$ будемо використовувати позначення $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$.

Перетворення координат в універсальних кінематиках та оператори перетворення координат.

Означення 3.117. Нехай, $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ — координатні простори, а $\mathbb{T}_1 = (\mathbf{T}_1, \leq_1)$ і $\mathbb{T}_2 = (\mathbf{T}_1, \leq_2)$ $(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \neq \emptyset)$ — довільні лінійно упорядковані множини. Довільну бієкцію $\mathcal{U}$ між $\mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{Q}_1)$ і $\mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{Q}_2)$ ($\mathcal{U} : \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{Q}_1) \longleftrightarrow \mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{Q}_2)$) будемо називати оператором перетворення координат з $(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1)$ в $(\mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$. Множину всіх операторів перетворення координат з $(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1)$ в $(\mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$ будемо позначати через:

$$\mathbb{P}\mathbf{k}\,(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)\,.$$

Безпосередньо з означення 3.117, а також з означення універсальної кінематики та системи позначень для універсальних кінематик випливає наступне твердження.

Твердження 3.118. *Нехай, $\mathcal{F}$ — універсальна кінематика і $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ — довільні системи відліку $\mathcal{F}$. Тоді:*

$$[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}] \in \mathbb{P}\mathbf{k}\,(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}), \mathsf{BG}(\mathfrak{l}); \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{m}), \mathsf{BG}(\mathfrak{m}))\,.$$

Отже, довільне перетворення координат між системами відліку в довільній універсальній кінематиці є оператором перетворення координат.

Навпаки, нехай $\mathcal{U} \in \mathbb{P}\mathbf{k}\,(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$, де $\mathbb{T}_i = (\mathbf{T}_i, \leq_i)$ $(i \in \overline{1,2})$. Розглянемо довільну базову мінливу множину $\mathcal{B}$ таку, що $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{Q}_1)$, $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = \mathbb{T}_1$ і породжену нею базову кінематичну множину:

$$\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q}_1)} := \left(\mathcal{B}, \left(\mathfrak{Q}_1, \mathbb{I}_{\mathfrak{Bs}(\mathcal{B})}\right)\right)\,,$$

де $\mathbb{I}_{\mathcal{M}}$ — тотожне відображення на множині $\mathcal{M}$. Використовуючи систему позначень теорії базових кінематичних множин та означення множини Мінковського над базовою кінематичною множиною (див. (2.2)), отримуємо:

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q}_1)}\right) &= \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = \mathbb{T}_1; \quad \mathbf{Tm}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q}_1)}\right) = \mathbf{T}_1; \\
\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q}_1)}\right) &= \mathcal{B}; \\
\mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q}_1)}\right) &= \mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_1\right); \quad \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q}_1)}\right) = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_1\right); \\
\mathbf{Zk}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q}_1)}\right) &= \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_1\right); \\
\mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q}_1)}\right) &= \mathbf{Tm}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q}_1)}\right) \times \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q}_1)}\right) = \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_1\right); \\
\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q}_1)}} &= \mathbb{I}_{\mathfrak{Bs}(\mathcal{B})}.
\end{aligned} \tag{3.226}$$

Звідси для довільного $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q}_1)}\right)$ одержуємо,

$$\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q}_1)} \right\rangle}(\omega) = \left(\mathsf{tm}(\omega), \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q}_1)}}(\mathsf{bs}(\omega))\right) = \left(\mathsf{tm}(\omega), \mathsf{bs}(\omega)\right) = \omega.$$

Отже, $\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q}_1)} \right\rangle} = \mathbb{I}_{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}$.

Використовуючи отримані вище рівності та означення 3.4, одержуємо, що індексована сім'я:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}_0 &= \Big(\left(\mathbb{T}_1, \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_1\right), \mathbb{I}_{\mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)}, \mathfrak{Q}_1, \mathbb{I}_{\mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)}\right), \left(\mathbb{T}_2, \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_2\right), \mathcal{U}, \mathfrak{Q}_2, \mathcal{U}\right)\Big) = \\
&= \Big(\left(\mathbb{T}_\alpha, \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_\alpha\right), U_\alpha, \mathfrak{Q}_\alpha, U_\alpha\right) \mid \alpha \in \overline{1,2}\Big),
\end{aligned}$$

$$\text{де} \quad U_\alpha = \begin{cases} \mathbb{I}_{\mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)}, & \alpha = 1 \\ \mathcal{U}, & \alpha = 2 \end{cases}$$

є універсальним кінематичним мультипроектором для базової кінематичної множини $\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q}_1)}$. Отже, керуючись теоремою 3.5 та означенням 3.6, можна покласти:

$$\mathcal{F}_0 := \mathfrak{Ku}\left[\mathfrak{P}_0, \mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q}_1)}\right].$$

Використовуючи властивості 3.7(1, 7, 3), рівність (3.226), та теорему 3.5 (пункт 2), для систем відліку:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{l} &= \left(1, U_1\left[\mathcal{B}, \mathbb{T}_1\right]\right) = \left(1, \mathbb{I}_{\mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)}\left[\mathcal{B}\right]\right) = (1, \mathcal{B}) \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}_0\right); \\
\mathfrak{m} &= \left(2, U_2\left[\mathcal{B}, \mathbb{T}_2\right]\right) = \left(2, \mathcal{U}\left[\mathcal{B}, \mathbb{T}_2\right]\right) \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}_0\right)
\end{aligned}$$

отримуємо:

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}] = \mathcal{U}; \quad & \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}) = \mathbb{T}_1; \quad \mathsf{BG}\left(\mathfrak{l}, \mathcal{F}_0\right) = \mathfrak{Q}_1; \\
& \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{m}) = \mathbb{T}_2; \quad \mathsf{BG}\left(\mathfrak{m}, \mathcal{F}_0\right) = \mathfrak{Q}_2.
\end{aligned}$$

При цьому, згідно з властивістю 3.7 (1), $\mathcal{L}k\left(\mathcal{F}_0\right) = \{\mathfrak{l}, \mathfrak{m}\}$. Отже, якщо $\mathfrak{Q}_1$ і $\mathfrak{Q}_2$ — ***векторні*** координатні простори (тобто $\mathbb{L}s\left(\mathfrak{Q}_1\right) \neq \emptyset$ і $\mathbb{L}s\left(\mathfrak{Q}_2\right) \neq \emptyset$), то, згідно з на-

слідком 3.116, $\mathcal{F}_0$ є векторною універсальною кінематикою. Таким чином, ми довели справедливість наступного твердження:

Твердження 3.119. *Для довільного оператора перетворення координат* $\mathcal{U} \in \mathbb{P}\mathbf{k}\left(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2\right)$ *існують універсальна кінематика* $\mathcal{F}$ *і системи відліку* $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$ *такі, що:*

$$\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}) = \mathbb{T}_1; \quad \mathsf{BG}\left(\mathfrak{l}, \mathcal{F}\right) = \mathfrak{Q}_1; \quad [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}] = \mathcal{U}.$$
$$\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{m}) = \mathbb{T}_2; \quad \mathsf{BG}\left(\mathfrak{m}, \mathcal{F}\right) = \mathfrak{Q}_2;$$

При цьому якщо $\mathfrak{Q}_1$ *і* $\mathfrak{Q}_2$ *є векторними координатними просторами, то універсальна кінематика* $\mathcal{F}$ *також є векторною.*

З тверджень 3.118 і 3.119 випливає, що вивчення властивостей перетворень координат між системами відліку в універсальних кінематиках можна звести до вивчення властивостей операторів перетворення координат.

Траєкторії для систем відліку в універсальних кінематиках.

Означення 3.120. Нехай, $\mathcal{F}$ — довільна універсальна кінематика і $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$ — довільні системи відліку $\mathcal{F}$. Траєкторією точки $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{m}\right)$ (при русі системи відліку $\mathfrak{m}$ відносно системи відліку $\mathfrak{l}$) в кінематиці $\mathcal{F}$ будемо називати множину:

$$\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}, \mathcal{F}]}\left(\mathrm{x}\right) = \left\{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\left(t, \mathrm{x}\right) \mid t \in \mathbf{Tm}\left(\mathfrak{m}\right)\right\} \subseteq \mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}\right).$$

Зауваження 3.121. У випадку, коли наперед відомо, про яку універсальну кінематику $\mathcal{F}$ йде мова, замість позначення $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}, \mathcal{F}]}\left(\mathrm{x}\right)$ будемо використовувати скорочене позначення, $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}\left(\mathrm{x}\right)$.

Властивості траєкторій. У твердженнях 3.122 і 3.123 $\mathcal{F}$ є довільною універсальною кінематикою, а $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$ — довільні системи відліку $\mathcal{F}$.

Твердження 3.122. *Для довільних* $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{m}\right)$ *з умов* $\mathrm{x} \neq \mathrm{y}$ *випливає співвідношення,* $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}\left(\mathrm{x}\right) \cap \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}\left(\mathrm{y}\right) = \emptyset$.

Доведення. Нехай, $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{m}\right)$ і $\mathrm{w} \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}\left(\mathrm{x}\right) \cap \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}\left(\mathrm{y}\right)$. Тоді, за означенням 3.120, існують моменти часу $t_1, t_2 \in \mathbf{Tm}\left(\mathfrak{m}\right)$ такі, що:

$$\mathrm{w} = [\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\left(t_1, \mathrm{x}\right) = [\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\left(t_2, \mathrm{y}\right).$$

Звідси, використовуючи формули (3.3) і (3.4), отримуємо:

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\left(t_1, \mathrm{x}\right) &= [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\left(t_2, \mathrm{y}\right); \\
[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{m}]\left(t_1, \mathrm{x}\right) &= [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{m}]\left(t_2, \mathrm{y}\right); \\
\left(t_1, \mathrm{x}\right) &= \left(t_2, \mathrm{y}\right).
\end{aligned}$$

Отже, $\left(t_1, \mathrm{x}\right) = \left(t_2, \mathrm{y}\right)$, тобто $\mathrm{x} = \mathrm{y}$. $\square$

Твердження 3.123. *Для довільного елемента* $\mathrm{w} \in \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l})$ *існує, причому єдиний елемент* $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{m})$ *такий, що* $\mathrm{w} \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}\,(\mathrm{x})$.

Доведення. Розглянемо довільний елемент $\mathrm{w} \in \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l})$. Покладемо:

$$\mathrm{x} := \mathsf{bs}\,([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w})\,; \qquad t_0 := \mathsf{tm}\,([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w})\,.$$

Тоді, використовуючи формули (3.3) і (3.4), отримуємо:

$$\begin{aligned}[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\,(t_0, \mathrm{x}) &= [\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\,(\mathsf{tm}\,([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w})\,, \mathsf{bs}\,([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w})) = \\ &= [\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\,[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w} = [\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w} = \mathrm{w}.\end{aligned}$$

Отже, за означенням 3.120, маємо, $\mathrm{w} \in \{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\,(t, \mathrm{x}) \mid t \in \mathbf{Tm}\,(\mathfrak{m})\} = \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}\,(\mathrm{x})$.

Доведемо, що елемент $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$, що задовольняє умову $\mathrm{w} \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}\,(\mathrm{x})$ — єдиний. Припустимо, що $\mathrm{w} \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}\,(\mathrm{x}_1)$, де $\mathrm{x}_1 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$. Тоді, $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}\,(\mathrm{x}) \cap \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}\,(\mathrm{x}_1) \neq \emptyset$. Отже, за твердженням 3.122, $\mathrm{x} = \mathrm{x}_1$. □

Означення одностайно-поступальних систем відліку в універсальних кінематиках В якості фізичної мотивації для того означення одностайно-поступальних систем відліку, яке буде сформульовано в цьому розділі, може служити наступне означення поступального руху тіл, взяте з [164, стор. 11]:

Означення A. *Поступальним рухом тіла називається такий його рух, при якому всі точки тіла рухаються по однакових (тобто паралельних) траєкторіях, проходячи за однакові проміжки часу однакові ділянки своїх траєкторій.*

Виходячи з означення A можна дати наступне (нестроге, фізичне) означення для одностайно-поступального руху систем відліку.

Означення A′. *Будемо говорити, що система відліку* $\mathfrak{m}$ *рухається одностайно-поступально відносно системи відліку* $\mathfrak{l}$*, якщо всі точки, нерухомі відносно системи відліку* $\mathfrak{m}$ *рухаються відносно* $\mathfrak{l}$ *по однакових (тобто паралельних) траєкторіях, проходячи за однакові проміжки часу однакові ділянки своїх траєкторій.*

Наступні зусилля спрямовані на те, щоб дати математично строгий аналог означення A′ для систем відліку в абстрактних універсальних кінематиках. Спершу буде сформульовано необхідні технічні означення і доведено необхідні технічні твердження, для того, щоб це зробити.

Означення 3.124. Нехай, $\mathcal{F}$ — довільна векторна універсальна кінематика і $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ довільна система відліку $\mathcal{F}$.

1. **Паралельним зсувом** множини $A \subseteq \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l})$ на вектор $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l})$ (в системі відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$) будемо називати множину:

$$A^{\langle +\mathrm{x};\,\mathfrak{l}\rangle} := \{(\mathsf{tm}\,(\mathrm{w})\,,\ \mathrm{x}+\mathsf{bs}\,(\mathrm{w}))\mid \mathrm{w}\in A\}\,.$$

У випадках, коли не виникає непорозумінь, замість позначення $A^{\langle +\mathrm{x};\,\mathfrak{l}\rangle}$ будемо використовувати позначення, $A^{\langle +\mathrm{x}\rangle}$.

2. Будемо говорити, що множина $A \subseteq \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l})$ **паралельна** множині $B \subseteq \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l})$ **відносно** системи відліку $\mathfrak{l}$ (позначення: $A \parallel_{\mathfrak{l}}^{\mathcal{F}} B$), якщо існує елемент $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l})$ такий, що $B = A^{\langle +\mathrm{x}\rangle}$, тобто такий, що:

$$B = \{(\mathsf{tm}\,(\mathrm{w})\,,\ \mathrm{x}+\mathsf{bs}\,(\mathrm{w}))\mid \mathrm{w}\in A\}\,.$$

У випадку, коли відомо, про яку універсальну кінематику $\mathcal{F}$ йде мова, замість позначення $A \parallel_{\mathfrak{l}}^{\mathcal{F}} B$ будемо використовувати позначення, $A \parallel_{\mathfrak{l}} B$.

Твердження 3.125. *Нехай, $\mathcal{F}$ — довільна векторна універсальна кінематика і $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ довільна система відліку $\mathcal{F}$. Тоді:*

1. *$A^{\langle +\mathbf{0}\rangle} = A$ (для довільної множини $A \subseteq \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l})$), де $\mathbf{0} = \mathbf{0}_{\mathfrak{l}} = \mathbf{0}_{\mathfrak{l},\mathcal{F}}$ — нульовий вектор лінійного простору, породженого лінійною структурою $\mathbb{L}s(\mathfrak{l})$;*
2. *$\left(A^{\langle +\mathrm{x}\rangle}\right)^{\langle +\mathrm{y}\rangle} = A^{\langle +(\mathrm{x}+\mathrm{y})\rangle}$ (для довільних $A \subseteq \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l})$ та $\mathrm{x},\mathrm{y} \in \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l})$), зокрема $\left(A^{\langle +\mathrm{x}\rangle}\right)^{\langle +(-\mathrm{x})\rangle} = A^{\langle +\mathbf{0}\rangle} = A$;*
3. *Бінарне відношення $\parallel_{\mathfrak{l}}$ є відношенням еквівалентності (тобто рефлексивним, симетричним і транзитивним відношенням) на множині $2^{\mathbb{M}k(\mathfrak{l})} = \{A \mid A \subseteq \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l})\}$.*

Доведення. Пункти 1 і 2 отримуються з означення 3.124 за допомогою тривіальної перевірки. Пункт 3 випливає з пунктів 1 і 2. □

Відповідно до означення 3.124 (пункт 2), ми вже можемо говорити про паралельні траєкторії в системах відліку довільних універсальних кінематик. Проте виявляється, що у випадку абстрактної векторної універсальної кінематики $\mathcal{F}$ необхідно бути впевненим, що для довільного $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{m})$ траєкторія $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}\,(\mathrm{x})$ є коректною траєкторією руху якоїсь точки в системі відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$, оскільки далі буде наведено приклад, котрий показує, що в загальному випадку це не так. Саме тому в пункті 1 наступного означення водиться поняття траєкторної регулярності однієї системи відліку відносно іншої.

Означення 3.126. Нехай, $\mathcal{F}$ — довільна універсальна кінематика.

1. Будемо говорити, що система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ є **траєкторно-регулярною** відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ (у кінематиці $\mathcal{F}$), якщо виконується наступна умова:

(а) для довільного $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$ траєкторія $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x})$ є абстрактною траєкторією з $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l})$ в $\mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$ (тобто $\forall\, \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x})$ з умови $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$ випливає рівність $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2)$, а отже і рівність $\mathrm{w}_1 = \mathrm{w}_2$).

У наступних двох пунктах, $\mathcal{F}$ — довільна векторна універсальна кінематика.

2. Будемо говорити, що система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є **одностайно-квазіпоступальною** (скорочено — **квазіодностайною**) відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ (у кінематиці $\mathcal{F}$), якщо:

   (б) для довільних $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$ виконується співвідношення $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}) \parallel_{\mathfrak{l}} \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{y})$.

3. Будемо говорити, що система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є **одностайно-поступальною** (скорочено — **одностайною**) відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ (у кінематиці $\mathcal{F}$), якщо $\mathfrak{m}$ є квазіодностайною і траєкторно регулярною відносно $\mathfrak{l}$ у кінематиці $\mathcal{F}$, тобто, якщо виконуються умови (а) і (б) даного означення.

Підкреслимо, що надалі всюди в цій роботі замість термінів "одностайно-квазіпоступальна" та "одностайно-поступальна" (система відліку) ми будемо користуватись їхніми скороченими варіантами "***квазіодностайна***" та "***одностайна***" відповідно.

Позначення 3.127. Нехай, $d \in \mathbb{N}$. Надалі через $\widehat{\mathbb{R}^d}$ будемо позначати (векторний) координатний простір, породжений $\mathbb{R}^d$, тобто координатний простір, у якому:

1) $\mathbf{Zk}\left(\widehat{\mathbb{R}^d}\right) = \mathbb{R}^d$;

2) $(\mathrm{x}+\mathrm{y})_{\widehat{\mathbb{R}^d}} = (\mathrm{x}_1+\mathrm{y}_1, \cdots, \mathrm{x}_d+\mathrm{y}_d)$, де $\mathrm{x} = (\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_d) \in \mathbb{R}^d$, $\mathrm{y} = (\mathrm{y}_1, \cdots, \mathrm{y}_d) \in \mathbb{R}^d$;

3) $(\lambda\mathrm{x})_{\widehat{\mathbb{R}^d}} = (\lambda\mathrm{x}_1, \cdots, \lambda\mathrm{x}_d)$, $\mathrm{x} = (\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_d) \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

4) $(x, y)_{\widehat{\mathbb{R}^d}} = \langle x, y\rangle_{\widehat{\mathbb{R}^d}} = \mathrm{x}_1\mathrm{y}_1 + \cdots + \mathrm{x}_d\mathrm{y}_d$, $\mathrm{x} = (\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_d) \in \mathbb{R}^d$, $\mathrm{y} = (\mathrm{y}_1, \cdots, \mathrm{y}_d) \in \mathbb{R}^d$, зокрема $\|\mathrm{x}\|_{\widehat{\mathbb{R}^d}} = \sqrt{\langle \mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle_{\widehat{\mathbb{R}^d}}} = \sqrt{\mathrm{x}_1^2 + \cdots + \mathrm{x}_d^2}$ (тут $(x, y)_{\widehat{\mathbb{R}^d}} = \langle x, y\rangle_{\widehat{\mathbb{R}^d}}$ та $\|\mathrm{x}\|_{\widehat{\mathbb{R}^d}}$ — скалярний добуток та норма в координатному просторі $\widehat{\mathbb{R}^d}$ відповідно).

Зокрема при $d = 1$ будемо позначати, $\boxed{\widehat{\mathbb{R}} := \widehat{\mathbb{R}^1}}$.

Умови квазіодностайності і траєкторної регулярності в пункті 3 означення 3.126 є логічно незалежними. Для того, щоб переконатись у цьому, нижче розглянемо наступні два приклади.

Приклад 3.128. Нехай, функція $\boldsymbol{f} : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ є бієкцією з $[0,\infty)$ на $\mathbb{R}$, а функція $\boldsymbol{g} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ — бієкція з $(0,\infty)$ на $\mathbb{R}$. Зокрема, в якості $\boldsymbol{f}$ і $\boldsymbol{g}$ можна взяти наступні функції:

$$\boldsymbol{f}(x) = \begin{cases} \ln(x), & x \notin \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\} \\ \ln\left(\frac{1}{n+1}\right), & x = \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}) \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad ; \qquad \boldsymbol{g}(x) = \ln(x).$$

Визначимо відображення $\mathcal{U} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ за формулою:

$$\mathcal{U}\,(t,\mathrm{x}) := \begin{cases} \left(\boldsymbol{f}^{[-1]}(t), \boldsymbol{f}(\mathrm{x})\right), & \mathrm{x} \geq 0; \\ \left(-\boldsymbol{g}^{[-1]}(t), \boldsymbol{g}(-\mathrm{x})\right), & \mathrm{x} < 0, \end{cases} \qquad \left((t,\mathrm{x}) \in \mathbb{R}^2\right),$$

де $\boldsymbol{f}^{[-1]}$ і $\boldsymbol{g}^{[-1]}$ — функції, обернені до функцій $\boldsymbol{f}$ і $\boldsymbol{g}$ відповідно. Легко переконатись, що визначене вище відображення $\mathcal{U}$ є бієкцією з $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, а отже, оператором перетворення координат з $\left(\mathbb{R}_{ord}, \widehat{\mathbb{R}}\right)$ в $\left(\mathbb{R}_{ord}, \widehat{\mathbb{R}}\right)$, де $\mathbb{R}_{ord} = (\mathbb{R}, \leq)$ і $\leq$ — стандартне відношення порядку поля дійсних чисел, тобто, $\mathcal{U} \in \mathbb{P}\mathbf{k}\left(\mathbb{R}_{ord}, \widehat{\mathbb{R}}; \mathbb{R}_{ord}, \widehat{\mathbb{R}}\right)$. Тому, згідно з твердженням 3.119, існують векторна універсальна кінематика $\mathcal{F}$ і системи відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ такі, що:

$$\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}) = \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{m}) = \mathbb{R}_{ord}; \tag{3.227}$$

$$\mathsf{BG}\,(\mathfrak{l}, \mathcal{F}) = \mathsf{BG}\,(\mathfrak{m}, \mathcal{F}) = \widehat{\mathbb{R}}; \tag{3.228}$$

$$[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}, \mathcal{F}] = \mathcal{U}. \tag{3.229}$$

З формули (3.228) випливає, що $\mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l}, \mathcal{F}) = \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{m}, \mathcal{F}) = \mathbf{Zk}\left(\widehat{\mathbb{R}}\right) = \mathbb{R}$. Таким чином, враховуючи (3.227), маємо:

$$\mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l}) = \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{m}) = \mathbb{R}; \qquad \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) = \mathbf{Tm}(\mathfrak{m}) = \mathbb{R}. \tag{3.230}$$

Доведемо, що система відліку $\mathfrak{m}$ є траєкторно регулярною відносно системи відліку $\mathfrak{l}$. Справді, згідно з (3.230), $\mathbf{Zk}\,(\mathfrak{m}) = \mathbb{R}$. Тому, використовуючи (3.230) і (3.229), для довільного $\mathrm{x} \in \mathbb{R} = \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{m})$, за означенням 3.120, отримуємо:

$$\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}\,(\mathrm{x}) = \{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\,(t,\mathrm{x}) \mid t \in \mathbf{Tm}\,(\mathfrak{m})\} = \{\mathcal{U}\,(t,\mathrm{x}) \mid t \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \begin{cases} \left\{\left(\boldsymbol{f}^{[-1]}(t), \boldsymbol{f}(\mathrm{x})\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\}, & \mathrm{x} \geq 0 \\ \left\{\left(-\boldsymbol{g}^{[-1]}(t), \boldsymbol{g}(-\mathrm{x})\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\}, & \mathrm{x} < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \{(\tau, \boldsymbol{f}(\mathrm{x})) \mid \tau \in [0,\infty)\}, & \mathrm{x} \geq 0 \\ \{(\tau, \boldsymbol{g}(-\mathrm{x})) \mid \tau \in (-\infty,0)\}, & \mathrm{x} < 0. \end{cases} \tag{3.231}$$

З останньої рівності видно, що $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x})$ є абстрактною траєкторією з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Тобто, згідно (3.230), $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x})$ є абстрактною траєкторією з $\mathbf{Tm}(\mathfrak{l})$ в $\mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$ (для довільного $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$). Тому, за означенням 3.126 (пункт 1), система відліку $\mathfrak{m}$ є траєкторно регулярною відносно системи відліку $\mathfrak{l}$.

З іншої сторони, для довільних $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m}) = \mathbb{R}$ таких, що $\mathrm{x} \geq 0$, $y < 0$, згідно (3.231), будемо мати, $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}) = \{(\tau, \boldsymbol{f}(\mathrm{x})) \mid \tau \in [0,\infty)\}$; $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{y}) = \{(\tau, \boldsymbol{g}(-\mathrm{y})) \mid \tau \in (-\infty,0)\}$. Отже, траєкторії $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x})$ і $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{y})$ не можуть бути паралельними, оскільки $\mathfrak{D}\left(\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x})\right) = [0,\infty) \neq (-\infty,0) = \mathfrak{D}\left(\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{y})\right)$, а, згідно з означенням 3.124, області визначення паралельних траєкторій мусять бути однаковими. Отже, за означенням 3.126 (пункт 2), система відліку $\mathfrak{m}$ не є квазіодностайною відносно системи відліку $\mathfrak{l}$ у кінематиці $\mathcal{F}$ (будучи при цьому траєкторно регулярною відносно $\mathfrak{l}$).

Приклад 3.129. Нехай, $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ — довільна бієкція (взаємно однозначна відповідність) між $\mathbb{R}$ і $\mathbb{R}^2$. Таке відображення Φ можна подати у вигляді:

$$\Phi(t) = (\phi_0(t), \phi_1(t)) \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

де $\phi_0, \phi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — деякі відображення. Визначимо відображення $\mathcal{U} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ за формулою:

$$\mathcal{U}(t, \mathrm{x}) := (\phi_0(t), (\phi_1(t), \mathrm{x})) \ (\forall\, t, \mathrm{x} \in \mathbb{R}).$$

Неважко перевірити, що відображення $\mathcal{U}$ є бієкцією між $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ і $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, тобто $\mathcal{U} \in \mathbb{P}\mathbf{k}\left(\mathbb{R}_{ord}, \widehat{\mathbb{R}}; \mathbb{R}_{ord}, \widehat{\mathbb{R}^2}\right)$. Тому, згідно з твердженням 3.119, існують векторна універсальна кінематика $\mathcal{F}$ і системи відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ такі, що:

$$\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}) = \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{m}) = \mathbb{R}_{ord}; \quad \mathsf{BG}(\mathfrak{l}, \mathcal{F}) = \widehat{\mathbb{R}^2}; \quad \mathsf{BG}(\mathfrak{m}, \mathcal{F}) = \widehat{\mathbb{R}}; \tag{3.232}$$

$$[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}, \mathcal{F}] = \mathcal{U}. \tag{3.233}$$

Враховуючи (3.232) і систему позначень теорії універсальних кінематик, маємо:

$$\mathbf{Zk}(\mathfrak{l}) = \mathbf{Zk}\left(\widehat{\mathbb{R}^2}\right) = \mathbb{R}^2; \quad \mathbf{Zk}(\mathfrak{m}) = \mathbf{Zk}\left(\widehat{\mathbb{R}}\right) = \mathbb{R}; \tag{3.234}$$

$$\mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) = \mathbf{Tm}(\mathfrak{m}) = \mathbb{R}. \tag{3.235}$$

Доведемо, що система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є квазіодностайною відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ в кінематиці $\mathcal{F}$. Справді, для довільного $\mathrm{x} \in \mathbb{R} = \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$, за означенням 3.120 і формулами (3.233) і (3.235), отримуємо:

$$\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}) = \{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}](t, x) \mid t \in \mathbf{Tm}(\mathfrak{m})\} =$$

$$= \{\mathcal{U}(t,x) \mid t \in \mathbf{Tm}(\mathfrak{m})\} = \{(\phi_0(t), (\phi_1(t), \mathrm{x})) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Оскільки $\Phi = (\phi_0(t), \phi_1(t))$ — бієкція між $\mathbb{R}$ і $\mathbb{R}^2$, то, з останньої рівності для довільного $\mathrm{x} \in \mathbb{R} = \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$ отримуємо:

$$\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}) = \{(\tau, (\mathrm{y}, \mathrm{x})) \mid \tau, \mathrm{y} \in \mathbb{R}\}. \tag{3.236}$$

Для довільного $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$ покладемо: $\widehat{\mathrm{x}} := (0, \mathrm{x}) \in \mathbb{R}^2$. Тоді з формули (3.236) для довільних $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathbb{R} = \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$ отримуємо:

$$\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_2) = \{(\tau, (\mathrm{y}, \mathrm{x}_2)) \mid \tau, \mathrm{y} \in \mathbb{R}\} = \left\{ \left(\tau, (\mathrm{y}, \mathrm{x}_1) + \widehat{\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1}\right) \middle| \tau, \mathrm{y} \in \mathbb{R} \right\} =$$
$$= \left\{ \left(\mathsf{tm}(\mathrm{w}), \mathsf{bs}(\mathrm{w}) + \widehat{\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1}\right) \middle| \mathrm{w} \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_1) \right\} = \left(\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_1)\right)^{\left\langle +\widehat{\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1} \right\rangle}.$$

Отже, за означенням 3.124, отримуємо, $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_1) \parallel_{\mathfrak{l}} \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_2)$. Оскільки останнє співвідношення справедливе для довільних $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$, то, за означенням 3.126 (пункт 2), система відліку $\mathfrak{m}$ є квазіодностайною відносно системи відліку $\mathfrak{l}$ в кінематиці $\mathcal{F}$.

Доведемо, що система відліку $\mathfrak{m}$ не є траєкторно регулярною відносно $\mathfrak{l}$ в кінематиці $\mathcal{F}$. Справді, зафіксуємо довільний елемент $\mathrm{x} \in \mathbb{R} = \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$. Тоді, для довільних $\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2 \in \mathbb{R}$ таких, що $\mathrm{y}_1 \neq \mathrm{y}_2$, згідно з формулою (3.236), отримаємо:

$$(\tau, (\mathrm{y}_1, \mathrm{x})), (\tau, (\mathrm{y}_2, \mathrm{x})) \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}),$$

де $(\mathrm{y}_1, \mathrm{x}) \neq (\mathrm{y}_2, \mathrm{x})$. Тобто, згідно з означенням 3.126 (пункт 1), система відліку $\mathfrak{m}$ не є траєкторно регулярною відносно системи відліку $\mathfrak{l}$ у кінематиці $\mathcal{F}$ (будучи квазіодностайною відносно $\mathfrak{l}$).

Трансляційно-одностайні системи відліку в універсальних кінематиках. Співвідношення між одностайністю і трансляційною одностайністю. В багатьох навчальних курсах з теоретичної механіки зустрічається інший, відмінний від означення А, варіант означення поступального руху тіл (див., напр. [165, стор. 63], [166, стор. 89]):

Означення Б. *Тверде тіло рухається поступально, якщо всі відрізки, що з'єднують попарно будь-які дві точки тіла залишаються паралельними собі в процесі руху.*

Виходячи з означення Б можна дати наступне (нестроге, фізичне) означення для одностайно-поступального руху систем відліку.

Означення Б′. *Будемо говорити, що система відліку $\mathfrak{m}$ рухається одностайно-поступально відносно системи відліку $\mathfrak{l}$, якщо всі відрізки, що з'єднують попарно*

будь-які дві точки, нерухомі відносно системи відліку $\mathfrak{m}$*, залишаються конгруентними і паралельними собі в системі відліку* $\mathfrak{l}$ *в процесі руху.*

Означення Б′ служить мотивацією для наступного строгого означення.

Означення 3.130. Нехай, $\mathcal{F}$ — довільна векторна універсальна кінематика. Будемо говорити, що система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є **трансляційно-одностайною** (скорочено — **т-одностайною**) відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ (у кінематиці $\mathcal{F}$), якщо для довільних $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \mathrm{w}_1', \mathrm{w}_2' \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ з умов

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathsf{bs}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1) & = & \mathsf{bs}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1') \\ \mathsf{bs}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2) & = & \mathsf{bs}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2') \\ \mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) & = & \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)\,; \quad \mathsf{tm}(\mathrm{w}_1') \;=\; \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2') \end{array}\right\} \tag{3.237}$$

випливає рівність:

$$\mathsf{bs}(\mathrm{w}_2) - \mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2') - \mathsf{bs}(\mathrm{w}_1')\,. \tag{3.238}$$

На фізичному рівні прийнято вважати, що означення поступального руху А і Б — еквівалентні. Проте, виявляється, що на рівні абстрактних універсальних кінематик, породжені означеннями А і Б поняття одностайності і т-одностайності однієї системи відліку відносно іншої — не еквівалентні. Нижче буде доведено, що з одностайності випливає т-одностайність і наведено контрприклад, який показує, що обернена імплікація, взагалі кажучи, не має місця. Далі буде показано, що при певних додаткових умовах з т-одностайності, все ж таки, випливає одностайність.

Твердження 3.131. *Якщо система відліку* $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ *є одностайною відносно системи відліку* $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ *у векторній універсальній кінематиці* $\mathcal{F}$*, то* $\mathfrak{m}$ *є т-одностайною відносно* $\mathfrak{l}$ *в* $\mathcal{F}$*.*

Доведення. Нехай система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ векторної універсальної кінематики $\mathcal{F}$ є одностайною відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ у кінематиці $\mathcal{F}$.

Розглянемо довільні елементи $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \mathrm{w}_1', \mathrm{w}_2' \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ задовольняють умови (3.237). Покладемо:

$$\mathrm{x}_1 := \mathsf{bs}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1)\,; \qquad \mathrm{x}_2 := \mathsf{bs}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2)\,.$$

Тоді, $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$. Використовуючи умови (3.237), при $i \in \overline{1,2}$ маємо:

$$\begin{aligned} [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_i' &= (\mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_i'), \mathsf{bs}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_i')) = \\ &= (\mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_i'), \mathsf{bs}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_i)) = (\mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_i'), \mathrm{x}_i)\,; \\ [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_i &= (\mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_i), \mathsf{bs}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_i)) = (\mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_i), \mathrm{x}_i)\,. \end{aligned}$$

Звідси, використовуючи формули (3.3) і (3.4), а також означення 3.120, при $i \in \overline{1,2}$ отримуємо:

$$\mathrm{w}'_i = [\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\,[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}'_i = [\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\,(\mathsf{tm}\,([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}'_i)\,,\mathrm{x}_i) \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}\,(\mathrm{x}_i)\,;$$
$$\mathrm{w}_i = [\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\,[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_i = [\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\,(\mathsf{tm}\,([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_i)\,,\mathrm{x}_i) \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}\,(\mathrm{x}_i)\,.$$

Отже, $$\mathrm{w}_i, \mathrm{w}'_i \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}\,(\mathrm{x}_i) \qquad \left(i \in \overline{1,2}\right). \tag{3.239}$$

Згідно з означенням 3.126, $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}\,(\mathrm{x}_1) \parallel_{\mathfrak{l}} \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}\,(\mathrm{x}_2)$. Отже, із співвідношення (3.239), за означенням 3.124, випливає, що існує елемент $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l})$ і елементи

$$\mathrm{u}_1, \mathrm{u}'_1 \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}\,(\mathrm{x}_1) \tag{3.240}$$

такі, що $\mathrm{w}_2 = (\mathsf{tm}\,(\mathrm{u}_1)\,,\mathrm{x} + \mathsf{bs}\,(\mathrm{u}_1))$; $\mathrm{w}'_2 = (\mathsf{tm}\,(\mathrm{u}'_1)\,,\mathrm{x} + \mathsf{bs}\,(\mathrm{u}'_1))$. Звідси отримуємо:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_2) = \mathsf{tm}\,(\mathrm{u}_1)\,; & \mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_2) = \mathrm{x} + \mathsf{bs}\,(\mathrm{u}_1)\,; \\ \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}'_2) = \mathsf{tm}\,(\mathrm{u}'_1)\,; & \mathsf{bs}\,(\mathrm{w}'_2) = \mathrm{x} + \mathsf{bs}\,(\mathrm{u}'_1)\,. \end{array}\right\} \tag{3.241}$$

За умовою твердження, $\mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_1) = \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_2)$, $\mathsf{tm}\,(\mathrm{w}'_1) = \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}'_2)$. Отже, із співвідношень (3.241) отримуємо рівності:

$$\mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_1) = \mathsf{tm}\,(\mathrm{u}_1)\,; \quad \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}'_1) = \mathsf{tm}\,(\mathrm{u}'_1)\,. \tag{3.242}$$

За означенням 3.126, $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}\,(\mathrm{x}_1)$ є абстрактною траєкторією з $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l})$ в $\mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l})$. Крім того, згідно (3.239) і (3.240), $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}'_1, \mathrm{u}_1, \mathrm{u}'_1 \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}\,(\mathrm{x}_1)$. Отже, з рівностей (3.242) випливають рівності, $\mathrm{w}_1 = \mathrm{u}_1$; $\mathrm{w}'_1 = \mathrm{u}'_1$. Тому, із (3.241) отримуємо, $\mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_2)$=$\mathrm{x}$+$\mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_1)$; $\mathsf{bs}\,(\mathrm{w}'_2)$=$\mathrm{x}$+$\mathsf{bs}\,(\mathrm{w}'_1)$. Звідси і випливає бажана рівність (3.238). □

Нижче буде доведено очевидний з точки зору фізичної інтуїції факт, що будь-яка система відліку, нерухома відносно даної є т-одностайною відносно неї. Використовуючи означення 3.104, а також поняття траєкторій, породжених рухом однієї системи відліку відносно іншої в універсальних кінематиках, отримуємо твердження 3.132:

Твердження 3.132. *Система відліку* $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ *є нерухомою відносно системи відліку* $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ *в універсальній кінематиці* $\mathcal{F}$ *тоді і тільки тоді, коли для довільного* $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{m})$ *і довільних* $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}\,(\mathrm{x})$ *виконується рівність* $\mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_2)$.

Твердження 3.133. *Якщо система відліку* $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ *є нерухомою відносно системи відліку* $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ *у векторній універсальній кінематиці* $\mathcal{F}$*, то* $\mathfrak{m}$ *є т-одностайною відносно* $\mathfrak{l}$ *в* $\mathcal{F}$.

Доведення. Нехай, система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є нерухомою відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ у векторній універсальній кінематиці $\mathcal{F}$. Розглянемо довільні $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \mathrm{w}_1', \mathrm{w}_2' \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ такі, що

$$\mathsf{bs}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1'); \quad \mathsf{bs}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2) = \mathsf{bs}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2').$$

Покладемо:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{x}_1 := \mathsf{bs}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1');\\
&t_1 := \mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1); \qquad t_1' := \mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1');\\
&\mathrm{x}_2 := \mathsf{bs}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2) = \mathsf{bs}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2');\\
&t_2 := \mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2); \qquad t_2' := \mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2').
\end{aligned}$$

Тоді: $(t_1, \mathrm{x}_1) = [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1$; $(t_1', \mathrm{x}_1) = [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1'$;
$(t_2, \mathrm{x}_2) = [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2$; $(t_2', \mathrm{x}_2) = [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2'$.

Звідси, використовуючи формули (3.3) і (3.4), отримуємо:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{w}_1 = [\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\,[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1 = [\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\,(t_1, \mathrm{x}_1); \quad && \mathrm{w}_1' = [\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\,(t_1', \mathrm{x}_1);\\
&\mathrm{w}_2 = [\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\,(t_2, \mathrm{x}_2); && \mathrm{w}_2' = [\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\,(t_2', \mathrm{x}_2).
\end{aligned}$$

Отже, за означенням 3.120, маємо:

$$\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_1' \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_1); \qquad \mathrm{w}_2, \mathrm{w}_2' \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_2).$$

І, оскільки система відліку $\mathfrak{m}$ є нерухомою відносно системи відліку $\mathfrak{l}$ у кінематиці $\mathcal{F}$, то, згідно з твердженням 3.132, отримуємо, $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_1')$; $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_2) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2')$. Тому, $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_2) - \mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2') - \mathsf{bs}(\mathrm{w}_1')$. Тобто, за означенням 3.130, система відліку $\mathfrak{m}$ є т-одностайною відносно $\mathfrak{l}$ в $\mathcal{F}$. □

Приклад 3.134. Нехай, $\phi(\cdot)$ і $\xi(\cdot)$ — взаємно-однозначні відображення з $\mathbb{R}$ в $(0, +\infty)$ і з $\mathbb{R}$ в $(-\infty, 0]$ відповідно ($\phi : \mathbb{R} \leftrightarrow (0, +\infty)$, $\xi : \mathbb{R} \leftrightarrow (-\infty, 0]$). Наприклад в якості ϕ і ξ можна взяти:

$$\phi(t) = e^t, \quad \xi(t) = \begin{cases} -e^t, & t \notin \mathbb{N} \\ -e^{-(t-1)}, & t \in \mathbb{N},\ t \geq 2 \\ 0, & t = 1. \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Нехай, $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ — послідовність всіх раціональних чисел, занумерована таким

чином, що $q_i \neq q_j$ при $i \neq j$. Тоді відображення $\mathcal{U} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, що діє за формулою:

$$\mathcal{U}\left(t, \mathrm{x}\right) := \begin{cases} (t, \mathrm{x}), & \mathrm{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ (\phi(t), q_n), & \mathrm{x} = q_{2n-1}, \text{ де } n \in \mathbb{N} \\ (\xi(t), q_n), & x = q_{2n}, \text{ де } n \in \mathbb{N} \end{cases}. \tag{3.243}$$

є бієкцією з $\mathbb{R}^2$ на $\mathbb{R}^2$, причому оберненим до $\mathcal{U}$ є відображення виду:

$$\mathcal{U}^{[-1]}\left(\tau, \mathrm{y}\right) = \begin{cases} (\tau, \mathrm{y}), & \mathrm{y} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \left(\phi^{[-1]}(\tau), q_{2n-1}\right), & y = q_n, \ \tau > 0 \\ \left(\xi^{[-1]}(\tau), q_{2n}\right), & y = q_n, \ \tau \leq 0 \end{cases},$$

де $\phi^{[-1]}$ і $\xi^{[-1]}$ — функції, обернені до ϕ і ξ відповідно. Отже, $\mathcal{U} \in \mathbb{P}\mathbf{k}\left(\mathbb{R}_{ord}, \widehat{\mathbb{R}}; \mathbb{R}_{ord}, \widehat{\mathbb{R}}\right)$. Тому, згідно з твердженням 3.119, існують векторна універсальна кінематика $\mathcal{F}$ і системи відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$ такі, що:

$$\begin{aligned} &\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{m}\right) = \mathbb{R}_{ord}; \ \mathsf{BG}\left(\mathfrak{l}, \mathcal{F}\right) = \mathsf{BG}\left(\mathfrak{m}, \mathcal{F}\right) = \widehat{\mathbb{R}}; \\ &[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}, \mathcal{F}] = \mathcal{U}. \end{aligned} \tag{3.244}$$

Доведемо, що система відліку $\mathfrak{m}$ є нерухомою відносно системи відліку $\mathfrak{l}$ у кінематиці $\mathcal{F}$. Нехай, $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{m}\right) = \mathbb{R}$ і $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}\left(\mathrm{x}\right)$. Використовуючи означення 3.120 і формули (3.244) та (3.243), отримуємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}\left(\mathrm{x}\right) &= \left\{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\left(t, \mathrm{x}\right) \mid t \in \mathbf{Tm}\left(\mathfrak{m}\right)\right\} = \\ &= \left\{\begin{array}{ll} \{(t, \mathrm{x}) \mid t \in \mathbb{R}\}, & \mathrm{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \{(\phi(t), q_n) \mid t \in \mathbb{R}\}, & \mathrm{x} = q_{2n-1}, \text{ де } n \in \mathbb{N} \\ \{(\xi(t), q_n) \mid t \in \mathbb{R}\}, & \mathrm{x} = q_{2n}, \text{ де } n \in \mathbb{N} \end{array}\right\} = \\ &= \left\{\begin{array}{ll} \{(t, \mathrm{x}) \mid t \in \mathbb{R}\}, & \mathrm{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \{(t, q_n) \mid t \in (0, \infty)\}, & \mathrm{x} = q_{2n-1}, \text{ де } n \in \mathbb{N} \\ \{(t, q_n) \mid t \in (-\infty, 0]\}, & \mathrm{x} = q_{2n}, \text{ де } n \in \mathbb{N} \end{array}\right. . \end{aligned} \tag{3.245}$$

З формули (3.245) випливає, що в усіх трьох випадках існують $t_1, t_2, \mathrm{y} \in \mathbb{R}$ такі, що $\mathrm{w}_1 = (t_1, \mathrm{y})$, $\mathrm{w}_2 = (t_2, \mathrm{y})$. Звідси отримуємо, $\mathsf{bs}\left(\mathrm{w}_1\right) = \mathsf{bs}\left(\mathrm{w}_2\right)$ $(= \mathrm{y})$. Отже, за твердженням 3.132, система відліку $\mathfrak{m}$ є нерухомою відносно системи відліку $\mathfrak{l}$ у кінематиці $\mathcal{F}$. Тому, за твердженням 3.133, система відліку $\mathfrak{m}$ є т-одностайною відносно $\mathfrak{l}$ у кінематиці $\mathcal{F}$. Проте система відліку $\mathfrak{m}$ не є квазіодностайною (а отже і одностайною) відносно системи відліку $\mathfrak{l}$ у кінематиці $\mathcal{F}$, оскільки, згідно (3.245),

при $n \in \mathbb{N}$ траєкторії

$$\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}\left(q_{2n-1}\right) = \left\{(t, q_n) \mid t \in (0, \infty)\right\} \quad \text{і} \quad \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}\left(q_{2n}\right) = \left\{(t, q_n) \mid t \in (-\infty, 0]\right\}$$

не є паралельними відносно системи відліку $\mathfrak{l}$ (в сенсі означення 3.124 (пункт 2)).

Приклад 3.134 показує, що з т-одностайності однієї системи відліку відносно іншої в універсальній кінематиці, взагалі кажучи, не випливає відповідна квазіодностайність, а отже й одностайність. Нижче буде доведено, що з т-одностайності однієї системи відліку відносно іншої, все ж таки, випливає відповідна траєкторна регулярність.

Твердження 3.135. *Якщо система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$ є т-одностайною відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$ у векторній універсальній кінематиці $\mathcal{F}$, то $\mathfrak{m}$ є траєкторно-регулярною відносно $\mathfrak{l}$ в $\mathcal{F}$.*

Доведення. Нехай, система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$ є т-одностайною відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$ у векторній універсальній кінематиці $\mathcal{F}$. І нехай для деякого $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{m}\right)$ маємо:

$$\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}\left(\mathrm{x}\right) \quad \text{і} \quad \mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_1\right) = \mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_2\right). \tag{3.246}$$

Оскільки $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}\left(\mathrm{x}\right)$, то, за означенням 3.120, існують $t_1, t_2 \in \mathbf{Tm}\left(\mathfrak{m}\right)$ такі, що, $\mathrm{w}_1 = \left[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}\right]\left(t_1, \mathrm{x}\right)$, $\mathrm{w}_2 = \left[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}\right]\left(t_2, \mathrm{x}\right)$. Звідси, використовуючи формули (3.3) і (3.4), отримуємо:

$$\mathsf{bs}\left(\left[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\right] \mathrm{w}_1\right) = \mathsf{bs}\left(\left[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\right]\left[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}\right]\left(t_1, \mathrm{x}\right)\right) = \mathrm{x} = \mathsf{bs}\left(\left[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\right] \mathrm{w}_2\right). \tag{3.247}$$

Покладемо:

$$\mathrm{w}_1' := \mathrm{w}_1, \qquad \mathrm{w}_2' := \mathrm{w}_1. \tag{3.248}$$

Використовуючи (3.248), (3.247), (3.246), отримаємо:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{bs}\left(\left[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\right] \mathrm{w}_1'\right) = \mathsf{bs}\left(\left[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\right] \mathrm{w}_1\right);\\
&\mathsf{bs}\left(\left[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\right] \mathrm{w}_2'\right) = \mathsf{bs}\left(\left[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\right] \mathrm{w}_1\right) = \mathsf{bs}\left(\left[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\right] \mathrm{w}_2\right);\\
&\mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_1\right) = \mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_2\right); \qquad \mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_1'\right) = \mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_1\right) = \mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_2'\right).
\end{aligned}$$

Звідси, за означенням 3.130, маємо, $\mathsf{bs}\left(\mathrm{w}_2\right) - \mathsf{bs}\left(\mathrm{w}_1\right) = \mathsf{bs}\left(\mathrm{w}_2'\right) - \mathsf{bs}\left(\mathrm{w}_1'\right)$, тобто, враховуючи (3.248), отримуємо, $\mathsf{bs}\left(\mathrm{w}_2\right) - \mathsf{bs}\left(\mathrm{w}_1\right) = \mathbf{0}$. Отже:

$$\mathsf{bs}\left(\mathrm{w}_2\right) = \mathsf{bs}\left(\mathrm{w}_1\right).$$

Таким чином, ми довели, що для довільних $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x})$ з умови $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$ випливає рівність $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2)$, тобто, за означенням 3.126 (пункт 1), система відліку $\mathfrak{m}$ є траєкторно-регулярною відносно $\mathfrak{l}$ у кінематиці $\mathcal{F}$. □

Наступна теорема 3.138 показує, що при деяких додаткових умовах з т-одностайності однієї системи відліку відносно іншої у векторній універсальній кінематиці випливає відповідна одностайність. Для формулювання цієї теореми зручно ввести наступне нове поняття:

Означення 3.136. Нехай, $\mathcal{F}$ — довільна універсальна кінематика. Систему відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ будемо називати **повночасовою** відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ у кінематиці $\mathcal{F}$, якщо для довільного $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$ виконується рівність $\mathfrak{D}\left(\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x})\right) = \mathbf{Tm}(\mathfrak{l})$, де $\mathfrak{D}\left(\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x})\right)$ — область визначення $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x})$, тобто:

$$\mathfrak{D}\left(\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x})\right) = \left\{ \begin{array}{r} t \in \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) \mid \exists \mathrm{y} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{l}) : \\ (t, \mathrm{y}) \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}) \end{array} \right\} = \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}).$$

Зауваження 3.137. Легко бачити, що система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є повночасовою відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ у кінематиці $\mathcal{F}$ тоді і тільки тоді, коли для довільного $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$ виконується рівність:

$$\left\{\mathsf{tm}(\mathrm{w}) \mid \mathrm{w} \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x})\right\} = \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}). \tag{3.249}$$

Теорема 3.138. *Нехай, $\mathcal{F}$ — векторна універсальна кінематика. Система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є одностайною відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ в $\mathcal{F}$ тоді і тільки тоді, коли $\mathfrak{m}$ є т-одностайною і повночасовою відносно $\mathfrak{l}$ в $\mathcal{F}$.*

Доведення. **I.** Нехай система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ векторної універсальної кінематики $\mathcal{F}$ є одностайною відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ у кінематиці $\mathcal{F}$. Тоді, згідно з твердженням 3.131, $\mathfrak{m}$ є т-одностайною відносно $\mathfrak{l}$ в $\mathcal{F}$. Отже, залишилось довести, що система відліку $\mathfrak{m}$ є повночасовою відносно $\mathfrak{l}$ в $\mathcal{F}$.

Нехай, $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$. Доведемо рівність (3.249).

За означенням 3.120, враховуючи формулу (2.3), маємо,

$$\left\{\mathsf{tm}(\mathrm{w}) \mid \mathrm{w} \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x})\right\} \subseteq \left\{\mathsf{tm}(\mathrm{w}) \mid \mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l})\right\} = \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}). \tag{3.250}$$

Навпаки, нехай, $t \in \mathbf{Tm}(\mathfrak{l})$. Тоді, для довільного $\mathrm{y} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$ {[3.12]}, враховуючи (2.3) маємо, $(t, \mathrm{y}) \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$. Отже, згідно з твердженням 3.123, існує елемент $\mathrm{x}_0 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$ такий, що, $(t, \mathrm{y}) \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_0)$. Оскільки $\mathrm{x}, \mathrm{x}_0 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$, то, за означенням 3.126 (див. пункт (б) цього означення), $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}) \parallel_{\mathfrak{l}} \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_0)$. Тому, оскільки $(t, \mathrm{y}) \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_0)$, за означенням 3.124, існує елемент $\widetilde{\mathrm{y}} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$ такий, що

[3.12] За означенням координатного простору (див. означення 2.1), враховуючи систему позначень для універсальних кінематик, маємо, $\mathbf{Zk}(\mathfrak{l}) \neq \emptyset$. Отже, хоч один елемент $\mathrm{y} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$ існує.

$(t, \mathrm{y} + \widetilde{\mathrm{y}}) \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x})$. Звідси випливає, що $t \in \left\{\mathsf{tm}(\mathrm{w}) \mid \mathrm{w} \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x})\right\}$. Тому, враховуючи довільність вибору елемента $t \in \mathbf{Tm}(\mathfrak{l})$, отримуємо включення, обернене до (3.250), а отже і рівність (3.249).

II. Навпаки, нехай система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є т-одностайною і повночасовою відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ у векторній універсальній кінематиці $\mathcal{F}$. Тоді, згідно з твердженням 3.135, система відліку $\mathfrak{m}$ є траєкторно-регулярною відносно системи відліку $\mathfrak{l}$ у кінематиці $\mathcal{F}$.

Отже, залишилось довести, що система відліку $\mathfrak{m}$ є квазіодностайною відносно системи відліку $\mathfrak{l}$ у кінематиці $\mathcal{F}$. Розглянемо довільні елементи $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$. Оскільки система відліку $\mathfrak{m}$ є повночасовою відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ у кінематиці $\mathcal{F}$, то, згідно з зауваженням 3.137, маємо:

$$\left\{\mathsf{tm}(\mathrm{w}) \mid \mathrm{w} \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_1)\right\} = \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) = \left\{\mathsf{tm}(\mathrm{w}) \mid \mathrm{w} \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_2)\right\}. \tag{3.251}$$

Розглянемо довільний момент часу $t \in \mathbf{Tm}(\mathfrak{l})$. Згідно (3.251), існують елементи $\mathrm{w}_1' \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_1)$, $\mathrm{w}_2' \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_2)$ такі, що:

$$\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1') = \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2') = t. \tag{3.252}$$

Покладемо:

$$\mathrm{x} := \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2') - \mathsf{bs}(\mathrm{w}_1').$$

Розглянемо довільний елемент $\mathrm{w}_2 \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_2)$. З формули (3.251) випливає, що існує елемент $\mathrm{w}_1 \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_1)$ такий, що $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$. Отже, враховуючи (3.252), маємо:

$$\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2); \qquad \mathsf{tm}(\mathrm{w}_1') = \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2'). \tag{3.253}$$

Оскільки $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_1' \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_1)$, то, за означенням 3.120, існують моменти часу $t_1, t_1' \in \mathbf{Tm}(\mathfrak{m})$ такі, що, $\mathrm{w}_1 = [\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}](t_1, \mathrm{x}_1)$, $\mathrm{w}_1' = [\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}](t_1', \mathrm{x}_1)$. Звідси, використовуючи формули (3.3) і (3.4), отримуємо:

$$[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1 = [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}](t_1, \mathrm{x}_1) = (t_1, \mathrm{x}_1); \qquad [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1' = (t_1', \mathrm{x}_1).$$

Отже:

$$\mathsf{bs}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1'). \tag{3.254}$$

Оскільки $\mathrm{w}_2, \mathrm{w}_2' \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_2)$, то, аналогічно, отримуємо:

$$\mathsf{bs}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2) = \mathsf{bs}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2'). \tag{3.255}$$

З рівностей (3.253), (3.254) і (3.255), за означенням 3.130, випливає рівність, $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_2) - \mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2') - \mathsf{bs}(\mathrm{w}_1')$, тобто рівність, $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_2) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) + \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2') - \mathsf{bs}(\mathrm{w}_1') = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) + \mathrm{x}$. Звідси, враховуючи (3.253) та означення 3.124 (пункт 1), маємо:

$$\begin{aligned}\mathrm{w}_2 &= (\mathsf{tm}(\mathrm{w}_2), \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2)) = (\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1), \mathrm{x} + \mathsf{bs}(\mathrm{w}_1)) \in \\ &\in \left\{\mathsf{tm}(\mathrm{w}), \mathrm{x} + \mathsf{bs}(\mathrm{w}) \mid \mathrm{w} \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_1)\right\} = \left(\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_1)\right)^{\langle +\mathrm{x}\rangle}.\end{aligned}$$

Отже, враховуючи довільність вибору елемента $\mathrm{w}_2 \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_2)$, маємо:

$$\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_2) \subseteq \left(\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_1)\right)^{\langle +\mathrm{x}\rangle}. \tag{3.256}$$

Аналогічно ("помінявши місцями" x_1 і x_2, а також w_1' і w_2') отримаємо, $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_1) \subseteq \left(\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_2)\right)^{\langle +\widetilde{\mathrm{x}}\rangle}$, де $\widetilde{\mathrm{x}} = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_1') - \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2') = -\mathrm{x}$. Звідси, використовуючи твердження 3.125 (пункти 1 і 2), виводимо:

$$\begin{aligned}\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_1)^{\langle +\mathrm{x}\rangle} &\subseteq \left(\left(\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_2)\right)^{\langle +\widetilde{\mathrm{x}}\rangle}\right)^{\langle +\mathrm{x}\rangle} = \left(\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_2)\right)^{\langle +(\widetilde{\mathrm{x}}+\mathrm{x})\rangle} = \\ &= \left(\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_2)\right)^{\langle +\mathbf{0}\rangle} = \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_2).\end{aligned} \tag{3.257}$$

З включень (3.256) і (3.257) отримуємо, $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_2) = \left(\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_1)\right)^{\langle +\mathrm{x}\rangle}$. З останньої рівності, за означенням 3.124 (пункт 2) випливає, що $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_1) \parallel_{\mathfrak{l}} \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_2)$.

Враховуючи довільність вибору елементів $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$, за означенням 3.126 (пункт 2), маємо, що система відліку $\mathfrak{m}$ є квазіодностайною відносно системи відліку $\mathfrak{l}$ у кінематиці $\mathcal{F}$. Таким чином, будучи квазіодностайною і траєкторно-регулярною відносно системи відліку $\mathfrak{l}$ у кінематиці $\mathcal{F}$, система відліку $\mathfrak{m}$ є одностайною відносно системи відліку $\mathfrak{l}$ в $\mathcal{F}$ (за означенням 3.126 (пункт 3)). □

Зауваження 3.139. Означення А і Б поступального руху було взято з відповідної літератури в галузі класичної механіки. Саме тому, в рамках законів класичної механіки, *означення А′ і Б′ на фізичному рівні описують системи відліку, пов'язані з тілами, що рухаються поступально.* Виявляється, що в рамках теорії відносності виділений курсивом висновок вже не буде справедливим. Справді, для прикладу розглянемо жорстку систему відліку $\mathfrak{m}$, що рухається рівноприскорено з додатним прискоренням $\boldsymbol{a}$ відносно заданої інерційної системи відліку $\mathfrak{l}$, таку, що в нульовий момент часу $T = 0$ має нульову початкову швидкість і центри систем відліку $\mathfrak{l}$ і $\mathfrak{m}$ при $T = 0$ співпадають. Згідно з [167, с. 207, формули (8.165)], перетворення координат

між нерухомою системою відліку $\mathfrak{l}$ і рухомою системою відліку $\mathfrak{m}$ має вигляд[3.13]:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a}T &= \mathtt{sh}\,(\boldsymbol{a}t)\,(1+\boldsymbol{a}x)\,; \\ (1+\boldsymbol{a}X) &= \mathtt{ch}\,(\boldsymbol{a}t)\,(1+\boldsymbol{a}x)\,; \quad Y=y; \quad Z=z, \end{aligned}\right\} \tag{3.258}$$

де (T, X, Y, Z) — просторово-часові координати довільної точки в нерухомій системі відліку $\mathfrak{l}$, а (t, x, y, z) — координати цієї точки в прискореній системі відліку $\mathfrak{m}$. Підкреслимо, що в формулах (3.258) швидкість світла c приймається за одиницю ($c = 1$). Зазначимо, що перетворення (3.258) мають математичний та фізичний сенс лише за умови $1+\boldsymbol{a}x > 0$ (див., також [167, с. 207]), тобто за умов $1+\boldsymbol{a}X > 0$, $|\boldsymbol{a}T| < 1+\boldsymbol{a}X$. Обчислимо траєкторію руху в системі відліку $\mathfrak{l}$ точки $\mathbf{M}_0$, яка в системі відліку $\mathfrak{m}$ має сталі координати $(0, 0, 0)$. В довільний момент часу t просторово-часові координати цієї точки в рухомій системі відліку $\mathfrak{m}$ мають вигляд $(t, 0, 0, 0)$. Отже, згідно (3.258), координати (T, X_0, Y_0, Z_0) цієї точки в нерухомій системі відліку $\mathfrak{l}$ можна вирахувати за формулами:

$$\boldsymbol{a}T = \mathtt{sh}\,(\boldsymbol{a}t)\,; \quad 1+\boldsymbol{a}X_0 = \mathtt{ch}\,(\boldsymbol{a}t)\,; \quad Y_0 = Z_0 = 0.$$

З першого наведеного вище рівняння знаходимо $\boldsymbol{a}t = \mathtt{arsh}\,(\boldsymbol{a}T)$. Отже, виключаючи змінну "t" з другого рівняння останньої системи, отримуємо, $1+\boldsymbol{a}X_0 = \mathtt{ch}\,(\mathtt{arsh}\,(\boldsymbol{a}T)) = \sqrt{1+(\boldsymbol{a}T)^2}$. Таким чином рівняння руху точки $\mathbf{M}_0$ в нерухомій системі відліку $\mathfrak{m}$ має вигляд:

$$X_0(T) = \frac{1}{\boldsymbol{a}}\left(\sqrt{1+(\boldsymbol{a}T)^2}-1\right); \quad Y_0(T) = Z_0(T) = 0. \tag{3.259}$$

Аналогічно переконуємось, що рівняння руху в системі відліку $\mathfrak{l}$ точки $\mathbf{M}_1$, яка в системі відліку $\mathfrak{m}$ має сталі координати $(1, 1, 0)$ має вигляд:

$$X_1(T) = \frac{1+\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}}\sqrt{1+\left(\frac{\boldsymbol{a}T}{1+\boldsymbol{a}}\right)^2}-\frac{1}{\boldsymbol{a}}; \quad Y_1(T) = 1; \quad Z_1(T) = 0. \tag{3.260}$$

З формул (3.259), (3.260) видно, що точки $\mathbf{M}_0$ і $\mathbf{M}_1$ в системі відліку $\mathfrak{l}$ проходять за один і той же проміжок часу $[0, T]$ ($T > 0$) різні (за довжиною) ділянки своїх траєкторій. Справді, позначимо через $\mathbf{M}_0(T)$ і $\mathbf{M}_1(T)$ координати точок $\mathbf{M}_0$ і $\mathbf{M}_1$ в системі відліку $\mathfrak{l}$ в момент часу T відповідно. Тоді вектори $\overrightarrow{\mathbf{M}_0(0), \mathbf{M}_0(T)}$ і $\overrightarrow{\mathbf{M}_1(0), \mathbf{M}_1(T)}$ матимуть різні координати, $\overrightarrow{\mathbf{M}_0(0), \mathbf{M}_0(T)} = \left(\frac{1}{\boldsymbol{a}}\left(\sqrt{1+(\boldsymbol{a}T)^2}-1\right), 0, 0\right)$, $\overrightarrow{\mathbf{M}_1(0), \mathbf{M}_1(T)} = \left(\frac{1+\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\boldsymbol{a}T}{1+\boldsymbol{a}}\right)^2}-1\right), 0, 0\right)$. Крім того вектор $\overrightarrow{\mathbf{M}_0, \mathbf{M}_1}$ в системі відліку $\mathfrak{l}$ в різні моменти часу 0 і T матиме рі-

[3.13] Див, також [168, стор. 219, формули (6.17)]

зні координати, $\overrightarrow{\mathbf{M}_0(0),\mathbf{M}_1(0)}$ =(1, 1, 0), $\overrightarrow{\mathbf{M}_0(T),\mathbf{M}_1(T)} = \left(\frac{1}{\boldsymbol{a}}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\boldsymbol{a}T}{1+\boldsymbol{a}}\right)^2}(1+\boldsymbol{a}) - \sqrt{1+(\boldsymbol{a}T)^2}\right), 1, 0\right)$. Отже система відліку, пов'язана з тілом, що рухається прямолінійно і рівноприскорено в рамках теорії відносності не є одностайно-поступальною ні в сенсі означення А′ ні в сенсі означення Б′.

Таким чином, одностайно-поступальні системи відліку в універсальних кінематиках, взагалі кажучи, непридатні для опису поступальних неінерційних систем відліку в рамках теорії відносності. Різні типи одностайно-поступальних систем відліку, введені в даній роботі, є лише технічними поняттями, для того, щоб дослідити випадки, коли можна однозначно ввести поняття переміщення, а отже і середньої або миттєвої швидкості руху однієї системи відліку відносно іншої в рамках теорії універсальних кінематик.

3.10.3. Одностайна поступальність і часознаковизначеність систем відліку.

Нагадаємо, що в означенні 3.83 було введено поняття напрямку часу між системами відліку універсальних кінематик.

Означення 3.140. Нехай, $\mathcal{F}$ — довільна універсальна кінематика. Будемо говорити, що система відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є **часознаковизначеною** відносно системи відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$, (позначення $\mathfrak{l} \Updownarrow^{\pm}_{\mathcal{F}} \mathfrak{m}$) якщо виконується хоча б одна з умов $\mathfrak{l} \Uparrow^{+}_{\mathcal{F}} \mathfrak{m}$ або $\mathfrak{l} \Downarrow^{-}_{\mathcal{F}} \mathfrak{m}$.

Згідно з означенням 3.126 (пункт 3), система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є одностайною відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ (у векторній універсальній кінематиці $\mathcal{F}$), тоді і тільки тоді, коли $\mathfrak{m}$ є квазіодностайною і траєкторно регулярною відносно $\mathfrak{l}$ у кінематиці $\mathcal{F}$. В цьому розділі буде встановлено зв'язок між траєкторною регулярністю і часознаковизначеністю однієї системи відліку відносно іншої.

Часознаковизначеність зумовлює траєкторну регулярність.

Твердження 3.141. *Якщо система відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є часознаковизначеною відносно системи відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ в кінематиці $\mathcal{F}$, то $\mathfrak{m}$ є траєкторно регулярною відносно $\mathfrak{l}$ в $\mathcal{F}$.*

Доведення. Нехай, $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ і $\mathfrak{l} \Uparrow^{+}_{\mathcal{F}} \mathfrak{m}$. Розглянемо довільні елементи $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$ і $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x})$ такі, що

$$\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2). \tag{3.261}$$

Доведемо, що $\mathrm{w}_1 = \mathrm{w}_2$.

Припустимо супротивне, $\mathrm{w}_1 \neq \mathrm{w}_2$. Оскільки $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x})$, то, за означенням 3.120, існують моменти часу $t_1, t_2 \in \mathbf{Tm}(\mathfrak{m})$ такі, що:

$$\mathrm{w}_1 = [\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}](t_1, \mathrm{x}); \qquad \mathrm{w}_2 = [\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}](t_2, \mathrm{x}). \tag{3.262}$$

Оскільки, згідно з формулами (3.3) і (3.4), відображення $[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]$ є бієкцією між $\mathbb{M}k(\mathfrak{m})$ і $\mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ і $\mathrm{w}_1 \neq \mathrm{w}_2$, то, з рівностей (3.262) маємо, $t_1 \neq t_2$. Отже, можливими є лише два випадки $t_1 <_{\mathfrak{m}} t_2$ або $t_1 >_{\mathfrak{m}} t_2$. Але, оскільки $\mathfrak{l} \Uparrow^{+}_{\mathcal{F}} \mathfrak{m}$, то, згідно (3.262), використовуючи означення 3.83 (пункт 2), у випадку $t_1 <_{\mathfrak{m}} t_2$ маємо:

$$\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{tm}([\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}](t_1, \mathrm{x})) <_{\mathfrak{l}} [\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}](t_2, \mathrm{x}) = \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2),$$

а у випадку $t_1 >_{\mathfrak{m}} t_2$ аналогічно отримуємо, $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) >_{\mathfrak{l}} \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$. Отже, в обох випадках маємо: $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) \neq \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$, що суперечить рівності (3.261). Отже, зроблене припущення — помилкове. Тому $\mathrm{w}_1 = \mathrm{w}_2$.

Аналогічно розглядається випадок $\mathfrak{l} \Downarrow^{-}_{\mathcal{F}} \mathfrak{m}$. □

Використовуючи означення 3.126 (пункт 3) і твердження 3.141, отримуємо наступну теорему:

Теорема 3.142. *Нехай, $\mathcal{F}$ — векторна універсальна кінематика. Якщо система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є квазіодностайною відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$, а система відліку $\mathfrak{l}$ є часознаковизначеною відносно $\mathfrak{m}$, то система відліку $\mathfrak{m}$ є одностайною відносно $\mathfrak{l}$ у кінематиці $\mathcal{F}$.*

В наступному прикладі буде доведено, що з траєкторної регулярності системи $\mathfrak{m}$ відліку відносно $\mathfrak{l}$, взагалі кажучи, не випливає часознаковизначеність $\mathfrak{l} \Updownarrow^{\pm}_{\mathcal{F}} \mathfrak{m}$.

Приклад 3.143. Нехай $\mathcal{T}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — довільне бієктивне немонотонне відображення з $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$. Наприклад, зокрема, можна покласти:

$$\mathcal{T}(t) := \begin{cases} \frac{1}{t}, & t > 0 \\ t, & t \leq 0 \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Відсутність монотонності відображення $\mathcal{T}$ передбачає існування чисел $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R}$, що задовольняють такі умови:

$$t_1 < t_2, \quad t_3 < t_4, \quad \mathcal{T}(t_1) < \mathcal{T}(t_2), \quad \mathcal{T}(t_3) > \mathcal{T}(t_4). \tag{3.263}$$

Оскільки відображення $\mathcal{T}$ є бієкцією множини $\mathbb{R}$ на себе, то відображення виду:

$$\mathcal{U}(t, \mathrm{x}) := (\mathcal{T}(t), \mathrm{x}) \qquad \left((t, \mathrm{x}) \in \mathbb{R}^2\right) \tag{3.264}$$

є бієкцією на $\mathbb{R}^2$. Отже, $\mathcal{U} \in \mathbb{P}\mathbf{k}\left(\mathbb{R}_{ord}, \widehat{\mathbb{R}}; \mathbb{R}_{ord}, \widehat{\mathbb{R}}\right)$, де $\mathbb{R}_{ord} = (\mathbb{R}, \leq)$. Отже, згідно з твердженням 3.119, існують векторна універсальна кінематика $\mathcal{F}$ і системи відліку

$\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ такі, що:

$$\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}) = \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{m}) = \mathbb{R}_{ord}; \tag{3.265}$$

$$\mathsf{BG}\,(\mathfrak{l}, \mathcal{F}) = \mathsf{BG}\,(\mathfrak{m}, \mathcal{F}) = \widehat{\mathbb{R}}; \tag{3.266}$$

$$[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}, \mathcal{F}] = \mathcal{U}. \tag{3.267}$$

Враховуючи систему позначень для універсальних кінематик і формулу (3.266), отримуємо, $\mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l}, \mathcal{F}) = \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{m}, \mathcal{F}) = \mathbf{Zk}\left(\widehat{\mathbb{R}}\right) = \mathbb{R}$. Таким чином, враховуючи рівність (3.265), маємо:

$$\mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) = \mathbf{Tm}(\mathfrak{m}) = \mathbb{R};$$
$$\mathbb{M}k\,(\mathfrak{l}) = \mathbf{Tm}\,(\mathfrak{l}) \times \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l}) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2; \qquad \mathbb{M}k\,(\mathfrak{m}) = \mathbb{R}^2.$$

Розглянемо довільний елемент $\mathrm{x} \in \mathbb{R} = \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{m})$. Беручи до уваги формулу (3.267) та означення 3.120, отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}\,(\mathrm{x}) &= \{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\,(t, \mathrm{x}) \mid t \in \mathbf{Tm}\,(\mathfrak{m})\} = \\ &= \{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\,(t, \mathrm{x}) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{\mathcal{U}\,(t, \mathrm{x}) \mid t \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(\mathcal{T}(t), \mathrm{x}) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(\tau, \mathrm{x}) \mid \tau \in \mathbb{R}\}\,.\end{aligned} \tag{3.268}$$

Використовуючи рівність (3.268) неважко перевірити, що для довільних $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}\,(\mathrm{x})$ виконується рівність $\mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_2)$. Отже, умова (a) означення 3.126 завідомо виконується, і, згідно з пунктом 1 цього означення, система відліку $\mathfrak{m}$ є траєкторно регулярною відносно системи відліку $\mathfrak{l}$ (в кінематиці $\mathcal{F}$).

Проте, з іншого боку, система відліку $\mathfrak{l}$ не є часознаковизначеною відносно системи відліку $\mathfrak{m}$ в $\mathcal{F}$. Справді, розглянемо довільне число $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$. Позначимо, $\mathrm{w}_i := (t_i, \mathrm{x})$ $\left(i \in \overline{1,4}\right)$. Тоді, використовуючи формули (3.263), (3.264), (3.267), отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_1) &= t_1 < t_2 = \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_2)\,; \quad \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_3) < \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_4)\,; \\ \mathsf{tm}\,([\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\,\mathrm{w}_1) &= \mathsf{tm}\,(\mathcal{U}\,(t_1, \mathrm{x})) = \mathsf{tm}\,((\mathcal{T}\,(t_1)\,, \mathrm{x})) = \\ &= \mathcal{T}\,(t_1) < \mathcal{T}\,(t_2) = \mathsf{tm}\,([\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\,\mathrm{w}_2)\,; \\ \mathsf{tm}\,([\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\,\mathrm{w}_3) &> \mathsf{tm}\,([\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\,\mathrm{w}_4)\,.\end{aligned}$$

Отже, за означенням 3.83, система відліку $\mathfrak{l}$ не ні часододатною ні часовід'ємною відносно системи відліку $\mathfrak{m}$ в $\mathcal{F}$. Тобто, $\mathfrak{l}$ не є часознаковизначеною відносно $\mathfrak{m}$ в $\mathcal{F}$, незважаючи на те, що $\mathfrak{m}$ є траєкторно регулярною відносно $\mathfrak{l}$ в $\mathcal{F}$.

Приклад 3.143 показує, що в загальному випадку твердження, обернене до твердження 3.141 — неправильне. Проте виявляється, що при деяких додаткових умовах топологічного характеру зазначене твердження, а також теорему 3.142 можна "обернути". Для того, щоб сформулювати потрібні умови, в наступних двох параграфах буде введено деякі допоміжні поняття і доведено допоміжні твердження.

Допоміжні поняття і факти з теорії лінійно упорядкованих топологічних просторів. Нагадаємо [73, стор. 314], що в довільній лінійно упорядкованій множині $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ можна ввести природну внутрішню топологію $\mathfrak{Tpi}\,[\mathbb{T}]$, яка породжується базою відкритих множин наступного вигляду:

(i) $(-\infty, \infty) = \mathbf{T}$;

(ii) $(\tau, \infty) = \{t \in \mathbf{T} \,|\, t > \tau\}$, де $\tau \in \mathbf{T}$;

(iii) $(-\infty, \tau) = \{t \in \mathbf{T} \,|\, t < \tau\}$, де $\tau \in \mathbf{T}$;

(iv) $(\tau_1, \tau_2) = \{t \in \mathbf{T} \,|\, \tau_1 < t < \tau_2\}$, де $\tau_1, \tau_2 \in \mathbf{T}$, $\tau_1 < \tau_2$.

Нехай, $\mathcal{Z}$ — довільна мінлива або кінематична множина чи універсальна кінематика і $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ — довільна система відліку $\mathcal{Z}$. Надалі через $\mathfrak{Tpi}(\mathfrak{l})$ будемо позначати внутрішню топологію лінійно упорядкованої множини $\mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathfrak{l}) = (\mathbf{T}\mathbf{m}\,(\mathfrak{l})\,, \leq_{\mathfrak{l}})$, тобто:

$$\mathfrak{Tpi}\,(\mathfrak{l}) := \mathfrak{Tpi}\,[\mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathfrak{l})]\,.$$

Нагадаємо (див. [169, наслідок 6.1.2 та пояснення після нього]), що топологічний простір $(\mathcal{X}, \mathfrak{S}_{\mathcal{X}})$ є ***зв'язним*** якщо $\mathcal{X}$ не можна подати як об'єднання $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2$ двох диз'юнктних непорожніх відкритих підмножин $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathfrak{S}_{\mathcal{X}}$ (де $\mathfrak{S}_{\mathcal{X}} \subseteq 2^{\mathcal{X}}$ є топологією на просторі $\mathcal{X}$).

Лема 3.144. ***Нехай:***

1) $\mathbb{T}_1 = (\mathbf{T}_1, \leq_1)$; $\mathbb{T}_2 = (\mathbf{T}_2, \leq_2)$ — *лінійно упорядковані множини, причому* $\mathbf{card}\,(\mathbf{T}_1) > 1$.

2) $\mathbf{T}_1$ *є зв'язним топологічним простором відносно топології* $\mathfrak{Tpi}\,[\mathbb{T}_1]$.

3) $f : \mathbf{T}_1 \to \mathbf{T}_2$ *неперервне ін'єктивне відображення (тобто неперервна оборотна функція) з топологічного простору* $(\mathbf{T}_1, \mathfrak{Tpi}\,[\mathbb{T}_1])$ *в простір* $(\mathbf{T}_2, \mathfrak{Tpi}\,[\mathbb{T}_2])$.

Тоді *функція f є строго монотонною (тобто або строго зростаючою або строго спадною).*

Доведення. Оскільки, за умовою, $\mathbf{card}\,(\mathbf{T}_1) > 1$, то упорядкована множина $\mathbb{T}_1$ має хоч один немаксимальний елемент.

Нехай, $\tau \in \mathbf{T}_1$ немаксимальний елемент. Оскільки $\mathbf{T}_1$ є зв'язним топологічним простором, то, згідно [170, Lemma 3.1, item (d)], інтервал $(\tau, +\infty)$ є зв'язною в $\mathbf{T}_1$ множиною. Оскільки функція f є неперервною, то, згідно [169, теорема 6.1.4], вона переводить зв'язну в $\mathbf{T}_1$ множину $(\tau, +\infty)$ в множину $f\,((\tau, +\infty))$, зв'язну в просторі $\mathbf{T}_2$. Оскільки функція f є ін'єктивним відображенням, то $f\,((\tau, +\infty)) \not\ni f\,(\tau)$. Отже, множина $f\,((\tau, +\infty))$ міститься в об'єднанні двох відкритих множин:

$$f\,((\tau, +\infty)) \subseteq (f(\tau), +\infty) \cup (-\infty, f(\tau))\,. \tag{3.269}$$

Оскільки (за доведеним вище) множина $f((\tau,+\infty))$ — зв'язна, то включення (3.269) можливе лише в одному з двох випадків:

(а) $f((\tau,+\infty)) \subseteq (f(\tau),+\infty)$ або **(б)** $f((\tau,+\infty)) \subseteq (-\infty, f(\tau))$.

Нехай, має місце випадок **(а)**. Доведемо, що:

$$\forall \tau_1 >_1 \tau \quad f((-\infty,\tau_1)) \subseteq (-\infty, f(\tau_1)), \tag{3.270}$$

де запис $\tau_1 >_1 \tau$ означає, що $\tau <_1 \tau_1$, а запис $\tau <_1 \tau_1$ означає, що $\tau \leq_1 \tau_1$ і $\tau \neq \tau_1$. Розглянемо довільний елемент $\tau_1 >_1 \tau$. Аналогічно до альтернативи **(а)**–**(б)** переконуємося, що для елемента τ_1 має місце така альтернатива:

(а1) $f((-\infty,\tau_1)) \subseteq (-\infty, f(\tau_1))$ або **(б1)** $f((-\infty,\tau_1)) \subseteq (f(\tau_1),+\infty)$.

Припустимо, що має місце умова **(б1)**. Оскільки $\tau_1 >_1 \tau$, то $\tau \in (-\infty,\tau_1)$. Отже, за умовою **(б1)** мусить виконуватись нерівність:

$$f(\tau) >_2 f(\tau_1). \tag{3.271}$$

З іншої сторони, оскільки має місце випадок **(а)**, маємо:

$$f(\tau) <_2 f(\tau_1). \tag{3.272}$$

Але одночасне виконання нерівностей (3.271) і (3.272) — неможливе. Отримана суперечність показує, що умова **(б1)** виконуватись не може. Отже, виконується умова **(а1)**, причому для довільного $\tau_1 >_1 \tau$. Тому співвідношення (3.270) — доведено.

Із співвідношення (3.270) і умови **(а)** випливає, що функція f строго зростає на проміжку $[\tau,+\infty) = \{t \in \mathbf{T}_1 \mid t \geq_1 \tau\}$. Аналогічно доводиться, що у випадку **(б)** функція f є строго спадною на проміжку $[\tau,+\infty)$.

Отже, функція f є строго монотонною на $[\tau,+\infty)$. Оскільки в якості τ вибрано довільний немаксимальний елемент $\mathbf{T}_1$, то функція f буде строго монотонною на довільному проміжку $[\tau_2,+\infty)$ такому, що $\tau_2 \leq \tau$. Оскільки τ — немаксимальний елемент $\mathbf{T}_1$, то інтервал $[\tau,+\infty)$ містить щонайменше два елементи. Тому, якщо функція f строго зростає на $[\tau,+\infty)$, то вона буде строго зростати і на довільному проміжку $[\tau_2,+\infty)$, де $\tau_2 \leq \tau$, тобто на $\mathbf{T}_1$. Аналогічно, якщо функція f строго спадає на $[\tau,+\infty)$, то вона строго спадає і на $\mathbf{T}_1$. □

Деякі відомості з теорії нарізно неперервних відображень. Нехай, $(\mathcal{X},\mathfrak{S}_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y},\mathfrak{S}_{\mathcal{Y}})$ і $(\mathcal{Z},\mathfrak{S}_{\mathcal{Z}})$ — топологічні простори, де $\mathfrak{S}_{\mathcal{S}} \subseteq 2^{\mathcal{S}}$ — топологія на просторі $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S} \in \{\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z}\}$). Через $\mathbf{C}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ будемо позначати множину всіх неперервних відображень з $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$. Для довільного відображення $\boldsymbol{f} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ і довільної точки $(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ введемо такі позначення:

$$\boldsymbol{f}^x(y) := \boldsymbol{f}_y(x) := \boldsymbol{f}(x, y).$$

Нагадаємо [171], що відображення $\boldsymbol{f} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ називається ***нарізно неперервним***, якщо $\boldsymbol{f}^x \in \mathbf{C}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ і $\boldsymbol{f}_y \in \mathbf{C}(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$ для довільної точки $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ (див. також [172, 173]). Множину всіх нарізно неперервних відображень $\boldsymbol{f} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ будемо позначати через $\mathbf{CC}\,(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ (див., також [171–173]).

Надалі нам знадобиться наступна лема.

Лема 3.145. *Нехай,* $\mathbb{T}_1 = (\mathbf{T}_1, \leq_1)$, $\mathbb{T}_2 = (\mathbf{T}_2, \leq_2)$ *— лінійно упорядковані множини і* $(\mathcal{X}, \mathfrak{S}_{\mathcal{X}})$ *— топологічний простір. Нехай, додатково, виконуються такі умови:*

(а) *топологічні простори* $\mathbf{T}_1$ *та* $\mathcal{X}$ *є зв'язними (де* $\mathbf{T}_i$ *розглядаються як топологічні простори відносно топологій* $\mathfrak{Tpi}\,[\mathbb{T}_i]$ *(*$i \in \overline{1, 2}$*));*

(б) *відображення* $\boldsymbol{f} : \mathbf{T}_1 \times \mathcal{X} \to \mathbf{T}_2$ *є нарізно неперервним*[3.14]*;*

(в) *для довільного* $x \in \mathcal{X}$ *відображення* $\boldsymbol{f}_x(t) = \boldsymbol{f}\,(t, x)$ $(t \in \mathbf{T}_1)$ *є ін'єктивним на* $\mathbf{T}_1$.

Тоді *є істинним одне (а у випадку* $\mathbf{card}\,(\mathbf{T}_1) > 1$ *одне і тільки одне) з наступних тверджень:*

1. *функція* $\boldsymbol{f}_x(t)$ *є строго зростаючою на* $\mathbf{T}_1$ *для довільного* $x \in \mathcal{X}$*;*
2. *функція* $\boldsymbol{f}_x(t)$ *строго спадною на* $\mathbf{T}_1$ *для довільного* $x \in \mathcal{X}$.

Доведення. Ми не будемо розглядати випадок, коли $\mathbf{card}\,(\mathbf{T}_1) = 1$, оскільки в цьому випадку функція $\boldsymbol{f}_x(t)$ є строго зростаючою і строго спадною на $\mathbf{T}_1$ одночасно, відповідно до правил формальної логіки. Отже, надалі вважатимемо, що

$$\mathbf{card}\,(\mathbf{T}_1) > 1. \tag{3.273}$$

Зафіксуємо довільний елемент $x \in \mathcal{X}$. За умовою даної леми, $\boldsymbol{f}_x(t)$ є ін'єктивним неперервним відображенням з $\mathbf{T}_1$ в $\mathbf{T}_2$. Отже, з леми 3.144 випливає наступне твердження:

(1^0) функція $\boldsymbol{f}_x$ є строго монотонним відображенням з лінійно упорядкованої множини $\mathbb{T}_1 = (\mathbf{T}_1, \leq_1)$ в $\mathbb{T}_2$ (для довільного елемента $x \in \mathcal{X}$).

Отже, залишилось довести, що напрямок монотонності функції $\boldsymbol{f}_x$ не залежить від елемента $x \in \mathcal{X}$.

Надалі будемо вважати, що множина $\mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_2$ є топологічним простором відносно тихоновської на декартовому квадраті топологічного простору $(\mathbf{T}_2, \mathfrak{Tpi}\,[\mathbb{T}_2])$. Згідно

[3.14] Використовуючи узагальнену теорему Юнга (див. [174, 175]) можна довести, що якщо виконуються умови (а), (б), (в) леми 3.145 то функція $\boldsymbol{f} : \mathbf{T}_1 \times \mathcal{X} \to \mathbf{T}_2$ насправді є неперервною за сукупністю змінних.

з умовою (3.273), існують такі елементи $t_0, t_1 \in \mathbf{T}_1$, що $t_0 <_1 t_1$. Розглянемо функцію $\Phi : \mathcal{X} \to \mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_2$, що визначається за формулою:

$$\Phi(x) := (\boldsymbol{f}_x(t_0), \boldsymbol{f}_x(t_1)) \in \mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_2 \qquad (x \in \mathcal{X}).$$

Використовуючи умови (б) та (а) даної леми, а також [176, теорема 3.3], приходимо до висновку, що функція Φ є неперервним відображенням із зв'язного топологічного простору $\mathcal{X}$ у топологічний простір $\mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_2$. Отже, згідно з [169, теорема 6.1.4], область значень $\mathfrak{R}(\Phi) = \Phi(\mathcal{X})$ є зв'язною множиною в $\mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_2$. Оскільки $t_0 \neq t_1$, то, згідно з встановленим вище твердженням $(\mathbf{1}^0)$, маємо $\boldsymbol{f}_x(t_0) \neq \boldsymbol{f}_x(t_1)$ $(\forall x \in \mathcal{X})$. Тому, зв'язна в $\mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_2$ множина $\mathfrak{R}(\Phi) = \Phi(\mathcal{X})$ включається в об'єднання двох диз'юнктних множин:

$$\Phi(\mathcal{X}) \subseteq \mathbf{U}_1 \cup \mathbf{U}_2, \quad \text{де} \tag{3.274}$$

$$\mathbf{U}_1 = \{(\tau_1, \tau_2) \in \mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_2 \,|\, \tau_1 <_2 \tau_2\}; \; \mathbf{U}_2 = \{(\tau_1, \tau_2) \in \mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_2 \,|\, \tau_1 >_2 \tau_2\}.$$

Доведемо, що обидві множини $\mathbf{U}_1$ та $\mathbf{U}_2$ — відкриті. Розглянемо довільну точку $(\tau_1, \tau_2) \in \mathbf{U}_1$. За означенням множини $\mathbf{U}_1$ маємо, $\tau_1 <_2 \tau_2$. У випадку, коли існує елемент $\widetilde{\tau} \in \mathbf{T}_2$ такий, що $\tau_1 <_2 \widetilde{\tau} <_2 \tau_2$, множина $\widetilde{\mathbf{U}} = (-\infty, \widetilde{\tau}) \times (\widetilde{\tau}, \infty)$ є відкритою в $\mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_2$ (за означенням тихоновської топології декартового добутку, див. [176]). При цьому множина $\widetilde{\mathbf{U}}$ містить точку (τ_1, τ_2) і задовольняє умову $\widetilde{\mathbf{U}} \subseteq \mathbf{U}_1$. У випадку, коли не існує точки $\widetilde{\tau}$, що задовольняє умову $\tau_1 <_2 \widetilde{\tau} <_2 \tau_2$, множини $(-\infty, \tau_1] = (-\infty, \tau_2)$ та $[\tau_2, \infty) = (\tau_1, \infty)$ є відкритими в $\mathbf{T}_2$. А отже множина $\widetilde{\mathbf{U}} = (-\infty, \tau_1] \times [\tau_2, \infty)$ є відкритою в $\mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_2$, причому $(\tau_1, \tau_2) \in \widetilde{\mathbf{U}} \subseteq \mathbf{U}_1$. Таким чином для довільної точки $(\tau_1, \tau_2) \in \mathbf{U}_1$ (в обох випадках) існує відкрита в $\mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_2$ множина $\widetilde{\mathbf{U}}$ така, що $(\tau_1, \tau_2) \in \widetilde{\mathbf{U}} \subseteq \mathbf{U}_1$. Тому, множина $\mathbf{U}_1$ є відкритою в $\mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_2$. Аналогічно доводиться, що множина $\mathbf{U}_2$ також відкрита в $\mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_2$. Вище було доведено, що множина $\Phi(\mathcal{X})$ зв'язна. Отже, оскільки множини $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$ відкриті, то включення (3.274) можливе лише в наступних двох випадках:

(а) $\Phi(\mathcal{X}) \subseteq \mathbf{U}_1$; (б) $\Phi(\mathcal{X}) \subseteq \mathbf{U}_2$.

У випадку (а) маємо, $\boldsymbol{f}_x(t_0) <_2 \boldsymbol{f}_x(t_1)$ $(\forall\, x \in \mathcal{X})$. Отже, цьому випадку з доведеного вище твердження $(\mathbf{1}^0)$, випливає, що функція $\boldsymbol{f}_x$ є строго зростаюча на $\mathbf{T}_1$ для довільного $x \in \mathcal{X}$. Аналогічно у випадку (б) функція $\boldsymbol{f}_x$ строго спадає на $\mathbf{T}_1$ для довільного $x \in \mathcal{X}$. □

Умови, при яких траєкторна регулярність зумовлює часознаковизначеність.

Означення 3.146.

- Універсальну кінематику $\mathcal{F}$ будемо називати топологічною, якщо для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ виконується умова $\mathcal{T}p(\mathfrak{l}) \neq \emptyset$.

- Універсальну кінематику $\mathcal{F}$ будемо називати **топологічно-векторною**, якщо $\mathcal{F}$ є топологічною і векторною одночасно, тобто якщо для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ виконуються умови $\mathbb{L}s(\mathfrak{l}) \neq \emptyset$ і $\mathcal{T}p(\mathfrak{l}) \neq \emptyset$.

З означення 2.1, а також з системи позначень теорії універсальних кінематик випливає, що для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ топологічної універсальної кінематики $\mathcal{F}$ пара $(\mathbf{Zk}(\mathfrak{l}), \mathcal{T}p(\mathfrak{l}))$ є топологічним простором.

Нехай, $\mathcal{F}$ — довільна топологічна універсальна кінематика, $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ — довільна система відліку $\mathcal{F}$ і $(\mathcal{X}, \mathfrak{S}_{\mathcal{X}})$ — довільний топологічний простір. Будемо говорити, що відображення $\boldsymbol{f} : \mathbb{M}k(\mathfrak{l}) \to \mathfrak{X}$ є **нарізно неперервним за просторовою і часовою змінною**, якщо $\boldsymbol{f} \in \mathbf{CC}(\mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{l}), \mathcal{X})$, де $\mathbf{Tm}(\mathfrak{l})$ та $\mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$ розглядаються як топологічні простори відносно топологій $\mathfrak{Tpi}(\mathfrak{l})$ і $\mathcal{T}p(\mathfrak{l})$ (відповідно).

Твердження 3.147. *Нехай, система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ траєкторно регулярна відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ у топологічній універсальній кінематиці $\mathcal{F}$ і при цьому виконуються такі додаткові умови:*

(а) *Топологічні простори $(\mathbf{Tm}(\mathfrak{m}), \mathfrak{Tpi}(\mathfrak{m}))$ і $(\mathbf{Zk}(\mathfrak{m}), \mathcal{T}p(\mathfrak{m}))$ є зв'язними.*

(б) *Відображення $\mathbb{M}k(\mathfrak{m}) \ni \mathrm{w} \longmapsto \mathsf{tm}([\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\,\mathrm{w}) \in \mathbf{Tm}(\mathfrak{l})$ є нарізно неперервним за просторовою і часовою змінною на $\mathbb{M}k(\mathfrak{m})$ (де $\mathbf{Tm}(\mathfrak{l})$ розглядається як топологічний простір відносно топології $\mathfrak{Tpi}(\mathfrak{l})$).*

Тоді система відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є часознаковизначеною відносно системи відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ в кінематиці $\mathcal{F}$ (тобто $\mathfrak{l} \Updownarrow^{\pm}_{\mathcal{F}} \mathfrak{m}$).

Доведення. Покладемо:

$$\boldsymbol{f}(t, \mathrm{x}) := \mathsf{tm}([\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}](t, \mathrm{x})), \quad (t \in \mathbf{Tm}(\mathfrak{m}),\ \mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})).$$

Тоді для довільного $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$ отримуємо відображення $\boldsymbol{f}_{\mathrm{x}} : \mathbf{Tm}(\mathfrak{m}) \to \mathbf{Tm}(\mathfrak{l})$, що діє за формулою, $\boldsymbol{f}_{\mathrm{x}}(t) := \mathsf{tm}([\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}](t, \mathrm{x}))$ $(t \in \mathbf{Tm}(\mathfrak{m}))$. Доведемо, що відображення $\boldsymbol{f}_{\mathrm{x}}$ є ін'єктивним на $\mathbf{Tm}(\mathfrak{m})$. Нехай для деяких $t_1, t_2 \in \mathbf{Tm}(\mathfrak{m})$ має місце рівність $\boldsymbol{f}_{\mathrm{x}}(t_1) = \boldsymbol{f}_{\mathrm{x}}(t_2)$. Тоді:

$$\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2), \tag{3.275}$$

де $\mathrm{w}_i = [\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}](t_i, \mathrm{x})$ $(i \in \overline{1,2})$. За означенням 3.120, маємо, $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x})$. Отже, за означенням 3.126 (пункт 1), із співвідношення (3.275) отримуємо рівність $\mathrm{w}_1 = \mathrm{w}_2$. Отже, $[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}](t_1, \mathrm{x}) = [\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}](t_2, \mathrm{x})$. Звідси, використовуючи формули (3.3) і (3.4), отримуємо рівність $(t_1, \mathrm{x}) = (t_2, \mathrm{x})$, тобто $t_1 = t_2$. Таким чином, для довільних $t_1, t_2 \in \mathbf{Tm}(\mathfrak{m})$ з рівності $\boldsymbol{f}_{\mathrm{x}}(t_1) = \boldsymbol{f}_{\mathrm{x}}(t_2)$ випливає рівність $t_1 = t_2$, тобто $\boldsymbol{f}_{\mathrm{x}}$ є ін'єктивним відображенням з $\mathbf{Tm}(\mathfrak{m})$ в $\mathbf{Tm}(\mathfrak{l})$. При цьому за умовою (б) даного твердження, відображення $\boldsymbol{f} : \mathbf{Tm}(\mathfrak{m}) \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{m}) \to \mathbf{Tm}(\mathfrak{l})$ є нарізно неперервним.

Отже, використовуючи умову (a) даного твердження і лему 3.145, бачимо, що мусить виконуватися одне з наступних тверджень:

1. функція $\boldsymbol{f}_{\mathrm{x}}(t)$ є строго зростаючою на $\mathbf{Tm}\,(\mathfrak{m})$ для довільного $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{m})$;
2. функція $\boldsymbol{f}_{\mathrm{x}}(t)$ є строго спадною на $\mathbf{Tm}\,(\mathfrak{m})$ для довільного $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{m})$.

У випадку, коли має місце твердження, сформульоване в пункті 1, маємо $\mathfrak{l} \Uparrow^{+}_{\mathcal{F}} \mathfrak{m}$ (відповідно до означення 3.83, пункт 2). Аналогічно у випадку, коли має місце пункт 2 отримуємо $\mathfrak{l} \Downarrow^{-}_{\mathcal{F}} \mathfrak{m}$. Отже, в обох випадках маємо, $\mathfrak{l} \Updownarrow^{\pm}_{\mathcal{F}} \mathfrak{m}$. □

Нехай, $\mathcal{F}$ — топологічно-векторна універсальна кінематика. Тоді з означення 2.1, а також з системи позначень теорії універсальних кінематик випливає, що для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ множина $\mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l})$ утворює топологічний векторний простір відносно топології $\mathcal{T}p\,(\mathfrak{l})$ і лінійних алгебраїчних операцій, породжених лінійною структурою $\mathbb{L}s\,(\mathfrak{l})$. Відомо, що довільний топологічний векторний простір є зв'язним (див. наприклад [177, Theorem 3.1]). Отже, застосовуючи твердження 3.147, а також означення 3.126 (пункт 3), отримуємо наступну теорему, "зворотню" до теореми 3.142.

Теорема 3.148. *Нехай, $\mathcal{F}$ — довільна топологічно-векторна універсальна кінематика. Якщо система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ є одностайною відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ і при цьому виконуються такі додаткові умови:*

(а) *топологічний простір $(\mathbf{Tm}\,(\mathfrak{m}), \mathfrak{Tpi}\,(\mathfrak{m}))$ є зв'язним;*

(б) *відображення $\mathbb{M}k\,(\mathfrak{m}) \ni \mathrm{w} \longmapsto \mathsf{tm}\,([\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\,\mathrm{w}) \in \mathbf{Tm}\,(\mathfrak{l})$ є нарізно неперервним за просторовою і часовою зміною на $\mathbb{M}k\,(\mathfrak{m})$;*

то система відліку $\mathfrak{l}$ є часознаковизначеною відносно системи відліку $\mathfrak{m}$ у кінематиці $\mathcal{F}$ (тобто $\mathfrak{l} \Updownarrow^{\pm}_{\mathcal{F}} \mathfrak{m}$).

Означення 3.149. Будемо говорити, що універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є **C-регулярною**, якщо:

1. Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ упорядковані пари $(\mathbf{Tm}\,(\mathfrak{l}), \mathfrak{Tpi}\,(\mathfrak{l}))$ та $(\mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l}), \mathcal{T}p\,(\mathfrak{l}))$ є зв'язними топологічними просторами.
2. Для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ відображення $\mathbb{M}k\,(\mathfrak{m}) \ni \mathrm{w} \longmapsto \mathsf{tm}\,([\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\,\mathrm{w}) \in \mathbf{Tm}\,(\mathfrak{l})$ є нарізно неперервним за просторовою і часовою змінною на $\mathbb{M}k\,(\mathfrak{m})$.

Оскільки, як було сказано вище, довільний топологічний векторний простір є зв'язним, то отримуємо наступне твердження:

Твердження 3.150. *Топологічна векторна універсальна кінематика $\mathcal{F}$ є* C*-регулярною тоді і тільки тоді, коли для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ упорядкована пара $(\mathbf{Tm}(\mathfrak{l}), \mathfrak{Tpi}(\mathfrak{l}))$ є зв'язним топологічним простором і відображення $\mathbb{M}k(\mathfrak{m}) \ni \mathrm{w} \longmapsto \mathsf{tm}([\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\,\mathrm{w}) \in \mathbf{Tm}(\mathfrak{l})$ є нарізно неперервним за просторовою і часовою змінною.*

Використовуючи твердження 3.141, 3.147 та означення 3.149, отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 3.151. *Система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$* C*-регулярної топологічної універсальної кінематики $\mathcal{F}$ є траєкторно регулярною відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ у кінематиці $\mathcal{F}$ тоді і тільки тоді, коли $\mathfrak{l} \Updownarrow^{\pm}_{\mathcal{F}} \mathfrak{m}$ (тобто тоді і тільки тоді, коли $\mathfrak{l}$ є часознаковизначеною відносно $\mathfrak{m}$ в $\mathcal{F}$).*

Застосовуючи теорему 3.142 та теорему 3.148, отримуємо такий наслідок:

Наслідок 3.152. *Нехай, $\mathcal{F}$ —* C*-регулярна топологічно-векторна універсальна кінематика. Система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є одностайною відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ у кінематиці $\mathcal{F}$ тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:*

1. *$\mathfrak{m}$ є квазіодностайною відносно $\mathfrak{l}$ у кінематиці $\mathcal{F}$;* **2.** $\mathfrak{l} \Updownarrow^{\pm}_{\mathcal{F}} \mathfrak{m}$.

3.10.4. Критерій одностайної поступальності систем відліку в універсальних кінематиках.

Одностайна поступальність і оператори перетворення координат.

Означення 3.153. Нехай, $\mathcal{U} \in \mathbb{P}\mathbf{k}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$, де $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ — довільні координатні простори, а $\mathbb{T}_1 = (\mathbf{T}_1, \leq_1)$, $\mathbb{T}_2 = (\mathbf{T}_2, \leq_2)$ — довільні лінійно упорядковані множини. **Траєкторією** точки $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ відносно оператора перетворення координат $\mathcal{U}$ будемо називати множину: $\mathbf{trj}_{\mathcal{U}}(\mathrm{x}) := \{\mathcal{U}(t, \mathrm{x}) \mid t \in \mathbf{T}_1\} \subseteq \mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$.

Означення 3.154. 1) Координатний простір $\mathfrak{Q}$ будемо називати **векторним**, якщо $\mathbb{L}s(\mathfrak{Q}) \neq \emptyset$.

2) Нехай, $\mathfrak{Q}$ — векторний координатний простір і $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — лінійно упорядкована множина.

(2.1) Для довільної множини $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{T} \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ покладемо, $\mathbf{A}^{\langle +\mathrm{x};\, \mathfrak{Q}\rangle} := \{(\mathsf{tm}(\mathrm{w}), \mathrm{x} + \mathsf{bs}(\mathrm{w})) \mid \mathrm{w} \in \mathbf{A}\}$.

(2.2) Будемо говорити, що множина $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{T} \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ є $(\mathbb{T}, \mathfrak{Q})$**-паралельною** множині $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{T} \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ (позначення $\mathbf{A} \parallel_{(\mathbb{T};\mathfrak{Q})} \mathbf{B}$), якщо існує елемент $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ такий, що $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\langle +\mathrm{x};\, \mathfrak{Q}\rangle} = \{(\mathsf{tm}(\mathrm{w}), \mathrm{x} + \mathsf{bs}(\mathrm{w})) \mid \mathrm{w} \in \mathbf{A}\}$.

Аналогічно до твердження 3.125 доводиться наступне твердження.

Твердження 3.155. *Бінарне відношення* $\|_{(\mathbb{T};\mathfrak{Q})}$ *є відношенням еквівалентності на множині* $2^{\mathbf{T}\times\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})} = \{A \mid A \subseteq \mathbf{T} \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})\}$.

Означення 3.156. Нехай, $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ — векторні координатні простори і $\mathbb{T}_1 = (\mathbf{T}_1, \leq_1)$, $\mathbb{T}_2 = (\mathbf{T}_2, \leq_2)$ — лінійно упорядковані множини. Оператор перетворення координат $\mathcal{U} \in \mathbb{P}\mathbf{k}\,(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$ будемо називати **одностайно-поступальним** (скорочено — **одностайним**), якщо:

1. для довільного $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{Q}_1)$ траєкторія $\mathbf{trj}_{\mathcal{U}}\,(\mathrm{x})$ є абстрактною траєкторією з $\mathbb{T}_2$ в $\mathbf{Zk}\,(\mathfrak{Q}_2)$ (тобто $\forall\, \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbf{trj}_{\mathcal{U}}\,(\mathrm{x})$ з умови $\mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_1) = \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_2)$ випливає рівність $\mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_2)$, а отже і рівність $\mathrm{w}_1 = \mathrm{w}_2$).
2. для довільних $\mathrm{x}, \widetilde{\mathrm{x}} \in \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{Q}_1)$ має місце співвідношення $\mathbf{trj}_{\mathcal{U}}\,(\mathrm{x}) \;\|_{(\mathbb{T}_2;\mathfrak{Q}_2)}\; \mathbf{trj}_{\mathcal{U}}\,(\widetilde{\mathrm{x}})$.

Нехай, $\mathcal{F}$ — довільна векторна універсальна кінематика. Легко бачити, що для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ мають місце рівності:

$$\mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l}) = \mathbf{Zk}\,(\mathsf{BG}\,(\mathfrak{l}))\,; \quad \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l}) = \mathbf{Tm}\,(\mathfrak{l}) \times \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l}) = \mathbf{Tm}\,(\mathfrak{l}) \times \mathbf{Zk}\,(\mathsf{BG}\,(\mathfrak{l}))\,,$$

де $\mathsf{BG}\,(\mathfrak{l})$ — координатний простір. Враховуючи вищесказане, а також означення 3.124 (пункт 2), означення 3.126 (пункт 3), означення 3.154 (пункт (2.2)), та означення 3.156, отримуємо таке твердження:

Твердження 3.157. *Нехай,* $\mathcal{F}$ *— довільна векторна універсальна кінематика і* $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ *— довільні системи відліку* $\mathcal{F}$*. Тоді:*

1. *Для довільних множин* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subseteq \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l})$ *співвідношення* $\mathbf{A} \,\|_{\mathfrak{l}}\, \mathbf{B}$ *рівносильне співвідношенню* $\mathbf{A} \,\|_{(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l});\mathsf{BG}(\mathfrak{l}))}\, \mathbf{B}$.
2. *Система відліку* $\mathfrak{m}$ *є одностайною відносно системи відліку* $\mathfrak{l}$ *тоді і тільки тоді, коли оператор перетворення координат:*

   $$[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m},\, \mathcal{F}] \in \mathbb{P}\mathbf{k}\,(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{m}), \mathsf{BG}(\mathfrak{m}); \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}), \mathsf{BG}(\mathfrak{l}))$$

   є одностайним.

Критерії одностайної поступальності для операторів перетворень координат та систем відліку.

Теорема 3.158. *Нехай,* $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ *— довільні векторні координатні простори, а* $\mathbb{T}_1 = (\mathbf{T}_1, \leq_1)$, $\mathbb{T}_2 = (\mathbf{T}_2, \leq_2)$ *— довільні лінійно упорядковані множини. Відображення* $\mathcal{U} : \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{Q}_1) \longrightarrow \mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{Q}_2)$ *є одностайним оператором перетворення координат тоді і тільки тоді, коли існують функції* $\Phi : \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{Q}_1) \longrightarrow \mathbf{T}_2$, $\mathbf{F} : \mathbf{T}_2 \longrightarrow \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{Q}_2)$ *і* $\mathbf{g} : \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{Q}_1) \longrightarrow \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{Q}_2)$*, що задовольняють такі умови:*

1. *Для довільного* $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ *функція* $\Phi_{(\mathrm{x})}(t) := \Phi(t, \mathrm{x})$, $t \in \mathbf{T}_1$ *є бієкцією між* $\mathbf{T}_1$ *і* $\mathbf{T}_2$.
2. *Функція* $\mathbf{g}$ *є бієкцією між* $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ *і* $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$.
3. *Для довільної пари* $(t, \mathrm{x}) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ *виконується рівність:*

$$\mathcal{U}(t, \mathrm{x}) = (\Phi(t, \mathrm{x}), \mathbf{F}(\Phi(t, \mathrm{x})) + \mathbf{g}(\mathrm{x})). \tag{3.276}$$

Доведення. **I) Необхідність**. Нехай, оператор перетворення координат $\mathcal{U} \in \mathbb{P}\mathbf{k}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$ є одностайним. Покладемо:

$$\Phi(t, \mathrm{x}) := \mathsf{tm}(\mathcal{U}(t, \mathrm{x})), \qquad (t, \mathrm{x}) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1). \tag{3.277}$$

Зафіксуємо довільний елемент $\mathrm{x}_0 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$. Покладемо:

$$\mathbf{F} := \mathbf{trj}_{\mathcal{U}}(\mathrm{x}_0). \tag{3.278}$$

За означенням 3.156, $\mathbf{F}$ є абстрактною траєкторією з $\mathbb{T}_2$ в $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$, тобто функцією з $\mathfrak{D}(\mathbf{F}) \subseteq \mathbf{T}_2$ в $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$. Доведемо, що $\mathfrak{D}(\mathbf{F}) = \mathbf{T}_2$. Нехай, $\tau \in \mathbf{T}_2$. Виберемо довільний елемент $\mathrm{y} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$. Оскільки, за означенням 3.117, $\mathcal{U}$ є бієкцією між $\mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ і $\mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$, то існують елементи $\widetilde{t} \in \mathbf{T}_1$ і $\widetilde{\mathrm{x}} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ такі, що $\mathcal{U}(\widetilde{t}, \widetilde{\mathrm{x}}) = (\tau, \mathrm{y})$. Тоді $(\tau, \mathrm{y}) \in \mathbf{trj}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathrm{x}})$. За означенням 3.156, $\mathbf{trj}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathrm{x}})$ є абстрактною траєкторією з $\mathbb{T}_2$ в $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$. Отже, із співвідношення $(\tau, \mathrm{y}) \in \mathbf{trj}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathrm{x}})$ випливає, що $\tau \in \mathfrak{D}(\mathbf{trj}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathrm{x}}))$. Згідно з умовою 2 означення 3.156, маємо:

$$\mathbf{trj}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathrm{x}}) \parallel_{(\mathbb{T}_2; \mathfrak{Q}_2)} \mathbf{trj}_{\mathcal{U}}(\mathrm{x}_0). \tag{3.279}$$

Тобто, враховуючи (3.278), маємо, $\mathbf{trj}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathrm{x}}) \parallel_{(\mathbb{T}_2; \mathfrak{Q}_2)} \mathbf{F}$. З останнього співвідношення, за означенням 3.154 (пункт (2.2)), випливає, що $\mathfrak{D}(\mathbf{trj}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathrm{x}})) = \mathfrak{D}(\mathbf{F})$. Отже, оскільки $\tau \in \mathfrak{D}(\mathbf{trj}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathrm{x}}))$, то $\tau \in \mathfrak{D}(\mathbf{F})$. Таким чином, довільний елемент $\tau \in \mathbf{T}_2$ належить до $\mathfrak{D}(\mathbf{F}) \subseteq \mathbf{T}_2$. Тому, $\mathfrak{D}(\mathbf{F}) = \mathbf{T}_2$. Тобто $\mathbf{F}$ є відображенням виду $\mathbf{F} : \mathbf{T}_2 \to \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$. Тому, траєкторію $\mathbf{F} := \mathbf{trj}_{\mathcal{U}}(\mathrm{x}_0)$ можна подати у вигляді:

$$\mathbf{trj}_{\mathcal{U}}(\mathrm{x}_0) = \{(\tau, \mathbf{F}(\tau)) \mid \tau \in \mathbf{T}_2\}. \tag{3.280}$$

Покладемо:

$$\mathbf{G}(t, \mathrm{x}) := \mathsf{bs}(\mathcal{U}(t, \mathrm{x})) - \mathbf{F}(\Phi(t, \mathrm{x})), \quad (t, \mathrm{x}) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1).$$

Тоді, використовуючи (3.277), для довільних $(t, \mathrm{x}) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ отримуємо:

$$\mathcal{U}(t, \mathrm{x}) = (\mathsf{tm}(\mathcal{U}(t, \mathrm{x})), \mathsf{bs}(\mathcal{U}(t, \mathrm{x}))) = (\Phi(t, \mathrm{x}), \mathbf{F}(\Phi(t, \mathrm{x})) + \mathbf{G}(t, \mathrm{x})). \tag{3.281}$$

Отже, згідно означення 3.153, для довільного фіксованого елемента $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ траєкторію $\mathbf{trj}_{\mathcal{U}}(\mathrm{x})$ можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned}\mathbf{trj}_{\mathcal{U}}(\mathrm{x}) &= \{\mathcal{U}(t,\mathrm{x}) \mid t \in \mathbf{T}_1\} = \\ &= \{(\Phi(t,\mathrm{x}), \mathbf{F}(\Phi(t,\mathrm{x})) + \mathbf{G}(t,\mathrm{x})) \mid t \in \mathbf{T}_1\}. \end{aligned} \tag{3.282}$$

За означенням 3.156 маємо $\mathbf{trj}_{\mathcal{U}}(\mathrm{x}_0) \parallel_{(\mathbb{T}_2;\mathfrak{Q}_2)} \mathbf{trj}_{\mathcal{U}}(\mathrm{x})$. Тому, враховуючи співвідношення (3.280) і означенням 3.154 (пункт (2.2)), отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{trj}_{\mathcal{U}}(\mathrm{x}) &= \{(\mathsf{tm}(\mathrm{w}), \mathrm{y} + \mathsf{bs}(\mathrm{w})) \mid \mathrm{w} \in \mathbf{trj}_{\mathcal{U}}(\mathrm{x}_0)\} = \\ &= \{(\tau, \mathrm{y} + \mathbf{F}(\tau)) \mid \tau \in \mathbf{T}_2\}, \end{aligned} \tag{3.283}$$

де $\mathrm{y} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$. Із співвідношень (3.282) і (3.283) випливає, що:

$$\{(\Phi(t,\mathrm{x}), \mathbf{F}(\Phi(t,\mathrm{x})) + \mathbf{G}(t,\mathrm{x})) \mid t \in \mathbf{T}_1\} = \{(\tau, \mathrm{y} + \mathbf{F}(\tau)) \mid \tau \in \mathbf{T}_2\}.$$

Звідси випливає, що для довільних $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_1$ існують елементи $\tau_1, \tau_2 \in \mathbf{T}_2$ такі, що:

$$(\Phi(t_i,\mathrm{x}), \mathbf{F}(\Phi(t_i,\mathrm{x})) + \mathbf{G}(t_i,\mathrm{x})) = (\tau_i, \mathrm{y} + \mathbf{F}(\tau_i)) \quad \left(i \in \overline{1,2}\right).$$

З останньої рівності отримуємо:

$$\Phi(t_i,\mathrm{x}) = \tau_i; \quad \mathbf{F}(\tau_i) + \mathbf{G}(t_i,\mathrm{x}) = \mathrm{y} + \mathbf{F}(\tau_i) \quad (i \in \overline{1,2}).$$

Тобто, $\mathbf{G}(t_i,\mathrm{x}) = \mathrm{y}$ $(i \in \overline{1,2})$. Отже, $\mathbf{G}(t_1,\mathrm{x}) = \mathbf{G}(t_2,\mathrm{x})$ $(\forall t_1, t_2 \in \mathbf{T}_1)$. Звідси, враховуючи довільність вибору вектора $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$, випливає, що існує функція $\mathbf{g} : \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1) \longrightarrow \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ така, що:

$$\mathbf{G}(t,\mathrm{x}) = \mathbf{g}(\mathrm{x}) \qquad (\forall (t,\mathrm{x}) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)).$$

Враховуючи останню рівність, співвідношення (3.281) переписується у вигляді:

$$\mathcal{U}(t,\mathrm{x}) = (\Phi(t,\mathrm{x}), \mathbf{F}(\Phi(t,\mathrm{x})) + \mathbf{g}(\mathrm{x})) \quad ((t,\mathrm{x}) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)). \tag{3.284}$$

Залишилось довести, що функції Φ і $\mathbf{g}$ задовольняють умови 1 і 2 даної теореми.

I.1) Нехай, $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$. Зафіксуємо довільний елемент $\tau \in \mathbf{T}_2$. Розглянемо довільний $\mathrm{y} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$. Оскільки (за означенням 3.156), $\mathcal{U} \in \mathbb{P}\mathbf{k}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$, то, за означенням 3.117, існує пара $\left(\widetilde{t}, \widetilde{\mathrm{x}}\right) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ така, що $\mathcal{U}\left(\widetilde{t}, \widetilde{\mathrm{x}}\right) = (\tau, \mathrm{y})$. Тоді, за означенням 3.153,

$$(\tau, \mathrm{y}) \in \mathbf{trj}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathrm{x}}). \tag{3.285}$$

Оскільки $\mathcal{U}$ — одностайне перетворення координат, то, за означенням 3.156, $\mathbf{trj}_{\mathcal{U}}(\mathrm{x}) \parallel_{(\mathbb{T}_2;\mathfrak{Q}_2)} \mathbf{trj}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathrm{x}})$. Тому, за означенням 3.154, $\mathfrak{D}(\mathbf{trj}_{\mathcal{U}}(\mathrm{x})) = \mathfrak{D}(\mathbf{trj}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathrm{x}}))$. Отже, оскільки, згідно (3.285), $\tau \in \mathfrak{D}(\mathbf{trj}_{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathrm{x}}))$, то $\tau \in \mathfrak{D}(\mathbf{trj}_{\mathcal{U}}(\mathrm{x}))$. Тому, за означенням 3.153, існує момент часу $t \in \mathbf{T}_1$ такий, що $\mathsf{tm}(\mathcal{U}(t,\mathrm{x})) = \tau$. Тобто, згідно (3.277),

$\Phi(t, \mathrm{x}) = \tau$. Отже, при довільному фіксованому $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ маємо:

$$\forall \tau \in \mathbf{T}_2 \, \exists \, t \in \mathbf{T}_1 \; (\Phi(t, \mathrm{x}) = \tau). \tag{3.286}$$

Нехай, знову, x — фіксований елемент з $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$, і для деяких $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_1$ має місце рівність $\Phi(t_1, \mathrm{x}) = \Phi(t_2, \mathrm{x})$. Тоді, згідно з (3.284), отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(t_1, \mathrm{x}) &= (\Phi(t_1, \mathrm{x}), \mathbf{F}(\Phi(t_1, \mathrm{x})) + \mathbf{g}(\mathrm{x})) = \\ &= (\Phi(t_2, \mathrm{x}), \mathbf{F}(\Phi(t_2, \mathrm{x})) + \mathbf{g}(\mathrm{x})) = \mathcal{U}(t_2, \mathrm{x}).\end{aligned}$$

Отже, оскільки $\mathcal{U} \in \mathbb{P}\mathbf{k}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$, то, за означенням 3.117, з останньої рівності випливає, що $t_1 = t_2$. Таким чином, при довільному фіксованому $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ маємо:

$$\forall \, t_1, t_2 \in \mathbf{T}_1 \; ((\Phi(t_1, \mathrm{x}) = \Phi(t_2, \mathrm{x})) \Rightarrow (t_1 = t_2)). \tag{3.287}$$

З (3.286) і (3.287) випливає, що функція Φ задовольняє першу умову даної теореми.

I.2) Нехай, $\mathrm{y} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$. Виберемо довільний елемент $\tau \in \mathbf{T}_2$. Оскільки оскільки $\mathcal{U} \in \mathbb{P}\mathbf{k}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$, то, за означенням 3.117, існує пара $(t, \mathrm{x}) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ така, що $\mathcal{U}(t, \mathrm{x}) = (\tau, \mathbf{F}(\tau) + \mathbf{y})$. Тоді, згідно з (3.284), отримуємо, $(\Phi(t, \mathrm{x}), \mathbf{F}(\Phi(t, \mathrm{x})) + \mathbf{g}(\mathrm{x})) = (\tau, \mathbf{F}(\tau) + \mathbf{y})$. Звідси випливає, що $\Phi(t, \mathrm{x}) = \tau$ і $\mathbf{F}(\tau) + \mathbf{g}(\mathrm{x}) = \mathbf{F}(\tau) + \mathbf{y}$. З останньої рівності отримуємо, $\mathbf{g}(\mathrm{x}) = \mathrm{y}$. Таким чином:

$$\forall \mathrm{y} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2) \; \exists \mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1) \; (\mathbf{g}(\mathrm{x}) = \mathrm{y}). \tag{3.288}$$

Нехай, $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ і $\mathbf{g}(\mathrm{x}_1) = \mathbf{g}(\mathrm{x}_2)$. Виберемо довільний елемент $\tau_0 \in \mathbf{T}_2$. Згідно з (3.286), існують елементи $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_1$ такі, що:

$$\Phi(t_1, \mathrm{x}_1) = \Phi(t_2, \mathrm{x}_2) = \tau_0.$$

Звідси, використовуючи (3.284), отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(t_1, \mathrm{x}_1) &= (\Phi(t_1, \mathrm{x}_1), \mathbf{F}(\Phi(t_1, \mathrm{x}_1)) + \mathbf{g}(\mathrm{x}_1)) = \\ &= (\tau_0, \mathbf{F}(\tau_0) + \mathbf{g}(\mathrm{x}_1)) = (\tau_0, \mathbf{F}(\tau_0) + \mathbf{g}(\mathrm{x}_2)) = \\ &= (\Phi(t_2, \mathrm{x}_2), \mathbf{F}(\Phi(t_2, \mathrm{x}_2)) + \mathbf{g}(\mathrm{x}_2)) = \mathcal{U}(t_2, \mathrm{x}_2).\end{aligned}$$

Оскільки $\mathcal{U} \in \mathbb{P}\mathbf{k}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$, то, за означенням 3.117, з останньої рівності отримуємо, $(t_1, \mathrm{x}_1) = (t_2, \mathrm{x}_2)$, тобто $\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2$. Таким чином:

$$\forall \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1) \; ((\mathbf{g}(\mathrm{x}_1) = \mathbf{g}(\mathrm{x}_2)) \Rightarrow (\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2)). \tag{3.289}$$

Із (3.288) і (3.289) випливає, що функція $\mathbf{g}$ задовольняє другу умову теореми.

Таким чином, якщо оператор $\mathcal{U} \in \mathbb{P}\mathbf{k}\left(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2\right)$ є одностайним, то існують функції $\Phi : \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_1\right) \longrightarrow \mathbf{T}_2$, $\mathbf{F} : \mathbf{T}_2 \longrightarrow \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_2\right)$ і $\mathbf{g} : \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_1\right) \longrightarrow \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_2\right)$, що задовольняють умови $1, 2$ і 3 даної теореми.

II) Достатність. Навпаки, нехай існують функції $\Phi : \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_1\right) \longrightarrow \mathbf{T}_2$, $\mathbf{F} : \mathbf{T}_2 \longrightarrow \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_2\right)$ і $\mathbf{g} : \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_1\right) \longrightarrow \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_2\right)$, що задовольняють умови $1, 2$ і 3 даної теореми. Доведемо, що тоді відображення $\mathcal{U}$, що задається формулою (3.276) є одностайним оператором перетворення координат.

II.1) Доведемо, що $\mathcal{U} \in \mathbb{P}\mathbf{k}\left(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2\right)$. Нехай, $\left(t_1, \mathrm{x}_1\right), \left(t_2, \mathrm{x}_2\right) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_1\right)$ і $\mathcal{U}\left(t_1, \mathrm{x}_1\right) = \mathcal{U}\left(t_2, \mathrm{x}_2\right)$. Тоді, згідно (3.276), отримуємо:

$$\begin{aligned} \Phi\left(t_1, \mathrm{x}_1\right) &= \Phi\left(t_2, \mathrm{x}_2\right); \\ \mathbf{F}\left(\Phi\left(t_1, \mathrm{x}_1\right)\right) + \mathbf{g}\left(\mathrm{x}_1\right) &= \mathbf{F}\left(\Phi\left(t_2, \mathrm{x}_2\right)\right) + \mathbf{g}\left(\mathrm{x}_2\right). \end{aligned} \tag{3.290}$$

З останніх двох рівностей випливає, що $\mathbf{g}\left(\mathrm{x}_1\right) = \mathbf{g}\left(\mathrm{x}_2\right)$. Отже, згідно із другою умовою теореми, $\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2$. Звідки, враховуючи (3.290), маємо рівність $\Phi\left(t_1, \mathrm{x}_1\right) = \Phi\left(t_2, \mathrm{x}_1\right)$. Отже, згідно з першою умовою теореми, $t_1 = t_2$. Таким чином, $\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2$ і $t_1 = t_2$, тобто $\left(t_1, \mathrm{x}_1\right) = \left(t_2, \mathrm{x}_2\right)$. Отже, для довільних $\left(t_1, \mathrm{x}_1\right), \left(t_2, \mathrm{x}_2\right) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_1\right)$ маємо:

$$\left(\mathcal{U}\left(t_1, \mathrm{x}_1\right) = \mathcal{U}\left(t_2, \mathrm{x}_2\right)\right) \Rightarrow \left(\left(t_1, \mathrm{x}_1\right) = \left(t_2, \mathrm{x}_2\right)\right) \tag{3.291}$$

Розглянемо довільну упорядковану пару $(\tau, \mathrm{y}) \in \mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_2\right)$. З умов 1 і 2 даної теореми випливає існування таких $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_1\right)$ і $t \in \mathbf{T}_1$, що $\mathbf{g}\left(\mathrm{x}\right) = \mathrm{y} - \mathbf{F}\left(\tau\right)$ і $\Phi\left(t, \mathrm{x}\right) = \tau$. Звідси, використовуючи (3.276), отримуємо:

$$\mathcal{U}\left(t, \mathrm{x}\right) = \left(\Phi\left(t, \mathrm{x}\right), \mathbf{F}\left(\Phi\left(t, \mathrm{x}\right)\right) + \mathbf{g}(\mathrm{x})\right) = \left(\tau, \mathbf{F}\left(\tau\right) + \left(\mathrm{y} - \mathbf{F}\left(\tau\right)\right)\right) = \left(\tau, \mathrm{y}\right).$$

Таким чином:

$$\forall\left(\tau, \mathrm{y}\right) \in \mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_2\right) \exists\left(t, \mathrm{x}\right) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_1\right) \ \left(\mathcal{U}\left(t, \mathrm{x}\right) = \left(\tau, \mathrm{y}\right)\right) \tag{3.292}$$

З (3.291) і (3.292) випливає, що відображення $\mathcal{U}$ є бієкцією між $\mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_1\right)$ і $\mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_2\right)$, тобто, за означенням 3.117:

$$\mathcal{U} \in \mathbb{P}\mathbf{k}\left(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2\right).$$

II.2) Доведемо, що оператор перетворення координат $\mathcal{U} \in \mathbb{P}\mathbf{k}\left(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2\right)$ є одностайним.

II.2.a) Для довільного $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_1\right)$, використовуючи (3.276) та умову 1 даної теореми, маємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{trj}_{\mathcal{U}}\left(\mathrm{x}\right) &= \left\{\mathcal{U}\left(t, \mathrm{x}\right) \mid t \in \mathbf{T}_1\right\} = \left\{\left(\Phi\left(t, \mathrm{x}\right), \mathbf{F}\left(\Phi\left(t, \mathrm{x}\right)\right) + \mathbf{g}\left(\mathrm{x}\right)\right) \mid t \in \mathbf{T}_1\right\} = \\ &= \left\{\left(\tau, \mathbf{F}\left(\tau\right) + \mathbf{g}\left(\mathrm{x}\right)\right) \mid \tau \in \mathbf{T}_2\right\}. \end{aligned} \tag{3.293}$$

Оскільки $\mathbf{F}$ є відображенням з $\mathbf{T}_2$ в $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ і, згідно з умовою 2 теореми, $\mathbf{g}(\mathrm{x}) \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$, то $\mathbf{trj}_{\mathcal{U}}(\mathrm{x})$ є абстрактною траєкторією з $\mathbf{T}_2$ в $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$. Отже, умова 1 означення 3.156 для відображення $\mathcal{U}$ виконується.

II.2.б) Перевіримо виконання умови 2 означення 3.156 для відображення $\mathcal{U}$. Для довільних $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$, використовуючи (3.293), отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{trj}_{\mathcal{U}}(\mathrm{x}_2) &= \{(\tau, \mathbf{F}(\tau) + \mathbf{g}(\mathrm{x}_2)) \mid \tau \in \mathbf{T}_2\} = \\ &= \{(\tau, \mathbf{F}(\tau) + \mathbf{g}(\mathrm{x}_1) + (\mathbf{g}(\mathrm{x}_2) - \mathbf{g}(\mathrm{x}_1))) \mid \tau \in \mathbf{T}_2\} = \\ &= \{(\tau,\ \mathrm{y} + (\mathbf{g}(\mathrm{x}_2) - \mathbf{g}(\mathrm{x}_1))) \mid (\tau, \mathrm{y}) \in \mathbf{trj}_{\mathcal{U}}(\mathrm{x}_1)\} = (\mathbf{trj}_{\mathcal{U}}(\mathrm{x}_1))^{\langle +(\mathbf{g}(\mathrm{x}_2) - \mathbf{g}(\mathrm{x}_1)); \mathfrak{Q}_2 \rangle}.\end{aligned}$$

Отже, згідно з означенням 3.154, враховуючи довільність вибору векторів $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ отримуємо: $\forall\, \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)\ \left(\mathbf{trj}_{\mathcal{U}}(\mathrm{x}_1) \parallel_{(\mathbb{T}_2; \mathfrak{Q}_2)} \mathbf{trj}_{\mathcal{U}}(\mathrm{x}_2)\right)$. Тому, умова 2 означення 3.156 для відображення $\mathcal{U}$ також виконується. Таким чином, обидві умови означення 3.156 для відображення $\mathcal{U} \in \mathbb{P}\mathbf{k}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$ виконуються. Тому, за означенням 3.156, $\mathcal{U}$ є одностайним оператором перетворення координат. $\square$

З теореми 3.158 випливає такий наслідок:

Наслідок 3.159. *Нехай, $\mathcal{F}$ — векторна універсальна кінематика. Система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є одностайною відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ тоді і тільки тоді, коли існують функції:*

$$\Phi : \mathbb{M}k(\mathfrak{m}) \longrightarrow \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}), \quad \mathbf{F} : \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) \longrightarrow \mathbf{Zk}(\mathfrak{l}), \quad \mathbf{g} : \mathbf{Zk}(\mathfrak{m}) \longrightarrow \mathbf{Zk}(\mathfrak{l}),$$

що задовольняють такі умови:

1. *Для довільного $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$ функція $\Phi_{(\mathrm{x})}(t) := \Phi(t, \mathrm{x})$, $t \in \mathbf{Tm}(\mathfrak{m})$ є бієкцією між $\mathbf{Tm}(\mathfrak{m})$ і $\mathbf{Tm}(\mathfrak{l})$.*
2. *Функція $\mathbf{g}$ є бієкцією між $\mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$ і $\mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$.*
3. *Для довільного $\mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{m})$ виконується рівність:*

$$[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\, \mathrm{w} = (\Phi(\mathrm{w}), \mathbf{F}(\Phi(\mathrm{w})) + \mathbf{g}(\mathsf{bs}(\mathrm{w}))).$$

Функція Φ в умові теореми 3.158 визначається однозначно для довільного фіксованого одностайного оператора перетворення координат. Справді, з формули (3.276) випливає, що $\Phi(t, \mathrm{x}) = \mathsf{tm}(\mathcal{U}(t, \mathrm{x}))$ $(\forall\, (t, \mathrm{x}) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1))$. Що торкається функцій $\mathbf{F}$ і $\mathbf{g}$, то вони визначаються неоднозначно. Справді нехай, трійка функцій Φ, $\mathbf{F}$ і $\mathbf{g}$ задовольняє умови теореми 3.158. Тоді, якщо взяти довільний вектор $\mathbf{y} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$, і покласти: $\mathbf{F}_1(\tau) := \mathbf{F}(\tau) + \mathbf{y}$, $\mathbf{g}_1(\mathrm{x}) := \mathbf{g}(\mathrm{x}) - \mathbf{y}$ $(\tau \in \mathbf{T}_2,\ \mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1))$, то, як легко перевірити, трійка функцій Φ, $\mathbf{F}_1$ і $\mathbf{g}_1$ також задовольнятиме умови теореми 3.158.

Твердження 3.160. *Нехай, $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ — векторні координатні простори; $\mathbb{T}_1 = (\mathbf{T}_1, \leq_1)$, $\mathbb{T}_2 = (\mathbf{T}_2, \leq_2)$ — лінійно упорядковані множини і відображення*

$\mathcal{U} : \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1) \longrightarrow \mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ *є одностайним оператором перетворення координат. Якщо функції* $\Phi : \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1) \longrightarrow \mathbf{T}_2$, $\mathbf{F}, \mathbf{F}_1 : \mathbf{T}_2 \longrightarrow \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ *і* $\mathbf{g}, \mathbf{g}_1 : \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1) \longrightarrow \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ *є такими, що:*

1. *функція* Φ *задовольняє умову 1 теореми 3.158;*
2. *функції* $\mathbf{g}$ *і* $\mathbf{g}_1$ *задовольняють умову 2 теореми 3.158;*
3. *для довільних* $(t, \mathrm{x}) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ *виконується рівність:*

$$\mathcal{U}(t, \mathrm{x}) = (\Phi(t, \mathrm{x}), \mathbf{F}(\Phi(t, \mathrm{x})) + \mathbf{g}(\mathrm{x})) = (\Phi(t, \mathrm{x}), \mathbf{F}_1(\Phi(t, \mathrm{x})) + \mathbf{g}_1(\mathrm{x})), \tag{3.294}$$

то існує вектор $\mathbf{y}_0 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ *такий, що для довільних* $\tau \in \mathbf{T}_2$ *і* $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ *мають місце рівності:*

$$\mathbf{F}_1(\tau) = \mathbf{F}(\tau) + \mathbf{y}_0; \qquad \mathbf{g}_1(\mathrm{x}) = \mathbf{g}(\mathrm{x}) - \mathbf{y}_0. \tag{3.295}$$

Доведення. З рівності (3.294) для довільних $(t, \mathrm{x}) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ отримуємо рівність, $\mathbf{F}(\Phi(t, \mathrm{x})) + \mathbf{g}(\mathrm{x}) = \mathbf{F}_1(\Phi(t, \mathrm{x})) + \mathbf{g}_1(\mathrm{x})$. Враховуючи,що функція Φ задовольняє умову 1 теореми 3.158, останню рівність можна переписати у вигляді, $\mathbf{F}(\tau) + \mathbf{g}(\mathrm{x}) = \mathbf{F}_1(\tau) + \mathbf{g}_1(\mathrm{x})$ $(\forall \tau \in \mathbf{T}_2\, \forall \mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1))$. Звідси:

$$\mathbf{F}_1(\tau) - \mathbf{F}(\tau) = \mathbf{g}(\mathrm{x}) - \mathbf{g}_1(\mathrm{x}) \quad (\forall \tau \in \mathbf{T}_2\, \forall \mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)).$$

Тому, вирази в правій і лівій частині останньої рівності не залежать ні від змінної τ ні від змінної x. Тобто, існує елемент $\mathrm{y}_0 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ такий, що для довільних $\tau \in \mathbf{T}_2$ і $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ мають місце рівності, $\mathbf{F}_1(\tau) - \mathbf{F}(\tau) = \mathrm{y}_0$, $\mathbf{g}(\mathrm{x}) - \mathbf{g}_1(\mathrm{x}) = \mathrm{y}_0$. З останніх рівностей випливають рівності (3.295). □

Основні результати підрозділу 3.10 опубліковані в [178–180], та представлені на конференціях [181–183]. Результати роботи [179] також викладені у препринті [184]. Деякі результати, пов'язані з продовженням досліджень в даному напрямку, можна знайти в [185].

Розділ 4

Простори узагальнених операторів з обмеженим проекційним слідом

4.1. Вступні зауваження

В багатьох роботах, присвячених дослідженню багаточастинкових квантових систем еволюція описується з допомогою групи унітарних операторів, що діє в просторі $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$ операторів *з обмеженим слідом* (ядерних операторів) над гільбертовим певним простором $\mathfrak{H}$ [6, 7, 186]. Проте цього простору виявляється недостатньо для розв'язання задач, що виникають при дослідженнях важливих моделей теорії надпровідності і надплинності, а саме моделей Пайєрлса-Фрьоліха та Хуанга-Янга-Латтінджера [187–189]. Це пов'язано з тим, що, як було показано в працях академіка Д.Я. Петрини [4, 189–195], постановка таких задач природна в класі операторів з трансляційно-інваріантним ядром, а такі оператори, взагалі кажучи, не належать до простору $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$ (див., напр. [4]). Саме тому в [186] ставиться питання про побудову груп операторів в більш загальних операторних просторах, ніж $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$.

Даний розділ дисертаційної роботи присвячений побудові і дослідженню таких (більш загальних) просторів операторів. У підрозділі 4.2 введено поняття абстрактного трансляційно інваріантного оператора в гільбертовому просторі (як оператора, що комутує із заданою групою унітарних операторів) та доведено, що звичайний слід від трансляційно інваріантних операторів в загальному випадку розбіжний. Далі вводиться аналог сліду для таких операторів — узагальнений проекційний слід. При цьому будується лінійний нормований простір лінійних неперервних операторів з обмеженим проекційним слідом і доводиться його неповнота. В зв'язку з цим ставиться задача опису поповнення зазначеного простору з теоретико-операторної точки зору. В підрозділі 4.3, використовуючи метод оснащених просторів, будується повний простір узагальнених операторів з обмеженим проекційним слідом та визначається поняття проекційного сліду для таких узагальнених операторів. У підрозділі 4.4 доводиться, що простір узагальнених операторів з обмеженим проекційним слідом можна вкласти в більш широкий банаховий простір псевдооператорів з обмеженим проекційним

слідом і визначити на цьому просторі деякі важливі групи унітарних операторів, пов'язані з описом еволюції багаточастинкових квантових систем.

4.2. Простір лінійних неперервних операторів з обмеженим проекційним слідом над гільбертовим простором та його неповнота

4.2.1. Трансляційно інваріантні оператори. Теорема про слід трансляційно інваріантного оператора. Нехай $(\mathfrak{H}, \|\cdot\|, (\cdot,\cdot))$ — комплексний, сепарабельний гільбертовий простір. Через $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ будемо позначати простір лінійних неперервних операторів над $\mathfrak{H}$, а через $\mathbb{O}$ і $\mathbb{I}$ — нульовий та одиничний оператори простору $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ відповідно. Через $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$ позначатимемо простір операторів *з обмеженим слідом* над гільбертовим простором $\mathfrak{H}$. Для оператора $A \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$ через $\mathbf{Tr}(A)$ будемо позначати *слід* оператора A.

Нехай B — самоспряжений (взагалі кажучи – необмежений) оператор в $\mathfrak{H}$. Через $\sigma(B)$ будемо позначати спектр оператора B, через $\sigma_p(B)$ — *точковий спектр* оператора B, а через $U(\tau)$ — C_0-групу унітарних операторів

$$U(\tau) = e^{i\tau B} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau\lambda} dE_B(\lambda) \qquad (\tau \in \mathbb{R}),$$

породжену (кососамоспряженим) оператором iB (тут $i^2 = -1$, а $E_B(\cdot)$ — спектральна міра, що є *розкладом одиниці* оператора B).

Будемо говорити, що оператор $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ є ***трансляційно інваріантним*** відносно B, якщо він комутує з розкладом одиниці оператора B, тобто якщо

$$AE_B(\Delta) = E_B(\Delta)A \qquad (\forall \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})), \tag{4.1}$$

де $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ — σ-алгебра *борелівських* підмножин числової прямої $\mathbb{R}$. Неважко довести, що співвідношення (4.1) рівносильне співвідношенню:

$$AU(\tau) = U(\tau)A \qquad (\forall \tau \in \mathbb{R}).$$

Основними прикладами трансляційно інваріантних операторів є лінійні неперервні оператори, в просторі $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R}^d)$ $(d \in \mathbb{N})$, які породжуються ***трансляційно інваріантним ядром***, тобто

$$(A_{\mathcal{K}}x)(\vec{t}) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(\vec{t}, \vec{s})x(\vec{s})d\vec{s} \quad \left(\vec{t} \in \mathbb{R}^d,\ x \in \mathfrak{H}\right),$$

де ядро $\mathcal{K} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ задовольняє умову $\mathcal{K}(\vec{t} + h, \vec{s} + h) = \mathcal{K}(\vec{t}, \vec{s})$ $\left(\vec{t}, \vec{s} \in \mathbb{R}^d,\ h \in \mathbb{R}\right)$ (тут $\vec{t} + h = (t_1 + h, \ldots, t_d + h)$ $(\vec{t} = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d)$). Такі опера-

тори є трансляційно інваріантними відносно генератора групи зсувів по "діагональному" напрямку:

$$\left(U^{(d)}(\tau)x\right)(\vec{s}) = x\left(\vec{s}+\tau\right) \qquad \left(\tau \in \mathbb{R},\ \vec{s} \in \mathbb{R}^d\right). \tag{4.2}$$

Зауважимо, що оператори з трансляційно інваріантним ядром в $L_2\left(\mathbb{R}^d\right)$ вивчались в монографії [4]. Загальновідомо, що ці оператори (в ненульовому випадку) не належать до простору $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$. Наступна теорема показує, що аналогічний результат має місце і в абстрактній ситуації.

Теорема 4.1. *Нехай невід'ємний оператор $A \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$ — трансляційно інваріантний відносно самоспряженого оператора B, такого, що $\sigma_p(B) = \emptyset$. Тоді $A = \mathbb{O}$.*

Для доведення теореми 4.1 знадобиться наступне допоміжне твердження.

(**A**) *Нехай μ — міра на $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, причому $\forall\, \tau \in \mathbb{R}\ \mu(\{\tau\}) = 0$. Тоді для довільної множини $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, $0 < \mu(\Delta) < \infty$, існують множини $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, такі, що*

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2, \quad \Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset, \quad \mu(\Delta_1), \mu(\Delta_2) > 0.$$

Справді. Покладемо:

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &:= \inf\left\{\tau \in \mathbb{R} : \mu((-\infty,\tau) \cap \Delta) > 0\right\}; \\ \tau_2 &:= \sup\left\{\tau \in \mathbb{R} : \mu((\tau,\infty) \cap \Delta) > 0\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

Оскільки $\mu(\Delta) > 0$, то означення чисел τ_1, τ_2 — коректне, тобто супремум та інфінум в (4.3) беруться по непорожній множині. Згідно з (4.3), $\tau_1 < \infty$, $\tau_2 > -\infty$. Доведемо, що $\tau_1 < \tau_2$. Справді, припущення $\tau_1 > \tau_2$ приводить до існування чисел $\tau_1', \tau_2' \in \mathbb{R}$, таких, що $\tau_1 > \tau_1' > \tau_2' > \tau_2$. З (4.3) випливає, що $\mu((-\infty,\tau_1') \cap \Delta) = \mu((\tau_2',\infty) \cap \Delta) = 0$. Звідси з нерівності $\tau_1' > \tau_2'$ отримуємо, що $\mu(\Delta) = 0$, що суперечить умові. Припустивши, що $\tau_1 = \tau_2 = \tau_0$, враховуючи нерівності $\tau_1 < \infty$, $\tau_2 > -\infty$, будемо мати $-\infty < \tau_0 < \infty$. Отже, з (4.3) випливає, що $\mu((-\infty,\tau_0) \cap \Delta) = 0$, $\mu((\tau_0,\infty) \cap \Delta) = 0$. Тобто $\mu(\{\tau_0\} \cap \Delta) > 0$, що суперечить умові $\forall\, \tau \in \mathbb{R}\ \mu(\{\tau\}) = 0$. Тепер для доведення твердження залишається взяти довільне число τ', таке, що $\tau_1 < \tau' < \tau_2$ і покласти $\Delta_1 := (-\infty,\tau') \cap \Delta$, $\Delta_2 := [\tau',\infty) \cap \Delta$. □

Доведення теореми 4.1. Покладемо $E(\cdot) = E_B(\cdot)$, де $E_B(\cdot)$ — розклад одиниці оператора B. Покладемо:

$$\mu_x(\Delta) := (E(\Delta)x, x) \qquad (\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}),\ x \in \mathfrak{H}).$$

Припустимо, що $A \neq 0$. Тоді існує вектор $f \in \mathfrak{H}$, такий, що $(Af, f) > 0$, тобто:

$$0 < (Af, f) = \left\|A^{1/2}f\right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\mu_{A^{1/2}f}(\lambda). \tag{4.4}$$

Оскільки оператор A — обмежений і трансляційно інваріантний відносно B, то для довільної множини $\Delta_0 \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, такої що $\mu_f(\Delta_0) = 0$ маємо:

$$\mu_{A^{1/2}f}(\Delta_0) = (E(\Delta_0)A^{1/2}f, A^{1/2}f) = \left\|E(\Delta_0)A^{1/2}f\right\|^2 =$$
$$= \left\|A^{1/2}E(\Delta_0)f\right\|^2 \leq \left\|A^{1/2}\right\|^2 \|E(\Delta_0)f\|^2 = \left\|A^{1/2}\right\|^2 \mu_f(\Delta_0) = 0.$$

Тобто міра $\mu_{A^{1/2}f}$ є абсолютно неперервною відносно міри μ_f, а отже існує похідна Радона-Никодима $F_f(\lambda) = \frac{d\mu_{A^{1/2}f}(\lambda)}{d\mu_f(\lambda)}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ і, згідно з (4.4),

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_f(\lambda) d\mu_f(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mu_{A^{1/2}f}(\lambda) > 0.$$

Тому існують такі число $\eta > 0$ і множина $\Delta' \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, що:

$$\mu_f(\Delta') > 0 \quad \text{і} \quad \forall \lambda \in \Delta' \quad F_f(\lambda) \geq \eta.$$

Оскільки $\sigma_p(B) = \emptyset$ то $\mu_f(\{\tau\}) = 0$ $(\forall \tau \in \mathbb{R})$. Тому, використовуючи послідовно твердження (A), ми можемо множину Δ' розбити на послідовність множин:

$$\Delta' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n, \quad \text{де} \quad \Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset \ (i, j \in \mathbb{N},\ i \neq j), \quad \mu_f(\Delta_i) > 0 \ (i \in \mathbb{N}).$$

Оскільки $\mu_f(\Delta_i) = \|E(\Delta_i)f\|^2 > 0$ і $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$, $i \neq j$, то вектори $g_i = \frac{E(\Delta_i)f}{\|E(\Delta_i)f\|} = \frac{E(\Delta_i)f}{\mu_f(\Delta_i)^{1/2}}$ $(i \in \mathbb{N})$ утворюють ортонормовану систему. Тому, використовуючи трансляційну інваріантність оператора A відносно B, отримуємо:

$$\mathbf{Tr}(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} (Ag_i, g_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(AE(\Delta_i)f,\ E(\Delta_i)f)}{\mu_f(\Delta_i)} =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left(A^{1/2}E(\Delta_i)f,\ A^{1/2}E(\Delta_i)f\right)}{\mu_f(\Delta_i)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left(E(\Delta_i)A^{1/2}f,\ E(\Delta_i)A^{1/2}f\right)}{\mu_f(\Delta_i)} =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left(E(\Delta_i)A^{1/2}f,\ A^{1/2}f\right)}{\mu_f(\Delta_i)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{A^{1/2}f}(\Delta_i)}{\mu_f(\Delta_i)} =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_f(\Delta_i)} \int\limits_{\Delta_i} \frac{d\mu_{A^{1/2}f}(\lambda)}{d\mu_f(\lambda)} d\mu_f(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_f(\Delta_i)} \int\limits_{\Delta_i} F_f(\lambda) d\mu_f(\lambda) \geq$$
$$\geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_f(\Delta_i)} \int\limits_{\Delta_i} \eta d\mu_f(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta = \infty.$$

Отже, ми бачимо, що з умови $A \neq 0$ випливає, що $\mathbf{Tr}(A) = \infty$. □

Навпаки, якщо точковий спектр самоспряженого оператора B не порожній, то завжди існує ненульовий трансляційно інваріантний відносно B оператор $A \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$. Справді, нехай $\lambda \in \sigma_p(B)$ — власне значення оператора B і $e_\lambda \in \mathfrak{H}$ — відповідний до λ власний вектор B, такий, що $\|e_\lambda\| = 1$. Нескладно перевірити, що тоді оператор $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, що діє за правилом, $Ax := (x, e_\lambda)\, e_\lambda$ $(x \in \mathfrak{H})$ є невід'ємним і трансляційно інваріантним відносно B. Якщо вибрати ортонормований

базис простору $\mathfrak{H}$ так, щоб першим ортом цього базису був вектор e_λ, то отримаємо $\mathbf{Tr}(|A|) = \mathbf{Tr}(A) = (Ae_\lambda, e_\lambda) = 1 < \infty$.

Насправді, з теореми 4.1 випливає дещо більш загальне твердження:

Наслідок 4.2. *Нехай невід'ємний оператор $A \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$ — трансляційно інваріантний відносно самоспряженого оператора B. Тоді $AE(\mathbb{R} \setminus \sigma_p(B)) = \mathbb{O}$, де $E(\cdot)$ — розклад одиниці B.*

Доведення. Не обмежуючи загальності можна вважати, що $E(\mathbb{R} \setminus \sigma_p(B)) \neq \mathbb{O}$, бо в протилежному випадку наслідок є тривіальним твердженням. Покладемо:

$$\mathfrak{H}_c := E(\mathbb{R} \setminus \sigma_p(B))\,\mathfrak{H}, \quad A_c := A \restriction \mathfrak{H}_c,$$

де $A \restriction \mathfrak{H}_c$ — звуження оператора A на $\mathfrak{H}_c$. Тоді $\mathfrak{H}_c$ буде гільбертовим простором відносно скалярного добутку, індукованого з $\mathfrak{H}$. Оскільки A — трансляційно інваріантний відносно B, то $AE(\mathbb{R} \setminus \sigma_p(B)) = E(\mathbb{R} \setminus \sigma_p(B))\,A$. Отже оператор A_c відображає простір $\mathfrak{H}_c$ в $\mathfrak{H}_c$, причому з неперервності і невід'ємності оператора A в $\mathfrak{H}$ випливає неперервність і невід'ємність A_c в $\mathfrak{H}_c$. В просторі $\mathfrak{H}_c$ розглянемо спектральну міру:

$$E_c(\Delta)x := E((\mathbb{R} \setminus \sigma_p(B)) \cap \Delta)\,x, \qquad x \in \mathfrak{H}_c,\ \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}). \tag{4.5}$$

Ця спектральна міра є розкладом одиниці деякого самоспряженого над простором $\mathfrak{H}_c$ оператора $B_c = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_c(\lambda)$. Точковий спектр оператора B_c порожній, оскільки з умови $E_c(\{\lambda\}) \neq \mathbb{O}$ випливало б, що $E(\{\lambda\}) \neq \mathbb{O}$ і $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma_p(B)$, тобто $\lambda \in \sigma_p(B)$ і $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma_p(B)$, що неможливо. З (4.5) і трансляційної інваріантності оператора A відносно B випливає трансляційна інваріантність A_c відносно B_c. Оскільки довільний ортонормований базис в просторі $\mathfrak{H}_c$ є ортонормованою системою в $\mathfrak{H}$, то $A_c \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{H}_c)$. Отже, за теоремою 4.1, $A_c = \mathbb{O}$ в просторі $\mathfrak{H}_c$. Тому $AE(\mathbb{R} \setminus \sigma_p(B)) = \mathbb{O}$ в $\mathfrak{H}$. □

4.2.2. Слід за різницевою змінною. Простір операторів з обмеженим проекційним слідом.

Враховуючи той факт, що оператори з трансляційно інваріантним ядром, взагалі кажучи, мають необмежений слід, в роботі [4] для таких операторів вводиться поняття сліду за "різницевою" змінною:

$$\widetilde{\mathbf{Tr}}(A_{\mathcal{K}}) = \widetilde{\mathbf{Tr}}_{i,t_i}(A_{\mathcal{K}}) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \widetilde{\mathcal{K}}(t_1,\dots,t_d)dt_1\dots dt_{i-1}dt_{i+1}\dots dt_d, & d>1 \\ \mathcal{K}(0,0), & d=1 \end{cases} \tag{4.6}$$

$(1 \leq i \leq d)$, де $\widetilde{\mathcal{K}}(\vec{t}) = \mathcal{K}(\vec{t}, \vec{t})$. Легко перевірити, що у випадку трансляційно інваріантного ядра $\mathcal{K}$ величина $\widetilde{\mathbf{Tr}}_{i,t_i}(A_{\mathcal{K}})$ **не залежить** від індексу i та змінної t_i.

Оскільки поняття (звичайного) сліду застосовується до операторів в абстрактному гільбертовому просторі, виникає задача визначення в абстрактному гільберто-

вому просторі і аналогу поняття сліду за різницевою змінною. Наступний приклад ілюструє шлях розв'язання поставленої проблеми.

Приклад 4.3. В просторі $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R})$ розглянемо спектральну міру $(P(\Delta)x)(t) := \chi_\Delta(t)\,x(t)$, $x \in \mathfrak{H}$, $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Легко перевірити, що тоді для оператора $A_\mathcal{K} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ з трансляційно інваріантним ядром $\mathcal{K}$ має місце рівність:

$$\widetilde{\mathbf{Tr}}\,(A_\mathcal{K}) = \frac{\mathbf{Tr}\,(P(\Delta)A_\mathcal{K}P(\Delta))}{\mathbf{m}(\Delta)} \quad (\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}),\ 0 < \mathbf{m}(\Delta) < \infty)\,,$$

де $\mathbf{m}$ — міра Лебега на $\mathbb{R}$.

Зауважимо, що подібна спектральна міра існує і в просторі $L_2\left(\mathbb{R}^d\right)$ для довільного $d \in \mathbb{N}$, а саме, на роль такої міри може претендувати довільна міра виду:

$$\left(P_i^{(d)}(\Delta)x\right)(\vec{t}) := \chi_\Delta(t_i)\,x(\vec{t}) \qquad \left(x \in L_2\left(R^d\right),\ \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}),\ i \in \overline{1,d}\right). \tag{4.7}$$

Далі будуються простори неперервних лінійних операторів з обмеженим проекційним слідом. Мотивацією наступних означень служить приклад 4.3.

Означення 4.4. Нехай $(R, \mathcal{R})$ — вимірний простір (тобто $\mathcal{R}$ — σ-алгебра підмножин R), $P(\cdot) : \mathcal{R} \to \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ — спектральна міра (розклад одиниці) на σ-алгебрі $\mathcal{R}$ (в сенсі [196, стор. 394]). І нехай μ — деяка скалярна σ-скінченна і не тотожно рівна нулю міра на $\mathcal{R}$. Тоді четвірку $(R, \mathcal{R}, P, \mu)$ будемо називати **проекційним простором з мірою** над простором $\mathfrak{H}$ (або, скорочено, — **ПМ-простором** над $\mathfrak{H}$)

Нехай $(R, \mathcal{R}, P, \mu)$ — ПМ-простір. Розглянемо наступне підкільце σ-алгебри $\mathcal{R}$:

$\mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}} = \{\Delta \in \mathcal{R} \,|\, \mu(\Delta) < \infty\}\,.$

Нехай $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$. Покладемо:

$$\begin{aligned} &\nu_{P,A}(\Delta) := \mathbf{Tr}(|P(\Delta)AP(\Delta)|), \quad \Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}\,; \\ &\|A\|_{P,\mu} := \sup\left\{ \frac{\nu_{P(\cdot),A}(\Delta)}{\mu(\Delta)} \,\middle|\, \begin{array}{l} \Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}, \\ \mu(\Delta) + \nu_{P,A}(\Delta) > 0 \end{array} \right\}, \quad A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}), \end{aligned} \tag{4.8}$$

де у випадку у випадку $P(\Delta)AP(\Delta) \notin \mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$ слід покласти $\mathbf{Tr}(|P(\Delta)AP(\Delta)|) := \infty$, а у випадку $\mu(\Delta) = 0$ слід покласти $\frac{\nu_{P(\cdot),A}(\Delta)}{\mu(\Delta)} := \infty$. Оскільки міра μ не є тотожно нульовою і є σ–скінченою, то визначення величини $\|\cdot\|_{P,\mu}$ — коректне (тобто супремум в (4.8) береться по непорожній множині). Оскільки величина $\|A\|_{P,\mu}$ скінчена, взагалі кажучи, не при всіх $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, розглянемо клас операторів:

$$\mathfrak{Tb}_{P(\cdot),\mu}(\mathfrak{H}) := \left\{A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}) \,:\, \|A\|_{P,\mu} < \infty\right\}. \tag{4.9}$$

Зауваження 4.5. Як випливає з результатів прикладу 4.3, у випадку, коли $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R})$, і спектральна міра $P(\cdot)$ така ж сама, як і в прикладі 4.3, для невід'ємного оператора $A_\mathcal{K} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ з трансляційно інваріантним ядром $\mathcal{K}$ має місце

рівність $\|A_{\mathcal{K}}\|_{P,\mathbf{m}} = \widetilde{\mathbf{Tr}}\,(A_{\mathcal{K}})$. Аналогічно в просторі $\mathfrak{H} = L_2\left(R^d\right)$, $d \in \mathbb{N}$, для невід'ємного оператора $A_{\mathcal{K}} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ з трансляційно інваріантним ядром $\mathcal{K}$ і спектральної міри (4.7), маємо, $\|A_{\mathcal{K}}\|_{P_i^{(d)},\mathbf{m}} = \widetilde{\mathbf{Tr}}\,(A_{\mathcal{K}})$ $\left(i \in \overline{1,d}\right)$ (при умові, що права частина рівності має сенс, тобто скінченна).

Теорема 4.6. $\left(\mathfrak{Tb}_{P(\cdot),\mu}(\mathfrak{H}), \|\cdot\|_{P,\mu}\right)$ *є лінійним нормованим простором.*

Доведення. а) Оскільки $\nu_{P,\mathbb{O}}\,(\Delta) = \mathbf{Tr}(|P(\Delta)\mathbb{O}P(\Delta)|) \equiv 0$, $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, то $\mathbb{O} \in \mathfrak{Tb}_{P(\cdot),\mu}(\mathfrak{H})$, причому $\|\mathbb{O}\|_{P,\mu} = 0$.

Нехай $A \in \mathfrak{Tb}_{P(\cdot),\mu}(\mathfrak{H})$ і $\lambda \in \mathbb{C}$. Тоді, використовуючи властивості сліду від модуля оператора маємо:

$$\nu_{P,\lambda A}\,(\Delta) = \mathbf{Tr}(|P(\Delta)\lambda AP(\Delta)|) = |\lambda|\mathbf{Tr}(|P(\Delta)AP(\Delta)|) = \\ = |\lambda|\nu_{P,A}\,(\Delta) \qquad (\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}})\,.$$

Тому при $\lambda \neq 0$:

$$\|\lambda A\|_{P,\mu} = \sup\left\{\frac{\nu_{P,\lambda A}\,(\Delta)}{\mu(\Delta)}\middle|\begin{array}{l}\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}},\\ \mu(\Delta) + \nu_{P,\lambda A}\,(\Delta) > 0\end{array}\right\} = \\ = \sup\left\{\frac{|\lambda|\nu_{P,A}\,(\Delta)}{\mu(\Delta)}\middle|\begin{array}{l}\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}},\\ \mu(\Delta) + \nu_{P,A}\,(\Delta) > 0\end{array}\right\} = |\lambda|\,\|A\|_{P,\mu}\,,$$

а при $\lambda = 0$, враховуючи, що $\|\mathbb{O}\|_{P,\mu} = 0$, маємо, $\|\lambda A\|_{P,\mu} = \|\mathbb{O}\|_{P,\mu} = 0 = |\lambda|\,\|A\|_{P,\mu}$.

Отже, для довільних $A \in \mathfrak{Tb}_{P(\cdot),\mu}(\mathfrak{H})$ і $\lambda \in \mathbb{C}$, оператор λA належить до $\mathfrak{Tb}_{P(\cdot),\mu}(\mathfrak{H})$, причому $\|\lambda A\|_{P,\mu} = |\lambda|\,\|A\|_{P,\mu}$.

б) Нехай $A = \mathbb{O}$. Тоді, як було доведено на початку пункту а), $\|A\|_{P,\mu} = \|\mathbb{O}\|_{P,\mu} = 0$. Навпаки, нехай $\|A\|_{P,\mu} = 0$. Тоді для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ має місце рівність $\nu_{P,A}\,(\Delta) = 0$. Справді, припустивши існування множини $\Delta_0 \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, такої, що $\nu_{P,A}\,(\Delta_0) > 0$, враховуючи означення $\|\cdot\|_{P,\mu}$, отримаємо $\|A\|_{P,\mu} \geq \frac{\nu_{P,A}(\Delta_0)}{\mu(\Delta_0)} > 0$ що суперечить рівності $\|A\|_{P,\mu} = 0$. Оскільки міра μ — σ-скінченна, то існує послідовність множин $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, така, що $\Delta_n \subseteq \Delta_{n+1}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ і $\bigcup_{n=1}^{\infty}\Delta_n = R$. Оскільки для довільного $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{Tr}(|P(\Delta_n)AP(\Delta_n)|) = \nu_{P,A}\,(\Delta_n) = 0$, то, враховуючи властивості сліду, маємо $P(\Delta_n)AP(\Delta_n) = \mathbb{O}$, $n \in \mathbb{N}$. Тому:

$$(AP(\Delta_n)f, P(\Delta_n)g) = (P(\Delta_n)AP(\Delta_n)f, g) = 0,\ f, g \in \mathfrak{H}. \tag{4.10}$$

Враховуючи, що $P(\cdot)$ — розклад одиниці на $(R, \mathcal{R})$, $\Delta_n \subseteq \Delta_{n+1}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ і $\bigcup_{n=1}^{\infty}\Delta_n = R$, маємо $\lim\limits_{n\to\infty} P(\Delta_n)f = f$, $f \in \mathfrak{H}$. Звідси, враховуючи (4.10) і неперервність оператора A, отримуємо $(Af, g) = 0, \quad f, g \in \mathfrak{H}$, тобто $A = \mathbb{O}$.

Таким чином, ми довели, що $\forall A \in \mathfrak{Tb}_{P(\cdot),\mu}(\mathfrak{H})$ $\|A\|_{P,\mu} = 0 \Leftrightarrow A = \mathbb{O}$.

в) Нехай $A, B \in \mathfrak{Tb}_{P(\cdot),\mu}(\mathfrak{H})$. Розглянемо довільну множину $\widetilde{\Delta} \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, таку, що

$$\mu(\widetilde{\Delta}) + \nu_{P,A+B}\left(\widetilde{\Delta}\right) > 0. \tag{4.11}$$

Доведемо, що $\mu(\widetilde{\Delta}) > 0$. Припустимо супротивне, $\mu(\widetilde{\Delta}) = 0$. Тоді, враховуючи умову (4.11), маємо $\nu_{P,A+B}\left(\widetilde{\Delta}\right) > 0$. Згідно з нерівністю трикутника для слідів від модуля:

$$\nu_{P,A+B}\left(\widetilde{\Delta}\right) \leq \mathbf{Tr}(|P(\widetilde{\Delta})AP(\widetilde{\Delta})|) + \mathbf{Tr}(|P(\widetilde{\Delta})BP(\widetilde{\Delta})|) = \nu_{P,A}\left(\widetilde{\Delta}\right) + \nu_{P,B}\left(\widetilde{\Delta}\right).$$

Тому, оскільки $\nu_{P,A+B}\left(\widetilde{\Delta}\right) > 0$, хоч одна з величин $\nu_{P,A}\left(\widetilde{\Delta}\right)$, $\nu_{P,B}\left(\widetilde{\Delta}\right)$ мусить бути додатною. Нехай, наприклад, $\nu_{P,A}\left(\widetilde{\Delta}\right) > 0$. Тоді, враховуючи, що $\mu(\widetilde{\Delta}) = 0$, маємо, $\|A\|_{P,\mu} \geq \frac{\nu_{P,A}\left(\widetilde{\Delta}\right)}{\mu(\widetilde{\Delta})} = \infty$, що суперечить умові $A \in \mathfrak{Tb}_{P(\cdot),\mu}(\mathfrak{H})$. У випадку $\nu_{P,B}\left(\widetilde{\Delta}\right) > 0$ аналогічно приходимо до суперечності з умовою $B \in \mathfrak{Tb}_{P(\cdot),\mu}(\mathfrak{H})$. Отже, припущення невірне. Тому $\mu(\widetilde{\Delta}) > 0$. Звідси, використовуючи нерівність трикутника для слідів, отримуємо:

$$\begin{aligned}
&\frac{\nu_{P,A+B}\left(\widetilde{\Delta}\right)}{\mu(\widetilde{\Delta})} \leq \frac{\nu_{P,A}\left(\widetilde{\Delta}\right)}{\mu(\widetilde{\Delta})} + \frac{\nu_{P,B}\left(\widetilde{\Delta}\right)}{\mu(\widetilde{\Delta})} \leq \\
&\quad \leq \sup\left\{ \frac{\nu_{P,A}\left(\Delta\right)}{\mu(\Delta)} \middle| \begin{array}{l} \Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}, \\ \mu(\Delta) + \nu_{P,A}\left(\Delta\right) > 0 \end{array} \right\} + \\
&\qquad + \sup\left\{ \frac{\nu_{P,B}\left(\Delta\right)}{\mu(\Delta)} \middle| \begin{array}{l} \Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}, \\ \mu(\Delta) + \nu_{P,B}\left(\Delta\right) > 0 \end{array} \right\} = \|A\|_{P,\mu} + \|B\|_{P,\mu}.
\end{aligned}$$

Причому остання нерівність має місце для довільної множини $\widetilde{\Delta} \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, що задовольняє умову (4.11). Тому $A + B \in \mathfrak{Tb}_{P(\cdot),\mu}(\mathfrak{H})$, причому $\|A + B\|_{P,\mu} \leq \|A\|_{P,\mu} + \|B\|_{P,\mu}$. □

Наступний приклад покаже, що простір $\mathfrak{Tb}_{P(\cdot),\mu}(\mathfrak{H})$, взагалі кажучи, не є банаховим (тобто повним).

Приклад 4.7. Нехай $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R})$. Покладемо:

$$Q_n(t) := \left(1 - \frac{|t|}{n}\right)\chi_{[-n,n]}(t) = Q_1\left(\frac{t}{n}\right) \quad (n \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R}).$$

Очевидно, що $Q_n \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$. Тому для довільної функції $x \in L_2(\mathbb{R})$ маємо:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |Q_n(t-s)x(s)|\, ds &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |Q_n(t-s)|^2\, ds\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |x(s)|^2\, ds\right)^{1/2} = \\
&= \|Q_n\|_{L_2(\mathbb{R})} \|x\|_{L_2(\mathbb{R})} < \infty \qquad (t \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Отже, функції Q_n, $n \in \mathbb{N}$ породжують над $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R})$ оператори $\left\{A_{[Q_n]},\ n \in \mathbb{N}\right\}$:

$$\left(A_{[Q_n]}x\right)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} Q_n(t-s)x(s)ds \quad (x \in L_2(\mathbb{R}),\ t \in \mathbb{R}).$$

Доведемо, що ці оператори відображають простір $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R})$ в себе (тобто, що $A_{[Q_n]}x \in \mathfrak{H}$, $x \in \mathfrak{H}$) і що $A_{[Q_n]} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, $n \in \mathbb{N}$. Нехай, $x \in \mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R})$. Тоді, використовуючи інтегральну нерівність Мінковського маємо:

$$\left\|A_{[Q_n]}x\right\|_{L_2(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} Q_n(s)x(t-s)ds\right)^2 dt\right)^{1/2} \leq$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} \left(Q_n(s)x(t-s)\right)^2 dt\right)^{1/2} ds = \|Q_n\|_{L_1(\mathbb{R})}\|x\|_{L_2(\mathbb{R})} < \infty. \quad (4.12)$$

З (4.12) випливає, що оператори $A_{[Q_n]}$ відображають простір $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R})$ в себе, причому $A_{[Q_n]} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ і $\left\|A_{[Q_n]}\right\| \leq \|Q_n\|_{L_1(\mathbb{R})}$ $(n \in \mathbb{N})$. Доведемо, що $A_{[Q_n]} \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. При $n = 1$ для перетворення Фур'є $\widehat{Q}_1$ маємо:

$$\sqrt{2\pi}\,\widehat{Q}_1(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-its}Q_1(s)ds = 2\int_0^1 (1-s)\cos tsds = \frac{2(1-\cos t)}{t^2} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Отже, $\widehat{Q}_1(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$, причому $\widehat{Q}_1 \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$. Звідси, враховуючи рівність $Q_n(t) = Q_1\left(\frac{t}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, маємо:

$$\widehat{Q}_n \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R}),\ \widehat{Q}_n(t) \geq 0 \quad (t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}).$$

Оскільки $\widehat{Q}_n \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, то $Q_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \widehat{Q}_n(s)e^{its}ds$, причому інтеграл збігається в сенсі Лебега (абсолютно). Тому, для довільного $t \in \mathbb{R}$ і функції $x \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ маємо

$$\left(A_{[Q_n]}x, x\right) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} Q_n(t-s)x(s)\overline{x(t)}dsdt =$$
$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \widehat{Q}_n(\xi)e^{i(t-s)\xi}\,d\xi x(s)\overline{x(t)}dsdt.$$

Оскільки функції $\widehat{Q}_n$ і x належать до простору $L_1(\mathbb{R})$, то потрійний інтеграл в правій частині останньої рівності збігається абсолютно, отже, зміна порядку інтегрування є коректною. Тому, враховуючи, що $\widehat{Q}_n(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$, маємо:

$$\left(A_{[Q_n]}x, x\right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{Q}_n(\xi)}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\xi}x(s)\overline{x(t)}dsdtd\xi = \sqrt{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{Q}_n(\xi)\left|\widehat{x}(\xi)\right|^2 d\xi \geq 0.$$

Невід'ємність операторів $A_{[Q_n]}$, $n \in \mathbb{N}$ доведена.

Зауважимо, що $A_{[Q_n]} = A_{\mathcal{K}_n}$, $n \in \mathbb{N}$, де ядро $\mathcal{K}_n(t,s) = Q_n(t-s)$ $(t, s \in \mathbb{R})$ — трансляційно інваріантне. Отже, оператори $\left\{A_{[Q_n]} : n \in \mathbb{N}\right\}$ є трансляційно інваріан-

тні відносно групи зсувів в просторі $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R})$.

Нехай спектральна міра $P(\cdot)$ така ж сама, як і в прикладі 4.3. Тоді, згідно із зауваженням 4.5, оператори $\left\{A_{[Q_n]} : n \in \mathbb{N}\right\}$ належать до простору $\mathfrak{Tb}_{P(\cdot),\mathbf{m}}(\mathfrak{H})$, причому

$$\left\|A_{[Q_n]}\right\|_{P,\mathbf{m}} = \widetilde{\mathbf{Tr}}\left(A_{[Q_n]}\right) = Q_n(0-0) = 1 \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{4.13}$$

Покладемо:

$$Q(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} Q_{n^4}(t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Оскільки $0 \le Q_n(t) \le 1$, $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, то ряд в правій частині останньої рівності завжди збігається. Оцінимо функцію $Q(t)$ знизу. Оскільки для довільного $t \ge 0$ існує число $n_t \in \mathbb{N}$ таке, що $\frac{(n_t-1)^4}{2} \le t \le \frac{n_t^4}{2}$, то при $t \ge 0$ маємо:

$$\begin{aligned} Q(t) &\ge \frac{1}{n_t^2} Q_{n_t^4}(t) = \frac{1}{n_t^2}\left(1 - \frac{|t|}{n_t^4}\right)\chi_{[-n_t^4, n_t^4]}(t) = \frac{1}{n_t^2}\left(1 - \frac{|t|}{n_t^4}\right) \ge \\ &\ge \frac{1}{\left(\sqrt[4]{2t}+1\right)^2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) \ge \frac{1}{2}\frac{1}{\left(2^{3/4}\sqrt[4]{2t+1}\right)^2} \ge \frac{1}{8\sqrt{t+1}}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Покладемо:

$$A_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} A_{[Q_{k^4}]}.$$

Тоді маємо, згідно з (4.13), $A_n \in \mathfrak{Tb}_{P(\cdot),\mathbf{m}}(\mathfrak{H})$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, причому ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} A_{\left[Q_{k^4}\right]}$ збігається абсолютно за нормою простору $\mathfrak{Tb}_{P(\cdot),\mathbf{m}}(\mathfrak{H})$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\|\frac{1}{k^2} A_{[Q_{k^4}]}\right\|_{P,\mathbf{m}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\left\|A_{[Q_{k^4}]}\right\|_{P,\mathbf{m}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Отже, послідовність операторів $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною в просторі $\mathfrak{Tb}_{P(\cdot),\mathbf{m}}(\mathfrak{H})$.

Доведемо, що не існує оператора $A \in \mathfrak{Tb}_{P(\cdot),\mathbf{m}}(\mathfrak{H})$, такого, що $\|A_n - A\|_{P,\mathbf{m}} \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Припустимо супротивне, що такий оператор A існує. Зі збіжності $\|A_n - A\|_{P,\mathbf{m}} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ і означення норми $\|\cdot\|_{P,\mathbf{m}}$ випливає, що для довільної множини $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})_{\mathbf{m}-fin}$ $\|P(\Delta)(A_n - A)P(\Delta)\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ (де $\mathfrak{B}(\mathbb{R})_{\mathbf{m}-fin} = \{\Upsilon \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) : \mathbf{m}(\Upsilon) < \infty\}$). Тому $\forall\, x, y \in \mathfrak{H}$ маємо:

$$\begin{aligned} (A_n P(\Delta)x, P(\Delta)y) &= (P(\Delta)A_n P(\Delta)x, y) \underset{n\to\infty}{\to} (P(\Delta)AP(\Delta)x, y) = \\ &= (AP(\Delta)x, P(\Delta)y) \quad (\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})_{\mathbf{m}-fin}). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Використовуючи означення операторів $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$, легко перевірити, що $A_n = A_{\left[\widetilde{Q}_n\right]}$, $n \in \mathbb{N}$, де $\widetilde{Q}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} Q_{k^4}$. Отже, враховуючи рівномірну обмеженість послідовності функцій $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$, використовуючи (4.15), згідно з теоремою Лебега

про мажоровану збіжність, отримуємо:

$$
\begin{aligned}
&(AP(\Delta)x, P(\Delta)y) = \lim_{n\to\infty} (A_n P(\Delta)x, P(\Delta)y) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \widetilde{Q}_n(t-s)\chi_\Delta(t)x(t)\chi_\Delta(s)\overline{y(s)}dtds = \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\Delta} \int_{\Delta} \widetilde{Q}_n(t-s)x(t)\overline{y(s)}dtds = \\
&\qquad\qquad = \int_{\Delta} \int_{\Delta} Q(t-s)x(t)\overline{y(s)}dtds \quad (x, y \in \mathfrak{H},\ \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})_{\mathbf{m}-fin}). \quad (4.16)
\end{aligned}
$$

Покладемо, $x_k(t) := \frac{\chi_{[0,k]}(t)}{(t+1)^{3/4}}$, $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Легко бачити, що

$$
\|x_k\|^2 = \|x_k\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \le \int_0^\infty \frac{dt}{(t+1)^{3/2}} < \infty \quad (k \in \mathbb{N}).
$$

Отже, з однієї сторони, оскільки $A \in \mathfrak{Tb}_{P(\cdot),\mathbf{m}}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, послідовність $\{(Ax_k, x_k)\}_{k=1}^\infty$ є обмеженою. Проте з іншої сторони, використовуючи (4.16) та (4.14), отримуємо:

$$
\begin{aligned}
(Ax_k, x_k) &= \int_0^k \int_0^k \frac{Q(t-s)}{(t+1)^{3/4}(s+1)^{3/4}} dsdt \ge \int_0^k \int_0^t \frac{Q(t-s)}{(t+1)^{3/4}(s+1)^{3/4}} dsdt \ge \\
&\ge \int_0^k \int_0^t \frac{dsdt}{8\sqrt{t-s+1}\,(t+1)^{3/4}(s+1)^{3/4}} \ge \\
&\ge \int_0^k \int_0^t \frac{dsdt}{8\sqrt{t+1}\,(t+1)^{3/4}(s+1)^{3/4}} = \int_0^k \int_0^t \frac{dsdt}{8(t+1)^{5/4}(s+1)^{3/4}} = \\
&= \frac{1}{2}\ln(k+1) - 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{k+1}}\right) \underset{k\to\infty}{\to} \infty.
\end{aligned}
$$

Отже, припущення про існування оператора $A \in \mathfrak{Tb}_{P(\cdot),\mathbf{m}}(\mathfrak{H})$, такого, що $\|A_n - A\|_{P,\mathbf{m}} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ приводить до суперечності. Тому простір $\mathfrak{Tb}_{P(\cdot),\mathbf{m}}(\mathfrak{H})$ не є банаховим.

4.2.3. Висновки і зауваження Простір $\mathfrak{Tb}_{P(\cdot),\mu}(\mathfrak{H})$ можна вважати певним аналогом простору $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$ операторів з обмеженим (звичайним) слідом, в рамках якого можна дати означення сліду за різницевою змінною для трансляційно інваріантних операторів. Але, на жаль, як показує приклад 4.7, простір $\mathfrak{Tb}_{P(\cdot),\mu}(\mathfrak{H})$ (на відміну від $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$) в загальній ситуації не є банаховим. Безумовно, в тих випадках, коли потрібно працювати з банаховим простором, можна скористатись поповненням простору $\mathfrak{Tb}_{P(\cdot),\mu}(\mathfrak{H})$. Проте в такому випадку виникає задача опису зазначеного поповнення з теоретико-операторної точки зору.

Причиною неповноти простору $\mathfrak{Tb}_{P(\cdot),\mu}(\mathfrak{H})$ є застосування конструкції (4.8)-(4.9) над занадто вузьким простором лінійних неперервних операторів $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$. В наступному

розділі буде показано, що, використовуючи метод оснащених просторів, розвинутий в працях академіка Ю.М. Березанського та його учнів (див, наприклад, [196–201]), за гільбертовим простором $\mathfrak{H}$ та ПМ-простором $(R, \mathcal{R}, P, \mu)$ можна побудувати певне оснащення $\mathfrak{H}^+_{P,\mu} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ простору $\mathfrak{H}$ (де $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$, $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ — певні лінійні простори зі збіжністю в сенсі [202, стор. 516], [203, 204]) і вкласти простір $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ в більш широкий простір $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ лінійних неперервних операторів з $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ в $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ так, щоб конструкція (4.8)-(4.9) над $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ допускала коректне визначення і приводила до банахового простору.

Результати, викладені в підрозділі 4.2 було опубліковано в роботі [205], а також представлено на конференціях [206, 207].

4.3. Простір узагальнених операторів з обмеженим проекційним слідом

4.3.1. Мотивація В попередньому розділі було побудовано простір $\mathfrak{Tb}_{P(\cdot),\mu}(\mathfrak{H})$ лінійних неперервних операторів з обмеженим проекційним слідом над гільбертовим простором $\mathfrak{H}$, причому у випадку, коли $\mathfrak{H} = L_2\left(\mathbb{R}^d\right)$ $(d \in \mathbb{N})$ і спектральна міра $P(\cdot) = P_i^{(d)}$ задається формулою (4.7), зазначений простір можна назвати простором лінійних неперервних операторів з обмеженим слідом за різницевою змінною. Також в попередньому розділі показано, що конструкція (4.8)-(4.9), будучи застосована над простором лінійних неперервних операторів $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$, приводить, взагалі кажучи, до неповних лінійних нормованих просторів виду $\mathfrak{Tb}_{P(\cdot),\mu}(\mathfrak{H})$. І наступний приклад ілюструє (на інтуїтивному рівні) той факт, що, для повного опису класу об'єктів, які можна назвати "операторами з обмеженим різницевим слідом", потрібно вийти не лише за межі класу лінійних неперервних операторів, але й за межі класу операторів над простором $\mathfrak{H}$.

Приклад 4.8. Нехай $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R})$. Покладемо, $\mathcal{K}(t,s) := 1$, $t, s \in \mathbb{R}$. Ядро $\mathcal{K}$ не породжує над простором $\mathfrak{H}$ ніякого нетривіального оператора $A_{\mathcal{K}}$ (навіть необмеженого) в стандартному розумінні цього слова. Справді, позначивши через $\mathfrak{H}_{fin}$ множину функцій з простору $L_2(\mathbb{R})$, які дорівнюють нулю всюди за винятком деякої множини скінченої міри Лебега, навіть для функції $x \in \mathfrak{H}_{fin}$ будемо мати, $(A_{\mathcal{K}}x)(t) = \int_{\mathbb{R}} x(s)ds \equiv \mathsf{const}$, $t \in \mathbb{R}$. Звідси видно, що $A_{\mathcal{K}}x \in L_2(\mathbb{R})$ лише тоді, коли $\int_{\mathbb{R}} x(s)ds = 0$. Отже, якщо розглядати $A_{\mathcal{K}}$ над простором $L_2(\mathbb{R})$, то ми отримаємо оператор, який визначений на деякій ніде не щільній лінійній підмножині простору $\mathfrak{H}$ і тотожно дорівнює нулю на цій множині.

Ядро $\mathcal{K}$ є додатно визначеним (тобто $\int_{\mathbb{R}} \mathcal{K}(t,s)x(t)\overline{x(s)}dtds \geq 0$, $x \in \mathfrak{H}_{fin}$) і трансляційно інваріантним. Тому застосувавши формально означення (4.6) сліду за різни-

цевою змінною для оператора $A_{\mathcal{K}}$ отримаємо: $\widetilde{\mathbf{Tr}}\,(A_{\mathcal{K}}) = \mathcal{K}(0,0) = 1 < \infty$. Отже, з інтуїтивної точки зору, $A_{\mathcal{K}}$ має бути "невід'ємним оператором з обмеженим слідом за різницевою змінною".

Хоча оператор $A_{\mathcal{K}}$ не може бути визначений як оператор (навіть необмежений) над основним простором $\mathfrak{H} = L_2\,(\mathbb{R})$, йому можна надати сенс, як оператору, що діє з "вужчого" простору $\mathfrak{H}_{fin}$ в "ширший" простір $\widetilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$ локально сумовних з квадратом функцій: $\widetilde{\mathfrak{H}} = \{\, f \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}) \mid \forall \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\, (\mathbf{m}(\Delta) < \infty \Rightarrow \chi_\Delta f \in L_2\,(\mathbb{R}))\}$, де $\mathfrak{L}(\mathbb{R})$ — простір вимірних за Лебегом функцій.

Нижче будуються "вужчий" та "ширший" простори в абстрактній ситуації.

4.3.2. "Позитивний" простір $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$. Нехай $(R, \mathcal{R}, P, \mu)$ — ПМ-простір. Розглянемо наступний простір "основних" елементів гільбертового простору $\mathfrak{H}$:

$$\mathfrak{H}^+_{P,\mu} := \bigcup_{\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}} P(\Delta)\mathfrak{H}. \tag{4.17}$$

Неважко перевірити, що $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ є лінійним простором відносно алгебраїчних операцій, індукованих з простору $\mathfrak{H}$.

Означення 4.9. Будемо вважати, що послідовність векторів $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ збігається до вектора $x \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$, в сенсі простору $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ (позначення $x_n \overset{(P,\mu)^+}{\to} x$, $n \to \infty$), якщо:

а) Існує множина $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, така, що $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq P(\Delta)\mathfrak{H}$.

б) $\|x_n - x\| \to 0$, $n \to \infty$.

Можна перевірити, що введена збіжність перетворює $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ у лінійний простір зі збіжністю в сенсі [202–204] (зокрема це означає, що операції додавання і множення на константу неперервні відносно даної збіжності). Крім того цей простір є повний в сенсі [203, 204]. Справді, нехай послідовність $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ є фундаментальною в сенсі [203, 204], тобто для довільної підпослідовності $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ послідовності $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ справедливо $x_{n_k} - x_k \underset{k\to\infty}{\overset{(P,\mu)^+}{\to}} 0$. Тоді, за пунктом б) означення 4.9 послідовність $\{x_n\}$ буде фундаментальною, а отже і збіжною в просторі $\mathfrak{H}$ до деякого вектора $x \in \mathfrak{H}$. Взявши $n_k := k+1$, згідно з пунктом а) означення 4.9, отримаємо, що послідовність $\{x_n - x_{n+1}\}_{n=1}^\infty$ лежить в деякому підпросторі $P(\Delta)\mathfrak{H}$, де $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$. Оскільки, згідно з (4.17), $x_1 \in P\,(\Delta_1)\,\mathfrak{H}$ для деякої множини $\Delta_1 \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, то вся послідовність $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ буде лежати в множині $P\,(\Delta \cup \Delta_1)\,\mathfrak{H}$, де $\Delta \cup \Delta_1 \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$. Тобто, за означенням 4.9, $x_n \overset{(P,\mu)^+}{\to} x$, $n \to \infty$.

У випадку, розглянутому в прикладі 4.8, простір $\mathfrak{H}_{fin}$ співпадає з простором $\mathfrak{H}^+_{P_1^{(1)},\mathbf{m}}$, де $\mathbf{m}$ — міра Лебега на $\mathbb{R}$, а $P_1^{(1)}$ — спектральна міра, означена в (4.7).

Розглянемо простір $\mathcal{L}\left(\mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}\right)$ лінійних неперервних операторів над простором $\mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}$, тобто простір таких лінійних операторів $A : \mathfrak{H}_{P,\mu}^{+} \longmapsto \mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}$, що для довільної послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}$ з умови $x_n \underset{n\to\infty}{\overset{(P,\mu)^+}{\to}} x \ni \mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}$ випливає, що $Ax_n \underset{n\to\infty}{\overset{(P,\mu)^+}{\to}} Ax$.

Твердження 4.10. *Лінійний оператор $A : \mathfrak{H}_{P,\mu}^{+} \longmapsto \mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}$ належить до простору $\mathcal{L}\left(\mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}\right)$ тоді і тільки тоді, коли для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ існує множина $\Delta' = \Delta'_A \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ така, що:*

1) $AP(\Delta)\mathfrak{H} \subseteq P(\Delta')\mathfrak{H}$;

2) $A \restriction P(\Delta)\mathfrak{H} \in \mathcal{L}\left(P(\Delta)\mathfrak{H}, P(\Delta')\mathfrak{H}\right)$, де $\mathcal{L}\left(P(\Delta)\mathfrak{H}, P(\Delta')\mathfrak{H}\right)$ — простір лінійних неперервних операторів, що діють з підпростору $P(\Delta)\mathfrak{H}$ в підпростір $P(\Delta')\mathfrak{H}$, а через $A \restriction P(\Delta)\mathfrak{H}$ позначено звуження оператора A на простір $P(\Delta)\mathfrak{H}$.

Доведення. А) Якщо для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ існує множина $\Delta' \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ яка задовольняє умови 1),2), то, за означенням 4.9, для послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}$, такої, що $x_n \underset{n\to\infty}{\overset{(P,\mu)^+}{\to}} x \in \mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}$ справедливо $Ax_n \underset{n\to\infty}{\overset{(P,\mu)^+}{\to}} Ax$, тобто $A \in \mathcal{L}\left(\mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}\right)$.

Б) Нехай, $A \in \mathcal{L}\left(\mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}\right)$. Розглянемо довільну множину $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$. У випадку $P(\Delta) = \mathbb{O}$ множина $\Delta' := \Delta$ буде задовольняти умови 1),2). Отже, не обмежуючи загальності, можна вважати, що $P(\Delta) \neq \mathbb{O}$. Оскільки простір $\mathfrak{H}$ – сепарабельний і $P(\Delta) \neq \mathbb{O}$ $(P(\Delta)\mathfrak{H} \neq \{0\})$, то в підпросторі $P(\Delta)\mathfrak{H}$ зліченна існує всюди щільна множина $\mathcal{X} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ така, що $0 \notin \mathcal{X}$ (тобто $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$). Покладемо $\widetilde{x}_n := \frac{x_n}{\|x_n\| n}$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді, будемо мати: $\{\widetilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq P(\Delta)\mathfrak{H}$, $\|\widetilde{x}_n\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Отже $\widetilde{x}_n \underset{n\to\infty}{\overset{(P,\mu)^+}{\to}} 0$. Тому, оскільки $A \in \mathcal{L}\left(\mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}\right)$, $A\widetilde{x}_n \underset{n\to\infty}{\overset{(P,\mu)^+}{\to}} 0$ і, за означенням 4.9, існує множина $\Delta' \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, така, що $\{A\widetilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq P(\Delta')\mathfrak{H}$. Оскільки $x_n = n\,\|x_n\|\,\widetilde{x}_n$, $n \in \mathbb{N}$, то $A\mathcal{X} = \{Ax_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq P(\Delta')\mathfrak{H}$. Звідси, враховуючи щільність множини $\mathcal{X}$ в $P(\Delta)\mathfrak{H}$ і неперервність оператора A в сенсі простору $\mathcal{L}\left(\mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}\right)$, отримуємо, що $AP(\Delta)\mathfrak{H} \subseteq P(\Delta')\mathfrak{H}$ і $A \restriction P(\Delta)\mathfrak{H} \in \mathcal{L}\left(P(\Delta)\mathfrak{H}, P(\Delta')\mathfrak{H}\right)$. □

4.3.3. "Негативний" простір $\mathfrak{H}_{P,\mu}^{-}$.

Через $\mathfrak{H}_{P,\mu}^{-}$ будемо позначати (лінійний) простір $\left(\mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}\right)'$ антилінійних неперервних функціоналів над простором $\mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}$, тобто таких функціоналів $l : \mathfrak{H}_{P,\mu}^{+} \mapsto \mathbb{C}$, що:

1) $l\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\right) = \overline{\alpha}_1 l\left(x_1\right) + \overline{\alpha}_2 l\left(x_2\right)$, $x_1, x_2 \in \mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$.

2) Якщо $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}$ і $x_n \underset{n\to\infty}{\overset{(P,\mu)^+}{\to}} x \in \mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}$, то $l\left(x_n\right) \underset{n\to\infty}{\to} l(x)$.

Твердження 4.11. *Антилінійний функціонал $l : \mathfrak{H}_{P,\mu}^{+} \mapsto \mathbb{C}$ належить до простору $\mathfrak{H}_{P,\mu}^{-}$ тоді і тільки тоді, коли для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ функціонал:*

$$l_\Delta(x) = l(P(\Delta)x), \quad x \in \mathfrak{H} \tag{4.18}$$

належить до простору $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}$.

Доведення. А) Нехай для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, функціонал l_Δ визначений в (4.18) належить до $\mathfrak{H}'$. Якщо для послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ справедливо $x_n \overset{(P,\mu)^+}{\underset{n\to\infty}{\to}} x \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$, то $\|x_n - x\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ і існує множина $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ така, що $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq P(\Delta)\mathfrak{H}$. Тому, $l(x_n) = l_\Delta x_n \underset{n\to\infty}{\to} l_\Delta x = l(x)$.

Б) Нехай $l \in \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$. Розглянемо довільну множину $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$. Для довільної послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{H}$, такої, що $\|x_n - x\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$, де $x \in \mathfrak{H}$ маємо $P(\Delta)x_n \overset{(P,\mu)^+}{\underset{n\to\infty}{\to}} P(\Delta)x$. Тому, оскільки $l \in \mathfrak{H}^-_{P,\mu} = \left(\mathfrak{H}^+_{P,\mu}\right)'$, то $l_\Delta x_n = l(P(\Delta)x_n) \underset{n\to\infty}{\to} l(P(\Delta))x = l_\Delta x$. Тобто $l_\Delta \in \mathfrak{H}'$. □

Означення 4.12. Будемо говорити, що послідовність функціоналів $\{l_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ збігається (сильно) до функціонала $l \in \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ в просторі $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ (позначення $l_n \overset{(P,\mu)^-}{\underset{n\to\infty}{\to}} l$), якщо для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ справедливо $\|(l_n)_\Delta - l_\Delta\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Можна довести, що введена в означенні 4.12 збіжність перетворює $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ у лінійний простір зі збіжністю. Підкреслимо, що замість слабкої збіжності, яка часто зустрічається в теорії оснащених просторів (див, наприклад, [199, стор. 20]), ми будемо розглядати саме сильну збіжність, введену в означенні 4.12.

Нехай $x \in \mathfrak{H}$. Позначимо через $\psi[x]$ функціонал, що діє з простору $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ в $\mathbb{C}$ наступним чином:

$$(\psi[x])(y) := (x, y) \quad \left(y \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu}\right).$$

Нескладно перевірити, що $\psi[x] \in \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ для довільного $x \in \mathfrak{H}$, а також, що відображення $\psi[\cdot] : \mathfrak{H} \mapsto \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ — неперервне, і є лінійним ізоморфізмом між простором $\mathfrak{H}$ і підпростором $\psi[\mathfrak{H}]$ простору $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$. В зв'язку зі сказаним вище, довільний елемент $x \in \mathfrak{H}$ будемо ототожнювати з функціоналом $\psi[x] \in \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$. Крім цього для $x \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ і $l \in \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ введемо скалярний добуток функціонала l на елемент x:

$$(l, x) := l(x); \qquad (x, l) := \overline{(l, x)} = \overline{l(x)}.$$

Легко перевірити, що ці скалярні добутки лінійні по першій змінній і антилінійні по другій. У випадку $l \in \mathfrak{H}$ з ототожнення $l = \psi[l]$ випливає, що скалярні добутки $(l, x), (x, l)$ $(x \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu})$ співпадають із звичайними скалярними добутками в $\mathfrak{H}$. Враховуючи ототожнення $x = \psi[x]$, $x \in \mathfrak{H}$ можна вважати, що $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$, причому з неперервності відображення $\psi[\cdot] : \mathfrak{H} \mapsto \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ випливає, що останнє вкладення — неперервне. Отже $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ є розширенням простору $\mathfrak{H}$, з більш "слабкою" збіжністю.

Твердження 4.13. *Якщо* $\{l_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{l\} \subseteq \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{x\} \subseteq \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$, $l_n \overset{(P,\mu)^-}{\underset{n\to\infty}{\to}} l$, $x_n \overset{(P,\mu)^+}{\underset{n\to\infty}{\to}} x$ *то* $(l_n, x_n) \underset{n\to\infty}{\to} (l, x)$ *і* $(x_n, l_n) \underset{n\to\infty}{\to} (x, l)$.

Доведення. Оскільки $x_n \overset{(P,\mu)^+}{\underset{n\to\infty}{\to}} x$, то $\|x_n - x\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ і $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq P(\Delta)\mathfrak{H}$ для деякої множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$. Оскільки $l_n \overset{(P,\mu)^-}{\underset{n\to\infty}{\to}} l$, то $\|(l_n)_\Delta - l_\Delta\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Тому:

$$\begin{aligned}
&|(l_n, x_n) - (l, x)| \le |(l_n - l)(x_n)| + |l(x_n - x)| = \\
&\quad = |(l_n - l)(P(\Delta)(x_n))| + |l(P(\Delta)(x_n - x))| = \\
&\quad = |((l_n)_\Delta - l_\Delta)(x_n)| + |l_\Delta(x_n - x)| \le \|(l_n)_\Delta - l_\Delta\| \|x_n\| + \|l_\Delta\| \|x_n - x\| \underset{n\to\infty}{\to} 0.
\end{aligned}$$

Співвідношення $(x_n, l_n) \underset{n\to\infty}{\to} (x, l)$ випливає з рівності $(x_n, l_n) = \overline{(l_n, x_n)}$, $n \in \mathbb{N}$. □

Твердження 4.14. *Всі вкладення просторів $\mathfrak{H}^+_{P,\mu} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ щільні і неперервні.*

Доведення. Нехай $l \in \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$. Розглянемо довільну послідовність множин $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ таку, що $\Delta_n \subseteq \Delta_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ і $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n = R$ (оскільки міра μ — σ-скінченна, то така послідовність множин існує). Покладемо:

$$z_n(x) := l_{\Delta_n}(x) = l(P(\Delta_n)x) \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in \mathfrak{H}).$$

Згідно з твердженням 4.11, $z_n \in \mathfrak{H}$, $n \in \mathbb{N}$. Тому, для $n \in \mathbb{N}$ і $x \in \mathfrak{H}$ маємо:

$$(P(\Delta_n)z_n, x) = (z_n, P(\Delta_n)x) = l\left(P(\Delta_n)^2 x\right) = l(P(\Delta_n)x) = (z_n, x).$$

Отже, $P(\Delta_n)z_n = z_n$, $n \in \mathbb{N}$. Тобто $z_n \in P(\Delta_n)\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$, $n \in \mathbb{N}$.

Доведемо, що $z_n \overset{(P,\mu)^-}{\underset{n\to\infty}{\to}} l$. Нехай, $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, $x \in \mathfrak{H}$ і $n \in \mathbb{N}$. Тоді:

$$\begin{aligned}
&|(z_n)_\Delta(x) - l_\Delta(x)| = |(z_n, P(\Delta)x) - l_\Delta(x)| = |l(P(\Delta_n)P(\Delta)x) - l_\Delta(x)| = \\
&\quad = |l(P(\Delta)P(\Delta_n)x) - l_\Delta(x)| = |l_\Delta(P(\Delta_n)x - x)| = \\
&\qquad = |(l_\Delta, (P(\Delta_n) - \mathbb{I})x)| = |((P(\Delta_n) - \mathbb{I})l_\Delta, x)| \le \|(P(\Delta_n) - \mathbb{I})l_\Delta\| \|x\|.
\end{aligned}$$

Тобто $\|(z_n)_\Delta - l_\Delta\| \le \|(P(\Delta_n) - \mathbb{I})l_\Delta\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$, $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, а отже, $z_n \overset{(P,\mu)^-}{\underset{n\to\infty}{\to}} l$. Щільність $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ в $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ доведена. Щільність $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ випливає з включення $\mathfrak{H}^+_{P,\mu} \subseteq \mathfrak{H}$. Щільність $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ в $\mathfrak{H}$ випливає з того, що $\forall x \in \mathfrak{H}$ $\|P(\Delta_n)x - x\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Неперервність вкладення $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ була обґрунтована вище (див. стор. 303), неперервність вкладення $\mathfrak{H}^+_{P,\mu} \subseteq \mathfrak{H}$ очевидна. □

Наступний приклад покаже, що деякі відомі математичні об'єкти, які виникли самостійно можна розглядати як частинний випадок просторів $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$.

Приклад 4.15. Нехай $\mathfrak{H} = L_2([0, 2\pi])$ – простір сумовних з квадратом 2π-періодичних функцій. Покладемо:

$$R := \mathbb{Z}; \quad \mathcal{R} := 2^{\mathbb{Z}}; \quad \mu(\Delta) := \mathbf{card}(\Delta),\ \Delta \in \mathcal{R};$$

$$(P(\Delta)f)(x) := \sum_{k\in\Delta} f\hat{}(k)e^{ikx},\ f \in \mathfrak{H},\ x \in [0, 2\pi],$$

де $\mathbf{card}(\Delta)$ – потужність множини Δ, а $f\hat{}(k)$ – k-й коефіцієнт ряду Фур'є функції $f \in \mathfrak{H}$. У цьому випадку $\mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ співпадає з множиною всіх скінчених множин цілих чисел, а простір $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ — із простором всіх тригонометричних многочленів. Можна довести, що збіжність в просторі $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ співпадає із збіжністю в просторі тригонометричних многочленів в сенсі [208]. Тому простір $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ буде співпадати з простором узагальнених періодичних функцій, введеним в [208, 209]. Внаслідок скінченновимірності підпросторів $P(\Delta)\mathfrak{H}$, $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, в цьому випадку сильна збіжність на $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ співпадає з традиційною слабкою збіжністю в "негативному" просторі.

4.3.4. Простір $\mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^-_{P,\mu}\right)$. Продовження операторів з простору $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ в $\mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^-_{P,\mu}\right)$.

Розглянемо простір $\mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^-_{P,\mu}\right)$ лінійних неперервних операторів на просторі $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ тобто таких лінійних операторів $A : \mathfrak{H}^-_{P,\mu} \mapsto \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$, що для довільної послідовності $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$, такої, що $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{(P,\mu)^-}{\to}} f \in \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ має місце $Af_n \underset{n\to\infty}{\overset{(P,\mu)^-}{\to}} Af$. Очевидно, що $\mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^-_{P,\mu}\right)$ є лінійним простором відносно операцій додавання операторів і множення операторів на комплексні числа. Також легко бачити, що для $A, B \in \mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^-_{P,\mu}\right)$ добуток операторів AB також належить до $\mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^-_{P,\mu}\right)$.

Будемо говорити, що оператор $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ допускає продовження на простір $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$, якщо існує оператор $A_- \in \mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^-_{P,\mu}\right)$, такий, що $A \subseteq A_-$. Такий оператор A_- будемо називати *продовженням оператора A на простір $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$*. Зі щільності простору $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ випливає, що якщо продовження A_- оператора $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ на простір $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ існує, то воно єдине. Легко переконатись в справедливості наступного твердження.

Твердження 4.16. *1) Оператори $\mathbb{O}, \mathbb{I} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ допускають продовження на $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$, при цьому $\mathbb{O}_- = \mathbb{O}^{[\mathfrak{H}^-_{P,\mu}]}$, $\mathbb{I}_- = \mathbb{I}^{[\mathfrak{H}^-_{P,\mu}]}$, де $\mathbb{O}^{[\mathfrak{H}^-_{P,\mu}]}, \mathbb{I}^{[\mathfrak{H}^-_{P,\mu}]}$ — нульовий та одиничний оператори на просторі $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$.*

2) Якщо оператори $A, B \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ допускають продовження на $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$, то оператори $\lambda A + \mu B$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{C})$ і AB також допускають продовження на $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ при цьому: $(\lambda A + \mu B)_- = \lambda A_- + \mu B_-$, $\quad (AB)_- = A_- B_-$.

Згідно з пунктом 1) твердження 4.16, коли це не викликає непорозумінь, нульовий та одиничний оператори простору $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ будуть позначатись так само, як і відповідні оператори простору $\mathfrak{H}$ (тобто $\mathbb{O}_- = \mathbb{O}$, $\mathbb{I}_- = \mathbb{I}$). Нехай $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ позначимо через A_+ звуження оператора A на простір $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$, $A_+ := A \restriction \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$.

Зауваження 4.17. Оператор A_+ можна трактувати як оператор, що діє з простору $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ в $\mathfrak{H}$, або як оператор, що діє з $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ в $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$.

Твердження 4.18. *Якщо $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ і $(A^*)_+ \in \mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^+_{P,\mu}\right)$ (де A^* — оператор, спряжений до A в сенсі простору $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$), то оператор A допускає продовження на простір*

$\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$. *При цьому для* $f \in \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ *і* $x \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ *має місце рівність:*

$$(A_- f,\, x) = (f,\, A^* x) \tag{4.19}$$

Доведення. Нехай $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ і $(A^*)_+ \in \mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^+_{P,\mu}\right)$. Для $f \in \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ покладемо:

$$(A_\sim f, x) := (f, A^* x) = \left(f, (A^*)_+ x\right) \qquad \left(x \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu}\right). \tag{4.20}$$

Оскільки $(A^*)_+ \in \mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^+_{P,\mu}\right)$, то формула (4.20) коректно визначає антилінійний функціонал $A_\sim f$ на просторі $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$, причому, згідно з твердженням 4.13, цей функціонал є неперервний на $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$. Тобто $A_\sim f \in \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$, $f \in \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$. Таким чином, $A_\sim$ — оператор, що відображає простір $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ в $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$. З означення (4.20) видно, що цей оператор — лінійний. Доведемо, що оператор $A_\sim$ — неперервний на $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$. Розглянемо довільну послідовність $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ таку, що $f_n \overset{(P,\mu)^-}{\underset{n\to\infty}{\to}} f \in \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$. Розглянемо довільну множину $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$. Використовуючи (4.20) для довільного вектора $x \in \mathfrak{H}$ отримуємо:

$$\left((A_\sim f_n)_\Delta - (A_\sim f)_\Delta\,, x\right) = (A_\sim f_n - A_\sim f, P(\Delta)x) = (f_n - f, A^* P(\Delta)x)\,.$$

Оскільки $(A^*)_+ \in \mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^+_{P,\mu}\right)$, то, згідно з твердженням 4.10, існує множина $\Delta' \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, така, що $A^* P(\Delta)\mathfrak{H} \subseteq P(\Delta')\mathfrak{H}$ $\;(A^* P(\Delta)x = P(\Delta')A^* P(\Delta)x,\, x \in \mathfrak{H})$. Тому:

$$\begin{aligned}
&\left|\left((A_\sim f_n)_\Delta - (A_\sim f)_\Delta\,, x\right)\right| = \left|(f_n - f, P(\Delta')A^* P(\Delta)x)\right| = \\
&\quad = \left|((f_n)_{\Delta'} - f_{\Delta'}, A^* P(\Delta)x)\right| \le \|(f_n)_{\Delta'} - f_{\Delta'}\|\,\|A^*\|\,\|x\| \quad (x \in \mathfrak{H})\,; \\
&\|(A_\sim f_n)_\Delta - (A_\sim f)_\Delta\| \le \|(f_n)_{\Delta'} - f_{\Delta'}\|\,\|A^*\| \underset{n\to\infty}{\to} 0 \quad (\forall \Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}})\,.
\end{aligned}$$

Отже, за означенням 4.12, $A_\sim f_n \overset{(P,\mu)^-}{\underset{n\to\infty}{\to}} A_\sim f$. Тобто $A_\sim \in \mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^-_{P,\mu}\right)$. Для $f \in \mathfrak{H}$ і $x \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$, згідно з (4.20), маємо $(A_\sim f, x) = (f, A^* x) = (Af, x)$, або $A_\sim f = Af$, $f \in \mathfrak{H}$. Отже, $A_\sim$ є (неперервним) продовженням оператора A на простір $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ (тобто $A_- = A_\sim$). $\square$

4.3.5. Продовження спектральної міри $P(\Delta)$. Якщо $\Delta \in \mathcal{R}$ то оператор $P(\Delta)$ відображає лінійним неперервним чином простір $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ в себе. Тому твердження 4.18 дає змогу при $\Delta \in \mathcal{R}$ продовжити проекційні оператори $P(\Delta)$ на весь простір $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$. Введемо позначення:

$$\mathbb{P}(\Delta) = P(\Delta)_- \quad (\Delta \in \mathcal{R})\,.$$

Згідно з співвідношенням (4.19), для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}$ має місце рівність:

$$(\mathbb{P}(\Delta)f, x) = (f, P(\Delta)x) \quad \left(f \in \mathfrak{H}^-_{P,\mu},\ x \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu}\right). \tag{4.21}$$

Згідно з твердженням 4.16, для операторів $\mathbb{P}(\Delta)$ зберігаються властивості:

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(\emptyset)=\mathbb{O}; \qquad \mathbb{P}(R)=\mathbb{I}; \qquad \mathbb{P}(\Delta)^2=\mathbb{P}(\Delta) \quad (\Delta\in\mathcal{R})\,; & & \\ \mathbb{P}\left(\Delta_1\cap\Delta_2\right) & = & \mathbb{P}\left(\Delta_1\right)\mathbb{P}\left(\Delta_2\right) \quad (\Delta_1,\Delta_2\in\mathcal{R})\,; \\ \mathbb{P}\left(\Delta_1\cup\Delta_2\right) & = & \mathbb{P}\left(\Delta_1\right)+\mathbb{P}\left(\Delta_2\right) \quad (\Delta_1,\Delta_2\in\mathcal{R},\ \Delta_1\cap\Delta_2=\emptyset)\,. \end{array}\right\} \tag{4.22}$$

За означенням простору $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$, при $\Delta\in\mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ оператори $P(\Delta)$ відображають простір $\mathfrak{H}$ в простір $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ (тобто $P(\Delta)\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$). Виявляється, що сказане зберігає силу і для операторів $\mathbb{P}(\Delta)$ на $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ (а саме $\mathbb{P}(\Delta)\mathfrak{H}^-_{P,\mu}\subseteq P(\Delta)\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ $(\forall\,\Delta\in\mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}})$).

Твердження 4.19.

1) Для довільної множини $\Delta\in\mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ маємо $\mathbb{P}(\Delta)\mathfrak{H}^-_{P,\mu}\subseteq P(\Delta)\mathfrak{H}$;

2) Для $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\cup\{f\}\subseteq\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ збіжність $f_n\overset{(P,\mu)^-}{\underset{n\to\infty}{\to}}f$ рівносильна умові:

$\forall\,\Delta\in\mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}\quad \|\mathbb{P}(\Delta)f_n-\mathbb{P}(\Delta)f\|\underset{n\to\infty}{\to}0;$

3) Якщо $\Delta\in\mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, то $\mathbb{P}(\Delta)\in\mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^-_{P,\mu},\,\mathfrak{H}^+_{P,\mu}\right)$ (і, як наслідок, $\mathbb{P}(\Delta)\in\mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^-_{P,\mu},\,\mathfrak{H}\right)$).

Доведення. 1) Нехай $\Delta\in\mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ і $f\in\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$. З рівності (4.21) випливає, що:

$$\mathbb{P}(\Delta)f=f_\Delta, \tag{4.23}$$

де $f_\Delta\in\mathfrak{H}$ — вектор, визначений в (4.18). Отже, згідно з властивостями (4.22), $\mathbb{P}(\Delta)f=\mathbb{P}(\Delta)^2f=\mathbb{P}(\Delta)f_\Delta\in P(\Delta)\mathfrak{H}$.

2) Другий пункт даного твердження випливає з означення 4.12 і рівності (4.23).

3) Нехай $\Delta\in\mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$. Згідно з першим пунктом даного твердження, оператор $\mathbb{P}(\Delta)$ відображає простір $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ в простір $P(\Delta)\mathfrak{H}$ (а отже і в $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$), причому, згідно з пунктом 2), $\mathbb{P}(\Delta)$ відображає $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ в $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ лінійним неперервним чином. □

Твердження 4.20. *Нехай $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{R}$ — диз'юнктна послідовність множин ($\Delta_i\cap\Delta_j=\emptyset$ при $i\neq j$) і $\Delta_0=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_n$. Тоді $\mathbb{P}\left(\Delta_0\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(\Delta_n\right)$, де збіжність ряду слід розуміти в сильному сенсі над простором $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ (це означає, що $\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbb{P}\left(\Delta_k\right)f\overset{(P,\mu)^-}{\underset{n\to\infty}{\to}}\mathbb{P}\left(\Delta_0\right)f$ для довільного елемента $f\in\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$).*

Доведення. Нехай $f\in\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$. Тоді для довільної множини $\Delta\in\mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, згідно з твердженням 4.19 (пункт 1)), $\mathbb{P}(\Delta)f\in\mathfrak{H}$. Тому, враховуючи властивості (4.22), для довільного $n\in\mathbb{N}$, отримуємо:

$$\left\|\mathbb{P}(\Delta)\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}\left(\Delta_k\right)f-\mathbb{P}(\Delta)\mathbb{P}\left(\Delta_0\right)f\right\|=\left\|\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}\left(\Delta\cap\Delta_k\right)f-\mathbb{P}\left(\Delta\cap\Delta_0\right)f\right\|=$$
$$=\left\|\sum_{k=1}^{n}P\left(\Delta_k\right)\mathbb{P}(\Delta)f-P\left(\Delta_0\right)\mathbb{P}(\Delta)f\right\|. \tag{4.24}$$

Оскільки $P(\cdot)$ — спектральна міра над $\mathfrak{H}$, то права частина рівності (4.24) прямує до нуля при $n \to \infty$. Отже, для $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\text{fin}}$ маємо:

$$\left\|\mathbb{P}(\Delta) \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(\Delta_k\right) f - \mathbb{P}(\Delta)\mathbb{P}\left(\Delta_0\right) f\right\| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Внаслідок цього, враховуючи твердження 4.19 (пункт 2)) отримуємо бажаний результат. □

4.3.6. Простір $\mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})$ як розширення простору $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$. Основним об'єктом подальшого вивчення буде простір:

$$\mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H}) = \mathcal{L}\left(\mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}, \mathfrak{H}_{P,\mu}^{-}\right)$$

лінійних неперервних операторів з простору $\mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}$ в простір $\mathfrak{H}_{P,\mu}^{-}$ (тобто таких операторів $A : \mathfrak{H}_{P,\mu}^{+} \longrightarrow \mathfrak{H}_{P,\mu}^{-}$, що для довільної послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}$, такої, що $x_n \underset{n\to\infty}{\overset{(P,\mu)^+}{\to}} x \in \mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}$ має місце $Ax_n \underset{n\to\infty}{\overset{(P,\mu)^-}{\to}} Ax$).

Очевидно, що простір $\mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})$ є лінійним простором відносно операцій додавання операторів та множення операторів на комплексні числа.

Твердження 4.21. *Для того, щоб лінійний оператор $A : \mathfrak{H}_{P,\mu}^{+} \longmapsto \mathfrak{H}_{P,\mu}^{-}$ належав до простору $\mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})$ необхідно і достатньо, щоб:*

$$\forall\, \Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\text{fin}} \quad \mathbb{P}(\Delta) A P(\Delta) \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}). \tag{4.25}$$

Доведення. **Необхідність** випливає з твердження 4.19 (пункт 3)).

Достатність. Нехай виконується умова (4.25). Розглянемо довільну послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}$, таку, що $x_n \underset{n\to\infty}{\overset{(P,\mu)^+}{\to}} x \in \mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}$. Тоді, за означенням збіжності $\overset{(P,\mu)^+}{\to}$, існує множина $\Delta_0 \in \mathcal{R}_{\mu-\text{fin}}$, така, що $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq P\left(\Delta_0\right)\mathfrak{H}$ і $\|x_n - x\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Враховуючи пункт 2) твердження 4.19, для доведення збіжності $Ax_n \underset{n\to\infty}{\overset{(P,\mu)^-}{\to}} Ax$, досить показати, що $\forall\, \Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\text{fin}}$ $\|\mathbb{P}(\Delta)\left(Ax_n - Ax\right)\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Отже, розглянемо довільну множину $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\text{fin}}$. Оскільки $x_n, x \in P\left(\Delta_0\right)\mathfrak{H} \subseteq P\left(\Delta_0 \cup \Delta\right)\mathfrak{H}$ $(n \in \mathbb{N})$, то, використовуючи рівності (4.22), отримуємо:

$$\begin{aligned}
&\|\mathbb{P}(\Delta)\left(Ax_n - Ax\right)\| = \\
&= \|\mathbb{P}(\Delta)\mathbb{P}\left(\Delta_0 \cup \Delta\right)\left(AP\left(\Delta_0 \cup \Delta\right)x_n - AP\left(\Delta_0 \cup \Delta\right)x\right)\| = \\
&= \|P(\Delta)\mathbb{P}\left(\Delta_0 \cup \Delta\right)\left(AP\left(\Delta_0 \cup \Delta\right)x_n - AP\left(\Delta_0 \cup \Delta\right)x\right)\| \leq \\
&\qquad\qquad \leq \|\mathbb{P}\left(\Delta_0 \cup \Delta\right)\left(AP\left(\Delta_0 \cup \Delta\right)x_n - AP\left(\Delta_0 \cup \Delta\right)x\right)\|.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

За умовою (4.25), $\mathbb{P}\left(\Delta_0 \cup \Delta\right) AP\left(\Delta_0 \cup \Delta\right) \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$. Отже, вираз в правій частині (4.26) прямує до нуля при $n \to \infty$, що й необхідно було показати. □

Твердження 4.21 мотивує введення рівномірної збіжності в $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$.

Означення 4.22. Нехай $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$, $A \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$.

1) Будемо говорити, що послідовність операторів $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ **рівномірно збігається** до оператора A **в просторі** $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ (**позначення** $A_n \underset{n\to\infty}{\overset{(P,\mu)}{\rightrightarrows}} A$), якщо для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ виконується співвідношення $\|\mathbb{P}(\Delta)\,(A_n - A)\,P(\Delta)\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$, де операторну норму слід розуміти в рівномірному сенсі.

2) Будемо говорити, що послідовність операторів $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ є **рівномірно-фундаментальною** в просторі $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$, якщо для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ послідовність операторів $\{\mathbb{P}(\Delta)A_nP(\Delta)\}_{n=1}^{\infty}$ рівномірно фундаментальна в $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$.

Введена вище рівномірна операторна збіжність перетворює $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ в лінійний простір зі збіжністю.

Теорема 4.23. *Для того, щоб послідовність $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ була рівномірно-фундаментальною в просторі $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ необхідно і досить, щоб існував оператор $A \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$, такий, що $A_n \underset{n\to\infty}{\overset{(P,\mu)}{\rightrightarrows}} A$.*

Зауваження 4.24. Можна довести, що фундаментальність послідовності операторів в сенсі пункту 2) означення 4.22 рівносильна її фундаментальності в сенсі лінійних просторів зі збіжністю [203, 204]. Отже, теорема 4.23 стверджує, що простір $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$, є повним в сенсі [203, 204] відносно введеної в означенні 4.22 збіжності.

Доведення теореми 4.23.

1) **Достатність** випливає безпосередньо з означення 4.22.

2) **Необхідність**. Нехай послідовність $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ є рівномірно-фундаментальною в просторі $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$. Тоді для $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ послідовність $\{\mathbb{P}(\Delta)A_nP(\Delta)\}_{n=1}^{\infty}$ є рівномірно-фундаментальною в просторі $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$. Тому для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ існує оператор $\mathcal{A}_\Delta \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, такий, що

$$\|\mathbb{P}(\Delta)A_nP(\Delta) - \mathcal{A}_\Delta\| \underset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{4.27}$$

Тоді для довільних $\Delta, \Delta_1 \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ будемо мати:

$$\begin{aligned} &P(\Delta_1)\,\mathcal{A}_\Delta P(\Delta_1) = \lim_{n\to\infty} P(\Delta_1)\,\mathbb{P}(\Delta)A_nP(\Delta)P(\Delta_1) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\Delta_1 \cap \Delta)\,A_nP(\Delta_1 \cap \Delta) = \mathcal{A}_{\Delta\cap\Delta_1}, \end{aligned} \tag{4.28}$$

де границю слід розуміти в рівномірному сенсі простору $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$. Нехай $x, y \in \mathfrak{H}^{+}_{P,\mu}$. Тоді існує множина $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ така, що $x, y \in P(\Delta)\mathfrak{H}$. Покладемо:

$$\mathtt{A}(x, y) := (\mathcal{A}_\Delta x, y) \in \mathbb{C}. \tag{4.29}$$

Доведемо, що таке означення коректне, тобто, що вираз $\mathtt{A}(x,y)$ не залежить від множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, такої, що $x, y \in P(\Delta)\mathfrak{H}$. Нехай $x, y \in P(\Delta_1)\mathfrak{H}$, де $\Delta_1 \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$. Тоді, згідно з (4.28):

$$(\mathcal{A}_\Delta x, y) = (\mathcal{A}_\Delta P(\Delta_1)x, P(\Delta_1)y) = (P(\Delta_1)\mathcal{A}_\Delta P(\Delta_1)x, y) = (\mathcal{A}_{\Delta\cap\Delta_1}x, y).$$

Аналогічно, $(\mathcal{A}_{\Delta_1}x, y) = (\mathcal{A}_{\Delta\cap\Delta_1}x, y)$, тобто $(\mathcal{A}_\Delta x, y) = (\mathcal{A}_{\Delta_1}x, y)$. Коректність означення доведена.

З (4.29) випливає, що $\mathtt{A}(\cdot,\cdot)$ є 1,5-лінійною формою на $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ (тобто відображенням з $\mathfrak{H}^+_{P,\mu} \times \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ в $\mathbb{C}$, яке є лінійним по першій змінній і антилінійним по другій). Доведемо, що ця форма є неперервною по сукупності змінних. Нехай $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty$ — послідовності векторів з простору $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$, причому, $x_n \overset{(P,\mu)^+}{\underset{n\to\infty}{\to}} x \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$, $y_n \overset{(P,\mu)^+}{\underset{n\to\infty}{\to}} y \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$. Тоді з означення збіжності $\overset{(P,\mu)^+}{\to}$ випливає існування множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, такої, що $x_n, y_n \in P(\Delta)\mathfrak{H}$ $(n \in \mathbb{N})$ і виконання співвідношень $\|x_n - x\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$, $\|y_n - y\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Оскільки $x_n, y_n \in P(\Delta)\mathfrak{H}$ $(n \in \mathbb{N})$ і $\mathcal{A}_\Delta \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, то, згідно з (4.29), $\forall n \in \mathbb{N}$ отримуємо:

$$\mathtt{A}(x_n, y_n) = (\mathcal{A}_\Delta x_n, y_n) \underset{n\to\infty}{\to} (\mathcal{A}_\Delta x, y) = \mathtt{A}(x, y).$$

Неперервність 1,5-лінійної форми $\mathtt{A}$ доведено. Нехай $x \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$. Покладемо:

$$(Ax)(y) := \mathtt{A}(x,y) \quad \left(y \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu}\right). \tag{4.30}$$

Оскільки $\mathtt{A}(\cdot,\cdot)$ — 1,5-лінійна форма, що неперервна по сукупності змінних, то Ax є антилінійним неперервним функціоналом на $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ (для довільного $x \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$), тобто що $Ax \in \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$, $x \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$. Отже, A — оператор, що відображає $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ в $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$. З лінійності форми $\mathtt{A}$ по першій змінній випливає, що оператор A — лінійний. Доведемо, що $A \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$. Розглянемо довільну множину $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$. Використовуючи послідовно (4.21), (4.30), (4.29) і (4.28), для довільних $x, y \in \mathfrak{H}$ отримуємо:

$$\begin{aligned}&(\mathbb{P}(\Delta)AP(\Delta)x, y) = (AP(\Delta)x, P(\Delta)y) = \mathtt{A}(P(\Delta)x, P(\Delta)y) = \\ &= (\mathcal{A}_\Delta P(\Delta)x, P(\Delta)y) = (P(\Delta)\mathcal{A}_\Delta P(\Delta)x, y) = (\mathcal{A}_\Delta x, y).\end{aligned}$$

$$\text{Отже,} \qquad \mathbb{P}(\Delta)AP(\Delta) = \mathcal{A}_\Delta \quad (\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}), \tag{4.31}$$

де $\mathcal{A}_\Delta \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ $(\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}})$. Тому, згідно з твердженням 4.21, $A \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$.

Використовуючи (4.31) і (4.27), для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ і довільного номера $n \in \mathbb{N}$ отримуємо, $\|\mathbb{P}(\Delta)(A_n - A)P(\Delta)\| = \|\mathbb{P}(\Delta)A_nP(\Delta) - \mathcal{A}_\Delta\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Отже, за означенням 4.22, $A_n \overset{(P,\mu)}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} A$. □

Нехай $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$. Враховуючи зауваження 4.17, скрізь в даному підрозділі на оператор $A_+ = A \restriction \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ ми будемо дивитись, як на оператор з простору $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$.

Легко перевірити, що відображення $(\cdot)_+ : \mathcal{L}(\mathfrak{H}) \to \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ взаємно-однозначно відображає простір $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ в підпростір $\mathcal{L}(\mathfrak{H})_+ = \{A_+ : A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})\}$ простору $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$, і є інваріантним відносно лінійних операцій над операторами. Тому ми можемо простір $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ ототожнити з підпростором $\mathcal{L}(\mathfrak{H})_+$, а довільний оператор $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ з оператором $A_+ \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$. Тоді отримаємо включення $\mathcal{L}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$. Довільна рівномірно збіжна в $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ послідовність операторів $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ є збіжною і в $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ (точніше, в $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ є збіжною послідовність $\left\{(A_n)_+\right\}_{n=1}^{\infty}$). Отже, вкладення $\mathcal{L}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ є неперервним. Неважко перевірити, що для оператора $A \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ має місце рівносильність:

$$A = \mathbb{O} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}\, \mathbb{P}(\Delta) A P(\Delta) = \mathbb{O}. \tag{4.32}$$

4.3.7. Узагальнені проекційні сліди операторів з простору $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$

Нехай $A \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$. Покладемо:

$$\nu_{P,A}(\Delta) := \mathbf{Tr}(|\mathbb{P}(\Delta) A P(\Delta)|) \quad (\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}),$$

де у випадку $\mathbb{P}(\Delta) A P(\Delta) \notin \mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$ слід покласти $\nu_{P,A}(\Delta) := \infty$, отже можна вважати, що величина $\nu_{P,A}(\Delta)$ визначена для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$. Покладемо:

$$\|A\|_{P,\mu} := \sup \left\{ \frac{\nu_{P,A}(\Delta)}{\mu(\Delta)} \middle| \begin{array}{l} \Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}, \\ \mu(\Delta) + \nu_{P,A}(\Delta) > 0 \end{array} \right\} \quad \left(A \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})\right), \tag{4.33}$$

де у випадку $\mu(\Delta) = 0$ слід покласти $\frac{\nu_{P,A}(\Delta)}{\mu(\Delta)} := \infty$. Оскільки, як було зазначено в означенні 4.4, міра μ — σ-скінченна і не тотожно дорівнює нулю, то визначення величини $\|\cdot\|_{P,\mu}$ — коректне (тобто "sup" в (4.33) береться по непорожній множині).

Враховуючи, що величина $\|A\|_{P,\mu}$ скінченна, взагалі кажучи, не при всіх $A \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$, покладемо:

$$\mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H}) := \left\{ A \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H}) \,:\, \|A\|_{P,\mu} < \infty \right\}.$$

Якщо $A \in \mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ то для множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ з умови $\mu(\Delta) = 0$, згідно з (4.33), випливає, що $\nu_{P,A}(\Delta) = 0$. З останнього зауваження і рівності (4.33) отримуємо, що для довільного оператора $A \in \mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ справедлива нерівність:

$$\mathbf{Tr}(|\mathbb{P}(\Delta) A P(\Delta)|) \le \|A\|_{P,\mu}\, \mu(\Delta) \qquad (\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}). \tag{4.34}$$

Теорема 4.25. $\left(\mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H}), \|\cdot\|_{P,\mu}\right)$ *є банаховим простором, який неперервно вкладається в простір* $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$.

Доведення. 1) Згідно з теоремою 4.6, $\left(\mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H}) \cap \mathcal{L}(\mathfrak{H}), \|\cdot\|_{P,\mu}\right)$ є лінійним нормова-

ним простором. Тому, скориставшись рівністю $\|A\|_{P,\mu} = \sup\limits_{\Delta\in\mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}} \|\mathbb{P}(\Delta)AP(\Delta)\|_{P,\mu}$, $A \in \mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ (яку легко довести) і рівносильністю (4.32), неважко переконатись, що $\left(\mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H}), \|\cdot\|_{P,\mu}\right)$ є лінійним нормованим простором. Доведемо повноту цього простору. Нехай $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ і $\|A_n - A_m\|_{P,\mu} \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Зафіксуємо довільну множину $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$. Згідно з (4.34) для довільних $m, n \in \mathbb{N}$ маємо:

$$\mathbf{Tr}\left(|\mathbb{P}(\Delta)\left(A_n - A_m\right)P(\Delta)|\right) \le \mu(\Delta)\|A_n - A_m\|_{P,\mu}. \tag{4.35}$$

Таким чином з фундаментальності послідовності $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ в просторі $\mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ випливає фундаментальність послідовності $\{\mathbb{P}(\Delta)A_nP(\Delta)\}_{n=1}^{\infty}$ в просторі $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$, а отже і в просторі $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$, для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$. Тобто, за означенням 4.22, послідовність операторів $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ є рівномірно-фундаментальною в просторі $\mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})$, і, згідно з теоремою 4.23, існує оператор $A \in \mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})$ такий, що $A_n \underset{n\to\infty}{\overset{(P,\mu)}{\rightrightarrows}} A$.

Доведемо, що $A \in \mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ і $\|A_n - A\|_{P,\mu} \underset{n\to\infty}{\to} 0$. За означенням 4.22, для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ $\|\mathbb{P}(\Delta)\left(A_n - A\right)P(\Delta)\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. З іншої сторони, як було сказано вище, послідовність операторів $\{\mathbb{P}(\Delta)A_nP(\Delta)\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною, а отже і збіжною, в $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$. Отже, враховуючи, що з існування границі послідовності операторів в просторі $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$ випливає її співпадання з відповідною рівномірною границею в просторі $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$, отримуємо, що для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ оператор $\mathbb{P}(\Delta)AP(\Delta)$ належить до $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$, причому $\|\mathbb{P}(\Delta)\left(A_n - A\right)P(\Delta)\|_{\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})} \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Покладемо:

$$\eta_n := \sup_{m\in\mathbb{N},\, m\ge n} \|A_n - A_m\|_{P,\mu} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Оскільки, за умовою $\|A_n - A_m\|_{P,\mu} \underset{m,n\to\infty}{\to} 0$, то $\eta_n \to 0$, $n \to \infty$. З нерівності (4.35) випливає, що $\|\mathbb{P}(\Delta)\left(A_n - A_m\right)P(\Delta)\|_{\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})} \le \mu(\Delta)\eta_n$ ($\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m \ge n$). Тому перейшовши до границі при $m \to \infty$, отримаємо:

$$\nu_{P,A_n-A}(\Delta) = \|\mathbb{P}(\Delta)\left(A_n - A\right)P(\Delta)\|_{\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})} \le \mu(\Delta)\eta_n \quad (\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}\, n \in \mathbb{N}),$$

тому $\|A_n - A\|_{P,\mu} \le \eta_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Оскільки $\eta_n < \infty$ ($n \in \mathbb{N}$), то з останнього співвідношення випливає, що $A \in \mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$, Більше того, оскільки $\eta_n \to 0$, $n \to \infty$, то послідовність $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до оператора A за нормою простору $\mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$.

2) За побудовою простору $\mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$, $\mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})$. Якщо $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ і $\|A_n - A\|_{P,\mu} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, де $A \in \mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$, то, за нерівністю (4.34), для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ маємо:

$$\|\mathbb{P}(\Delta)\left(A_n - A\right)P(\Delta)\| \le \|\mathbb{P}(\Delta)\left(A_n - A\right)P(\Delta)\|_{\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})} \le$$
$$\le \|A_n - A\|_{P,\mu}\,\mu(\Delta) \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

тобто $A_n \underset{n\to\infty}{\overset{(P,\mu)}{\rightrightarrows}} A$. Неперервність вкладення $\mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})$ доведена. $\square$

З нерівності (4.34) випливає, що для довільного оператора $A \in \mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ і довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, величина $\tau_{P,A}(\Delta) = \mathbf{Tr}(\mathbb{P}(\Delta)AP(\Delta))$ має сенс. Також з цієї нерівності та нерівності $|\mathbf{Tr}(T)| \leq \mathbf{Tr}(|T|)$ $(T \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{H}))$ (див., напр. [210, стор. 24, співвідношення (2.6)]) випливає, що

$$|\tau_{P,A}(\Delta)| \leq \mathbf{Tr}(|\mathbb{P}(\Delta)AP(\Delta)|) \leq \|A\|_{P,\mu}\,\mu(\Delta), \quad \Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}. \tag{4.36}$$

Теорема 4.26. *Нехай $A \in \mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$. Тоді:*

1) Функція множини $\tau_{P,A}(\Delta) = \mathbf{Tr}(\mathbb{P}(\Delta)AP(\Delta))$, $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ є комплекснозначним зарядом на кільці множин $\mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$.

2) Заряд $\tau_{P,A}(\cdot)$ є абсолютно неперервний відносно міри μ. Це означає, що існує похідна Радона-Никодима $\frac{d\tau_{P,A}}{d\mu}$, тобто функція $\frac{d\tau_{P,A}}{d\mu} : R \mapsto \mathbb{C}$, така, що для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ має місце рівність:

$\tau_{P,A}(\Delta) = \int_\Delta \frac{d\tau_{P,A}}{d\mu}(\xi)d\mu(\xi)$.

Доведення. 1) Нехай $A \in \mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ і $\tau_{P,A}(\Delta) = \mathbf{Tr}(\mathbb{P}(\Delta)AP(\Delta))$ $(\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}})$.

а) Доведемо спочатку, що функція множини $\tau_{P,A}(\cdot)$ є адитивною на кільці множин $\mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$. Нехай $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$. Покладемо, $\Delta := \Delta_1 \cup \Delta_2$, $A_\Delta := \mathbb{P}(\Delta)AP(\Delta)$. Згідно з (4.34), $A_\Delta \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$. Тому, використовуючи властивості (4.22) та загальновідомі властивості слідів операторів з простору $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$ отримуємо:

$$\begin{aligned}
\tau_{P,A}(\Delta) &= \mathbf{Tr}(\mathbb{P}(\Delta)AP(\Delta)) = \mathbf{Tr}(\mathbb{P}(\Delta)\mathbb{P}(\Delta)AP(\Delta)P(\Delta)) = \\
&= \mathbf{Tr}(P(\Delta)A_\Delta P(\Delta)) = \mathbf{Tr}(P(\Delta)A_\Delta) = \\
&= \mathbf{Tr}((P(\Delta_1) + P(\Delta_2))A_\Delta) = \mathbf{Tr}(P(\Delta_1)A_\Delta) + \mathbf{Tr}(P(\Delta_2)A_\Delta) = \\
&= \mathbf{Tr}(\mathbb{P}(\Delta_1)A_\Delta P(\Delta_1)) + \mathbf{Tr}(\mathbb{P}(\Delta_2)A_\Delta P(\Delta_2)) = \\
&= \mathbf{Tr}(\mathbb{P}(\Delta_1 \cap \Delta)AP(\Delta_1 \cap \Delta)) + \mathbf{Tr}(\mathbb{P}(\Delta_2 \cap \Delta)AP(\Delta_2 \cap \Delta)) = \\
&\qquad = \mathbf{Tr}(\mathbb{P}(\Delta_1)AP(\Delta_1)) + \mathbf{Tr}(\mathbb{P}(\Delta_2)AP(\Delta_2)) = \tau_{P,A}(\Delta_1) + \tau_{P,A}(\Delta_2).
\end{aligned}$$

б) Доведемо, що функція $\tau_{P,A}$ є σ-адитивною на $\mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$. Нехай $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, $\Delta = \bigcup_{n=1}^\infty \Delta_n$, де $\Delta_i \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ $(i, j \in \mathbb{N},\ i \neq j)$. Покладемо $\Lambda_N := \bigcup_{n=1}^N \Delta_n$ $(N \in \mathbb{N})$. Тоді, згідно з пунктом а), для довільного $N \in \mathbb{N}$ отримаємо:

$$\tau_{P,A}(\Delta) = \tau_{P,A}(\Lambda_N) + \tau_{P,A}(\Delta \setminus \Lambda_N) = \sum_{n=1}^N \tau_{P,A}(\Delta_n) + \tau_{P,A}(\Delta \setminus \Lambda_N),$$

де, згідно з нерівністю (4.36), $|\tau_{P,A}(\Delta \setminus \Lambda_N)| \leq \|A\|_{P,\mu}\,\mu(\Delta \setminus \Lambda_N) \to 0$, $n \to \infty$. Тому ряд $\sum_{n=1}^\infty \tau_{P,A}(\Delta_n)$ збігається і $\tau_{P,A}(\Delta) = \sum_{n=1}^\infty \tau_{P,A}(\Delta_n)$.

2) Доведемо існування похідної Родона-Никодима $\frac{d\tau_{P,A}}{d\mu}$. Оскільки міра μ — σ-скінченна, то існує послідовність множин $\{\Delta_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, така, що $\bigcup_{n=1}^\infty \Delta_n = R$. Не обмежуючи загальності будемо вважати, що $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$, $i \neq j$. (Справді, якщо

послідовність $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ такої властивості не має, то ми завжди можемо перейти до послідовності множин $\left\{\widetilde{\Delta}_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, де $\widetilde{\Delta}_1 = \Delta_1$ і $\widetilde{\Delta}_n = \left(\bigcup_{k=1}^{n} \Delta_k\right) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} \Delta_k\right)$, $n > 1$.)

Покладемо $\mathcal{R}_n := \{\Delta \in \mathcal{R} : \Delta \subseteq \Delta_n\} = \{\Delta \cap \Delta_n : \Delta \in \mathcal{R}\}$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді будемо мати $\mathcal{R}_n \subseteq \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, $n \in \mathbb{N}$. Для довільного $n \in \mathbb{N}$ клас множин $\mathcal{R}_n$ є σ-алгеброю і $\tau_{P,A}$ є (скінченним) зарядом на σ-алгебрі $\mathcal{R}_n$. З нерівності (4.36) випливає, що цей заряд є абсолютно неперервним відносно міри μ на Δ_n. Отже, згідно з теоремою Родона-Никодима, для довільного $n \in \mathbb{N}$ існує функція $\rho_n : \Delta_n \mapsto \mathbb{C}$, така, що $\tau_{P,A}(\Delta) = \int_{\Delta} \rho_n(\xi) d\mu(\xi)$, $\Delta \in \mathcal{R}_n$, причому з нерівності (4.36) випливає, що для майже всіх $\xi \in \Delta_n$ має місце нерівність $|\rho_n(\xi)| \leq \|A\|_{P,\mu}$. Тому функція $\rho : R \mapsto \mathbb{C}$, що збігається з функціями ρ_n на довільній множині Δ_n, $n \in \mathbb{N}$ буде істотно обмеженою на R, а отже і сумовною за мірою μ на довільній множині $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$. Звідси виводимо рівність $\tau_{P,A}(\Delta) = \int_{\Delta} \rho(\xi) d\mu(\xi)$ $(\forall\, \Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}})$. Справді нехай $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ тоді, згідно з пунктом 1) даної теореми,

$$\tau_{P,A}(\Delta) = \tau_{P,A}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\Delta \cap \Delta_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{P,A}(\Delta \cap \Delta_n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Delta \cap \Delta_n} \rho_n(\xi) d\mu(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Delta \cap \Delta_n} \rho(\xi) d\mu(\xi) = \int_{\Delta} \rho(\xi) d\mu(\xi).$$

З єдиності (з точністю до "майже скрізь") похідної Родона-Никодима на множинах скінченної міри Δ_n $(n \in \mathbb{N})$ випливає, що функція ρ, що задовольняє останню умову, — єдина з точністю до "майже скрізь за мірою μ". Отже, рівність $\rho = \frac{d\tau_{P,A}}{d\mu}$ має місце на всій множині R. □

Похідну Родона-Никодима, про яку говорилось в теоремі 4.26 будемо називати узагальненим проекційним слідом оператора $A \in \mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$

$$\widetilde{\mathbf{Tr}}_{P,\mu}[A] := \frac{d\tau_{P,A}}{d\mu}.$$

Можна довести, що у класичному випадку лінійного неперервного оператора $A_{\mathcal{K}}$ з трансляційно інваріантним ядром $\mathcal{K}$ в $L_2\left(\mathbb{R}^d\right)$ узагальнений проекційний слід $\widetilde{\mathbf{Tr}}_{P_i^{(d)},\mathbf{m}}[A_{\mathcal{K}}]$ (якщо він існує) є константою, яка співпадає із слідом за різницевою змінною. (Нагадаємо, що тут $\mathbf{m}$ — міра Лебега на $\mathbb{R}$, а $P_i^{(d)}$ — спектральна міра, визначена в (4.7)).

Основні результати підрозділу 4.3 було анонсовано в роботі [211] і опубліковано в роботах [212, 213], а також представлено на конференціях [206, 207, 214–216].

4.4. Групи унітарних операторів в просторах псевдооператорів з обмеженим проекційним слідом

4.4.1. Вступні зауваження. В попередніх розділах було побудовано банахові простори типу $\mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ "узагальнених операторів" з обмеженим проекційним слідом (де P — деяка спектральна міра над простором $\mathfrak{H}$, задана на деякій σ-алгебрі $\mathcal{R}$, а μ — деяка скалярна σ-скінченна і не тотожно рівна нулю міра на $\mathcal{R}$). В частинному випадку зазначені простори містять оператори, породжені трансляційно-інваріантним ядром, які мають обмежений слід за різницевою змінною.

Проте, в результаті подальших досліджень виявилось, що в межах просторів типу $\mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ неможливо визначити деякі важливі групи операторів, пов'язані з еволюцією багаточастинкових квантових систем. Останній факт пояснюється тим, що у випадку простору $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$, унітарне перетворення виду

$$V \circledast A := V^{-1}AV \quad \left(A \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{H})\right), \tag{4.37}$$

(де V — унітарний оператор над простором $\mathfrak{H}$), не виводить за межі простору $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$, а у випадку простору $\mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ неможливо визначити аналог перетворення (4.37) таким чином, щоб результуючий оператор знову належав до $\mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$.

В даному розділі буде доведено, що довільний простір типу $\mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ можна вкласти в більш широкий простір псевдооператорів, на якому можна визначити аналог перетворення (4.37) таким чином, щоб результуючий псевдооператор знову належав до вихідного простору.

4.4.2. Дія унітарних операторів в позитивних і негативних просторах, породжених спектральною мірою. Нехай $(\mathfrak{H}, (\cdot,\cdot), \|\cdot\|)$ — комплексний, сепарабельний, нескінченновимірний гільбертовий простір і $(R, \mathcal{R}, P, \mu)$ — ПМ-простір над $\mathfrak{H}$. Позначимо через $\mathfrak{U}(\mathfrak{H})$ множину всіх унітарних операторів над простором $\mathfrak{H}$. Для оператора $V \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H})$ побудуємо спектральну міру:

$$P_V(\Delta) := V^{-1}P(\Delta)V \quad (\Delta \in \mathcal{R}).$$

Легко бачити, що для довільних $V, W \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H})$ справедливі рівності:

$$(P_V)_W = P_{VW}, \qquad (\mathbb{P}_V)_W = \mathbb{P}_{VW}, \tag{4.38}$$

де $\mathbb{P}_V$ — продовження спектральної міри P_V на $\mathfrak{H}^-_{P_V,\mu}$, і, відповідно, $(\mathbb{P}_V)_W$ — продовження спектральної міри $(P_V)_W = P_{VW}$ на простір $\mathfrak{H}^-_{(P_V)_W,\mu} = \mathfrak{H}^-_{P_{VW},\mu}$.

Нехай, $V \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H})$. Через $V_{+,P,\mu}$ позначатимемо звуження оператора V на простір $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$:

$V_{+,P,\mu} = V \upharpoonright \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$.

Надалі для довільних лінійних просторів зі збіжністю (в сенсі [202–204]) $\mathfrak{X}_1$,$\mathfrak{X}_2$ через $\mathcal{L}(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)$ будемо позначати простір лінійних неперервних операторів, що діють з $\mathfrak{X}_1$ в $\mathfrak{X}_2$ (тобто таких операторів $A : \mathfrak{X}_1 \longrightarrow \mathfrak{X}_2$, що для довільної послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{X}_1$, такої, що $x_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathfrak{X}_1}{\to}} x \in \mathfrak{X}_1$ має місце $Ax_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathfrak{X}_2}{\to}} Ax$, де $y_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathfrak{X}_i}{\to}} y$ означає збіжність послідовності $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ до елемента y в сенсі простору $\mathfrak{X}_i$ $(i \in \{1, 2\})$).

Твердження 4.27. *Для довільного оператора $V \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H})$ оператор $V_{+,P,\mu}$ є взаємно-однозначним лінійним неперервним відображенням з простору $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ на простір $\mathfrak{H}^+_{P_{V^{-1}},\mu}$. При цьому, $(V_{+,P,\mu})^{-1} = (V^{-1})_{+,P_{V^{-1}},\mu} \in \mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^+_{P_{V^{-1}},\mu}, \mathfrak{H}^+_{P,\mu}\right)$.*

Доведення. Нехай $V \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H})$, $x \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$. Тоді існує множина $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ така, що $x \in P(\Delta)\mathfrak{H}$. Тому,

$$V_{+,P,\mu}x = Vx = VP(\Delta)x = VP(\Delta)V^{-1}Vx = P_{V^{-1}}(\Delta)Vx \in P_{V^{-1}}(\Delta)\mathfrak{H}. \tag{4.39}$$

Отже, $V_{+,P,\mu}x \in \mathfrak{H}^+_{P_{V^{-1}},\mu}$, $x \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$, тобто оператор $V_{+,P,\mu}$ відображає простір $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ у простір $\mathfrak{H}^+_{P_{V^{-1}},\mu}$. Навпаки, якщо $y \in \mathfrak{H}^+_{P_{V^{-1}},\mu}$, то існує множина $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ така, що $y \in P_{V^{-1}}(\Delta)\mathfrak{H}$. Отже, $y = P_{V^{-1}}(\Delta)y = V_{+,P,\mu}x$, де $x = P(\Delta)V^{-1}y \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$. Тому, оператор $V_{+,P,\mu}$ відображає простір $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ на $\mathfrak{H}^+_{P_{V^{-1}},\mu}$. Оскільки V — унітарний оператор, то $V_{+,P,\mu}$ відображає $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ на $\mathfrak{H}^+_{P_{V^{-1}},\mu}$ взаємно-однозначно. Тому існує єдиний обернений лінійний оператор $(V_{+,P,\mu})^{-1} : \mathfrak{H}^+_{P_{V^{-1}},\mu} \mapsto \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$. Аналогічно оператор $(V^{-1})_{+,P_{V^{-1}},\mu}$ взаємно-однозначно відображає простір $\mathfrak{H}^+_{P_{V^{-1}},\mu}$ на простір $\mathfrak{H}^+_{(P_{V^{-1}})_V,\mu} = \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$. Тому, враховуючи, що для $x \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ справедлива рівність $(V^{-1})_{+,P_{V^{-1}},\mu} V_{+,P,\mu}x = V^{-1}Vx = x$, отримуємо: $(V_{+,P,\mu})^{-1} = (V^{-1})_{+,P_{V^{-1}},\mu}$.

Нехай послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ збігається в $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ до вектора $x \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$. Тоді, згідно з означенням 4.9, $\|x_n - x\| \to 0$, $n \to \infty$, і існує множина $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ така, що $x_n \in P(\Delta)\mathfrak{H}$, $n \in \mathbb{N}$. Оскільки V — унітарний оператор, то $\|V_{+,P,\mu}x_n - V_{+,P,\mu}x\| = \|Vx_n - Vx\| \to 0$, $n \to \infty$. Оскільки $x_n \in P(\Delta)\mathfrak{H}$, $n \in \mathbb{N}$, то, згідно з (4.39), $V_{+,P,\mu}x_n \in P_{V^{-1}}(\Delta)\mathfrak{H}$, $n \in \mathbb{N}$, і, за означенням збіжності в просторі $\mathfrak{H}^+_{P_{V^{-1}},\mu}$ (означення 4.9), $V_{+,P,\mu}x_n \underset{n\to\infty}{\overset{(P_{V^{-1}},\mu)^+}{\to}} V_{+,P,\mu}x$. Отже, $V_{+,P,\mu} \in \mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^+_{P,\mu}, \mathfrak{H}^+_{P_{V^{-1}},\mu}\right)$. Звідси, враховуючи доведене вище, також отримуємо співвідношення $(V_{+,P,\mu})^{-1} = (V^{-1})_{+,P_{V^{-1}},\mu} \in \mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^+_{P_{V^{-1}},\mu}, \mathfrak{H}^+_{P,\mu}\right)$. □

Твердження 4.28. *Довільний оператор $V \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H})$ допускає єдине продовження на простір $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ до оператора $V_{-,P,\mu} \in \mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^-_{P,\mu}, \mathfrak{H}^-_{P_{V^{-1}},\mu}\right)$, тобто існує єдиний оператор*

$V_{-,P,\mu} \in \mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^-_{P,\mu}, \mathfrak{H}^-_{P_{V^{-1}},\mu}\right)$ *такий, що* $V \subseteq V_{-,P,\mu}$. *При цьому:*

$$(V_{-,P,\mu}x, y) = \left(x, V^{-1}y\right) \qquad \left(x \in \mathfrak{H}^-_{P,\mu},\ y \in \mathfrak{H}^+_{P_{V^{-1}},\mu}\right). \tag{4.40}$$

Доведення. Нехай, $V \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H})$. Оскільки, згідно з твердженням 4.27, $(V^{-1})_{+,P_{V^{-1}},\mu} \in \mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^+_{P_{V^{-1}},\mu}, \mathfrak{H}^+_{P,\mu}\right)$, то для довільного $x \in \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ функціонал Wx, що діє за правилом:

$$(Wx, y) := \left(x, V^{-1}y\right) = \left(x, \left(V^{-1}\right)_{+,P_{V^{-1}},\mu} y\right) \qquad \left(y \in \mathfrak{H}^+_{P_{V^{-1}},\mu}\right) \tag{4.41}$$

є лінійним неперервним функціоналом над простором $\mathfrak{H}^+_{P_{V^{-1}},\mu}$ (тобто $Wx \in \mathfrak{H}^-_{P_{V^{-1}},\mu}$, $x \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$). Отже, W є (лінійним) оператором, що відображає простір $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ у простір $\mathfrak{H}^-_{P_{V^{-1}},\mu}$. Доведемо, що $W \in \mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^-_{P,\mu}, \mathfrak{H}^-_{P_{V^{-1}},\mu}\right)$. Нехай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ і $x_n \underset{n\to\infty}{\overset{(P,\mu)^-}{\to}} x \in \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$. Тоді, згідно з твердженням 4.19, для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ маємо, $\|\mathbb{P}(\Delta)\,(x_n - x)\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Крім того, використовуючи (4.21) і (4.41) для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ і довільного вектора $y \in \mathfrak{H}^+_{P_{V^{-1}},\mu}$ отримуємо:

$$\begin{aligned}(\mathbb{P}_{V^{-1}}(\Delta)\,(Wx_n - Wx)\,, y) &= \left(x_n - x, V^{-1}P_{V^{-1}}(\Delta)y\right) = \\ &= \left(x_n - x, P(\Delta)V^{-1}y\right) = \left(\mathbb{P}(\Delta)\,(x_n - x)\,, V^{-1}y\right).\end{aligned}$$

Звідси, $\|\mathbb{P}_{V^{-1}}(\Delta)\,(Wx_n - Wx)\| \le \|\mathbb{P}(\Delta)\,(x_n - x)\|\,\|V^{-1}\| = \|\mathbb{P}(\Delta)\,(x_n - x)\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ $(\forall\,\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}})$. А це (згідно з твердженням 4.19) означає, що $Wx_n \underset{n\to\infty}{\overset{(P_{V^{-1}},\mu)^-}{\to}} Wx$. Отже, $W \in \mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^-_{P,\mu}, \mathfrak{H}^-_{P_{V^{-1}},\mu}\right)$. Для $x \in \mathfrak{H}$ і $y \in \mathfrak{H}^+_{P_{V^{-1}},\mu}$ маємо, $(Wx, y) = (x, V^{-1}y) = (Vx, y)$. Тому, $Wx = Vx$ $(x \in \mathfrak{H})$, тобто $V \subseteq W$. Оскільки, згідно з твердженням 4.14, простір $\mathfrak{H}$ щільний в $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ то оператор W, що задовольняє умови $W \in \mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^-_{P,\mu}, \mathfrak{H}^-_{P_{V^{-1}},\mu}\right)$ і $V \subseteq W$ — єдиний. Отже, залишається покласти $V_{-,P,\mu} := W$. □

Твердження 4.29. *Для довільного оператора* $V \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H})$ *оператор* $V_{-,P,\mu} \in \mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^-_{P,\mu}, \mathfrak{H}^-_{P_{V^{-1}},\mu}\right)$ *є лінійним гомеоморфізмом між просторами* $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ *і* $\mathfrak{H}^-_{P_{V^{-1}},\mu}$ *(а отже існує обернений оператор* $(V_{-,P,\mu})^{-1} \in \mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^-_{P_{V^{-1}},\mu}, \mathfrak{H}^-_{P,\mu}\right)$*). При цьому,* $(V_{-,P,\mu})^{-1} = (V^{-1})_{-,P_{V^{-1}},\mu}$.

Доведення. Користуючись (4.40), отримуємо:

$$\begin{aligned}\left(V_{-,P,\mu}\left(V^{-1}\right)_{-,P_{V^{-1}},\mu} x, y\right) &= \left(x, \left(V^{-1}\right)^{-1} V^{-1}y\right) = \\ &= (x, y) \quad (x \in \mathfrak{H}^-_{P_{V^{-1}},\mu},\ y \in \mathfrak{H}^+_{P_{V^{-1}},\mu}).\end{aligned}$$

Отже, $V_{-,P,\mu}\,(V^{-1})_{-,P_{V^{-1}},\mu}\,x = x$ $(x \in \mathfrak{H}^-_{P_{V^{-1}},\mu})$. Аналогічно, $(V^{-1})_{-,P_{V^{-1}},\mu} V_{-,P,\mu}x = x$ $(x \in \mathfrak{H}^-_{P,\mu})$. Підкреслимо, що, згідно з твердженням 4.28, $(V^{-1})_{-,P_{V^{-1}},\mu} \in$

$\mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^-_{P_{V^{-1}},\mu},\, \mathfrak{H}^-_{P,\mu}\right)$. Таким чином, оператор $V_{-,P,\mu}$ є взаємно-однозначним відображенням і оператор $(V^{-1})_{-,P_{V^{-1}},\mu} \in \mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^-_{P_{V^{-1}},\mu},\, \mathfrak{H}^-_{P,\mu}\right)$ є оберненим до оператора $V_{-,P,\mu}$. $\square$

Твердження 4.30. *Для довільного $\Delta \in \mathcal{R}$ справедлива рівність:*

$$\mathbb{P}_V(\Delta) = (V_{-,P_V,\mu})^{-1}\, \mathbb{P}(\Delta) V_{-,P_V,\mu} \tag{4.42}$$

Зокрема для $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$:

$$\mathbb{P}_V(\Delta) = V^{-1}\mathbb{P}(\Delta) V_{-,P_V,\mu} = (V_{+,P_V,\mu})^{-1}\, \mathbb{P}(\Delta) V_{-,P_V,\mu} \tag{4.43}$$

Доведення. Згідно з твердженнями 4.28 та 4.29,

$$V_{-,P_V,\mu} \in \mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^-_{P_V,\mu}, \mathfrak{H}^-_{(P_V)_{V^{-1}},\mu}\right) = \mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^-_{P_V,\mu}, \mathfrak{H}^-_{P,\mu}\right),$$
$$(V_{-,P_V,\mu})^{-1} = \left(V^{-1}\right)_{-,(P_V)_{V^{-1}},\mu} = \left(V^{-1}\right)_{-,P,\mu} \in \mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^-_{P,\mu}, \mathfrak{H}^-_{P_V,\mu}\right).$$

Отже, $(V_{-,P_V,\mu})^{-1}\, \mathbb{P}(\Delta) V_{-,P_V,\mu} \in \mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^-_{P_V,\mu}\right)$ $(\Delta \in \mathcal{R})$. Таким чином оператор $(V_{-,P_V,\mu})^{-1}\, \mathbb{P}(\Delta) V_{-,P_V,\mu} \in \mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^-_{P_V,\mu}\right)$ містить оператор $P_V(\Delta)$. Звідси, враховуючи щільність простору $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}^-_{P_V,\mu}$ отримуємо рівність (4.42). Рівність (4.43) при $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ випливає з включення $(V_{+,P_V,\mu})^{-1} \subseteq V^{-1} \subseteq (V_{-,P_V,\mu})^{-1}$ (яке є наслідком включення $V_{+,P_V,\mu} \subseteq V \subseteq V_{-,P_V,\mu}$) і того факту, що при $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ $\mathbb{P}(\Delta)\mathfrak{H}^-_{P_V,\mu} \subseteq \mathfrak{H}^+_{P_V,\mu} \subseteq \mathfrak{H}$ (див. твердження 4.19). $\square$

4.4.3. Простори псевдооператорів, породжені спектральними мірами.

Позначимо через $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$ множину всіх операторнозначних функцій $\mathcal{A} : \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, які можна подати у вигляді:

$$\mathcal{A}(\Delta) := \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{V_k}(\Delta) A_k P_{V_k}(\Delta) \quad (\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}), \tag{4.44}$$

де $n \in \mathbb{N}$; $V_K \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H})$, $A_k \in \mathcal{L}^{+-}_{P_{V_k},\mu}(\mathfrak{H})$ $(k \in \overline{1,n})$. Елементи множини $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$ будемо називати ***псевдооператорами***. На множині $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$ можна ввести операції додавання псевдооператорів і множення їх на число за наступними формулами:

$$\left.\begin{aligned} (\mathcal{A}+\mathcal{B})(\Delta) &:= \mathcal{A}(\Delta) + \mathcal{B}(\Delta) \quad \left(\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0,\ \Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}\right); \\ (\lambda\mathcal{A})(\Delta) &:= \lambda\mathcal{A}(\Delta) \quad \left(\mathcal{A} \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0,\ \lambda \in \mathbb{C},\ \Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{4.45}$$

Легко перевірити, що введені в (4.45) алгебраїчні операції перетворюють $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$ в лінійний простір. Нульовим елементом простору $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$ є:

$$\mathbb{O}_{\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0} := \mathcal{O} \quad \text{де } \mathcal{O}(\Delta) = \mathbb{O}\ (\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}), \tag{4.46}$$

тут через $\mathbb{O}$ позначено нульовий оператор простору $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$.

Для довільного оператора $A \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ покладемо:

$$[A](\Delta) := \mathbb{P}(\Delta)AP(\Delta) \quad (\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}). \tag{4.47}$$

Очевидно, що $[A] \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$ (для довільного оператора $A \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$). З рівності (4.47) випливає, що для $A, B \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ і $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$[A+B] = [A] + [B]; \qquad [\lambda A] = \lambda [A]. \tag{4.48}$$

Крім того, для операторів $A, B \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ з рівності $[A] = [B]$ отримуємо рівність:

$$\mathbb{P}(\Delta)AP(\Delta) = \mathbb{P}(\Delta)BP(\Delta) \quad (\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}),$$

а з останньої рівності в свою чергу випливає, що $A = B$. Отже, відображення $[\cdot] : \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H}) \longrightarrow \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$ є лінійним взаємно-однозначним відображенням з лінійного простору $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ в лінійний підпростір $\left[\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})\right] = \left\{[A] \mid A \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})\right\}$ простору $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$, що дає можливість вважати дане відображення відображенням вкладення простору $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ в простір $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$, ототожнюючи оператор $A \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ з псевдооператором $[A] \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$.

Аналогічне "вкладення" можна побудувати і для просторів $\mathcal{L}^{+-}_{P_V,\mu}(\mathfrak{H})$, $V \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H})$, якщо покласти

$$[A]_V(\Delta) := \mathbb{P}_V(\Delta)AP_V(\Delta) \qquad \left(A \in \mathcal{L}^{+-}_{P_V,\mu}(\mathfrak{H}),\ \Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}\right). \tag{4.49}$$

Відображення $[\cdot]_V : \mathcal{L}^{+-}_{P_V,\mu}(\mathfrak{H}) \longrightarrow \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$ також є лінійним взаємно-однозначним відображенням з лінійного простору $\mathcal{L}^{+-}_{P_V,\mu}(\mathfrak{H})$ в лінійний підпростір $\left[\mathcal{L}^{+-}_{P_V,\mu}(\mathfrak{H})\right]_V = \left\{[A]_V \mid A \in \mathcal{L}^{+-}_{P_V,\mu}(\mathfrak{H})\right\}$ простору $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$. Проте, для уникнення непорозумінь, *оператори $A \in \mathcal{L}^{+-}_{P_V,\mu}(\mathfrak{H})$ з псевдооператорами $[A]_V \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$ при $V \neq \mathbb{I}$ (де $\mathbb{I} \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H})$ — одиничний оператор простору $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$) ототожнюватись* ***не будуть***, оскільки, згідно з домовленостями, прийнятими в підрозділі 4.3.6, простір $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ вважається вкладеним у всі простори виду $\mathcal{L}^{+-}_{P_V,\mu}(\mathfrak{H})$ ($V \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H})$) через ототожнення $A = A_{+,P_V,\mu}$ ($A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$), де $A_{+,P_V,\mu} = A \restriction \mathfrak{H}^+_{P_V,\mu}$ — звуження оператора A на простір $\mathfrak{H}^+_{P_v,\mu}$. А отже, при ототожненні $A = [A]_V$ ($A \in \mathcal{L}^{+-}_{P_V,\mu}(\mathfrak{H})$), один і той же лінійний неперервний оператор при різних значеннях V асоціювався б з різними псевдооператорами простору $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$.

Для довільного псевдооператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$ введемо функцію множини:

$$\nu_{P,\mathcal{A}}[\Delta] := \mathbf{Tr}\,|\mathcal{A}(\Delta)| \qquad (\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}),$$

де у випадку $\mathcal{A}(\Delta) \notin \mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$ слід покласти $\mathbf{Tr}\,|\mathcal{A}(\Delta)| = \infty$. Очевидно, що $\nu_{P,\mathcal{A}}[\Delta] \geq 0$,

$\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$. В просторі $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$ введемо функціонал:

$$\|\mathcal{A}\|_{[P],\mu} := \sup\left\{ \frac{\nu_{P,\mathcal{A}}[\Delta]}{\mu(\Delta)} \middle| \begin{array}{c} \Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}, \\ \mu(\Delta) + \nu_{P,\mathcal{A}}[\Delta] > 0 \end{array} \right\} \quad \left(\mathcal{A} \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0\right), \tag{4.50}$$

де у випадку $\mu(\Delta) = 0$ слід покласти $\frac{\nu_{P,\mathcal{A}}[\Delta]}{\mu(\Delta)} = \infty$. Оскільки функціонал $\|\mathcal{A}\|_{[P],\mu}$ є скінченним, взагалі кажучи, не при всіх $\mathcal{A} \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$, логічно розглянути наступну множину:

$$\mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0 := \left\{ \mathcal{A} \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0 \mid \|\mathcal{A}\|_{[P],\mu} < \infty \right\}. \tag{4.51}$$

З (4.50) випливає, що для довільного $\mathcal{A} \in \mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$ справедлива нерівність:

$$\mathbf{Tr}\,|\mathcal{A}(\Delta)| \le \|\mathcal{A}\|_{[P],\mu}\,\mu(\Delta) \qquad (\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}). \tag{4.52}$$

Твердження 4.31. *Пара* $\left(\mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0, \|\cdot\|_{[P],\mu}\right)$ *є лінійним нормованим простором.*

Доведення. 1) Нехай $\mathbb{O}_{\mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0} := \mathbb{O}_{\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0}$ — нульовий елемент простору $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$. Тоді, згідно (4.46), $\mathbb{O}_{\mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0} = \mathcal{O}$, де $\mathcal{O}(\Delta) = \mathbb{O}$, $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$. Отже, $\nu_{P,\mathcal{O}}[\Delta] = \mathbf{Tr}|\mathbb{O}| \equiv 0$, $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$. Звідси, враховуючи, що $\mu(R) \neq 0$, згідно (4.50), отримуємо $\left\|\mathbb{O}_{\mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0}\right\|_{[P],\mu} = \|\mathcal{O}\|_{[P],\mu} = 0$. Отже, множина $\mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$ містить нульовий елемент $\mathbb{O}_{\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0} = \mathbb{O}_{\mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0}$ лінійного простору $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$, причому $\left\|\mathbb{O}_{\mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0}\right\| = 0$.

Навпаки, нехай $\mathcal{A} \in \mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$ і $\|\mathcal{A}\|_{[P],\mu} = 0$. Тоді з нерівності (4.52) випливає, що $\mathbf{Tr}\,|\mathcal{A}(\Delta)| = 0$, $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, тобто, що $\mathcal{A}(\Delta) \equiv \mathbb{O} = \mathcal{O}(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$. Отже, $\mathcal{A} = \mathcal{O} = \mathbb{O}_{\mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0}$.

2) Нехай $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тоді, використовуючи співвідношення (4.45) та властивості сліду, при $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ отримуємо:

$$\nu_{P,\lambda\mathcal{A}}[\Delta] = \mathbf{Tr}\,|\lambda\mathcal{A}(\Delta)| = |\lambda|\nu_{P,\mathcal{A}}[\Delta];$$

$$\nu_{P,\mathcal{A}+\mathcal{B}}[\Delta] \le \mathbf{Tr}\,|\mathcal{A}(\Delta)| + \mathbf{Tr}\,|\mathcal{B}(\Delta)| = \nu_{P,\mathcal{A}}[\Delta] + \nu_{P,\mathcal{B}}[\Delta].$$

З останніх співвідношень, згідно (4.50), випливають співвідношення:

$$\|\lambda\mathcal{A}\|_{[P],\mu} = |\lambda|\,\|\mathcal{A}\|_{[P],\mu}; \quad \|\mathcal{A}+\mathcal{B}\|_{[P],\mu} \le \|\mathcal{A}\|_{[P],\mu} + \|\mathcal{B}\|_{[P],\mu}. \qquad \square$$

Наступний приклад покаже, що простір $\left(\mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0, \|\cdot\|_{[P],\mu}\right)$, взагалі кажучи, не є банаховим.

Приклад 4.32. Нехай, $\{e_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ — ортонормований базис в $\mathfrak{H}$. Покладемо:

$$R := \mathbb{R}; \quad \mathcal{R} := \mathfrak{B}(\mathbb{R});$$

$$P(\Delta)x := \sum_{k\in\mathbb{Z}\cap\Delta} (x, e_k)\, e_k, \quad \mu(\Delta) := \mathbf{card}(\Delta \cap \mathbb{Z}) \quad (\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})),$$

де $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ — σ-алгебра борелівських підмножин $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел, $\mathbf{card}(M)$ — потужність (кількість елементів) множини M. Враховуючи ототожнення $\mathbb{I} = \mathbb{I}_{+,P_V,\mu}$, одиничний оператор є елементом всіх просторів $\mathcal{L}^{+-}_{P_V,\mu}(\mathfrak{H})$ $(V \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}))$. Неважко перевірити, що $[\mathbb{I}]_V \in \mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$ і $\|[\mathbb{I}]_V\|_{[P],\mu} = 1$, для довільного $V \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H})$, де $[\cdot]_V$ — оператор "вкладення" $\mathcal{L}^{+-}_{P_V,\mu}(\mathfrak{H})$ в $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$, визначений в (4.49).

Розглянемо оператор $W \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H})$, що діє за правилом: $Wx := \sum_{k=-\infty}^{\infty}(x, e_k)\, e_{k+1}$, $x \in \mathfrak{H}$. Покладемо:

$$\mathcal{A}_n := \sum\nolimits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\,[\mathbb{I}]_{W^k} \in \mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0 \quad (n \in \mathbb{N})\,.$$

З рівності $\|[\mathbb{I}]_{W^k}\|_{[P],\mu} = 1$ $(k \in \mathbb{N})$ випливає, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\frac{1}{2^k}[\mathbb{I}]_{W^k}\right\|_{[P],\mu}$ — збіжний, отже послідовність $\{\mathcal{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальна в $\mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$. Припустимо, що існує псевдооператор $\mathcal{A} \in \mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$ такий, що $\|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}\|_{[P],\mu} \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Тоді, використовуючи нерівність (4.52) отримуємо, що для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ $\|\mathcal{A}_n(\Delta) - \mathcal{A}(\Delta)\| \le \mathbf{Tr}\,|\mathcal{A}_n(\Delta) - \mathcal{A}(\Delta)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Отже, $\mathcal{A}(\Delta) = \lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{A}_n(\Delta)$, де границю слід розуміти за рівномірною операторною нормою простору $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$. І, враховуючи, що, за формулою (4.49), $\mathcal{A}_n(\Delta) := \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\mathbb{P}_{W^k}(\Delta)\mathbb{I}P_{W^k}(\Delta) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}P_{W^k}(\Delta)$ $(\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}})$, отримуємо:

$$\mathcal{A}(\Delta) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}P_{W^k}(\Delta) \qquad (\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}), \tag{4.53}$$

де збіжність ряду слід розуміти за рівномірною операторною нормою простору $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$. За побудовою спектральної міри P, при $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ оператор $P(\Delta)$ є скінченновимірним $(\dim(P(\Delta)\mathfrak{H}) < \infty)$. Отже, враховуючи можливість зображення $\mathcal{A}(\Delta)$ у вигляді (4.44) і твердження 4.19, бачимо, що у лівій частині (4.53) стоїть скінченновимірний оператор). Проте, наприклад, при $\Delta \cap \mathbb{Z} = \{0\}$, оператор в правій частині (4.53) — нескінченновимірний. Отримана суперечність доводить, що простір $\mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$ — не повний.

Означення 4.33. Поповнення простору $\left(\mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0, \|\cdot\|_{[P],\mu}\right)$ будемо позначати через $\left(\mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}], \|\cdot\|_{[P],\mu}\right)$. (Тобто для норми на просторі $\mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]$ зберігаємо те ж саме позначення). Елементи простору $\mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]$ будемо називати **псевдооператорами**.

4.4.4. Унітарні перетворення псевдооператорів.

Нехай, $V \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H})$. Для довільного псевдооператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$ введемо наступну операторнозначну функцію множини:

$$(V \odot \mathcal{A})(\Delta) := V^{-1}\mathcal{A}(\Delta)V \qquad (\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}})\,.$$

Твердження 4.34. *Якщо $\mathcal{A} \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$ і $V \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H})$, то $V \odot \mathcal{A} \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$. Якщо ж, додатково, $\mathcal{A} \in \mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$, то $V \odot \mathcal{A} \in \mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$ і $\|V \odot \mathcal{A}\|_{[P],\mu} = \|\mathcal{A}\|_{[P],\mu}$.*

Доведення. **1.** Оскільки $A \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$, то операторнозначну функцію $\mathcal{A}$ можна подати у вигляді (4.44). Тому для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, використовуючи рівності (4.38) та (4.43) отримуємо:

$$(V \odot \mathcal{A})(\Delta) = \sum_{k=1}^{n} V^{-1}\mathbb{P}_{V_k}(\Delta) A_k P_{V_k}(\Delta) V = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{V_k V}(\Delta)\widetilde{A}_k P_{V_k V}(\Delta),$$

де $\widetilde{A}_k = \left(V_{-,P_{V_k V},\mu}\right)^{-1} A_k V_{+,P_{V_k V},\mu}$, $k \in \overline{1,n}$. Згідно з твердженнями 4.27 та 4.29, $V_{+,P_{V_k V},\mu} \in \mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^{+}_{P_{V_k V},\mu}, \mathfrak{H}^{+}_{P_{V_k},\mu}\right)$, $\left(V_{-,P_{V_k V},\mu}\right)^{-1} \in \mathcal{L}\left(\mathfrak{H}^{-}_{P_{V_k},\mu}, \mathfrak{H}^{-}_{P_{V_k V},\mu}\right)$ $(k \in \overline{1,n})$. Отже, $\widetilde{A}_k \in \mathcal{L}^{+-}_{P_{V_k V},\mu}(\mathfrak{H})$ $(k \in \overline{1,n})$. Тому $V \odot \mathcal{A} \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$.

2. Якщо ж, додатково, $A \in \mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$, то для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, використовуючи властивості сліду, отримуємо

$$\nu_{P,V\odot\mathcal{A}}[\Delta] = \mathbf{Tr}\,|V^{-1}\mathcal{A}(\Delta)V| = \mathbf{Tr}\,|\mathcal{A}(\Delta)| = \nu_{P,\mathcal{A}}[\Delta].$$

Отже, $V \odot \mathcal{A} \in \mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$ і $\|V \odot \mathcal{A}\|_{[P],\mu} = \|A\|_{[P],\mu}$. □

Згідно з твердженням 4.34, для довільного $V \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H})$ оператор:

$$V^{(0)}_{\odot}(\mathcal{A}) = V \odot \mathcal{A} \qquad (\mathcal{A} \in \mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0) \tag{4.54}$$

є ізометричним оператором на щільному лінійному підпросторі $\mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$ банахового простору $\mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]$. Легко перевірити, що цей оператор є лінійним. Тому цей оператор може бути єдиним чином продовжений за неперервністю до ізометричн. оператора

$$V_{\odot} \in \mathcal{L}(\mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]), \qquad V_{\odot} \supseteq V^{(0)}_{\odot}. \tag{4.55}$$

Означення 4.35. Асиметричним добутком оператора $V \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H})$ і псевдооператора $\mathcal{A} \in \mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]$ будемо називати псевдооператор:

$$V \odot \mathcal{A} = V_{\odot}(\mathcal{A}) \in \mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}],$$

де оператор $V_{\odot} \in \mathcal{L}(\mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}])$ визначається за допомогою співвідношень (4.55) і (4.54).

З неперервності оператора $V_{\odot} \in \mathcal{L}(\mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}])$ і означення 4.35 випливає наступне твердження.

Твердження 4.36. *Якщо* $\{\mathcal{A}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]$ *і* $\|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}\|_{[P],\mu} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, *де* $\mathcal{A} \in \mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]$, *то* $\|V \odot \mathcal{A}_n - V \odot \mathcal{A}\|_{[P],\mu} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ *(*$V \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H})$*).*

Твердження 4.37. *Для довільних* $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ *і* $V, W \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H})$ *справедливі наступні рівності:*

$$\left.\begin{aligned} V \odot (\lambda\mathcal{A} \pm \mu\mathcal{B}) &= \lambda V \odot \mathcal{A} \pm \mu V \odot \mathcal{B}; \\ \|V \odot \mathcal{A}\|_{[P],\mu} &= \|\mathcal{A}\|_{[P],\mu}; \end{aligned}\right\} \tag{4.56}$$

$$\mathbb{I} \odot \mathcal{A} = \mathcal{A}; \qquad W \odot (V \odot \mathcal{A}) = (VW) \odot \mathcal{A}. \tag{4.57}$$

Доведення. Рівності (4.56) випливають з лінійності та ізометричності оператора $V_\odot \in \mathcal{L}\left(\mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]\right)$. Рівності (4.57) на (щільному) лінійному підпросторі $\mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]_0$ простору $\mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]$ встановлюються безпосередньою перевіркою, а далі, з допомогою твердження 4.36, поширюються на весь простір $\mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]$. □

Наслідок 4.38. *Для довільного $V \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H})$ оператор $V_\odot \in \mathcal{L}\left(\mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]\right)$, визначений в (4.55) є унітарним оператором над $\mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]$.*

Доведення. За означенням і другою рівністю (4.56) оператор $V_\odot$ є ізометричним над $\mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]$. Нехай $\mathcal{B}$ довільний псевдооператор з простору $\mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]$. Покладемо, $\mathcal{A} := V^{-1} \odot \mathcal{B}$. Тоді, використовуючи рівності (4.57), отримуємо $V_\odot(\mathcal{A}) = V \odot \mathcal{A} = V \odot (V^{-1} \odot \mathcal{B}) = (V^{-1}V) \odot \mathcal{B} = \mathcal{B}$. Отже, $V_\odot$ є унітарним оператором. □

Використовуючи наслідок 4.38 та рівності (4.57) отримуємо наступну теорему.

Теорема 4.39. *Нехай, $\{V(t)\}_{t\in\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ — група унітарних операторів над простором $\mathfrak{H}$ тоді сім'я операторів, $\left(V_\odot(t)\right)(\mathcal{A}) = V(t) \odot \mathcal{A}$ $\left(\mathcal{A} \in \mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}],\ t \in \mathbb{R}\right)$ є групою унітарних операторів над $\mathfrak{T}_{P,\mu}[\mathfrak{H}]$.*

Основні результати підрозділу 4.4 було опубліковано в роботі [217], а також представлено на конференції [218].

Висновки

Дисертаційну роботу присвячено розробці нового математичного апарату, призначеного для моделювання еволюції складних систем (зокрема релятивістських та багаточастинкових статистичних систем) та формалізації фізичних теорій. Цей математичний апарат базується на теорії мінливих множин та теорії операторів в гільбертовому просторі.

Основні результати дисертації можна сформулювати таким чином:

- Введено поняття базових мінливих множин та мінливих множин і досліджено їхні властивості.

- Визначено поняття системи абстрактних траєкторій. Системи абстрактних траєкторій можуть моделювати еволюцію певної конкретної системи об'єктів, зокрема частинним випадком системи абстрактних траєкторій є множина траєкторій руху певної системи матеріальних точок. Показано, що довільна система абстрактних траєкторій породжує певну базову мінливу множину.

- Встановлено, що довільна базова мінлива множина може бути породжена системою абстрактних траєкторій, утвореною її лініями долі (тобто максимальними ланцюгами на множині її елементарно-часових станів).

- Введено аналоги теоретико-множинного відношення включення та теоретико-множинної операції об'єднання для базових мінливих множин (а саме відношення еволюційного та супереволюційного включення та операції еволюційного та супереволюційного об'єднання). Доведено, що операція еволюційного об'єднання має багато властивостей, схожих з операцією об'єднання звичайних множин.

- Введено класифікацію видимості систем відліку в мінливих множинах. Доведено, що за певних умов множина систем відліку мінливої множини може розпадатись на класи видимості, які попарно не перетинаються і будь-який клас видимості є повністю невидимим з інших класів видимості.

- Введено поняття чітко видимих мінливих множин, всі компоненти яких є цілком видимими в кожній системі відліку і доведено, що в таких мінливих множинах відображення уніфікації породжуються бієктивними відображеннями між множинами елементарно-часових станів відповідних систем відліку.

- Досліджено властивості кінематичних мінливих множин (кінематичних множин), тобто мінливих множин, оснащених різноманітними геометричними та топологічними структурами. Такі математичні об'єкти можуть виявитись корисними для моделювання фізичних та ін. процесів, що відбуваються в рамках певного просторового оточення і включають в себе рух тіл в просторі, а також можуть бути цікавими для астрофізики, оскільки існує припущення, що у великих масштабах Всесвіту закони фізики (зокрема, закони кінематики) можуть бути відмінними від тих, які діють в околі нашої сонячної системи.

- Введено поняття реального і універсального перетворення координат (між системами відліку) у кінематичних множинах. Встановлено, що реальне перетворення координат існує в будь-якій (чітко видимій) кінематичній множині, в той час, як універсальне існує далеко не завжди. Це означає, що для визначення перетворення координат елементарно-часового стану в кінематичних множинах, взагалі кажучи, недостатньо інформації про його геометрично-часове положення. Доведено критерій існування універсального перетворення координат в абстрактних кінематичних множинах.

- Досліджено властивості — універсальних кінематик, тобто кінематичних множин із заданим універсальним перетворенням координат.

- Побудовано приклади універсальних кінематик, які є математично строгими моделями еволюції фізичних систем в рамках кінематики Лоренца-Пуанкаре та її тахіонових розширень в сенсі Е. Рекамі, В. Ольховського та Р. Голдоні, а також побудовано нетривіальний клас кінематичних множин, що не допускають універсального перетворення координат. Останній результат може виявитись корисним для моделювання еволюції фізичних систем за умов гіпотези про існування частинково-залежної швидкості світла.

- Введено поняття еволюційного розширення та операцію еволюційного об'єднання для кінематичних множин та універсальних кінематик. Доведено теорему теорему про еволюційне розширення для універсальних кінематик. Очікується, що доведена теорема дасть змогу аксіоматично сформулювати основи спеціальної теорії відносності в рамках теорії універсальних кінематик. Є сподівання, що така аксіоматика виявиться більш природною з фізичної та інтуїтивної точки зору, в порівнянні з існуючими математичними аксіоматизаціями теорії відносності, і дозволить відмовитись від певних не природних з інтуїтивної точки зору постулатів, присутніх в цих аксіоматизаціях.

- Методами теорії універсальних кінематик досліджено питання про існування

"часових парадоксів", пов'язаних з наявністю теоретичної можливості вплинути на власне минуле при перевищенні швидкості світла. Дано математично строге означення понять часозворотності та часонезворотності для універсальних кінематик. Встановлено достатні ознаки умовної часозворотності та безумовної часонезворотності для універсальних кінематик. Доведено існування часонезворотних тахіонових кінематик в сенсі Е. Рекамі, В. Ольховського та Р. Голдоні, в яких дозволяється рух тіл та інерційних систем відліку з довільною швидкістю, відмінною від швидкості світла.

- Досліджено властивості одностайно-поступальних систем відліку у векторних універсальних кінематиках. Одностайно-поступальні системи відліку важливими з теоретичної точки зору тому, що у випадку одностайно-поступального руху можна дати чітке і однозначне означення переміщення, а отже і середньої та миттєвої швидкості системи відліку. Встановлено необхідну і достатню умову одностайної поступальності однієї системи відліку відносно іншої у векторній універсальній кінематиці.

- Використовуючи метод оснащених просторів, розвинутий в працях академіка Ю.М. Березанського та його учнів, побудовано простір узагальнених операторів з обмеженим проекційним слідом над заданим гільбертовим простором і встановлено його властивості.

- Доведено існування проекційного сліду для довільного узагальненого оператора з обмеженим проекційним слідом над заданим гільбертовим простором. Встановлено, що простір узагальнених операторів з обмеженим проекційним слідом вкладається в більш широкий банаховий простір псевдооператорів. Над простором псевдооператорів побудовано групу унітарних операторів, пов'язану з описом еволюції багаточастинкових квантових систем.

В майбутньому розпочаті в дисертації дослідження можуть розвиватись в таких напрямках:

- Побудова абстрактних кінематик для інерційних систем відліку. (В рамках цього напрямку розпочато лише перший етап — дослідження одностайно-поступальних систем відліку.)

- Побудова абстрактної процедури продовження кінематики з інерційних систем відліку на довільні. По аналогії з теорією міри (коли міра спочатку задається на простіших математичних об'єктах — кільцях чи напівкільцях множин, а потім продовжується на складніші системи множин — σ-алгебри) можна припустити, що кінематику зручно спочатку задавати для інерційних систем відліку, а

потім повинна існувати якась стандартна процедура продовження кінематики на довільні системи відліку. В результаті такої процедури вихідна універсальна кінематика $\mathcal{F}$, яка складається лише з попарно інерційно споріднених систем відліку має вкластись в якесь "візуальне розширення" $\widetilde{\mathcal{F}}$ кінематики $\mathcal{F}$ з більшою множиною систем відліку. Враховуючи зауваження 3.139 стосовно можливості існування горизонту видимості в неінерційних релятивістських системах відліку, для побудови такого візуального розширення доведеться вийти за межі поняття універсальної кінематики і ввести якесь більш загальне поняття "квазіуніверсальної кінематики", в якій може не виконуватись умова чіткої видимості.

- Введення поняття "еволюційної границі" універсальних кінематик. Формалізація переходу від опису еволюції дискретно-точкових (класичних та релятивістських) механічних систем до опису еволюції довільних (тобто неперервних і дискретно-неперервних) механічних систем. В існуючих на даний час роботах, пов'язаних із шостою проблемою Гільберта, можна знайти досить прості і природні системи аксіом для формалізації опису законів динаміки класичних та релятивістських дискретно-точкових систем. Коли ж переходити до неперервних та дискретно-неперервних систем, то аксіоми в існуючих на даний час роботах приймають досить громіздкий вигляд, і застосовують громіздкі математичні конструкції, неприродні для аксіоматичних теорій. Тому, основна ідея полягає в тому, що непотрібно формулювати закони динаміки для неперервних та дискретно-непервних механічних систем. Достатньо сформулювати ці закони лише для дискретно-точкових систем, а на інші системи ці закони поширити з допомогою певної (природної для фізики, але поки-що математично не побудованої) процедури "еволюційної границі", коли ми вихідну систему подумки розбиваємо на маленькі ділянки і замінюємо ці ділянки на матеріальні точки, апроксимуючи вихідну систему дискретно-точковою.

Додаток А

Узагальнені перетворення Лоренца в сенсі E. Recami, В. Ольховського та R. Goldoni для гільбертового простору

Той факт, що існування надсвітлових швидкостей не суперечить кінематиці спеціальної теорії відносності на сьогодні можна вважати загальновідомим. В роботах [219, 220] цей факт було обґрунтовано з допомогою математичної логіки. В прикладі 1.148 кінематика, що дозволяє надсвітлові трансформації була побудована явним чином за допомогою теорії мінливих множин (зазначений приклад, зокрема, було опубліковано в [93, с. 128, приклад 2.3] та [92, p. 41, example 10.3]). Хоча існування тахіонів не можна вважати експериментально доведеним, теорія тахіонів і надсвітлового руху розвивається вже понад 50 років [53–55], і на даний час є дуже актуальною. Тахіоновій тематиці присвячено досить багато публікацій в фізичних та інших наукових виданнях (див., напр. [56–59, 105–107, 151–157, 219–233]). В початкових дослідженнях в зазначеному напрямку теорія тахіонів розглядалась в рамках класичних перетворень Лоренца, і для систем відліку надсвітлова швидкість була заборонена. Пізніше в роботах E. Recami, В. Ольховського та R. Goldoni [105–107] були запропоновані узагальнені перетворення Лоренца для систем відліку, що рухаються зі швидкістю, більшою за швидкість світла c (див. також [56, 157]). В роботі [157] можна знайти також більш детальну історичну інформацію стосовно узагальнених перетворень Лоренца та різних їхніх варіантів. Ідеї E. Recami, В. Ольховського та R. Goldoni залишаються актуальними і в наш час. Зокрема B. Cox та J. Hill в роботі [58] перевідкрили формули E. Recami, В. Ольховського та R. Goldoni для узагальнених перетворень Лоренца і запропонували новий, елегантний, спосіб їх отримання. Зауважимо, що той факт, що узагальнені перетворення Лоренца, отримані в [58] не є новими був відзначений в коментарі [226]. Слід відзначити, також, що формули E. Recami, В. Ольховського та R. Goldoni для узагальнених перетворень Лоренца перевідкривались також і в роботах Sutherland, та Shepanski [233], С.Ю. Мєдвєдєва [229]. Узагальнені перетворення Лоренца в сенсі E. Recami, В. Ольховського та R. Goldoni досліджувались в роботі [57], а деякі можливі наслідки та застосування зазначених перетворень

інших галузях фізики розглядались, зокрема в роботах [224, 228]. Слід підкреслити, що в роботах [56–58, 105–107, 229, 233] узагальнені перетворення Лоренца розглядається лише у випадку, коли обидві системи відліку рухаються вздовж спільної осі "x" в тривимірному просторі, і не досліджуються нові перетворення для систем відліку з довільною орієнтацією осей. В роботі [110] узагальнені перетворення Лоренца в сенсі E. Recami, В. Ольховського та R. Goldoni були отримані для систем відліку з довільною орієнтацією осей у найбільш загальному випадку, коли простір геометричних змінних є довільним дійсним гільбертовим простором довільної розмірності, включаючи нескінченність. В роботі [111] досліджувались алгебраїчні властивості узагальнених перетворень, введених в [110]. Крім того, деякі властивості зазначених перетворень було встановлено в [86, 100].

Цей додаток містить результати, пов'язані з узагальненими перетвореннями Лоренца в сенсі E. Recami, В. Ольховського та R. Goldoni, опубліковані в [86, 100, 110, 111], які необхідні для побудови математично строгих моделей кінематики спеціальної теорії відносності, та її тахіонових розширень.

Слід зазначити, що в роботах E. Recami та В. Ольховського, а також в роботі [57] розглядались також варіанти узагальнених перетворень Лоренца, в яких координати нерухомої системи відліку, ортогональні до напрямку руху, набувають уявних значень або ж виходять за межі розмірностей вихідного простору геометричних змінних при переході до рухомої (надсвітлової) системи відліку. В даній роботі ми обмежуємось розглядом і узагальненням лише того варіанту узагальнених перетворень Лоренца, який не виводить за межі вихідного простору геометричних змінних (саме такий варіант перетворень було отримано зокрема в роботах [58, 107, 229]).

A.1. Означення і класифікація узагальнених перетворень Лоренца над гільбертовим простором

A.1.1. Абстрактні перетворення координат в просторі Мінковського над гільбертовим простором та їхні властивості. Нехай $(\mathfrak{H}, \|\cdot\|, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — гільбертовий простір над полем дійсних чисел, де $\|\cdot\|$ і $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — норма і скалярний добуток в просторі $\mathfrak{H}$ відповідно. Надалі будемо припускати автоматичне виконання умови $\dim(\mathfrak{H}) > 0$. За цієї умови простір $\mathfrak{H}$ містить принаймні один ненульовий вектор. Позначимо через $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ гільбертовий простір

$$\mathcal{M}(\mathfrak{H}) := \mathbb{R} \times \mathfrak{H} = \{(t,x) \mid t \in \mathbb{R},\ x \in \mathfrak{H}\},$$

оснащений скалярним добутком та нормою, $\langle \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2\rangle_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})} = t_1 t_2 + \langle x_1, x_2\rangle$, $\|\mathrm{w}_1\|_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})} = t_1^2 + \|x_1\|^2$ $(\mathrm{w}_i = (t_i, x_i) \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}),\ i \in \{1,2\})$. Простір $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ будемо називати ***простором Мінковського*** над гільбертовим простором $\mathfrak{H}$. В просторі $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$

виділимо наступні підпростори:

$$\mathfrak{H}_0 = \{(t, \mathbf{0}) \mid t \in \mathbb{R}\}, \qquad \mathfrak{H}_1 = \{(0, x) \mid x \in \mathfrak{H}\}, \tag{A.1}$$

де $\mathbf{0}$ — нульовий вектор. Тоді:

$$\mathcal{M}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1,$$

де $\oplus$ означає ортогональну суму підпросторів простору $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Підпростір $\mathfrak{H}_0$ ізоморфний полю дійсних чисел $\mathbb{R}$ а підпростір $\mathfrak{H}_1$ ізоморфний простору $\mathfrak{H}$. Отже, простір $\mathfrak{H}$ можна ототожнити з підпростором $\mathfrak{H}_1$ простору $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Тобто, простір $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ можна вважати розширенням простору $\mathfrak{H}$. Тому, надалі будемо використовувати однакові позначення для норми і скалярного добутку в просторах $\mathfrak{H}$ та $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ (тобто в просторі $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ будуть використовуватись позначення $\|\cdot\|$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$, без індекса "$\mathcal{M}(\mathfrak{H})$" знизу). Позначимо через $\mathbf{e}_0$ вектор:

$$\mathbf{e}_0 = (1, \mathbf{0}) \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}).$$

Введемо наступні ортопроектори на підпростори $\mathfrak{H}_0$ та $\mathfrak{H}_1$:

$$\left.\begin{aligned} &\widehat{\mathbf{T}}\mathrm{w} = t\mathbf{e}_0 = (t, \mathbf{0}) \in \mathfrak{H}_0, \quad && \mathrm{w} = (t, x) \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}); \\ &\mathbf{X}\mathrm{w} = (0, x) \in \mathfrak{H}_1, && \mathrm{w} = (t, x) \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}) \end{aligned}\right\} \tag{A.2}$$

(нагадаємо, що оператор $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ називається ортопроектором, якщо $P^2 = P^* = P$, де P^* — спряжений оператор до оператора P, а через $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ позначено простір *лінійних неперервних* операторів над $\mathfrak{H}$ (див, також, підрозділ 4.2, стор. 290)). Також позначимо через $\mathcal{T}$ наступний лінійний оператор

$$\mathcal{T}(\mathrm{w}) = t = \mathsf{tm}(\mathrm{w}), \quad \mathrm{w} = (t, x) \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$$

з $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ в $\mathbb{R}$. Тоді отримуємо наступну рівність:

$$\widehat{\mathbf{T}}\mathrm{w} = \mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0, \quad \mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}). \tag{A.3}$$

Причому, довільний вектор $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ можна єдиним чином подати у вигляді:

$$\mathrm{w} = t\mathbf{e}_0 + x = \mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0 + \mathbf{X}\mathrm{w}, \tag{A.4}$$

де $x = \mathbf{X}\mathrm{w} \in \mathfrak{H}_1$, $t = \mathcal{T}(\mathrm{w}) \in \mathbb{R}$.

Означення A.1. Оператор $S \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$ називається **оператором лінійного перетворення координат**, якщо існує неперервний обернений оператор $S^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$ (див. також зноску [A.1] внизу).

[A.1] У випадку, коли відображення S є лінійним або афінним оператором, що діє в деякому лінійному просторі ми використовуємо для оберненого відображення звичне позначення S^{-1} замість $S^{[-1]}$.

Очевидно, що добуток (композиція) будь-яких двох операторів лінійного перетворення координат є оператором лінійного перетворення координат, і що оператор, обернений до оператора лінійного перетворення координат є оператором лінійного перетворення координат. Отже, *множина всіх операторів лінійного перетворення координат утворює групу операторів в просторі* $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$.

Означення A.2. Оператор лінійного перетворення координат $S \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$ будемо називати **v-детермінованим**, якщо $\mathcal{T}(S^{-1}\mathbf{e}_0) \neq 0$. Вектор $\mathcal{V}(S) = \frac{\mathbf{X}S^{-1}\mathbf{e}_0}{\mathcal{T}(S^{-1}\mathbf{e}_0)} \in \mathfrak{H}_1$ будемо називати **швидкістю** v-детермінованого оператора лінійного перетворення координат S.

Означення A.2 повністю відповідає фізичному розумінню швидкості системи відліку. Справді, припустимо, що v-детермінований оператор лінійного перетворення координат $S \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$ відображає (часові і просторові) координати довільної точки в нерухомій системі відліку $\mathfrak{l}$ в координати цієї ж точки в іншій системі відліку $\mathfrak{l}'$, що рухається зі сталою швидкістю відносно системи відліку $\mathfrak{l}$. Розглянемо довільну нерухому відносно системи відліку $\mathfrak{l}'$ точку $\mathrm{w}'_t = x_0 + t\mathbf{e}_0$ (де $x_0 \in \mathfrak{H}_1$ — фіксований вектор, а змінна t пробігає всю дійсну вісь $\mathbb{R}$). Тоді точка w'_t в системі відліку $\mathfrak{l}$ буде виглядати, як точка $\mathrm{w}_t = S^{-1}\mathrm{w}'_t$. Тому, застосовуючи (A.4) отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathrm{w}_t &= S^{-1}x_0 + tS^{-1}\mathbf{e}_0 = \mathcal{T}\left(S^{-1}x_0\right)\mathbf{e}_0 + \mathbf{X}S^{-1}x_0 + t\left(\mathcal{T}\left(S^{-1}\mathbf{e}_0\right)\mathbf{e}_0 + \mathbf{X}S^{-1}\mathbf{e}_0\right) = \\ &= \mathcal{T}\left(S^{-1}\left(x_0 + t\mathbf{e}_0\right)\right)\mathbf{e}_0 + \mathbf{X}S^{-1}\left(x_0 + t\mathbf{e}_0\right).\end{aligned}$$

Отже, для довільних $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ таких, що $t_1 \neq t_2$ маємо:

$$\frac{\mathbf{X}\mathrm{w}_{t_2} - \mathbf{X}\mathrm{w}_{t_1}}{\mathcal{T}(\mathrm{w}_{t_2}) - \mathcal{T}(\mathrm{w}_{t_1})} = \frac{\mathbf{X}S^{-1}\left(x_0 + t_2\mathbf{e}_0 - (x_0 + t_1\mathbf{e}_0)\right)}{\mathcal{T}\left(S^{-1}\left(x_0 + t_2\mathbf{e}_0\right) - S^{-1}\left(x_0 + t_1\mathbf{e}_0\right)\right)} = \mathcal{V}(S).$$

Таким чином, довільна нерухома відносно системи відліку $\mathfrak{l}'$ точка, рухається відносно системи відліку $\mathfrak{l}$ зі сталою швидкістю $\mathcal{V}(S)$.

Довільний вектор $V \in \mathfrak{H}_1$ породжує наступні підпростори в просторі $\mathfrak{H}_1$.

$$\mathfrak{H}_1[V] = \mathbf{span}\{V\}, \quad \mathfrak{H}_{1\perp}[V] = \mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{H}_1[V] = \{x \in \mathfrak{H}_1 \mid \langle x, V\rangle = 0\},$$

де $\mathbf{span}\, M$ означає лінійну оболонку множини $M \subseteq \mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Позначимо через $\mathbf{X}_1[V]$ та $\mathbf{X}_1^{\perp}[V]$ ортопроектори на підпростори (відповідно) $\mathfrak{H}_1[V]$ та $\mathfrak{H}_{1\perp}[V]$:

$$\mathbf{X}_1[V]\,\mathrm{w} = \begin{cases} \frac{\langle V, \mathrm{w}\rangle}{\|V\|^2}V, & V \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & V = \mathbf{0} \end{cases} \quad (\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})), \quad \mathbf{X}_1^{\perp}[V] = \mathbf{X} - \mathbf{X}_1[V]. \tag{A.5}$$

Неважко переконатись, що для довільного $V \in \mathfrak{H}_1$ справедливі такі рівності:

$$\left.\begin{array}{rlrl}
\widehat{\mathbf{T}}+\mathbf{X}= & \mathbb{I}; & \mathbf{X}_1[V]+\mathbf{X}_1^{\perp}[V]= & \mathbf{X}; \\
\widehat{\mathbf{T}}+\mathbf{X}_1[V]+\mathbf{X}_1^{\perp}[V]= & \mathbb{I}; & & \\
\widehat{\mathbf{T}}\mathbf{X}=\mathbf{X}\widehat{\mathbf{T}}= & \mathbb{O}; & \mathbf{X}_1[V]\,\mathbf{X}_1^{\perp}[V]=\mathbf{X}_1^{\perp}[V]\,\mathbf{X}_1[V]= & \mathbb{O}; \\
\widehat{\mathbf{T}}\mathbf{X}_1[V]=\mathbf{X}_1[V]\,\widehat{\mathbf{T}}= & \mathbb{O}; & \widehat{\mathbf{T}}\mathbf{X}_1^{\perp}[V]=\mathbf{X}_1^{\perp}[V]\,\widehat{\mathbf{T}}= & \mathbb{O}; \\
\mathbf{X}\mathbf{X}_1[V]=\mathbf{X}_1[V]\,\mathbf{X}= & \mathbf{X}_1[V]; & \mathbf{X}\mathbf{X}_1^{\perp}[V]=\mathbf{X}_1^{\perp}[V]\,\mathbf{X}= & \mathbf{X}_1^{\perp}[V], \\
\mathbf{X}_1[\lambda V]= & \mathbf{X}_1[V]; & \mathbf{X}_1^{\perp}[\lambda V]=\mathbf{X}_1^{\perp}[V] \quad (\forall\lambda\in & \mathbb{R}\setminus\{0\}),
\end{array}\right\} \tag{A.6}$$

де $\mathbb{I}=\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}$ і $\mathbb{O}$ — одиничний та нульовий оператор в просторі $\mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$ відповідно:

$$\mathbb{I}\mathrm{w}=\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}\mathrm{w}=\mathrm{w}; \qquad \mathbb{O}\mathrm{w}=\mathbf{0} \qquad (\forall\mathrm{w}\in\mathcal{M}(\mathfrak{H})).$$

Лема A.3. *Нехай оператор лінійного перетворення координат $S\in\mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$ є таким, що обидва оператори S та S^{-1} є v-детермінованими. Тоді S є бієкцією між підпросторами $\mathfrak{H}_0\oplus\mathfrak{H}_1[\mathcal{V}(S)]$ та $\mathfrak{H}_0\oplus\mathfrak{H}_1[\mathcal{V}(S^{-1})]$. При цьому для довільного вектора $\mathrm{w}=t\mathbf{e}_0+\lambda\mathcal{V}(S)\in\mathfrak{H}_0\oplus\mathfrak{H}_1[\mathcal{V}(S)]$ справедлива наступна рівність:*

$$S(t\mathbf{e}_0+\lambda\mathcal{V}(S))=\alpha_S\left((t-\lambda\beta_S)\,\mathbf{e}_0+(t-\lambda)\,\mathcal{V}\left(S^{-1}\right)\right) \quad (\forall t,\lambda\in\mathbb{R}),$$

де $\alpha_S=\mathcal{T}(S\mathbf{e}_0)$, $\beta_S=1-\dfrac{1}{\mathcal{T}(S\mathbf{e}_0)\,\mathcal{T}(S^{-1}\mathbf{e}_0)}=1-\dfrac{1}{\alpha_S\alpha_{S^{-1}}}$.

Доведення. Нехай S, S^{-1} є v-детермінованими операторами лінійного перетворення координат. Тоді за означенням A.2, використовуючи рівності (A.3), (A.6), для довільних $t,\lambda\in\mathbb{R}$ отримуємо:

$$\begin{aligned}
S(t\mathbf{e}_0+\lambda\mathcal{V}(S))&=tS\mathbf{e}_0+\lambda S\mathcal{V}(S)=tS\mathbf{e}_0+\lambda S\frac{\mathbf{X}S^{-1}\mathbf{e}_0}{\mathcal{T}(S^{-1}\mathbf{e}_0)}=\\
&=tS\mathbf{e}_0+\frac{\lambda}{\mathcal{T}(S^{-1}\mathbf{e}_0)}S\left(S^{-1}\mathbf{e}_0-\mathcal{T}\left(S^{-1}\mathbf{e}_0\right)\mathbf{e}_0\right)=\\
&=tS\mathbf{e}_0+\frac{\lambda}{\mathcal{T}(S^{-1}\mathbf{e}_0)}\left(\mathbf{e}_0-\mathcal{T}\left(S^{-1}\mathbf{e}_0\right)S\mathbf{e}_0\right)=(t-\lambda)\,S\mathbf{e}_0+\frac{\lambda}{\mathcal{T}(S^{-1}\mathbf{e}_0)}\mathbf{e}_0=\\
&=(t-\lambda)\left(\mathcal{T}(S\mathbf{e}_0)\,\mathbf{e}_0+\mathbf{X}S\mathbf{e}_0\right)+\frac{\lambda}{\mathcal{T}(S^{-1}\mathbf{e}_0)}\mathbf{e}_0=\\
&=(t-\lambda)\,\mathcal{T}(S\mathbf{e}_0)\left(\mathbf{e}_0+\frac{\mathbf{X}S\mathbf{e}_0}{\mathcal{T}(S\mathbf{e}_0)}\right)+\frac{\lambda}{\mathcal{T}(S^{-1}\mathbf{e}_0)}\mathbf{e}_0=\\
&=\mathcal{T}(S\mathbf{e}_0)\left(\left(t-\lambda\left(1-\frac{1}{\mathcal{T}(S\mathbf{e}_0)\,\mathcal{T}(S^{-1}\mathbf{e}_0)}\right)\right)\mathbf{e}_0+(t-\lambda)\,\mathcal{V}\left(S^{-1}\right)\right)=\\
&=\alpha_S\left((t-\lambda\beta_S)\,\mathbf{e}_0+(t-\lambda)\,\mathcal{V}\left(S^{-1}\right)\right).
\end{aligned}$$

Отже, оператор S переводить підпростір $\mathfrak{H}_0\oplus\mathfrak{H}_1[\mathcal{V}(S)]$ в підпростір $\mathfrak{H}_0\oplus\mathfrak{H}_1[\mathcal{V}(S^{-1})]$.

У випадку, коли $\mathcal{V}(S) \neq \mathbf{0}$, підпростір $\mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1[\mathcal{V}(S)]$ є двовимірним ($\dim(\mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1[\mathcal{V}(S)]) = 2$). І оскільки S є бієкцією на $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$, розмірність образу $S(\mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1[\mathcal{V}(S)]) \subseteq \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1[\mathcal{V}(S^{-1})]$ також мусить дорівнювати 2. Отже, враховуючи, що $\dim(\mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1[\mathcal{V}(S^{-1})]) \leq 2$, отримуємо $S(\mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1[\mathcal{V}(S)]) = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1[\mathcal{V}(S^{-1})]$ і $\dim(\mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1[\mathcal{V}(S^{-1})]) = 2$. Таким чином, у випадку $\mathcal{V}(S) \neq \mathbf{0}$, лему доведено.

Вище було доведено, що коли $\mathcal{V}(S) \neq \mathbf{0}$, то $\dim(\mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1[\mathcal{V}(S^{-1})]) = 2$. Отже, якщо $\mathcal{V}(S) \neq \mathbf{0}$, то $\mathcal{V}(S^{-1}) \neq \mathbf{0}$. Навпаки, якщо $\mathcal{V}(S^{-1}) \neq \mathbf{0}$, то $\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}\left((S^{-1})^{-1}\right) \neq \mathbf{0}$. Отже, у випадку $\mathcal{V}(S) = \mathbf{0}$, маємо рівність $\mathcal{V}(S^{-1}) = \mathbf{0}$. Тому, у цьому випадку $\mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1[\mathcal{V}(S)] = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1[\mathcal{V}(S^{-1})] = \mathfrak{H}_0$. Отже, одновимірний підпростір $\mathfrak{H}_0$ є інваріантним відносно оператора S. І оскільки S є бієктивним лінійним відображенням, отримуємо рівність $S(\mathfrak{H}_0) = \mathfrak{H}_0$. Звідси, $S(\mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1[\mathcal{V}(S)]) = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1[\mathcal{V}(S^{-1})]$. Таким чином, у випадку $\mathcal{V}(S) = \mathbf{0}$ лему також доведено. □

A.1.2. Загальна група Лоренца в гільбертовому просторі Всюди в даній роботі число c означає фіксовану додатну дійсну константу, яка має фізичний зміст швидкості світла в вакуумі. Позначимо через $\mathsf{M}_c(\cdot)$ псевдо-метрику Лоренца-Мінковського на просторі $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$:

$$\mathsf{M}_c(\mathrm{w}) = \|\mathbf{X}\mathrm{w}\|^2 - c^2\mathcal{T}^2(\mathrm{w}), \qquad \mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}). \tag{A.7}$$

псевдо-метрика (A.7) породжується наступним квазіскалярним добутком:

$$\langle\langle \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \rangle\rangle_c = \langle \mathbf{X}\mathrm{w}_1, \mathbf{X}\mathrm{w}_2 \rangle - c^2\mathcal{T}(\mathrm{w}_1)\mathcal{T}(\mathrm{w}_2), \quad \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}) \tag{A.8}$$

$$\mathsf{M}_c(\mathrm{w}) = \langle\langle \mathrm{w}, \mathrm{w} \rangle\rangle_c, \qquad \mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}). \tag{A.9}$$

Квазіскалярний добуток $\langle\langle \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \rangle\rangle_c$ ($\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$) є білінійною формою відносно змінних $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2$. Тому, для довільних $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ справедлива наступна рівність:

$$\langle\langle \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \rangle\rangle_c = \frac{1}{2}\left(\mathsf{M}_c(\mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2) - \mathsf{M}_c(\mathrm{w}_1) - \mathsf{M}_c(\mathrm{w}_2)\right). \tag{A.10}$$

Позначення A.4. Позначимо через $\mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$ множину всіх операторів лінійного перетворення координат над $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$, що залишають незмінними значення функціоналу (A.7), тобто множину всіх операторів лінійного перетворення координат $L \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$ таких, що:

$$\mathsf{M}_c(L\mathrm{w}) = \mathsf{M}_c(\mathrm{w}) \qquad (\forall \mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})). \tag{A.11}$$

З рівності (A.10) випливає, що довільний оператор $L \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$ залишає незмін-

ними значення квазіскалярного добутку (A.8):

$$\langle\langle L\mathrm{w}_1, L\mathrm{w}_2\rangle\rangle_c = \langle\langle \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2\rangle\rangle_c, \qquad \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}) \tag{A.12}$$

Легко перевірити, що добуток (композиція) будь-яких двох операторів з $\mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$ належить до $\mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$, і що оператор, обернений до оператора з $\mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$ також належить до $\mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$. Отже, справедливе наступне твердження:

Твердження A.5. *Множина $\mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$ є групою операторів над простором $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$.*

Відповідно до [99] групу $\mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$ будемо називати ***загальною групою Лоренца*** над простором $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Зауважимо, що узагальнення класичної групи Лоренца на випадок дійсного гільбертового простору досліджувалось в роботах [234–236]. В зазначених роботах було запропоновано дещо інший (але логічно еквівалентний нашому) підхід до визначення групи Лоренца над гільбертовим простором. А саме, в цих роботах часова розмірність не "долучається" до заданого гільбертового простору $\mathfrak{H}$ (шляхом утворення простору $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$), а вибирається в просторі $\mathfrak{H}$ довільним чином. Тому остання конструкція є коректною лише за умови $\dim(\mathfrak{H}) \geq 2$. В нашому підході ми, очевидно, не потребуємо накладання останньої умови.

Твердження A.6. *Будь-яке загальне перетворення Лоренца $L \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$ є v-детермінованим, причому $\|\mathcal{V}(L)\| < c$.*

Доведення. Справді, згідно з формулою (A.7), маємо:

$$\mathsf{M}_c(\mathbf{e}_0) = \|\mathbf{X}\mathbf{e}_0\|^2 - c^2\mathcal{T}^2(\mathbf{e}_0) = 0 - c^2 \cdot 1 = -c^2.$$

Як було зазначено вище, $L^{-1} \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$ (для довільного $L \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$). Отже, згідно з (A.11), отримуємо: $-c^2 = \mathsf{M}_c(\mathbf{e}_0) = \mathsf{M}_c(L^{-1}\mathbf{e}_0) = \|\mathbf{X}L^{-1}\mathbf{e}_0\|^2 - c^2\mathcal{T}^2(L^{-1}\mathbf{e}_0)$. Звідси, $|\mathcal{T}(L^{-1}\mathbf{e}_0)| = \frac{1}{c}\sqrt{\|\mathbf{X}L^{-1}\mathbf{e}_0\|^2 + c^2} > 0$. Таким чином, оператор лінійного перетворення координат L є v-детермінованим, причому:

$$\|\mathcal{V}(L)\| = \frac{\|\mathbf{X}L^{-1}\mathbf{e}_0\|}{|\mathcal{T}(L^{-1}\mathbf{e}_0)|} = c\frac{\|\mathbf{X}L^{-1}\mathbf{e}_0\|}{\sqrt{\|\mathbf{X}L^{-1}\mathbf{e}_0\|^2 + c^2}} < c. \qquad \square$$

Мета наступного твердження — виділити певні, характеристичні, властивості загальних перетворень Лоренца, які можуть служити основою для іншого означення загальної групи Лоренца, і які стануть мотивацією для визначення множини узагальнених перетворень Лоренца, в рамках якої дозволяється існування надсвітлових швидкостей для систем відліку.

Твердження A.7. *Оператор лінійного перетворення координат $L \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$ належить до групи $\mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$ тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:*

1. *Обидва оператори лінійного перетворення координат L та L^{-1} є v-детермінованими;*

2. $\mathsf{M}_c(L\mathrm{w}) = \mathsf{M}_c(\mathrm{w})$ $(\forall \mathrm{w} \in \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1[\mathcal{V}(L)])$*;*

3. Якщо $\widehat{\mathbf{T}}\mathrm{w} = \mathbf{X}_1[\mathcal{V}(L)]\,\mathrm{w} = \mathbf{0}$*, то* $\widehat{\mathbf{T}}L\mathrm{w} = \mathbf{X}_1[\mathcal{V}(L^{-1})]\,L\mathrm{w} = \mathbf{0}$ $(\forall \mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}))$*;*

4. $\left\|\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathcal{V}(L)]\,\mathrm{w}\right\| = \left\|\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathcal{V}(L^{-1})]\,L\mathrm{w}\right\|$*,* $(\forall \mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}))$*.*

Доведення. **1.** Нехай $L \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$.

1.1. Згідно з твердженням А.6, оператор L є v-детермінованим. Оскільки $\mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$ є групою операторів, то $L^{-1} \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$, а тому оператор L^{-1} також є v-детермінованим.

1.2. Виконання другої умови даного твердження випливає з рівності (А.11).

1.3. Нехай, $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ і $\widehat{\mathbf{T}}\mathrm{w} = \mathbf{X}_1[\mathcal{V}(L)]\,\mathrm{w} = \mathbf{0}$. Тоді для довільного вектора $w_{t,\lambda} = t\mathbf{e}_0 + \lambda\mathcal{V}(L) \in \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1[\mathcal{V}(L)]$ маємо:

$$\langle\langle w_{t,\lambda}, \mathrm{w}\rangle\rangle_c = \langle \mathbf{X}w_{t,\lambda}, \mathbf{X}\mathrm{w}\rangle - c^2\mathcal{T}(w_{t,\lambda})\,\mathcal{T}(\mathrm{w}) = \lambda\langle\mathcal{V}(L), \mathbf{X}\mathrm{w}\rangle - c^2 t\left\langle\widehat{\mathbf{T}}\mathrm{w}, \mathbf{e}_0\right\rangle =$$
$$= \lambda\langle\mathcal{V}(L), \mathbf{X}\mathrm{w}\rangle = \lambda\langle\mathbf{X}\mathcal{V}(L), \mathrm{w}\rangle = \lambda\langle\mathcal{V}(L), \mathrm{w}\rangle = 0$$

Тому, згідно з рівністю (А.12), маємо: $\langle\langle Lw_{t,\lambda}, L\mathrm{w}\rangle\rangle_c = 0$ $(\forall t, \lambda \in \mathbb{R})$. Отже, застосовуючи лему А.3, отримуємо:

$$\langle\langle \alpha_L((t - \lambda\beta_L)\,\mathbf{e}_0 + (t - \lambda)\,\mathcal{V}(L^{-1})), L\mathrm{w}\rangle\rangle_c = 0 \qquad (\forall t, \lambda \in \mathbb{R}),$$

де (оскільки оператори L, L^{-1} є v-детермінованими) $\alpha_L = \mathcal{T}(L\mathbf{e}_0) \neq 0$, $\alpha_{L^{-1}} \neq 0$, $\beta_L = 1 - \frac{1}{\alpha_L\alpha_{L^{-1}}} \neq 1$. Оскільки $\beta_L \neq 1$, то множина пар $\{(t - \lambda\beta_L,\, t - \lambda) \mid t, \lambda \in \mathbb{R}\}$ збігається з $\mathbb{R}^2$. Тому, враховуючи, що $\alpha_L \neq 0$, дістаємо:

$$\langle\langle t\mathbf{e}_0 + \lambda\mathcal{V}(L^{-1}), L\mathrm{w}\rangle\rangle_c = 0 \qquad (\forall t, \lambda \in \mathbb{R}).$$

Зокрема при $t_1 = -\frac{1}{c^2}$, $\lambda_1 = 0$ і $t_2 = 0$, $\lambda_2 = 1$ отримуємо:

$$0 = \left\langle\left\langle -\frac{1}{c^2}\mathbf{e}_0, L\mathrm{w}\right\rangle\right\rangle_c = -c^2\mathcal{T}\left(-\frac{1}{c^2}\mathbf{e}_0\right)\mathcal{T}(L\mathrm{w}) = \mathcal{T}(L\mathrm{w});$$
$$\widehat{\mathbf{T}}L\mathrm{w} = \mathcal{T}(L\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0 = \mathbf{0}; \tag{А.13}$$
$$0 = \left\langle\left\langle\mathcal{V}\left(L^{-1}\right), L\mathrm{w}\right\rangle\right\rangle_c = \left\langle\mathcal{V}\left(L^{-1}\right), L\mathrm{w}\right\rangle;$$
$$\mathbf{X}_1\left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right]L\mathrm{w} = \left\{\begin{matrix} \frac{\left\langle\mathcal{V}\left(L^{-1}\right), L\mathrm{w}\right\rangle}{\|\mathcal{V}(L^{-1})\|^2}\mathcal{V}(L^{-1}), & \mathcal{V}(L^{-1}) \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & \mathcal{V}(L^{-1}) = \mathbf{0} \end{matrix}\right\} = \mathbf{0}. \tag{А.14}$$

Таким чином, згідно з формулами (А.13), (А.14), маємо $\widehat{\mathbf{T}}L\mathrm{w} = \mathbf{X}_1[\mathcal{V}(L^{-1})]\,L\mathrm{w} = \mathbf{0}$.

1.4. Нехай, $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Тоді, застосовуючи (А.12) і (А.6) отримуємо:

$$\left\|\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathcal{V}(L)]\,\mathrm{w}\right\|^2 = \left\langle\left\langle\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathcal{V}(L)]\,\mathrm{w},\, \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathcal{V}(L)]\,\mathrm{w}\right\rangle\right\rangle_c =$$
$$= \left\langle\left\langle L\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathcal{V}(L)]\,\mathrm{w},\, L\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathcal{V}(L)]\,\mathrm{w}\right\rangle\right\rangle_c =$$
$$= \left\langle\left\langle\left(\widehat{\mathbf{T}} + \mathbf{X}_1\left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right] + \mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right]\right)L\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathcal{V}(L)]\,\mathrm{w},\, L\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathcal{V}(L)]\,\mathrm{w}\right\rangle\right\rangle_c =$$
$$= \left\langle\left\langle\widehat{\mathbf{T}}L\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathcal{V}(L)]\,\mathrm{w},\, L\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathcal{V}(L)]\,\mathrm{w}\right\rangle\right\rangle_c +$$

$$+\left\langle\left\langle \mathbf{X}_1\left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right] L\mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L\right)\right]\mathrm{w},\, L\mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L\right)\right]\mathrm{w}\right\rangle\right\rangle_c +$$
$$+\left\langle\left\langle \mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right] L\mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L\right)\right]\mathrm{w},\, L\mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L\right)\right]\mathrm{w}\right\rangle\right\rangle_c . \tag{A.15}$$

Відповідно до (A.6), маємо $\widehat{\mathbf{T}}\mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L\right)\right]\mathrm{w} = \mathbf{X}_1\left[\mathcal{V}\left(L\right)\right]\mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L\right)\right]\mathrm{w} = \mathbf{0}$. Тому, використовуючи попередній пункт 1.3, приходимо до рівності $\widehat{\mathbf{T}}L\mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L\right)\right]\mathrm{w} = \mathbf{X}_1\left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right]L\mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L\right)\right]\mathrm{w} = \mathbf{0}$. Отже, за формулою (A.15), отримуємо:

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L\right)\right]\mathrm{w}\right\|^2 &= \left\langle\left\langle \mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right] L\mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L\right)\right]\mathrm{w},\, L\mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L\right)\right]\mathrm{w}\right\rangle\right\rangle_c = \\ &= \left\langle \mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right] L\mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L\right)\right]\mathrm{w},\, L\mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L\right)\right]\mathrm{w}\right\rangle = \\ &= \left\langle \mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right] L\mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L\right)\right]\mathrm{w},\, \mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right] L\mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L\right)\right]\mathrm{w}\right\rangle = \\ &= \left\|\mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right] L\mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L\right)\right]\mathrm{w}\right\|^2 .\end{aligned} \tag{A.16}$$

Використовуючи співвідношення (A.6), отримуємо рівність,

$$L\mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L\right)\right]\mathrm{w} = L\left(\mathrm{w} - \widehat{\mathbf{T}}\mathrm{w} - \mathbf{X}_1\left[\mathcal{V}\left(L\right)\right]\mathrm{w}\right) = L\mathrm{w} - Lw,$$

де $w = \widehat{\mathbf{T}}\mathrm{w} + \mathbf{X}_1\left[\mathcal{V}\left(L\right)\right]\mathrm{w} \in \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1\left[\mathcal{V}\left(L\right)\right]$. За лемою A.3, маємо, $Lw \in \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1\left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right]$. Тому, згідно з формулами (A.6), одержуємо:

$$\mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right] Lw = \mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right]\left(\widehat{\mathbf{T}} + \mathbf{X}_1\left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right]\right) Lw = \mathbf{0};$$

$$\mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right] L\mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L\right)\right]\mathrm{w} = \mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right]\left(L\mathrm{w} - Lw\right) = \mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right] L\mathrm{w}.$$

Отже, застосовуючи (A.16), маємо, $\left\|\mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L\right)\right]\mathrm{w}\right\|^2 = \left\|\mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right] L\mathrm{w}\right\|^2$ ($\mathrm{w} \in \mathcal{M}\left(\mathfrak{H}\right)$). Таким чином, умови 1-4 даного твердження виконуються для довільного оператора лінійного перетворення координат $L \in \mathfrak{O}\left(\mathfrak{H}, c\right)$.

2. Навпаки, припустимо, що оператор лінійного перетворення координат $L \in \mathcal{L}\left(\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}\right)\right)$ задовольняє умови 1-4. Розглянемо довільний вектор $\mathrm{w} \in \mathcal{M}\left(\mathfrak{H}\right)$. Вектор w можна подати у вигляді:

$$\mathrm{w} = \mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2, \quad \text{де}$$
$$\left.\begin{aligned}\mathrm{w}_1 &= \mathcal{T}\left(\mathrm{w}\right)\mathbf{e}_0 + \mathbf{X}_1\left[\mathcal{V}\left(L\right)\right]\mathrm{w} \in \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1\left[\mathcal{V}\left(L\right)\right], \\ \mathrm{w}_2 &= \mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L\right)\right]\mathrm{w} \in \mathfrak{H}_{1\perp}\left[\mathcal{V}\left(L\right)\right].\end{aligned}\right\} \tag{A.17}$$

З формул (A.17) і (A.6) випливає рівність, $\widehat{\mathbf{T}}\mathrm{w}_2 = \mathbf{X}_1\left[\mathcal{V}\left(L\right)\right]\mathrm{w}_2 = \mathbf{0}$. Отже, використовуючи умову 3, маємо:

$$\widehat{\mathbf{T}}L\mathrm{w}_2 = \mathbf{X}_1\left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right] L\mathrm{w}_2 = \mathbf{0}. \qquad \text{Звідси:} \tag{A.18}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{M}_c\left(L\mathrm{w}\right) &= \mathsf{M}_c\left(L\mathrm{w}_1 + L\mathrm{w}_2\right) = \left\|\mathbf{X}L\mathrm{w}_1 + \mathbf{X}L\mathrm{w}_2\right\|^2 - c^2\left(\mathcal{T}\left(L\mathrm{w}_1\right) + \mathcal{T}\left(L\mathrm{w}_2\right)\right)^2 = \\ &= \left\|\mathbf{X}L\mathrm{w}_1 + \mathbf{X}L\mathrm{w}_2 + \widehat{\mathbf{T}}L\mathrm{w}_2\right\|^2 - c^2\left(\mathcal{T}\left(L\mathrm{w}_1\right) + 0\right)^2 = \\ &= \left\|\mathbf{X}L\mathrm{w}_1 + L\mathrm{w}_2\right\|^2 - c^2\mathcal{T}^2\left(L\mathrm{w}_1\right).\end{aligned} \tag{A.19}$$

Оскільки $\mathrm{w}_1 \in \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1 [\mathcal{V}(L)]$, то, за лемою А.3, маємо $L\mathrm{w}_1 \in \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1 [\mathcal{V}(L^{-1})]$. Отже, згідно з (А.18), отримуємо:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{X}L\mathrm{w}_1, L\mathrm{w}_2\rangle = \langle L\mathrm{w}_1, \mathbf{X}L\mathrm{w}_2\rangle = \left\langle L\mathrm{w}_1, \left(\widehat{\mathbf{T}} + \mathbf{X}\right) L\mathrm{w}_2\right\rangle = \\ = \langle L\mathrm{w}_1, L\mathrm{w}_2\rangle = \left\langle \left(\widehat{\mathbf{T}} + \mathbf{X}_1 \left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right]\right) L\mathrm{w}_1, L\mathrm{w}_2\right\rangle = \\ = \left\langle L\mathrm{w}_1, \left(\widehat{\mathbf{T}} + \mathbf{X}_1 \left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right]\right) L\mathrm{w}_2\right\rangle = 0.\end{aligned}$$

Таким чином, $\|\mathbf{X}L\mathrm{w}_1 + L\mathrm{w}_2\|^2 = \|\mathbf{X}L\mathrm{w}_1\|^2 + \|L\mathrm{w}_2\|^2$. І, використовуючи рівності (А.19),(А.18), умови 2,4, враховуючи, що $\mathrm{w}_1 \in \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1 [\mathcal{V}(L)]$ дістаємо:

$$\begin{aligned}&\mathsf{M}_c(L\mathrm{w}) = \mathsf{M}_c(L\mathrm{w}_1) + \|L\mathrm{w}_2\|^2 = \\ &= \mathsf{M}_c(L\mathrm{w}_1) + \left\|\mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right] L\mathrm{w}_2\right\|^2 = \mathsf{M}_c(\mathrm{w}_1) + \left\|\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathcal{V}(L)]\,\mathrm{w}_2\right\|^2 = \\ &= \mathsf{M}_c(\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0 + \mathbf{X}_1[\mathcal{V}(L)]\,\mathrm{w}) + \left\|\left(\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathcal{V}(L)]\right)^2 \mathrm{w}\right\|^2 = \\ &= \|\mathbf{X}_1[\mathcal{V}(L)]\,\mathrm{w}\|^2 - c^2\mathcal{T}^2(\mathrm{w}) + \left\|\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathcal{V}(L)]\,\mathrm{w}\right\|^2 = \mathsf{M}_c(\mathrm{w}) \quad (\forall \mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})).\end{aligned}$$

Звідси маємо, $L \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$. □

А.1.3. Узагальнені перетворення Лоренца для скінченних швидкостей

Позначення А.8. Позначимо через $\mathfrak{O}\mathfrak{T}_{\mathbf{fin}}(\mathfrak{H}, c)$ множину операторів лінійного перетворення координат $L \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$, що задовольняють наступні умови:

1′. Обидва оператори перетворення координат L та L^{-1} є v-детермінованими;

2′. $(\mathsf{M}_c(L\mathrm{w}))^2 = (\mathsf{M}_c(\mathrm{w}))^2$ $(\forall \mathrm{w} \in \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1 [\mathcal{V}(L)])$;

3′. Якщо $\widehat{\mathbf{T}}\mathrm{w} = \mathbf{X}_1[\mathcal{V}(L)]\,\mathrm{w} = \mathbf{0}$, то $\widehat{\mathbf{T}}L\mathrm{w} = \mathbf{X}_1[\mathcal{V}(L^{-1})]\,L\mathrm{w} = \mathbf{0}$ $(\forall \mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}))$;

4′. $\left\|\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathcal{V}(L)]\,\mathrm{w}\right\| = \left\|\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathcal{V}(L^{-1})]\,L\mathrm{w}\right\|$, $(\forall \mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}))$.

Порівняно з умовами 1-4 твердження А.7, лише умова 2 зазнала змін. Очевидно, що з умови 2 твердження А.7 випливає умова 2′. Тому:

$$\mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c) \subseteq \mathfrak{O}\mathfrak{T}_{\mathbf{fin}}(\mathfrak{H}, c). \tag{А.20}$$

Як буде показано далі в теоремі А.9, ця невеличка модифікація другої умови приводить до можливості надсвітлової швидкості системи відліку (тобто до можливості $\|\mathcal{V}(L)\| > c$ для $L \in \mathfrak{O}\mathfrak{T}_{\mathbf{fin}}(\mathfrak{H}, c)$). Це означає, що включення, обернене до (А.20) не може мати місця. Отже, зазначене включення, насправді, є строгим.

З умови $3'$ випливає, що для довільного оператора $L \in \mathfrak{OT}_{\mathbf{fin}}(\mathfrak{H}, c)$ має місце співвідношення:

$$L\left(\mathfrak{H}_{1\perp}\left[\mathcal{V}(L)\right]\right) \subseteq \mathfrak{H}_{1\perp}\left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right]. \tag{A.21}$$

Справді, для довільного вектора $\mathrm{w} \in \mathfrak{H}_{1\perp}\left[\mathcal{V}(L)\right]$ маємо, $\widehat{\mathbf{T}}\mathrm{w} = \mathbf{X}_1\left[\mathcal{V}(L)\right]\mathrm{w} = \mathbf{0}$. Тому, згідно з умовою $3'$, отримуємо, $\widehat{\mathbf{T}}L\mathrm{w} = \mathbf{X}_1\left[\mathcal{V}(L^{-1})\right]L\mathrm{w} = \mathbf{0}$. Отже, використовуючи рівності (A.6), маємо, $L\mathrm{w} = \left(\widehat{\mathbf{T}} + \mathbf{X}_1\left[\mathcal{V}(L^{-1})\right] + \mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}(L^{-1})\right]\right)L\mathrm{w} = \mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}(L^{-1})\right]L\mathrm{w} \in \mathfrak{H}_{1\perp}\left[\mathcal{V}(L^{-1})\right]$.

Позначимо через $\mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$ множину всіх ***унітарних*** операторів на підпросторі $\mathfrak{H}_1$, тобто множину всіх лінійних операторів $J \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_1)$ таких, що $\|Jx\| = \|x\|$ $(\forall x \in \mathfrak{H}_1)$ і $J\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_1$. Для довільного оператора $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$ введемо оператор $\widetilde{J} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$ за наступною формулою:

$$\widetilde{J}\mathrm{w} := \widehat{\mathbf{T}}\mathrm{w} + J\mathbf{X}\mathrm{w} = \mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0 + J\mathbf{X}\mathrm{w}, \quad \mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}). \tag{A.22}$$

Із (A.22) випливає, що:

$$\forall J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)\ \ \widetilde{J} \in \mathfrak{U}(\mathcal{M}(\mathfrak{H})), \tag{A.23}$$

де $\mathfrak{U}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$ — множина всіх унітарних операторів на просторі $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$.

Теорема A.9. *Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$ належить до класу $\mathfrak{OT}_{\mathbf{fin}}(\mathfrak{H}, c)$ тоді і тільки тоді, коли існують число $s \in \{-1, 1\}$, вектор $V \in \mathfrak{H}_1$, $\|V\| \neq c$ і оператор $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$ такі, що для довільного вектора $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ вектор $L\mathrm{w}$ можна подати за формулою:*

$$L\mathrm{w} = \frac{s\left(\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \frac{\langle V, \mathrm{w}\rangle}{c^2}\right)}{\sqrt{\left|1 - \frac{\|V\|^2}{c^2}\right|}}\mathbf{e}_0 + J\left(\frac{s\left(\mathcal{T}(\mathrm{w})\,V - \mathbf{X}_1[V]\,\mathrm{w}\right)}{\sqrt{\left|1 - \frac{\|V\|^2}{c^2}\right|}} + \mathbf{X}_1^{\perp}[V]\,\mathrm{w}\right), \tag{A.24}$$

при цьому, $\mathcal{V}(L) = V$.

Зауважимо, що простір $\mathbb{R}^d$ $(d \in \mathbb{N})$ можна вважати гільбертовим простором зі скалярним добутком $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \sum_{j=1}^{d} x_j y_j$ $(\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_d) \in \mathbb{R}^d)$. У частинному випадку $\mathfrak{H} = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{M}(\mathfrak{H}) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^4$, $V = (0, v, 0, 0)$ (де $v \in \mathbb{R}$, $|v| > c$), і $J(0, x, y, z) = (0, -x, y, z)$ $(x, y, z \in \mathbb{R})$, з формули (A.24) (див. теорему A.9) отримуємо узагальнені перетворення Лоренца в сенсі E. Recami, В. Ольховського та R. Goldoni (див., наприклад, [107, формула (1)], [57, формула (12)] та [58, формули (3.17)–(3.18)]). При накладанні додаткових умов $\|V\| < c$, $\dim(\mathfrak{H}) = 3$, $s = 1$ формула (A.24) є еквівалентною формулі (2.28б) з [167, ст. 37]. Отже, в цьому випадку формула

(A.24) дає класичні перетворення Лоренца для інерційних систем відліку в найбільш загальній формі запису, з довільною орієнтацією осей координат.

Для доведення теореми A.9 знадобиться наступна лема.

Лема A.10. *Нехай для оператора $L \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$ існують число $s \in \{-1, 1\}$, вектор $V \in \mathfrak{H}_1$, $\|V\| \neq c$ і оператор $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$ такі, що для довільного $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ вектор $L\mathrm{w}$ подається за формулою (A.24). Тоді L є оператором лінійного перетворення координат. При цьому:*

$$L^{-1} = \mathbf{L}_0 [\mathrm{sign}\ (c - \|V\|)\, s, V]\, \widetilde{J^{-1}}, \quad \text{де}$$

$$\mathbf{L}_0 [s, V]\, \mathrm{w} = \frac{s\left(\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \frac{\langle V, \mathrm{w}\rangle}{c^2}\right)}{\sqrt{\left|1 - \frac{\|V\|^2}{c^2}\right|}} \mathbf{e}_0 + \frac{s\left(\mathcal{T}(\mathrm{w})\, V - \mathbf{X}_1 [V]\, \mathrm{w}\right)}{\sqrt{\left|1 - \frac{\|V\|^2}{c^2}\right|}} + \mathbf{X}_1^{\perp} [V]\, \mathrm{w} \tag{A.25}$$

і оператор $\widetilde{J^{-1}}$ визначається за формулою (A.22).

Доведення. Нехай, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$ задовольняє умови леми. Доведемо, що існує обернений оператор L^{-1}. За формулою (A.24), L можна подати у вигляді:

$$L = \widetilde{J} \mathbf{L}_0 [s, V],$$

де, згідно з (A.23), оператор $\widetilde{J}$ є унітарним над $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$, при цьому легко бачити, що

$$\widetilde{J}^{-1} = \widetilde{J^{-1}}. \tag{A.26}$$

Отже, достатньо довести, що обернений оператор існує для оператора $\mathbf{L}_0 [s, V]$, причому лему буде доведено, якщо ми зможемо довести рівність:

$$\mathbf{L}_0 [s, V]\, \mathbf{L}_0 [\mathrm{sign}\ (c - \|V\|)\, s, V] = \mathbb{I} \tag{A.27}$$

(оскільки тоді рівність $\mathbf{L}_0 [\mathrm{sign}\ (c - \|V\|)\, s, V]\, \mathbf{L}_0 [s, V] = \mathbb{I}$ буде випливати з рівності (A.27), якщо замість оператора $\mathbf{L}_0 [s, V]$ підставити оператор $\mathbf{L}_0 [s', V]$, де $s' = \mathrm{sign}\ (c - \|V\|)\, s$).

У випадку $V = \mathbf{0}$, використовуючи (A.25) та (A.5), отримуємо:

$$\mathbf{L}_0 [s, V]\, \mathrm{w} = s\mathcal{T}(\mathrm{w})\, \mathbf{e}_0 + \mathbf{X}_1^{\perp} [V]\, \mathrm{w} = s\mathcal{T}(\mathrm{w})\, \mathbf{e}_0 + \mathbf{X}\mathrm{w},$$

при цьому $\mathrm{sign}\ (c - \|V\|) = \mathrm{sign}\ (c - 0) = 1$. Отже, в цьому випадку справедливість рівності (A.27) не викликає сумнівів. Тому, надалі вважатимемо, що $V \neq \mathbf{0}$.

Використовуючи (A.25) і (A.5) для $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ одержуємо:

$$\mathbf{L}_0 [s, V]\, \mathrm{w} = \frac{s\left(\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \frac{\langle V, \mathrm{w}\rangle}{c^2}\right)}{\sqrt{\left|1 - \frac{\|V\|^2}{c^2}\right|}} \mathbf{e}_0 + \frac{s\left(\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \frac{\langle V, \mathrm{w}\rangle}{\|V\|^2}\right)}{\sqrt{\left|1 - \frac{\|V\|^2}{c^2}\right|}} V + \mathbf{X}_1^{\perp} [V]\, \mathrm{w}. \tag{A.28}$$

Позначимо, $s' := \operatorname{sign}\,(c - \|V\|)\, s$. Тоді для довільного $\mathrm{w} \in \mathcal{M}\,(\mathfrak{H})$ маємо:

$$\mathbf{L}_0\,[s, V]\,\mathbf{L}_0\,[\operatorname{sign}\,(c - \|V\|)\, s, V]\,\mathrm{w} = \mathbf{L}_0\,[s, V]\,\widetilde{\mathrm{w}}, \quad \text{де } \widetilde{\mathrm{w}} = \mathbf{L}_0\,[s', V]\,\mathrm{w}. \tag{A.29}$$

Використовуючи (A.28), отримуємо:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathcal{T}\,(\widetilde{\mathrm{w}}) = \mathcal{T}\,(\mathbf{L}_0\,[s', V]\,\mathrm{w}) = \frac{s'\left(\mathcal{T}\,(\mathrm{w}) - \frac{\langle V, \mathrm{w}\rangle}{c^2}\right)}{\sqrt{\left|1 - \frac{\|V\|^2}{c^2}\right|}};\\
&\langle V, \widetilde{\mathrm{w}}\rangle = \frac{s'\left(\mathcal{T}\,(\mathrm{w})\,\|V\|^2 - \langle V, \mathrm{w}\rangle\right)}{\sqrt{\left|1 - \frac{\|V\|^2}{c^2}\right|}};\\
&\mathbf{X}_1^{\perp}\,[V]\,\widetilde{\mathrm{w}} = \mathbf{X}_1^{\perp}\,[V]\,\mathrm{w}.
\end{aligned}\right\} \tag{A.30}$$

Далі, застосовуючи рівність (A.28) до вектора $\widetilde{\mathrm{w}}$ і використовуючи (A.30), дістаємо:

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_0\,[s, V]\,\widetilde{\mathrm{w}} &= \frac{s\left(\mathcal{T}\,(\widetilde{\mathrm{w}}) - \frac{\langle V, \widetilde{\mathrm{w}}\rangle}{c^2}\right)}{\sqrt{\left|1 - \frac{\|V\|^2}{c^2}\right|}}\mathbf{e}_0 + \frac{s\left(\mathcal{T}\,(\widetilde{\mathrm{w}}) - \frac{\langle V, \widetilde{\mathrm{w}}\rangle}{\|V\|^2}\right)}{\sqrt{\left|1 - \frac{\|V\|^2}{c^2}\right|}}V + \mathbf{X}_1^{\perp}\,[V]\,\widetilde{\mathrm{w}} =\\
&= \frac{s\left(s'\left(\mathcal{T}\,(\mathrm{w}) - \frac{\langle V, \mathrm{w}\rangle}{c^2}\right) - s'\left(\mathcal{T}\,(\mathrm{w})\,\frac{\|V\|^2}{c^2} - \frac{\langle V, \mathrm{w}\rangle}{c^2}\right)\right)}{\left|1 - \frac{\|V\|^2}{c^2}\right|}\mathbf{e}_0 +\\
&\quad + \frac{s\left(s'\left(\mathcal{T}\,(\mathrm{w}) - \frac{\langle V, \mathrm{w}\rangle}{c^2}\right) - s'\left(\mathcal{T}\,(\mathrm{w}) - \frac{\langle V, \mathrm{w}\rangle}{\|V\|^2}\right)\right)}{\left|1 - \frac{\|V\|^2}{c^2}\right|}V + \mathbf{X}_1^{\perp}\,[V]\,\mathrm{w} = \mathrm{w}.
\end{aligned}$$

Звідси, використовуючи (A.29), отримуємо (A.27). □

Доведення теореми A.9. **I.** Нехай $L \in \mathfrak{O}\mathfrak{T}_{\mathbf{fin}}\,(\mathfrak{H}, c)$. Тоді L є оператором лінійного перетворення координат, що задовольняє умови $1'$–$4'$. Покладемо:

$$V := \mathcal{V}\,(L)\,. \tag{A.31}$$

Спочатку доведемо формулу (A.24) у випадку $V \neq 0$. Використовуючи рівності (A.6),(A.3) і (A.5), для довільного $\mathrm{w} \in \mathcal{M}\,(\mathfrak{H})$ маємо:

$$\begin{aligned}
L\mathrm{w} = L\left(\widehat{\mathbf{T}} + \mathbf{X}_1\,[V] + \mathbf{X}_1^{\perp}\,[V]\right)\mathrm{w} &= L\,(\mathcal{T}\,(\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0 + \mathbf{X}_1\,[V]\,\mathrm{w}) + L\mathbf{X}_1^{\perp}\,[V]\,\mathrm{w} =\\
&= L\left(\mathcal{T}\,(\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0 + \frac{\langle V, \mathrm{w}\rangle}{\|V\|^2}V\right) + L\mathbf{X}_1^{\perp}\,[V]\,\mathrm{w}.
\end{aligned}$$

Звідси, використовуючи лему A.3, отримуємо

$$L\mathrm{w} = \alpha_L \left(\left(\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \frac{\langle V, \mathrm{w} \rangle}{\|V\|^2} \beta_L \right) \mathbf{e}_0 + \left(\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \frac{\langle V, \mathrm{w} \rangle}{\|V\|^2} \right) \mathcal{V}\left(L^{-1}\right) \right) + \\ + L\mathbf{X}_1^{\perp}[V]\,\mathrm{w} \quad (\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})) \tag{A.32}$$

На підпросторі $\mathfrak{H}_{1\perp}[V] = \mathfrak{H}_{1\perp}[\mathcal{V}(L)]$ визначимо лінійний оператор J_1:

$$J_1 x := Lx \qquad (x \in \mathfrak{H}_{1\perp}[V]). \tag{A.33}$$

Відповідно до формули (A.21), оператор J_1 переводить підпростір $\mathfrak{H}_{1\perp}[V]$ в підпростір $\mathfrak{H}_{1\perp}[\mathcal{V}(L^{-1})]$. Використовуючи формулу (A.21) і умову $4'$, для довільного $x \in \mathfrak{H}_{1\perp}[V]$ отримуємо:

$$\|J_1 x\| = \|Lx\| = \left\|\mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right] Lx\right\| = \left\|\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathcal{V}(L)]\,x\right\| = \left\|\mathbf{X}_1^{\perp}[V]\,x\right\| = \|x\|. \tag{A.34}$$

Отже, J_1 — ізометричний оператор, що діє з підпростору $\mathfrak{H}_{1\perp}[V]$ в підпростір $\mathfrak{H}_{1\perp}[\mathcal{V}(L^{-1})]$. Доведемо, що J_1 є унітарним опер. з $\mathfrak{H}_{1\perp}[V]$ в $\mathfrak{H}_{1\perp}[\mathcal{V}(L^{-1})]$, тобто що

$$J_1 \mathfrak{H}_{1\perp}[V] = \mathfrak{H}_{1\perp}\left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right]. \tag{A.35}$$

Розглянемо довільний вектор $y \in \mathfrak{H}_{1\perp}[\mathcal{V}(L^{-1})]$. Оскільки L є оператором лінійного перетворення координат, то існує вектор $x = L^{-1}y$. Використовуючи рівності (A.6), вектор x можна подати у вигляді:

$$x = \left(\widehat{\mathbf{T}} + \mathbf{X}_1[V]\right) x + \mathbf{X}_1^{\perp}[V]\,x, \tag{A.36}$$

де $\left(\widehat{\mathbf{T}} + \mathbf{X}_1[V]\right) x \in \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_1[V] = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_1[\mathcal{V}(L)]$, $\mathbf{X}_1^{\perp}[V]\,x \in \mathfrak{H}_{1\perp}[V]$. Звідси, $Lx = L\left(\widehat{\mathbf{T}} + \mathbf{X}_1[V]\right) x + L\mathbf{X}_1^{\perp}[V]\,x$. Отже:

$$L\left(\widehat{\mathbf{T}} + \mathbf{X}_1[V]\right) x + L\mathbf{X}_1^{\perp}[V]\,x = Lx = LL^{-1}y = y \in \mathfrak{H}_{1\perp}\left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right]. \tag{A.37}$$

де, за лемою A.3 і формулою (A.21):

$$L\left(\widehat{\mathbf{T}} + \mathbf{X}_1[V]\right) x \in \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1\left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right]; \qquad L\mathbf{X}_1^{\perp}[V]\,x \in \mathfrak{H}_{1\perp}\left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right]. \tag{A.38}$$

Оскільки $\mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1[\mathcal{V}(L^{-1})] \oplus \mathfrak{H}_{1\perp}[\mathcal{V}(L^{-1})] = \mathcal{M}(\mathfrak{H})$, то, використовуючи рівності (A.37),(A.38) приходимо до висновку, що:

$$L\mathbf{X}_1^{\perp}[V]\,x = y, \quad \text{і} \quad L\left(\widehat{\mathbf{T}} + \mathbf{X}_1[V]\right) x = \mathbf{0}.$$

Оскільки L є оператором лінійного перетворення координат, то з рівності

$L\left(\widehat{\mathbf{T}}+\mathbf{X}_1[V]\right)x=\mathbf{0}$ випливає, що $\left(\widehat{\mathbf{T}}+\mathbf{X}_1[V]\right)x=\mathbf{0}$. Отже, згідно з (A.36), маємо, $x=\mathbf{X}_1^{\perp}[V]\,x\in\mathfrak{H}_{1\perp}[V]$. А за означенням оператора J_1, отримуємо, $J_1x=Lx=y$. Отже, для будь-якого вектора $y\in\mathfrak{H}_{1\perp}[\mathcal{V}(L^{-1})]$ існує елемент $x\in\mathfrak{H}_{1\perp}[V]$ такий, що $J_1x=y$. Тому, оператор $J_1:\mathfrak{H}_{1\perp}[V]\to\mathfrak{H}_{1\perp}[\mathcal{V}(L^{-1})]$ справді є унітарним між просторами $\mathfrak{H}_{1\perp}[V]$ і $\mathfrak{H}_{1\perp}[\mathcal{V}(L^{-1})]$. Використовуючи оператор J_1 можна записати рівність:

$$L\mathbf{X}_1^{\perp}[V]\,\mathrm{w}=J_1\mathbf{X}_1^{\perp}[V]\,\mathrm{w},\quad \mathrm{w}\in\mathcal{M}(\mathfrak{H}). \tag{A.39}$$

Застосовуючи лему A.3, для довільних $t,\lambda\in\mathbb{R}$ маємо:

$$L(t\mathbf{e}_0+\lambda\mathcal{V}(L))=\alpha_L\left((t-\lambda\beta_L)\,\mathbf{e}_0+(t-\lambda)\,\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right). \tag{A.40}$$

Використовуючи формули (A.7) та (A.40) отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathsf{M}_c(t\mathbf{e}_0+\lambda\mathcal{V}(L))&=\lambda^2\|\mathcal{V}(L)\|^2-c^2t^2=\lambda^2\|V\|^2-c^2t^2;\\ \mathsf{M}_c(L(t\mathbf{e}_0+\lambda\mathcal{V}(L)))&=\alpha_L^2\mathsf{M}_c\left((t-\lambda\beta_L)\,\mathbf{e}_0+(t-\lambda)\,\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right)=\\ &=\alpha_L^2\left((t-\lambda)^2\gamma_L-c^2(t-\lambda\beta_L)^2\right),\end{aligned}$$

де $\gamma_L=\|\mathcal{V}(L^{-1})\|^2$. Оскільки $t\mathbf{e}_0+\lambda\mathcal{V}(L)\in\mathfrak{H}_0\oplus\mathfrak{H}_1[\mathcal{V}(L)]$, то, за умовою $2'$, маємо: $(\mathsf{M}_c(L(t\mathbf{e}_0+\lambda\mathcal{V}(L))))^2=(\mathsf{M}_c(t\mathbf{e}_0+\lambda\mathcal{V}(L)))^2$, $t,\lambda\in\mathbb{R}$. Таким чином:

$$\left(\lambda^2\|V\|^2-c^2t^2\right)^2=\left(\alpha_L^2\left((t-\lambda)^2\gamma_L-c^2(t-\lambda\beta_L)^2\right)\right)^2\quad(t,\lambda\in\mathbb{R}).$$

Звідси: $$\lambda^2\|V\|^2-c^2t^2=\pm\alpha_L^2\left((t-\lambda)^2\gamma_L-c^2(t-\lambda\beta_L)^2\right)\quad(t,\lambda\in\mathbb{R}).$$

Після нескладних перетворень остання формула набуває вигляду:

$$\lambda^2\|V\|^2-c^2t^2=\pm\alpha_L^2\left(t^2(\gamma_L-c^2)-2t\lambda(\gamma_L-c^2\beta_L)+\lambda^2(\gamma_L-c^2\beta_L^2)\right)\quad(\forall\,t,\lambda\in\mathbb{R}).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях змінної λ, отримуємо дві системи рівнянь:

$$\begin{cases}\alpha_L^2(\gamma_L-c^2)=-c^2\\ \gamma_L-c^2\beta_L=0\\ \alpha_L^2(\gamma_L-c^2\beta_L^2)=\|V\|^2\end{cases}\qquad\begin{cases}\alpha_L^2(\gamma_L-c^2)=c^2\\ \gamma_L-c^2\beta_L=0\\ \alpha_L^2(\gamma_L-c^2\beta_L^2)=-\|V\|^2.\end{cases}$$

З допомогою нескладних перетворень останні дві системи можна звести до вигляду:

$$\begin{cases}\alpha_L^2\left(1-\frac{\|V\|^2}{c^2}\right)=1\\ \gamma_L=\|V\|^2\\ \beta_L=\frac{\|V\|^2}{c^2}\end{cases}\qquad\begin{cases}\alpha_L^2\left(1-\frac{\|V\|^2}{c^2}\right)=-1\\ \gamma_L=\|V\|^2\\ \beta_L=\frac{\|V\|^2}{c^2}.\end{cases}$$

Перша системи рівнянь має (дійсні) розв'язки лише за умови $\|V\|<c$, а друга система має розв'язки лише при $\|V\|>c$. Отже, розв'язки існують лише при $\|V\|\neq c$. Розв'язуючи обидві останні системи і беручи до уваги, що $\gamma_L=\|\mathcal{V}(L^{-1})\|^2$, в обох

випадках отримуємо:

$$\alpha_L = \frac{s}{\sqrt{\left|1 - \frac{\|V\|^2}{c^2}\right|}}; \quad \beta_L = \frac{\|V\|^2}{c^2}; \quad \left\|\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right\|^2 = \|V\|^2 \qquad (\|V\| \neq c), \tag{A.41}$$

де $s \in \{-1, 1\}$. Підставляючи значення $L\mathbf{X}_1^{\perp}[V]\,\mathrm{w}$ з формули (A.39) а значення α_L,β_L з формули (A.41) в формулу (A.32), одержуємо:

$$\begin{aligned} L\mathrm{w} = \frac{s}{\sqrt{\left|1 - \frac{\|V\|^2}{c^2}\right|}} \Bigg(\Bigg(\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \frac{\langle V, \mathrm{w}\rangle}{\|V\|^2} \frac{\|V\|^2}{c^2} \Bigg) \mathbf{e}_0 + \\ + \left(\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \frac{\langle V, \mathrm{w}\rangle}{\|V\|^2} \right) \mathcal{V}\left(L^{-1}\right) \Bigg) + J_1 \mathbf{X}_1^{\perp}[V]\,\mathrm{w} = \\ = \frac{s\left(\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \frac{\langle V,\mathrm{w}\rangle}{c^2}\right)}{\sqrt{\left|1 - \frac{\|V\|^2}{c^2}\right|}} \mathbf{e}_0 + \frac{s\left(\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathcal{V}\left(L^{-1}\right) - \frac{\langle V,\mathrm{w}\rangle}{\|V\|^2}\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right)}{\sqrt{\left|1 - \frac{\|V\|^2}{c^2}\right|}} + J_1 \mathbf{X}_1^{\perp}[V]\,\mathrm{w}. \end{aligned} \tag{A.42}$$

На підпросторі $\mathfrak{H}_1$ введемо наступний оператор:

$$Jx := \frac{\langle V, x\rangle}{\|V\|^2} \mathcal{V}\left(L^{-1}\right) + J_1 \mathbf{X}_1^{\perp}[V]\,x, \quad x \in \mathfrak{H}_1. \tag{A.43}$$

Оскільки J_1 переводить підпростір $\mathfrak{H}_{1\perp}[\mathcal{V}(L)]$ в підпростір $\mathfrak{H}_{1\perp}[\mathcal{V}(L^{-1})]$, то, $\left\langle \mathcal{V}\left(L^{-1}\right), J_1 \mathbf{X}_1^{\perp}[V]\,x \right\rangle = 0$ $(\forall x \in \mathfrak{H}_1)$. Тому, використовуючи (A.34),(A.41) і (A.5), для $x \in \mathfrak{H}_1$ отримуємо:

$$\begin{aligned} \|Jx\|^2 = \left(\frac{\langle V, x\rangle}{\|V\|^2} \left\|\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right\| \right)^2 + \left\|J_1 \mathbf{X}_1^{\perp}[V]\,x\right\|^2 = \left(\frac{\langle V, x\rangle}{\|V\|} \right)^2 + \left\|\mathbf{X}_1^{\perp}[V]\,x\right\|^2 = \\ = \left\| \frac{\langle V, x\rangle}{\|V\|^2} V \right\|^2 + \left\|\mathbf{X}_1^{\perp}[V]\,x\right\|^2 = \|\mathbf{X}_1[V]\,x\|^2 + \left\|\mathbf{X}_1^{\perp}[V]\,x\right\|^2 = \|x\|^2. \end{aligned}$$

Тобто оператор J є ізометричним на $\mathfrak{H}_1$.

Для векторів виду $x = \lambda V \in \mathfrak{H}_1[V]$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ за формулою (A.43) маємо $J(\lambda V) = \lambda \mathcal{V}(L^{-1})$. Тому:

$$J\mathfrak{H}_1[V] = \mathfrak{H}_1\left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right]. \tag{A.44}$$

А для векторів $x \in \mathfrak{H}_{1\perp}[V]$, згідно з (A.43), отримуємо:

$$Jx = J_1 \mathbf{X}_1^{\perp}[V]\,x = J_1 x \quad (x \in \mathfrak{H}_{1\perp}[V]). \tag{A.45}$$

Отже, за формулою (A.35), маємо:

$$J\mathfrak{H}_{1\perp}[V] = J_1\mathfrak{H}_{1\perp}[V] = \mathfrak{H}_{1\perp}\left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right]. \tag{A.46}$$

Із співвідношень (A.44) та (A.46) випливає, що:

$$J\mathfrak{H}_1 = J\left(\mathfrak{H}_1[V] \oplus \mathfrak{H}_{1\perp}[V]\right) \supseteq \mathfrak{H}_1\left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right] \oplus \mathfrak{H}_{1\perp}\left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right] = \mathfrak{H}_1.$$

Таким чином, $J\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_1$. А тому оператор J є унітарним на $\mathfrak{H}_1$, тобто $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$. У відповідності з формулою (A.43), маємо, $JV = \mathcal{V}\left(L^{-1}\right)$. Отже, використовуючи, (A.42), (A.45) та (A.5), отримуємо формулу (A.24). Отже, у випадку $V \neq \mathbf{0}$ формулу (A.24) доведено.

Тепер розглянемо випадок, коли $V = \mathbf{0}$, тобто $\mathcal{V}(L) = \mathbf{0}$. У цьому випадку за формулою (A.5) маємо:

$$\mathbf{X}_1[V] = \mathbf{X}_1[\mathbf{0}] = \mathbb{O}, \quad \mathbf{X}_1^{\perp}[V] = \mathbf{X}. \tag{A.47}$$

Оскільки, згідно з умовою $1'$, оператори перетворення координат L та L^{-1} є v-детермінованими, то, за лемою A.3, мусить мати місце наступна рівність:

$$tL\mathbf{e}_0 = L\left(t\mathbf{e}_0 + \lambda\mathcal{V}(L)\right) = \alpha_L\left(\left(t - \lambda\beta_L\right)\mathbf{e}_0 + (t-\lambda)\,\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right) \quad (\forall t, \lambda \in \mathbb{R}), \tag{A.48}$$

де $\alpha_L = \mathcal{T}(L\mathbf{e}_0) \neq 0$, $\beta_L = 1 - \frac{1}{\alpha_L\alpha_{L^{-1}}} \neq 1$. Оскільки ліва частина рівності (A.48) не залежить від змінної λ, то коефіцієнт біля змінної λ в правій частині рівності мусить дорівнювати нулю. Отже, $\beta_L\mathbf{e}_0 + \mathcal{V}\left(L^{-1}\right) = \mathbf{0}$, а тому:

$$\beta_L = 0,\ \mathcal{V}\left(L^{-1}\right) = \mathbf{0}. \tag{A.49}$$

Таким чином, формула (A.48) набуває вигляду $L\mathbf{e}_0 = \alpha_L\mathbf{e}_0$. І, застосовуючи умову $2'$ до вектора $\mathbf{e}_0 \in \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1[\mathcal{V}(L)]$, одержуємо $\alpha_L = s$, де $s \in \{-1, 1\}$. Тому:

$$L\mathbf{e}_0 = s\mathbf{e}_0, \qquad \text{де } s \in \{-1, 1\}. \tag{A.50}$$

Використовуючи формули (A.47),(A.50), для довільного $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ отримуємо:

$$L\mathrm{w} = L\left(\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0 + \mathbf{X}\mathrm{w}\right) = s\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0 + L\mathbf{X}\mathrm{w} = s\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0 + J\mathbf{X}_1^{\perp}[V]\,\mathrm{w}, \tag{A.51}$$

$$\text{де} \qquad Jx = Lx, \qquad x \in \mathfrak{H}_1 = \mathbf{X}\mathcal{M}(\mathfrak{H}) = \mathbf{X}_1^{\perp}[V]\,\mathcal{M}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}_{1\perp}[V]. \tag{A.52}$$

З умови $3'$ і формули (A.47), випливає, що підпростір $\mathfrak{H}_1 = \left\{\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}) \mid \widehat{\mathbf{T}}\mathrm{w} = \mathbf{0}\right\}$ є інваріантним для оператора L. Отже, оператор J, визначений формулою (A.52) переводить підпростір $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_1$.

Згідно з формулою (A.49), маємо, $\mathcal{V}\left(L^{-1}\right) = \mathbf{0}$. Тому, за формулою (A.47), отри-

муємо, $\mathbf{X}_1^{\perp}[V] = \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathcal{V}(L)] = \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathcal{V}(L^{-1})] = \mathbf{X}$. Отже, з умови $4'$ випливає, що оператор J є ізометричним на підпросторі $\mathfrak{H}_1$. Доведемо, що оператор J — унітарний. Розглянемо будь-який вектор $y \in \mathfrak{H}_1$. Покладемо, $x := L^{-1}y$. Тоді, за формулою (A.51), маємо, $Lx = s\mathcal{T}(x)\mathbf{e}_0 + J\mathbf{X}x = y \in \mathfrak{H}_1$. Звідси, $\mathcal{T}(x) = 0$ і $J\mathbf{X}x = y$. Це означає, що $y \in J\mathfrak{H}_1$. Отже, ми довели, що $J\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_1$, і що оператор J справді є унітарним на $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_{1\perp}[V]$. Таким чином, і в випадку $V = \mathbf{0}$ формула (A.24) також доведена.

II. Навпаки, нехай оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$ подається у вигляді (A.24). Тоді, за лемою A.10, L є оператором лінійного перетворення координат.

1. Згідно з формулою (A.24), отримуємо:

$$L\mathbf{e}_0 = \chi_V(\mathbf{e}_0 + JV), \quad \text{де} \quad \chi_V = \frac{s}{\sqrt{\left|1 - \frac{\|V\|^2}{c^2}\right|}} \neq 0; \tag{A.53}$$

$$L(\mathbf{e}_0 + V) = \frac{s\left(1 - \frac{\|V\|^2}{c^2}\right)}{\sqrt{\left|1 - \frac{\|V\|^2}{c^2}\right|}}\mathbf{e}_0 = \frac{\operatorname{sign}(c - \|V\|)}{\chi_V}\mathbf{e}_0.$$

Звідси:

$$L^{-1}\mathbf{e}_0 = \frac{\chi_V(\mathbf{e}_0 + V)}{\operatorname{sign}(c - \|V\|)}. \tag{A.54}$$

З формул (A.53) та (A.54) випливає, що, $\mathcal{T}(L\mathbf{e}_0) = \chi_V \neq 0$, $\mathcal{T}(L^{-1}\mathbf{e}_0) = \frac{\chi_V}{\operatorname{sign}(c-\|V\|)} \neq 0$. Таким чином, оператори лінійного перетворення координат L та L^{-1} є v-детермінованими, причому:

$$\mathcal{V}(L) = \frac{\mathbf{X}L^{-1}\mathbf{e}_0}{\mathcal{T}(L^{-1}\mathbf{e}_0)} = V; \quad \mathcal{V}\left(L^{-1}\right) = \frac{\mathbf{X}L\mathbf{e}_0}{\mathcal{T}(L\mathbf{e}_0)} = JV. \tag{A.55}$$

2. Відповідно до формули (A.24), для вектора виду $\mathrm{w} = t\mathbf{e}_0 + \lambda V \in \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1[V] = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1[\mathcal{V}(L)]$ (де $t, \lambda \in \mathbb{R}$), маємо, $L\mathrm{w} = \frac{s\left(t - \lambda\frac{\|V\|^2}{c^2}\right)}{\sqrt{\left|1 - \frac{\|V\|^2}{c^2}\right|}}\mathbf{e}_0 + \frac{s(t-\lambda)JV}{\sqrt{\left|1 - \frac{\|V\|^2}{c^2}\right|}}$. Отже, враховуючи той факт, що оператор J є ізометричним, отримуємо:

$$(\mathsf{M}_c(L\mathrm{w}))^2 = \left(\left\|\frac{s(t-\lambda)JV}{\sqrt{\left|1 - \frac{\|V\|^2}{c^2}\right|}}\right\|^2 - c^2\left(\frac{s\left(t - \lambda\frac{\|V\|^2}{c^2}\right)}{\sqrt{\left|1 - \frac{\|V\|^2}{c^2}\right|}}\right)^2\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{1 - \frac{\|V\|^2}{c^2}}\left((t-\lambda)^2\|V\|^2 - c^2\left(t - \lambda\frac{\|V\|^2}{c^2}\right)^2\right)\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{1 - \frac{\|V\|^2}{c^2}} \left(\lambda^2 \|V\|^2 \left(1 - \frac{\|V\|^2}{c^2} \right) - \left(1 - \frac{\|V\|^2}{c^2} \right) c^2 t^2 \right) \right)^2 =$$
$$= \left(\lambda^2 \|V\|^2 - c^2 t^2 \right)^2 = \left(\mathsf{M}_c \left(\mathrm{w} \right) \right)^2 .$$

Таким чином, умова $2'$ для оператора L також виконується.

3. Нехай вектор $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ є таким, що $\widehat{\mathbf{T}}\mathrm{w} = \mathbf{X}_1 [\mathcal{V}(L)] \mathrm{w} = \mathbf{0}$. Тоді, $\mathcal{T}(\mathrm{w}) = 0$. Тому, враховуючи рівність $\mathcal{V}(L) = V$ (яка випливає з (A.55)), отримуємо, $\langle V, \mathrm{w} \rangle = 0$, $\mathbf{X}_1^{\perp} [V] \mathrm{w} = (\mathbf{X} - \mathbf{X}_1 [\mathcal{V}(L)]) \mathrm{w} = \mathbf{X}\mathrm{w} = \mathrm{w}$. Отже, згідно з (A.24), маємо, $L\mathrm{w} = J\mathbf{X}_1^{\perp} [V] \mathrm{w} = J\mathrm{w}$. Тому, враховуючи, що оператор J є унітарним на $\mathfrak{H}_1$, і використовуючи (A.55) та (A.5) отримуємо:

$$\widehat{\mathbf{T}} L\mathrm{w} = \widehat{\mathbf{T}} J\mathrm{w} = \mathbf{0};$$
$$\mathbf{X}_1 \left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right) \right] L\mathrm{w} = \mathbf{X}_1 [JV] J\mathrm{w} = \begin{cases} \frac{\langle JV, J\mathrm{w} \rangle}{\|V\|^2} JV, & JV \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & JV = \mathbf{0} \end{cases} =$$
$$= J \left\{ \begin{matrix} \frac{\langle V, \mathrm{w} \rangle}{\|V\|^2} V, & V \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & V = \mathbf{0} \end{matrix} \right\} = J\mathbf{X}_1 [V] \mathrm{w} = \mathbf{0}.$$

Отже, умова $3'$ для оператора L також перевірена.

4. Використовуючи унітарність оператора J ($\langle Jx, Jy \rangle = \langle x, y \rangle$, $x, y \in \mathfrak{H}_1$) і рівності (A.5),(A.6) отримуємо:

$$J\mathbf{X}_1 [V] \mathrm{w} = \begin{cases} \frac{\langle V, \mathrm{w} \rangle}{\|V\|^2} JV, & V \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & V = \mathbf{0} \end{cases} = \begin{cases} \frac{\langle \mathbf{X}V, \mathrm{w} \rangle}{\|V\|^2} JV, & V \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & V = \mathbf{0} \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} \frac{\langle V, \mathbf{X}\mathrm{w} \rangle}{\|V\|^2} JV, & V \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & V = \mathbf{0} \end{cases} = \left\{ \begin{matrix} \frac{\langle JV, J\mathbf{X}\mathrm{w} \rangle}{\|JV\|^2} JV, & JV \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & JV = \mathbf{0} \end{matrix} \right\} =$$
$$= \mathbf{X}_1 [JV] J\mathbf{X}\mathrm{w};$$
$$J\mathbf{X}_1^{\perp} [V] \mathrm{w} = J (\mathbf{X} - \mathbf{X}_1 [V]) \mathrm{w} = J\mathbf{X}\mathrm{w} - \mathbf{X}_1 [JV] J\mathbf{X}\mathrm{w} =$$
$$= \mathbf{X} J\mathbf{X}\mathrm{w} - \mathbf{X}_1 [JV] J\mathbf{X}\mathrm{w} = \mathbf{X}_1^{\perp} [JV] J\mathbf{X}\mathrm{w}.$$

Тому, застосовуючи формулу (A.24) для довільного $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ маємо:

$$\mathbf{X}_1^{\perp} \left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right) \right] L\mathrm{w} = \mathbf{X}_1^{\perp} [JV] L\mathrm{w} = \mathbf{X}_1^{\perp} [JV] \left(\frac{s \left(\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \frac{\langle V, \mathrm{w} \rangle}{c^2} \right)}{\sqrt{\left| 1 - \frac{\|V\|^2}{c^2} \right|}} \mathbf{e}_0 + \right.$$

$$+\frac{s\left(\mathcal{T}\left(\mathrm{w}\right)JV-\mathbf{X}_1\left[JV\right]J\mathbf{X}\mathrm{w}\right)}{\sqrt{\left|1-\frac{\|V\|^2}{c^2}\right|}}+J\mathbf{X}_1^{\perp}\left[V\right]\mathrm{w}\Bigg)=$$

$$=\mathbf{X}_1^{\perp}\left[JV\right]J\mathbf{X}_1^{\perp}\left[V\right]\mathrm{w}=\mathbf{X}_1^{\perp}\left[JV\right]\,\mathbf{X}_1^{\perp}\left[JV\right]J\mathbf{X}\mathrm{w}=$$

$$=\mathbf{X}_1^{\perp}\left[JV\right]J\mathbf{X}\mathrm{w}=J\mathbf{X}_1^{\perp}\left[V\right]\mathrm{w};$$

$$\left\|\mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathcal{V}\left(L^{-1}\right)\right]L\mathrm{w}\right\|=\left\|J\mathbf{X}_1^{\perp}\left[V\right]\mathrm{w}\right\|=\left\|\mathbf{X}_1^{\perp}\left[V\right]\mathrm{w}\right\|.$$

Таким чином, L є оператором лінійного перетворення координат і всі умови $1'$-$4'$ для оператора L виконуються. Отже $L\in\mathfrak{OT}_{\mathbf{fin}}\left(\mathfrak{H},c\right)$. □

А.1.4. Узагальнені перетворення Лоренца для нескінченних швидкостей Дослідимо поведінку перетворень координат з класу $\mathfrak{OT}_{\mathbf{fin}}\left(\mathfrak{H},c\right)$, коли норма швидкості системи відліку ($\|V\|$) прямує до нескінченності. З цією метою введемо наступну множину векторів:

$$\mathbf{B}_1\left(\mathfrak{H}_1\right)=\left\{x\in\mathfrak{H}_1\mid\|x\|=1\right\}$$

і підставимо в формулу (А.24):

$$V=\lambda s\mathbf{n},\quad \text{де } \lambda>0,\ \lambda\neq c;\quad \mathbf{n}\in\mathbf{B}_1\left(\mathfrak{H}_1\right), \tag{А.56}$$

а потім перейдемо до границі при $\lambda\to\infty$.

Використовуючи дві нижніх рівності (А.6), маємо:

$$\mathbf{X}_1\left[\lambda s\mathbf{n}\right]=\mathbf{X}_1\left[\mathbf{n}\right];\qquad \mathbf{X}_1^{\perp}\left[\lambda s\mathbf{n}\right]=\mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathbf{n}\right]. \tag{А.57}$$

Тому, підстановка швидкості (А.56) в формулу (А.24) приводить до наступного представлення для операторів $L\in\mathfrak{OT}_{\mathbf{fin}}\left(\mathfrak{H},c\right)$ (при умові $\mathcal{V}\left(L\right)\neq\mathbf{0}$):

$$L\mathrm{w}=\mathbf{W}_{\lambda,c}\left[s,\mathbf{n},J\right]\mathrm{w}:=\frac{\left(s\mathcal{T}\left(\mathrm{w}\right)-\frac{\lambda}{c^2}\left\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\right\rangle\right)}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}\mathbf{e}_0+$$

$$+J\left(\frac{\lambda\mathcal{T}\left(\mathrm{w}\right)\mathbf{n}-s\mathbf{X}_1\left[\mathbf{n}\right]\mathrm{w}}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}+\mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathbf{n}\right]\mathrm{w}\right)\quad\left(\mathrm{w}\in\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}\right)\right), \tag{А.58}$$

де $s\in\{-1,1\}$, $J\in\mathfrak{U}\left(\mathfrak{H}_1\right)$, $\mathbf{n}\in\mathbf{B}_1\left(\mathfrak{H}_1\right)$, $\lambda>0$.

Переходячи до границі при $\lambda\to\infty$ в формулі (А.58) отримуємо наступні лінійні оператори в просторі $\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}\right)$:

$$\mathbf{W}_{\infty,c}\left[\mathbf{n},J\right]\mathrm{w}=\lim_{\lambda\to+\infty}\mathbf{W}_{\lambda}\left[s,\mathbf{n},J\right]\mathrm{w}=$$

$$= -\frac{\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle}{c}\mathbf{e}_0 + J\left(c\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right) \quad (\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})), \tag{A.59}$$

де границя існує в сенсі норми простору $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ для довільного вектора $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Зазначимо, що границя в (A.59) не залежить від числа s. Нескладно перевірити, що $\mathbf{W}_{\infty,c}[\mathbf{n}, J] \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$.

Введемо наступний клас лінійних неперервних операторів над простором $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$:

$$\mathfrak{OT}_{\infty}(\mathfrak{H}, c) := \{\mathbf{W}_{\infty,c}[\mathbf{n}, J] \mid \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1),\ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)\}. \tag{A.60}$$

Лема A.11. *Для довільних* $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ *і* $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$ *мають місце наступні рівності:*

$$\widetilde{J}\mathbf{W}_{\infty,c}[\mathbf{n}, \mathbb{I}_1] = \mathbf{W}_{\infty,c}[\mathbf{n}, J]; \quad \mathbf{W}_{\infty,c}[\mathbf{n}, \mathbb{I}_1]\,\widetilde{J} = \mathbf{W}_{\infty,c}\left[J^{-1}\mathbf{n}, J\right], \tag{A.61}$$

де $\widetilde{J}$ *— оператор, визначений в (A.22), а оператор* $\mathbb{I}_1 = \mathbb{I}_{\mathfrak{H}_1}$ *є тотожним оператором на підпросторі* $\mathfrak{H}_1$.

Доведення. Перша рівність (A.61) випливає безпосередньо з формул (A.22) та (A.59). Отже, залишилось довести лише другу рівність (A.61). Використовуючи формули (A.22) і (A.59) для довільного вектора $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ отримуємо:

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_{\infty,c}[\mathbf{n}, \mathbb{I}_1]\,\widetilde{J}\mathrm{w} = \mathbf{W}_{\infty,c}[\mathbf{n}, \mathbb{I}_1]\left(\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0 + J\mathbf{X}\mathrm{w}\right) &= -\frac{\langle \mathbf{n}, \mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0 + J\mathbf{X}\mathrm{w}\rangle}{c}\mathbf{e}_0 + \\
&+ c\mathcal{T}\left(\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0 + J\mathbf{X}\mathrm{w}\right)\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\left(\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0 + J\mathbf{X}\mathrm{w}\right) = \\
&= -\frac{\langle \mathbf{n}, J\mathbf{X}\mathrm{w}\rangle}{c}\mathbf{e}_0 + c\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,J\mathbf{X}\mathrm{w} = \\
&= -\frac{\langle J^{-1}\mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle}{c}\mathbf{e}_0 + c\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,J\mathbf{X}\mathrm{w}.
\end{aligned} \tag{A.62}$$

За означенням класу операторів $\mathfrak{OT}_{\infty}(\mathfrak{H}, c)$, вектор $\mathbf{n}$ — ненульовий ($\mathbf{n} \neq 0$). Тому, застосовуючи формули (A.5),(A.6), а також беручи до уваги той факт, що оператор J переводить підпростір $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_1$, одержуємо:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]J\mathbf{X}\mathrm{w} &= \left(\mathbf{X} - \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\right)J\mathbf{X}\mathrm{w} = \mathbf{X}J\mathbf{X}\mathrm{w} - \langle \mathbf{n}, J\mathbf{X}\mathrm{w}\rangle\,\mathbf{n} = \\
&= \mathbf{X}J\mathbf{X}\mathrm{w} - \left\langle \mathbf{X}J^{-1}\mathbf{n}, \mathrm{w}\right\rangle\mathbf{n} = J\mathbf{X}\mathrm{w} - \left\langle J^{-1}\mathbf{n}, \mathrm{w}\right\rangle\mathbf{n} = \\
&= J\left(\mathbf{X}\mathrm{w} - \left\langle J^{-1}\mathbf{n}, \mathrm{w}\right\rangle J^{-1}\mathbf{n}\right) = J\left(\mathbf{X} - \mathbf{X}_1\left[J^{-1}\mathbf{n}\right]\right)\mathrm{w} = J\mathbf{X}_1^{\perp}\left[J^{-1}\mathbf{n}\right]\mathrm{w}.
\end{aligned}$$

Таким чином, згідно з (A.62), отримуємо:

$$\mathbf{W}_{\infty,c}[\mathbf{n}, \mathbb{I}_1]\,\widetilde{J}\mathrm{w} = -\frac{\langle J^{-1}\mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle}{c}\mathbf{e}_0 + c\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n} + J\mathbf{X}_1^{\perp}\left[J^{-1}\mathbf{n}\right]\mathrm{w} =$$

$$= -\frac{\langle J^{-1}\mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle}{c}\mathbf{e}_0 + J\left(c\mathcal{T}(\mathrm{w})\, J^{-1}\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}\left[J^{-1}\mathbf{n}\right]\mathrm{w}\right) = \mathbf{W}_{\infty,c}\left[J^{-1}\mathbf{n}, J\right]\mathrm{w}. \qquad \square$$

Лема A.12. *Для довільного вектора* $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ *справедлива наступна рівність:*

$$\mathbf{W}_{\infty,c}[\mathbf{n}, \mathbb{I}_1]\,\mathbf{W}_{\infty,c}[-\mathbf{n}, \mathbb{I}_1] = \mathbb{I}.$$

Доведення. Зафіксуємо довільний вектор $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$. Застосовуючи формули (A.59), (A.57), (A.6), для будь-якого вектора $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$, отримуємо:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{W}_{\infty,c}[\mathbf{n}, \mathbb{I}_1]\mathbf{W}_{\infty,c}[-\mathbf{n}, \mathbb{I}_1]\,\mathrm{w} = \\
&\qquad = \mathbf{W}_{\infty,c}[\mathbf{n}, \mathbb{I}_1]\left(-\frac{\langle -\mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle}{c}\mathbf{e}_0 - c\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[-\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right) = \\
&\qquad = \mathbf{W}_{\infty,c}[\mathbf{n}, \mathbb{I}_1]\left(\frac{\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle}{c}\mathbf{e}_0 - c\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right) = \\
&\qquad = \frac{c\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0}{c} + c\frac{\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle}{c}\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w} = \mathrm{w}.
\end{aligned}$$

$\square$

Теорема A.13. *Будь-який оператор* $\mathbf{W}_{\infty,c}[\mathbf{n}, J] \in \mathfrak{OT}_{\infty}(\mathfrak{H}, c)$ *є оператором лінійного перетворення координат. При цьому справедлива рівність:* $(\mathbf{W}_{\infty,c}[\mathbf{n}, J])^{-1} = \mathbf{W}_{\infty,c}[-J\mathbf{n}, J^{-1}]$.

Доведення. Використовуючи леми A.12, A.11 та формулу (A.26), для довільного оператора $\mathbf{W}_{\infty,c}[\mathbf{n}, J] \in \mathfrak{OT}_{\infty}(\mathfrak{H}, c)$ (де $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$) отримуємо:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{W}_{\infty,c}[\mathbf{n}, J])^{-1} &= \left(\widetilde{J}\mathbf{W}_{\infty,c}[\mathbf{n}, \mathbb{I}_1]\right)^{-1} = (\mathbf{W}_{\infty,c}[\mathbf{n}, \mathbb{I}_1])^{-1}\,\widetilde{J^{-1}} = \mathbf{W}_{\infty,c}[-\mathbf{n}, \mathbb{I}_1]\,\widetilde{J^{-1}} = \\
&= \mathbf{W}_{\infty,c}\left[\left(J^{-1}\right)^{-1}(-\mathbf{n}), J^{-1}\right] = \mathbf{W}_{\infty,c}\left[-J\mathbf{n}, J^{-1}\right].
\end{aligned}$$

$\square$

Оператори, що належать до класу $\mathfrak{OT}_{\infty}(\mathfrak{H}, c)$ будемо називати ***узагальненими перетвореннями Лоренца для нескінченних швидкостей*** системи відліку.

Зауваження A.14. Підкреслимо, що довільне узагальнене перетворення Лоренца $\mathbf{W}_{\infty,c}[\mathbf{n}, J] \in \mathfrak{OT}_{\infty}(\mathfrak{H}, c)$ з нескінченною швидкістю не є v-детермінованим, оскільки, згідно (A.59), $\mathcal{T}(\mathbf{W}_{\infty,c}[\mathbf{n}, J]\,\mathbf{e}_0) = 0$.

Позначення A.15. Покладемо: $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c) := \mathfrak{OT}_{\mathbf{fin}}(\mathfrak{H}, c) \cup \mathfrak{OT}_{\infty}(\mathfrak{H}, c)$.
Перетворення координат, що належать до класу $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c)$ будемо називати узагальненими, ***тахіонними перетвореннями Лоренца*** **(в сенсі E. Recami, В. Ольховського та R. Goldoni)**.

A.1.5. Загальне зображення тахіонних перетворень Лоренца

Мета цього підрозділу — вивести загальну формулу для зображення операторів з класу $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c)$, яка була б справедливою як для скінченних, так і для нескінченних швидкостей систем відліку.

Довільний вектор $V \in \mathfrak{H}_1$, $\|V\| \notin \{0, c\}$ можна подати у вигляді (A.56), де

$$\mathbf{n} = s\frac{V}{\|V\|}, \qquad \lambda = \|V\| \qquad (\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1),\ \lambda > 0).$$

Тому формула (A.58) може служити загальним зображенням для операторів з класу $\mathfrak{OT}_{\mathbf{fin}}(\mathfrak{H}, c)$, з ненульовою швидкістю, тобто будь-який оператор $L \in \mathfrak{OT}_{\mathbf{fin}}(\mathfrak{H}, c)$, такий, що $\mathcal{V}(L) \neq \mathbf{0}$ можна подати у вигляді (A.58).

Розглянемо тепер випадок $\mathcal{V}(L) = \mathbf{0}$. За формулою (A.24), довільний оператор $L \in \mathfrak{OT}_{\mathbf{fin}}(\mathfrak{H}, c)$ з нульовою швидкістю можна подати у вигляді:

$$L\mathrm{w} = s\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0 + J\left(\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{0}]\,\mathrm{w}\right) = s\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0 + J(\mathbf{X}\mathrm{w}) \quad (\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})). \tag{A.63}$$

З іншого боку, підставляючи $\lambda = 0$ ($s \in \{-1, 1\}$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$) в формулу (A.58), можна визначити наступні оператори:

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_0[s, \mathbf{n}, J]\,\mathrm{w} := s\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0 + J\left(-s\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right) = \\ = s\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0 + J\left(-s\,\mathbb{I}_{1,-s}[\mathbf{n}]\right)\mathbf{X}\mathrm{w} \quad (\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})),\end{aligned} \tag{A.64}$$

де $\mathbb{I}_{1,\sigma}[\mathbf{n}]\,x = \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,x + \sigma\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,x, \quad x \in \mathfrak{H}_1,\ \sigma \in \{-1, 1\}$.

Оскільки $-s\mathbb{I}_{1,-s}[\mathbf{n}] \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$, то множина операторів, які можна визначити за формулою (A.64) дорівнює множині операторів, які можна визначити за формулою (A.63).

Таким чином, ми бачимо, що в обох випадках ($\mathcal{V}(L) \neq \mathbf{0}$ та $\mathcal{V}(L) = \mathbf{0}$) справедливе наступне твердження:

Твердження A.16. *Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$ належить до класу $\mathfrak{OT}_{\mathbf{fin}}(\mathfrak{H}, c)$ тоді і тільки тоді, коли його можна зобразити за допомогою формули:*

$$L = \mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J], \quad \text{де } \lambda \geq 0,\ s \in \{-1, 1\},\ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1),\ \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1),$$

а оператор $\mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J]$ визначається за формулою (A.58). Швидкість оператора лінійного перетворення координат L визначається за формулою $\mathcal{V}(L) = \lambda s\mathbf{n}$.

Означення операторнозначної функції $\mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J]$, яка фігурує в формулі (A.58) можна природно розширити на значення $\lambda \in [0, \infty] \setminus \{c\}$ (тобто включити випадок $\lambda = \infty$). А саме для $\lambda \in [0, \infty] \setminus \{c\}$, $s \in \{-1, 1\}$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ покладемо:

$$\mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J]\,\mathrm{w} := \begin{cases} \dfrac{\left(s\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \frac{\lambda}{c^2}\langle\mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle\right)}{\sqrt{\left|1 - \frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}\mathbf{e}_0 + J\left(\dfrac{\lambda\mathcal{T}(\mathrm{w})\mathbf{n} - s\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\mathrm{w}}{\sqrt{\left|1 - \frac{\lambda^2}{c^2}\right|}} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right), \lambda < \infty \\ \mathbf{W}_{\infty,c}[\mathbf{n}, J] = -\frac{\langle\mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle}{c}\mathbf{e}_0 + J\left(c\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right),\ \lambda = \infty. \end{cases} \tag{A.65}$$

Використовуючи твердження A.16, формули (A.60), (A.59) та позначення A.15, отримуємо таке твердження.

Твердження A.17. *Оператор* $L \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$ *належить до класу* $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c)$ *тоді і тільки тоді, коли існують числа* $s \in \{-1, 1\}$, $\lambda \in [0, \infty] \setminus \{c\}$ *вектор* $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ *і оператор* $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$ *такі, що має місце наступна рівність:*

$$L = \mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J].$$

Оператор $\mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J]$ *є v-детермінованим тоді і тільки тоді, коли* $\lambda < \infty$, *і в цьому випадку швидкість* $\mathcal{V}(L)$ *обчислюється за формулою:*

$$\mathcal{V}(L) = \lambda s \mathbf{n}.$$

На перший погляд твердження A.17 являє собою загальне зображення для довільних операторів, що належать до класу $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c)$ (як для скінченних, так і для нескінченних швидкостей систем відліку). Проте, оператор $\mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J]$ в формулі (A.65) задається різними виразами у випадках $\lambda < \infty$ та $\lambda = \infty$. Тому мету, поставлену на початку даного підрозділу поки-що не можна вважати повністю досягнутою.

Введемо, тепер, наступний новий параметр:

$$\theta := \frac{1 - \frac{\lambda}{c}}{\sqrt{\left|1 - \frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}. \tag{A.66}$$

Використовуючи нескладні перетворення формулу (A.66) можна звести до вигляду:

$$\theta = -\mathrm{sign}\left(1 - \frac{2}{1 + \frac{\lambda}{c}}\right)\sqrt{\left|1 - \frac{2}{1 + \frac{\lambda}{c}}\right|}. \tag{A.67}$$

Оскільки функція $f(\lambda) = -\mathrm{sign}\left(1 - \frac{2}{1+\frac{\lambda}{c}}\right)\sqrt{\left|1 - \frac{2}{1+\frac{\lambda}{c}}\right|}$, є спадною на $[0, +\infty)$, вона відображає промінь $[0, +\infty)$ на напівінтервал $(-1, 1]$. Отже, кожне значення параметра $\lambda \geq 0$ однозначно виражається через значення параметра $\theta \in (-1, 1]$. Використовуючи нескладні обчислення, неважко переконатись, що параметр λ можна виразити через параметр θ за допомогою наступної формули:

$$\lambda = c\frac{1 - \theta|\theta|}{1 + \theta|\theta|}, \quad \theta \in (-1, 1], \tag{A.68}$$

при цьому значення $\lambda = c$ відповідає значенню $\theta = 0$.

Підставляючи значення параметра λ з формули (A.68) в формулу (A.58), отримуємо наступне зображення для операторів $L \in \mathfrak{OT}_{\mathbf{fin}}(\mathfrak{H}, c)$:

$$L\mathrm{w} = \mathbf{W}_{c\frac{1-\theta|\theta|}{1+\theta|\theta|},c}[s, \mathbf{n}, J]\,\mathrm{w} = \left(s\varphi_0(\theta)\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \varphi_1(\theta)\frac{\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0 +$$

$$+\ J\left(c\varphi_1(\theta)\,\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n} - s\varphi_0(\theta)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right), \tag{A.69}$$

$(\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}),\ s \in \{-1,1\},\ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1),\ \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1),\ \ \theta \in (-1,1] \setminus \{0\})$, де

$$\varphi_0(\theta) = \frac{1+\theta\,|\theta|}{2\,|\theta|}; \quad \varphi_1(\theta) = \frac{1-\theta\,|\theta|}{2\,|\theta|} \qquad (\theta \in \mathbb{R},\ \theta \neq 0). \tag{A.70}$$

Підкреслимо, що випадок $\theta = 0$ в (A.69) слід відкинути, оскільки в цьому випадку маємо $\lambda = c$, отже, норма швидкості $\mathcal{V}(L)$ дорівнює швидкості світла c (зазначимо, що у випадку $\|\mathcal{V}(L)\| = c$ перетворення координат (A.24), а отже і (A.69) є невизначеними). З рівності (A.68) випливає, що у випадку $\theta \in (0,1)$ виконується співвідношення, $\lambda = \|\mathcal{V}(L)\| \in (0,c)$. Тому, в цьому випадку норма швидкості системи відліку $\|\mathcal{V}(L)\|$ менша за швидкість світла c. Аналогічно у випадку $\theta \in (-1,0)$ маємо, $\lambda \in (c,+\infty)$. Отже, в цьому випадку норма швидкості системи відліку більша за c.

Неважко перевірити, що для довільного значення $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ виконуються наступні рівності:

$$\left.\begin{array}{ll}
\varphi_0(\theta)\,\varphi_1(\theta) = -\dfrac{1}{4}\left(\theta^2 - \dfrac{1}{\theta^2}\right); & c\dfrac{\varphi_1(\theta)}{\varphi_0(\theta)} = \lambda = c\dfrac{1-\theta\,|\theta|}{1+\theta\,|\theta|}; \\
\varphi_0(\theta) + \varphi_1(\theta) = \dfrac{1}{|\theta|}; & \varphi_0(\theta) - \varphi_1(\theta) = \theta; \\
\varphi_0(\theta)^2 - \varphi_1(\theta)^2 = \operatorname{sign}\theta; & \\
\varphi_0(-\theta) = \varphi_1(\theta); & \varphi_1(-\theta) = \varphi_0(\theta); \\
\varphi_0(\theta^{-1}) = \operatorname{sign}\theta\,\varphi_0(\theta); & \varphi_1(\theta^{-1}) = -\operatorname{sign}\theta\,\varphi_1(\theta).
\end{array}\right\} \tag{A.71}$$

Введемо наступне позначення:

$$\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J] := \mathbf{W}_{c\frac{1-\theta|\theta|}{1+\theta|\theta|},c}[s,\mathbf{n},J]$$
$$(s \in \{-1,1\},\ \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1),\ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1), \quad \theta \in (-1,1],\ \theta \neq 0). \tag{A.72}$$

Згідно з формулами (A.70) значення функцій $\varphi_0(\theta)$ та $\varphi_1(\theta)$ визначене також і при $\theta = -1$: $\varphi_0(-1) = 0$, $\varphi_1(-1) = 1$. Підстановка значення $\theta = -1$ в формулу (A.69) приводить до лінійних операторів наступного виду:

$$\mathbf{U}_{-1,c}[s,\mathbf{n},J] := \mathbf{W}_{\infty,c}[s,\mathbf{n},J] = \mathbf{W}_{\infty,c}[\mathbf{n},J], \tag{A.73}$$

де оператори $\mathbf{W}_{\infty,c}[\mathbf{n},J]$ визначаються формулою (A.59). Зауважимо, що вигляд операторів типу $\mathbf{U}_{-1,c}[s,\mathbf{n},J]$ не залежить від значення числа $s \in \{-1,1\}$, при цьому доданки, що містять значення s в формулі (A.69) обертаються в нуль.

Отже, при $\theta = -1$ отримуємо узагальнені перетворення Лоренца для не-

скінченних швидкостей виду $\mathbf{W}_{\infty,c}[\mathbf{n}, J]$, які, згідно з зауваженням A.14, не є v-детермінованими.

Таким чином, ми довели таку теорему:

Теорема A.18. *Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$ належить до класу $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c)$ тоді і тільки тоді, коли існують числа $s \in \{-1, 1\}$, $\theta \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, вектор $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ та оператор $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$ такі, що для будь-якого $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ вектор $L\mathrm{w}$ виражається за формулою:*

$$L\mathrm{w} = \mathbf{U}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}, J]\,\mathrm{w} = \left(s\varphi_0(\theta)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \varphi_1(\theta)\,\frac{\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0 + \\ + J\left(c\varphi_1(\theta)\,\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n} - s\varphi_0(\theta)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right). \tag{A.74}$$

Оператор лінійного перетворення координат $L = \mathbf{U}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}, J]$ є v-детермінованим тоді і тільки тоді, коли $\theta \neq -1$, і в цьому випадку його швидкість виражається за формулою, $\mathcal{V}(L) = cs\frac{1-\theta|\theta|}{1+\theta|\theta|}\mathbf{n}$.

Далі теорему A.18 буде переформульовано в більш іншій (більш зручній для розв'язання деяких наступних задач) формі. Перш за все, звернемо увагу на те, що параметр θ в теоремі A.18 належить до множини $[-1, 1] \setminus \{0\}$, тоді, як функції $\varphi_0(\theta)$ і $\varphi_1(\theta)$, згідно з формулою (A.70) визначені для довільного $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Отже, ми можемо поширити означення сім'ї операторів $\{\mathbf{U}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}, J]\}$, розширивши формули (A.72), (A.74) на значення $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\mathbf{U}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}, J]\,\mathrm{w} := \left(s\varphi_0(\theta)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \varphi_1(\theta)\,\frac{\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0 + \\ + J\left(c\varphi_1(\theta)\,\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n} - s\varphi_0(\theta)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right) \tag{A.75}$$

$$(\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ s \in \{-1, 1\},\ \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1),\ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)).$$

Отже, застосовуючи дві нижніх рівності (A.71) та дві нижніх рівності з (A.6),

отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n},J\right]\mathrm{w} = &\left(s\,\mathrm{sign}\,\theta\,\varphi_0\left(\theta^{-1}\right)\mathcal{T}\left(\mathrm{w}\right) - \left(-\mathrm{sign}\,\theta\,\varphi_1\left(\theta^{-1}\right)\right)\frac{\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0 + \\ &+ J\Big(c\left(-\mathrm{sign}\,\theta\,\varphi_1\left(\theta^{-1}\right)\right)\mathcal{T}\left(\mathrm{w}\right)\mathbf{n} - \\ &\quad - s\,\mathrm{sign}\,\theta\,\varphi_0\left(\theta^{-1}\right)\mathbf{X}_1\left[\mathbf{n}\right]\mathrm{w} + \mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathbf{n}\right]\mathrm{w}\Big) = \\ = &\left(\left(s\,\mathrm{sign}\,\theta\right)\varphi_0\left(\theta^{-1}\right)\mathcal{T}\left(\mathrm{w}\right) - \varphi_1\left(\theta^{-1}\right)\frac{\langle\left(-\mathrm{sign}\,\theta\,\mathbf{n}\right),\mathrm{w}\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0 + \\ &+ J\Big(c\varphi_1\left(\theta^{-1}\right)\mathcal{T}\left(\mathrm{w}\right)\left(-\mathrm{sign}\,\theta\,\mathbf{n}\right) - \\ &\quad - \left(s\,\mathrm{sign}\,\theta\right)\,\varphi_0\left(\theta^{-1}\right)\mathbf{X}_1\left[\mathbf{n}\right]\mathrm{w} + \mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathbf{n}\right]\mathrm{w}\Big) = \\ = &\,\mathbf{U}_{\theta^{-1},c}\left[s\,\mathrm{sign}\,\theta, -\mathrm{sign}\,\theta\,\mathbf{n}, J\right].\end{aligned}$$

Таким чином:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n},J\right] = \mathbf{U}_{\theta^{-1},c}\left[s\,\mathrm{sign}\,\theta, -\mathrm{sign}\,\theta\,\mathbf{n}, J\right] \\ \left(s\in\{-1,1\},\ \theta\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ \mathbf{n}\in\mathbf{B}_1\left(\mathfrak{H}_1\right),\ J\in\mathfrak{U}\left(\mathfrak{H}_1\right)\right).\end{aligned} \tag{A.76}$$

У випадку $|\theta|>1$ маємо, $0<|\theta^{-1}|<1$. Отже, беручи до увагу формулу (A.76), ми бачимо, що підстановка значень параметра θ таких, що $|\theta|>1$ не виводить за межі класу перетворень, визначених формулою (A.74) для $\theta\in[-1,1]\setminus\{0\}$. Крім того, при $|\theta|>1$, згідно з формулою (A.76) і теоремою A.18, отримуємо:

$$\mathcal{V}\left(\mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n},J\right]\right) = \mathcal{V}\left(\mathbf{U}_{\theta^{-1},c}\left[s\,\mathrm{sign}\,\theta, -\mathrm{sign}\,\theta\,\mathbf{n}, J\right]\right) = cs\tfrac{1-\theta|\theta|}{1+\theta|\theta|}\mathbf{n}.$$

Таким чином, з теореми A.18 випливає наступний наслідок:

Наслідок A.19. *Оператор $L\in\mathcal{L}\left(\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}\right)\right)$ належить до класу $\mathfrak{OT}\left(\mathfrak{H},c\right)$ тоді і тільки тоді, коли існують числа $s\in\{-1,1\}$, $\theta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, вектор $\mathbf{n}\in\mathbf{B}_1\left(\mathfrak{H}_1\right)$ та оператор $J\in\mathfrak{U}\left(\mathfrak{H}_1\right)$ такі, що для довільного $\mathrm{w}\in\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}\right)$ справедлива рівність:*

$$\begin{aligned}L\mathrm{w} = \mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n},J\right]\mathrm{w} = &\left(s\varphi_0\left(\theta\right)\mathcal{T}\left(\mathrm{w}\right) - \varphi_1\left(\theta\right)\frac{\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0 + \\ &+ J\left(c\varphi_1\left(\theta\right)\mathcal{T}\left(\mathrm{w}\right)\mathbf{n} - s\varphi_0\left(\theta\right)\mathbf{X}_1\left[\mathbf{n}\right]\mathrm{w} + \mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathbf{n}\right]\mathrm{w}\right).\end{aligned}$$

Оператор лінійного перетворення координат $L=\mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n},J\right]$ є v-детермінованим тоді і тільки тоді, коли $\theta\neq-1$, і в цьому випадку його швидкість виражається за формулою, $\mathcal{V}\left(\mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n},J\right]\right) = cs\frac{1-\theta|\theta|}{1+\theta|\theta|}\mathbf{n}$.

A.1.6. Деякі підкласи узагальнених перетворень Лоренца

З твердження A.17 і наслідка A.19 випливають наступні два зображення для класу

операторів $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c)$:

$$\mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c) = \Big\{\mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J] \mid s \in \{-1, 1\},$$
$$\lambda \in [0, \infty] \setminus \{c\},\ \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1),\ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)\Big\}; \tag{A.77}$$
$$\mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c) = \Big\{\mathbf{U}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}, J] \mid s \in \{-1, 1\},$$
$$\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1),\ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)\Big\}. \tag{A.78}$$

Нагадаємо, що в підрозділі A.1.2 було введено клас операторів $\mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$, а в підрозділі A.1.3 було доведено, що $\mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c) \subseteq \mathfrak{OT}_{\mathbf{fin}}(\mathfrak{H}, c)$ (див. формулу (A.20)). Отже, відповідно до позначення A.15, клас операторів $\mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$ є підкласом класу $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c)$. Наступною метою є отримання формули для зображення класу $\mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$, схожої на (A.77), (A.78). Перш за все доведемо таку лему:

Лема A.20. *Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$ належить до класу $\mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$ тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:*

1. $L \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c)$; 2. L є v-детермінованим і $\|\mathcal{V}(L)\| < c$.

Доведення. 1) Нехай $L \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$. Тоді, згідно з (A.20), маємо, $L \in \mathfrak{OT}_{\mathbf{fin}}(\mathfrak{H}, c)$. Тому, відповідно до позначення A.15, $L \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c)$. Крім того, за твердженням A.6, оператор L є v-детермінованим і $\|\mathcal{V}(L)\| < c$.

2) Навпаки, припустимо, що оператор $L \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c)$ є v-детермінованим і:

$$\|\mathcal{V}(L)\| < c. \tag{A.79}$$

Тоді, згідно з зауваженням A.14, маємо, $L \notin \mathfrak{OT}_{\infty}(\mathfrak{H}, c)$. Отже (відповідно до позначення A.15), $L \in \mathfrak{OT}_{\mathbf{fin}}(\mathfrak{H}, c)$. Тому, за теоремою A.9, існують число $s \in \{-1, 1\}$, вектор $V \in \mathfrak{H}_1$ і оператор $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$ такі, що для довільного вектора $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ дію оператора L на вектор w можна подати у вигляді (A.24), де $V = \mathcal{V}(L)$. При цьому згідно з формулою (A.79), $\|V\| < c$. Оскільки $\|V\| < c$, то за формулою (A.24) для довільного вектора виду $\mathrm{w} = t\mathbf{e}_0 + \mu V = t\mathbf{e}_0 + \mu\mathcal{V}(L) \in \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1[\mathcal{V}(L)]$ отримуємо:

$$L\mathrm{w} = \frac{s}{\sqrt{1 - \frac{\|V\|^2}{c^2}}}\left(\left(t - \mu\frac{\|V\|^2}{c^2}\right)\mathbf{e}_0 + (t - \mu)JV\right).$$

Оскільки J є унітарним оператором, то $\|JV\| = \|V\|$. Отже:

$$\mathsf{M}_c(L\mathrm{w}) = \|\mathbf{X}L\mathrm{w}\|^2 - c^2\mathcal{T}^2(L\mathrm{w}) = \frac{1}{1 - \frac{\|V\|^2}{c^2}}\left((t - \mu)^2\|V\|^2 - c^2\left(t - \mu\frac{\|V\|^2}{c^2}\right)^2\right) =$$
$$= \mu^2\|V\|^2 - c^2t^2 = \|\mathbf{X}\mathrm{w}\|^2 - c^2\mathcal{T}^2(\mathrm{w}) = \mathsf{M}_c(\mathrm{w}),$$

де w є довільним вектором з підпростору $\mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1 [\mathcal{V}(L)]$. І, враховуючи, що $L \in \mathfrak{OT}_{\mathbf{fin}}(\mathfrak{H}, c)$, згідно з твердженням A.7 і позначенням A.8, маємо, $L \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$. $\square$

Застосовуючи лему A.20 та рівність (A.77), отримуємо наступну рівність:

$$\begin{aligned}\mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c) &= \{\mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c) \mid 0 \leq \lambda < c\} = \\ &= \Big\{\mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J] \mid s \in \{-1, 1\}, \ \lambda \in [0, c), \ \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1), \ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)\Big\}, \end{aligned} \tag{A.80}$$

яка дає зображення класу операторів $\mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$. Використовуючи лему A.20 і теорему A.18 отримуємо, також, наступну формулу для зображення класу $\mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c) &= \{\mathbf{U}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}, J] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c) \mid 0 < \theta \leq 1\} = \\ &= \Big\{\mathbf{U}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}, J] \mid s \in \{-1, 1\}, \ \theta \in (0, 1], \ \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1), \ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)\Big\}. \end{aligned} \tag{A.81}$$

А лема A.20 разом з рівністю (A.78) дають наступну формулу для зображення класу операторів $\mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c) &= \{\mathbf{U}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}, J] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c) \mid 0 < \theta < \infty\} = \\ &= \Big\{\mathbf{U}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}, J] \mid s \in \{-1, 1\}, \ \theta \in (0, \infty), \ \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1), \ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)\Big\}. \end{aligned} \tag{A.82}$$

Згідно з позначенням A.15, маємо рівність $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c) := \mathfrak{OT}_{\mathbf{fin}}(\mathfrak{H}, c) \cup \mathfrak{OT}_{\infty}(\mathfrak{H}, c)$. Об'єднання в останній рівності є диз'юнктним. Справді, згідно з позначенням A.8, будь-який оператор лінійного перетворення координат $L \in \mathfrak{OT}_{\mathbf{fin}}(\mathfrak{H}, c)$ є v-детермінованим, тоді, як жоден з операторів $L_1 \in \mathfrak{OT}_{\infty}(\mathfrak{H}, c)$, відповідно до зауваження A.14, не є v-детермінованим. Тому:

$$\mathfrak{OT}_{\mathbf{fin}}(\mathfrak{H}, c) \cap \mathfrak{OT}_{\infty}(\mathfrak{H}, c) = \emptyset. \tag{A.83}$$

Отже, використовуючи твердження A.17 і теорему A.18, отримуємо наступні рівності:

$$\begin{aligned}\mathfrak{OT}_{\mathbf{fin}}(\mathfrak{H}, c) &= \{\mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c) : \ \lambda < \infty\} = \\ &= \{\mathbf{U}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}, J] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c) \mid \theta \neq -1\}; \end{aligned} \tag{A.84}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{OT}_{\infty}(\mathfrak{H}, c) &= \{\mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c) : \ \lambda = \infty\} = \\ &= \{\mathbf{U}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}, J] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c) \mid \theta = -1\}. \end{aligned} \tag{A.85}$$

Легко бачити, що у випадку $\mathfrak{H} = \mathbb{R}^3$ клас операторів $\mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$ збігається з загальною групою Лоренца. Означення загальної групи Лоренца можна знайти роботі [99]. Зауважимо, що крім загальної групи Лоренца в цій роботі була введена, також, повна група Лоренца. Згідно з [99], повна група Лоренца є підгрупою загальної групи

Лоренца, яка складається з тих загальних перетворень Лоренца, які мають додатний напрямок часу (тобто залишають незмінним клас додатних часоподібних векторів). Аналогічно до роботи [99], можна ввести повну групу Лоренца в більш загальній ситуації дійсного гільбертового простору.

Означення A.21. Нехай $\mathfrak{H}$ — дійсний гільбертовий простір. Будемо говорити, що вектор $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ є:

- **додатним**, якщо $\mathcal{T}(\mathrm{w}) > 0$;
- **c-часоподібним**, якщо $\mathsf{M}_c(\mathrm{w}) < 0$.

Позначимо через $\mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})$ множину всіх додатних c-часоподібних векторів простору $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$:

$$\mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H}) := \{\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}) \mid \mathcal{T}(\mathrm{w}) > 0,\ \mathsf{M}_c(\mathrm{w}) < 0\}. \tag{A.86}$$

Введемо наступний клас операторів:

$$\mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c) = \{L \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c) \mid L\mathrm{w} \in \mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})\ (\forall \mathrm{w} \in \mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H}))\}. \tag{A.87}$$

Твердження A.22. *$\mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c)$ є групою операторів в просторі Мінковського $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ над гільбертовим простором $\mathfrak{H}$.*

Доведення.

1. Нехай, $L_1, L_2 \in \mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c)$ і $L = L_1 L_2$. Тоді, згідно з формулою (A.87) і твердженням A.5, маємо, $L \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$ і $L\mathrm{w} \in \mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})$ $(\forall \mathrm{w} \in \mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H}))$. Отже, згідно з (A.87), $L \in \mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c)$.

2. Розглянемо довільний оператор $L \in \mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c)$. Оскільки (за твердженням A.5) $\mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$ є групою операторів над простором $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$, і при цьому $\mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c) \subseteq \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$, то $L^{-1} \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$. Розглянемо довільний вектор $\mathrm{w} \in \mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})$. Згідно з (A.86) маємо:

$$\mathcal{T}(\mathrm{w}) > 0, \quad \mathsf{M}_c(\mathrm{w}) < 0.$$

Оскільки $\mathsf{M}_c(\mathrm{w}) < 0$ і $L^{-1} \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$, то, відповідно до позначення A.4, маємо $\mathsf{M}_c(L^{-1}\mathrm{w}) < 0$. Отже, $\mathcal{T}(L^{-1}\mathrm{w}) = \pm c^{-1}\sqrt{-\mathsf{M}_c(L^{-1}\mathrm{w}) + \|\mathbf{X}L^{-1}\mathrm{w}\|^2} \neq 0$. Тому можливою є лише одна наступних двох нерівностей $\mathcal{T}(L^{-1}\mathrm{w}) > 0$ або $\mathcal{T}(L^{-1}\mathrm{w}) < 0$. Припустимо, що $\mathcal{T}(L^{-1}\mathrm{w}) < 0$. Тоді вектор $\widetilde{\mathrm{w}} = -L^{-1}\mathrm{w}$ належить до множини $\mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})$. При цьому маємо, $\mathcal{T}(L\widetilde{\mathrm{w}}) = \mathcal{T}(-\mathrm{w}) = -\mathcal{T}(\mathrm{w}) < 0$. Таким чином $\widetilde{\mathrm{w}} \in \mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})$, тоді як $L\widetilde{\mathrm{w}} \notin \mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})$, що неможливо, бо $L \in \mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c)$. З останньої суперечності випливає, що $\mathcal{T}(L^{-1}\mathrm{w}) > 0$. Отже, ми довели, що $\mathsf{M}_c(L^{-1}\mathrm{w}) < 0$ і $\mathcal{T}(L^{-1}\mathrm{w}) > 0$. Таким чином, згідно (A.86), $L^{-1}\mathrm{w} \in \mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})$ (для будь-якого вектора $\mathrm{w} \in \mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})$). Тому, відповідно до (A.87), маємо, $L^{-1} \in \mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c)$ (для довільного оператора $L \in \mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c)$).

Таким чином, вище було доведено, що для довільних операторів $L, L_1, L_2 \in \mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c)$ мають місце співвідношення, $L_1 L_2 \in \mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c)$ і $L^{-1} \in \mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c)$, що й необхідно було довести. $\square$

Неважко перевірити, що у випадку $\mathfrak{H} = \mathbb{R}^3$ група $\mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c)$ збігається з повною групою Лоренца, введеною в [99].

Наступне твердження дає нам зображення класу $\mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c)$ в термінах операторів виду $\mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J]$.

Твердження A.23. *Має місце така рівність:*

$$\begin{aligned}\mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c) &= \{\mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J] \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c) \mid s = 1\} = \\ &= \{\mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J] \in \mathfrak{O}\mathfrak{T}(\mathfrak{H}, c) \mid s = 1,\ 0 \le \lambda < c\} = \\ &= \{\mathbf{W}_{\lambda,c}[1, \mathbf{n}, J] \mid \lambda \in [0, c),\ \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1),\ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)\}. \end{aligned} \tag{A.88}$$

Доведення. Достатньо довести лише рівність:

$$\mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c) = \{\mathbf{W}_{\lambda,c}[1, \mathbf{n}, J] \mid \lambda \in [0, c),\ \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1),\ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)\}, \tag{A.89}$$

тому, що інші частини рівності (A.88) випливають з формули (A.89), а також формул (A.77), (A.80).

1. Нехай, L — оператор, який можна подати у вигляді:

$$L = \mathbf{W}_{\lambda,c}[1, \mathbf{n}, J],$$

де $\lambda \in [0, c)$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$. Зафіксуємо довільний вектор $\mathrm{w} \in \mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})$. Тоді, згідно з (A.86), маємо:

$$\mathcal{T}(\mathrm{w}) > 0, \quad \mathsf{M}_c(\mathrm{w}) < 0. \tag{A.90}$$

Оскільки $\lambda \in [0, c)$, то, відповідно до формули (A.80), маємо, $L = \mathbf{W}_{\lambda,c}[1, \mathbf{n}, J] \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$. Отже, застосовуючи (A.90) і враховуючи позначення A.4, отримуємо:

$$\mathsf{M}_c(L\mathrm{w}) = \mathsf{M}_c(\mathrm{w}) < 0. \tag{A.91}$$

Далі, використовуючи (A.90) і (A.65), дістаємо:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(L\mathrm{w}) = \mathcal{T}(\mathbf{W}_{\lambda,c}[1, \mathbf{n}, J]\,\mathrm{w}) &= \frac{\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \frac{\lambda}{c^2}\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle}{\sqrt{\left|1 - \frac{\lambda^2}{c^2}\right|}} = \frac{\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \frac{\lambda}{c^2}\langle \mathbf{X}\mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle}{\sqrt{\left|1 - \frac{\lambda^2}{c^2}\right|}} = \\ &= \frac{\mathcal{T}(\mathrm{w})}{\sqrt{\left|1 - \frac{\lambda^2}{c^2}\right|}} - \frac{\frac{\lambda}{c^2}}{\sqrt{\left|1 - \frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}\langle \mathbf{n}, \mathbf{X}\mathrm{w}\rangle \ge \frac{\mathcal{T}(\mathrm{w})}{\sqrt{\left|1 - \frac{\lambda^2}{c^2}\right|}} - \frac{\frac{\lambda}{c^2}}{\sqrt{\left|1 - \frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}\|\mathbf{X}\mathrm{w}\| = \end{aligned}$$

$$= \frac{\left(1-\frac{\lambda}{c}\right)\mathcal{T}(\mathrm{w})}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}} - \frac{\frac{\lambda}{c^2}}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}\left(\|\mathbf{X}\mathrm{w}\| - c\mathcal{T}(\mathrm{w})\right) =$$

$$= \frac{\left(1-\frac{\lambda}{c}\right)\mathcal{T}(\mathrm{w})}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}} - \frac{\frac{\lambda}{c^2}}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}\frac{\mathsf{M}_c(\mathrm{w})}{\|\mathbf{X}\mathrm{w}\| + c\mathcal{T}(\mathrm{w})} > 0. \tag{A.92}$$

Із співвідношень (A.91) та (A.92) випливає, що $L\mathrm{w} \in \mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})$ (для довільного вектора $\mathrm{w} \in \mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})$). Отже, згідно з (A.87), маємо $L \in \mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c)$.

2. Навпаки, припустимо, що $L \in \mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c)$. Тоді, згідно з співвідношенням (A.87), маємо $L \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$, причому:

$$\forall \mathrm{w} \in \mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})\ (L\mathrm{w} \in \mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})). \tag{A.93}$$

Оскільки $L \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$, то, за формулою (A.80), оператор L можна подати у вигляді:

$$L = \mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J], \tag{A.94}$$

де $s \in \{-1, 1\}$, $\lambda \in [0, c)$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ і $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$. Легко бачити, що $\mathbf{e}_0 \in \mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})$. Отже, згідно з формулою (A.93), маємо, $L\mathbf{e}_0 \in \mathcal{M}_{c,+}(\mathfrak{H})$. Тому, за формулою (A.86), $\mathcal{T}(L\mathbf{e}_0) > 0$. Отже, використовуючи співвідношення (A.65), отримуємо:

$$0 < \mathcal{T}(L\mathbf{e}_0) = \mathcal{T}(\mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J]\,\mathbf{e}_0) =$$

$$= \mathcal{T}\left(\frac{\left(s\mathcal{T}(\mathbf{e}_0) - \frac{\lambda}{c^2}\langle \mathbf{n}, \mathbf{e}_0\rangle\right)}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}\mathbf{e}_0 + J\left(\frac{\lambda\mathcal{T}(\mathbf{e}_0)\mathbf{n} - s\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\mathbf{e}_0}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathbf{e}_0\right)\right) =$$

$$= \mathcal{T}\left(\frac{s}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}\mathbf{e}_0 + J\left(\frac{\lambda\mathbf{n}}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}\right)\right) = \frac{s}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}.$$

З останньої нерівності випливає, що $s > 0$. Тому, оскільки $s \in \{-1, 1\}$, приходимо до висновку, що $s = 1$. Тобто, згідно з (A.94), маємо $L = \mathbf{W}_{\lambda,c}[1, \mathbf{n}, J]$ (де $\lambda \in [0, c)$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ і $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$).

Рівність (A.89) повністю доведено. □

Нехай, $\lambda \in [0, c)$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, і $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$. Тоді, згідно з формулою (A.72), оператор $\mathbf{W}_{\lambda,c}[1, \mathbf{n}, J]$ можна подати у вигляді, $\mathbf{W}_{\lambda,c}[1, \mathbf{n}, J] = \mathbf{U}_{\theta'_{(\lambda)},c}[1, \mathbf{n}, J]$, де $\theta'_{(\lambda)} = \frac{1-\frac{\lambda}{c}}{\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{c^2}}} \in (0, 1]$. Навпаки, довільний оператор виду $\mathbf{U}_{\theta,c}[1, \mathbf{n}, J]$, де $\theta \in (0, 1]$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, і $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$, відповідно до формули (A.72), можна подати в наступному вигляді, $\mathbf{U}_{\theta,c}[1, \mathbf{n}, J] = \mathbf{W}_{\lambda'_{(\theta)},c}[1, \mathbf{n}, J]$, де $\lambda'_{(\theta)} = c\frac{1-\theta^2}{1+\theta^2} \in [0, c)$. Тому, справедливою є наступна рівність:

$$\{\mathbf{W}_{\lambda,c}[1,\mathbf{n},J] \mid \lambda \in [0,c)\,,\ \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)\,,\ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)\} = \\ = \{\mathbf{U}_{\theta,c}[1,\mathbf{n},J] \mid \theta \in (0,1]\,,\ \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)\,,\ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)\}\,.$$

Використовуючи останню рівність, а також рівності (A.78) та (A.81), отримуємо наступну формулу для зображення класу операторів $\mathfrak{O}_+(\mathfrak{H},c)$ в термінах операторів виду $\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J]$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{O}_+(\mathfrak{H},c) &= \{\mathbf{U}_{\theta,c}[1,\mathbf{n},J] \mid \theta \in (0,1]\,,\ \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)\,,\ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)\} = \\ &= \{\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c) \mid s=1,\ 0<\theta\le 1\} = \\ &= \{\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J] \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H},c) \mid s=1\}\,. \end{aligned} \tag{A.95}$$

З формули (A.76) випливає, що $\mathbf{U}_{\theta,c}[1,\mathbf{n},J] = \mathbf{U}_{\theta^{-1},c}[1,-\mathbf{n},J]$ (для довільних $\theta \in (0,\infty)$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, і $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$). Отже, умову $\theta \in (0,1]$ в формулі (A.95) можна замінити на умову $\theta \in (0,\infty)$. Тоді отримаємо рівність:

$$\begin{aligned}\mathfrak{O}_+(\mathfrak{H},c) &= \{\mathbf{U}_{\theta,c}[1,\mathbf{n},J] \mid \theta \in (0,\infty)\,,\ \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)\,,\ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)\} = \\ &= \{\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c) \mid s=1,\ \theta>0\}\,. \end{aligned} \tag{A.96}$$

Формула (A.88) служить мотивацією для введення наступного підкласу класу операторів $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{OT}_+(\mathfrak{H},c) &:= \{\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c) \mid s=1\} = \\ &= \{\mathbf{W}_{\lambda,c}[1,\mathbf{n},J] \mid \lambda \in [0,\infty]\setminus\{c\}\,,\ \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)\,,\ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)\}\,. \end{aligned} \tag{A.97}$$

Використовуючи співвідношення (A.72), (A.73) та (A.76), нескладно отримати наступне зображення класу $\mathfrak{OT}_+(\mathfrak{H},c)$ (в термінах операторів виду $\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J]$):

$$\begin{aligned}\mathfrak{OT}_+(\mathfrak{H},c) &:= \Big\{\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c) \mid s=1,\ |\theta|\le 1\Big\} = \\ &= \Big\{\mathbf{U}_{\theta,c}[1,\mathbf{n},J] \mid \theta \in [-1,1]\setminus\{0\}\,,\ \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)\,,\ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)\Big\} = \\ &= \Big\{\mathbf{U}_{\theta,c}\left[\mathsf{sgn}_+(\theta+1)\,,\mathbf{n},J\right] \mid \theta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,,\ \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)\,,\ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)\Big\}, \end{aligned} \tag{A.98}$$

де $\mathsf{sgn}_+(\xi) = \begin{cases} \operatorname{sign}(\xi)\,, & \xi \ne 0 \\ 1, & \xi = 0 \end{cases}$ $(\xi \in \mathbb{R})$.

В якості протилежності до класу $\mathfrak{OT}_+(\mathfrak{H},c)$ введемо наступний клас операторів:

$$\begin{aligned}\mathfrak{OT}_-(\mathfrak{H},c) &:= \Big\{\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c) \mid s=-1\Big\} = \\ &= \Big\{\mathbf{W}_{\lambda,c}[-1,\mathbf{n},J] \mid \lambda \in [0,\infty]\setminus\{c\}\,,\ \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)\,,\ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)\Big\}. \end{aligned} \tag{A.99}$$

Використовуючи співвідношення (A.72), (A.73) та (A.76), можна отримати наступні формули для зображення класу $\mathfrak{OT}_{-}(\mathfrak{H},c)$ в термінах операторів виду $\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J]$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{OT}_{-}(\mathfrak{H},c) &:= \left\{\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J]\in\mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)\mid s=-1,\ |\theta|\le 1\right\}=\\ &=\left\{\mathbf{U}_{\theta,c}[-1,\mathbf{n},J]\mid\theta\in[-1,1]\setminus\{0\},\ \mathbf{n}\in\mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1),\ J\in\mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)\right\}=\\ &=\left\{\mathbf{U}_{\theta,c}\left[-\mathsf{sgn}_{+}(\theta+1),\mathbf{n},J\right]\mid\theta\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\mathbf{n}\in\mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1),\ J\in\mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)\right\}.\end{aligned}\tag{A.100}$$

Твердження A.24. *Має місце наступна рівність:*

$$\mathfrak{OT}_{+}(\mathfrak{H},c)\cap\mathfrak{OT}_{-}(\mathfrak{H},c)=\mathfrak{OT}_{\infty}(\mathfrak{H},c).$$

Доведення. Нехай, $L\in\mathfrak{OT}_{+}(\mathfrak{H},c)\cap\mathfrak{OT}_{-}(\mathfrak{H},c)$. Тоді, згідно з формулами (A.98) та (A.100), оператор L можна подати у вигляді, $L=\mathbf{U}_{\theta,c}[1,\mathbf{n},J]=\mathbf{U}_{\theta_1,c}[-1,\mathbf{n}_1,J_1]$, де $\theta,\theta_1\in[-1,1]\setminus\{0\}$, $\mathbf{n},\mathbf{n}_1\in\mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, $J,J_1\in\mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$. Звідси, використовуючи формулу (A.75), отримуємо:

$$\begin{aligned}L\mathbf{e}_0 &= \left(\varphi_0(\theta)\mathcal{T}(\mathbf{e}_0)-\varphi_1(\theta)\frac{\langle\mathbf{n},\mathbf{e}_0\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0\\ &\quad+J\left(c\varphi_1(\theta)\mathcal{T}(\mathbf{e}_0)\mathbf{n}-\varphi_0(\theta)\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\mathbf{e}_0+\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\mathbf{e}_0\right)=\\ &=\varphi_0(\theta)\mathbf{e}_0+c\varphi_1(\theta)J(\mathbf{n});\\ L\mathbf{e}_0 &= -\varphi_0(\theta_1)\mathbf{e}_0+c\varphi_1(\theta_1)J_1(\mathbf{n}_1).\end{aligned}$$

З останніх двох рівностей випливає, що $\varphi_0(\theta)=\mathcal{T}(L\mathbf{e}_0)=-\varphi_0(\theta_1)$. Звідси, враховуючи, що $\varphi_0(\vartheta)\ge 0$ $(\forall\,\vartheta\in[-1,1]\setminus\{0\})$, отримуємо рівність $\varphi_0(\theta)=\varphi_0(\theta_1)=0$. Остання рівність можлива лише за умови $\theta=-1$. Отже, згідно з (A.85), маємо:

$$L=\mathbf{U}_{\theta,c}[1,\mathbf{n},J]=\mathbf{U}_{-1,c}[1,\mathbf{n},J]\in\mathfrak{OT}_{\infty}(\mathfrak{H},c).$$

Таким чином, отримуємо включення $\mathfrak{OT}_{+}(\mathfrak{H},c)\cap\mathfrak{OT}_{-}(\mathfrak{H},c)\subseteq\mathfrak{OT}_{\infty}(\mathfrak{H},c)$.
Навпаки, припустимо, що $L\in\mathfrak{OT}_{\infty}(\mathfrak{H},c)$. Тоді, згідно з (A.85) і (A.78), оператор L можна подати у вигляді $L=\mathbf{U}_{-1,c}[s,\mathbf{n},J]$, де $s\in\{-1,1\}$, $\mathbf{n}\in\mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, $J\in\mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$. І, враховуючи формулу (A.75), отримуємо, $L=\mathbf{U}_{-1,c}[s,\mathbf{n},J]=\mathbf{U}_{-1,c}[1,\mathbf{n},J]=\mathbf{U}_{-1,c}[-1,\mathbf{n},J]$. Тому, згідно з формулами (A.98) та (A.100), маємо, $L\in\mathfrak{OT}_{+}(\mathfrak{H},c)\cap\mathfrak{OT}_{-}(\mathfrak{H},c)$. Отже, ми отримали обернене включення $\mathfrak{OT}_{\infty}(\mathfrak{H},c)\subseteq\mathfrak{OT}_{+}(\mathfrak{H},c)\cap\mathfrak{OT}_{-}(\mathfrak{H},c)$. □

A.1.7. Логарифмічне розширення множини дійсних чисел і гіперболічне зображення узагальнених перетворень Лоренца

Постановка задачі. Гіперболічне зображення для класичних перетворень Лоренца є загальновідомим (див, напр., [237, формула (2.5.11)] або [167, формула

(4.17)]). У випадку, коли осі координат рухомої і нерухомої системи відліку паралельні і обидві системи обидві системи відліку рухаються вздовж спільної осі абсцис таке зображення можна записати у вигляді:

$$ct' = -x\,\mathsf{sh}\psi + ct\,\mathsf{ch}\psi; \quad x' = x\,\mathsf{ch}\psi - ct\,\mathsf{sh}\psi; \qquad (A.101)$$
$$y' = y; \quad z' = z,$$

де $\psi \in \mathbb{R}$. Гіперболічне зображення для узагальнених перетворень Лоренца (в сенсі E. Recami, В. Ольховського та R. Goldoni) у тривимірному випадку $\mathfrak{H} = \mathbb{R}^3$ можна знайти в роботах [57,58]. В той же час, формулу, яка б давала єдину гіперболічну форму запису одночасно як для класичних, так і для узагальнених перетворень Лоренца на сьогодні невідомо. В роботі [57] автор намагається отримати таку формулу, використовуючи так звані узагальнені гіперболічні функції. Проте, насправді, введені автором узагальнені гіперболічні функції істотно відрізняються від загальновідомих гіперболічних функцій, зокрема мають дійсний період (подібно до тригонометричних функцій). На нашу думку, головною причиною такої ситуації є те, що класичні гіперболічні функції визначені на всій дійсній осі $\mathbb{R}$, і підстановка будь-якого дійсного значення ψ в формули (A.101) не приводить до надсвітлових швидкостей для рухомої системи відліку. В даному підрозділі буде показано, що вихід гіперболічного аргумента ψ поза межі поля дійсних чисел в формулах (A.101) приводить до систем відліку з надсвітловою швидкістю. З цією метою далі буде побудовано логарифмічне розширення множини дійсних чисел. Потім, використовуючи це розширення, будуть отримані формули які дають єдине гіперболічне зображення як для класичних, так і для узагальнених перетворень Лоренца над довільним дійсним гільбертовим простором $\mathfrak{H}$.

Мотивація. Перш за все, розглянемо такий приклад

Приклад A.25. Розглянемо алгебраїчну систему $(\mathbb{R}_+, +, \times)$, де $\mathbb{R}_+$ — множина додатних дійсних чисел, а $+$ та $\times$ — бінарні алгебраїчні операції додаванні і множення дійсних чисел (відповідно). Ця алгебраїчна система має багато чудових властивостей. Проте, вона є "неповною" в тому сенсі, що операція віднімання (обернена до операції додавання) не є визначеною на всій множині $\mathbb{R}_+$. Справді, якщо $a, b \in \mathbb{R}_+$ і $a \leq b$, то $a - b \notin \mathbb{R}_+$. Отже, в цьому випадку рівняння $b + x = a$ не має жодного розв'язку на $\mathbb{R}_+$. Іншими словами, алгебраїчна система $(\mathbb{R}_+, +, \times)$ не є полем. Звичайно, можна "виправити" цю ситуацію шляхом "долучення" до множини $\mathbb{R}_+$ нуля та від'ємних дійсних чисел. Тоді ми отримаємо алгебраїчну систему $(\mathbb{R}, +, \times)$, тобто звичайне поле дійсних чисел.

Тепер розглянемо іншу ситуацію. На множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ введемо нові опе-

рації “множення” і “додавання” наступним чином:

$$x \mathbin{\widehat{\times}} y := x + y; \quad x \mathbin{\widehat{+}} y := \ln\left(e^x + e^y\right) \quad (\forall\, x, y \in \mathbb{R})\,.$$

Легко перевірити, що відображення

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto \exp(x) \in \mathbb{R}_+ \tag{A.102}$$

є бієкцією між $\mathbb{R}$ та $\mathbb{R}_+$, причому для довільних $x, y \in \mathbb{R}$ справедливі такі рівності:

$$\exp\left(x \mathbin{\widehat{\times}} y\right) = \exp\left(x\right)\exp\left(y\right); \tag{A.103}$$

$$\exp\left(x \mathbin{\widehat{+}} y\right) = \exp\left(x\right) + \exp\left(y\right). \tag{A.104}$$

Отже, алгебраїчні системи $\left(\mathbb{R}, \widehat{+}, \widehat{\times}\right)$ і $(\mathbb{R}_+, +, \times)$ є ізоморфними, причому відображення (A.102) є ізоморфізмом між ними. Тому, алгебраїчна система $\left(\mathbb{R}, \widehat{+}, \widehat{\times}\right)$ є “неповною”, аналогічно до системи $(\mathbb{R}_+, +, \times)$. І, можна сказати, що всі дійсні числа є “додатними” відносно алгебраїчної системи $\left(\mathbb{R}, \widehat{+}, \widehat{\times}\right)$. Тобто, “нульовий елемент” і “від’ємні” числа є відсутніми в $\left(\mathbb{R}, \widehat{+}, \widehat{\times}\right)$. Далі буде побудовано розширення алгебраїчної системи $\left(\mathbb{R}, \widehat{+}, \widehat{\times}\right)$ до поля, що містить “нуль” і “від’ємні” елементи.

Побудова логарифмічного розширення.

Означення A.26. ***Логарифмічним розширенням дійсних чисел*** будемо називати множину:

$$\mathbb{R}^{\widehat{+}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{a + \pi i \mid a \in \mathbb{R}\} \quad (\text{де } i = \sqrt{-1}).$$

Надалі домовимося вважати, що:

$$\exp\left(-\infty\right) := e^{-\infty} := 0. \tag{A.105}$$

Функція $\exp\left(x\right)$, довизначена з допомогою формули (A.105) для випадку $x = -\infty$, є визначеною на всій множині $\mathbb{R}^{\widehat{+}}$. Легко перевірити, що довизначена таким чином в точці $-\infty$ функція $\exp\left(\cdot\right)$ є бієкцією з $\mathbb{R}^{\widehat{+}}$ на $\mathbb{R}$, причому оберненою до функції $\exp\left(\cdot\right) : \mathbb{R}^{\widehat{+}} \to \mathbb{R}$ є функція:

$$\ln^{\widehat{+}}\left(x\right) = \begin{cases} \ln\left(x\right), & x > 0 \\ -\infty, & x = 0 \\ \ln|x| + \pi i, & x < 0 \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R})\,.$$

Для довільних $x, y \in \mathbb{R}^{\widehat{+}}$ покладемо:

$$x \,\widehat{+}\, y := \ln^{\widehat{+}} \left(\exp(x) + \exp(y) \right); \tag{A.106}$$

$$x \,\widehat{\times}\, y := \ln^{\widehat{+}} \left(\exp(x) \exp(y) \right). \tag{A.107}$$

Легко бачити, що для $x, y \in \mathbb{R}$ має місце рівність $x \,\widehat{\times}\, y = x + y$. Отже, операція "$\widehat{\times}$" ("множення" на $\mathbb{R}^{\widehat{+}}$) є продовженням операції "$+$" (звичайного додавання) з множини $\mathbb{R}$ на множину $\mathbb{R}^{\widehat{+}}$. Побудуємо продовження відношення порядку з множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ на множину $\mathbb{R}^{\widehat{+}}$.

Означення A.27. Нехай елементи $x, y \in \mathbb{R}^{\widehat{+}}$ такі, що $x \notin \mathbb{R}$ або $y \notin \mathbb{R}$. Будемо говорити, що $x \leq y$ ($x < y$) тоді і тільки тоді, коли $\exp(x) \leq \exp(y)$ ($\exp(x) < \exp(y)$) (відповідно).

Твердження A.28. *Для довільних $x, y \in \mathbb{R}^{\widehat{+}}$ мають місце наступні логічні рівносильності:*

1) $x \leq y \Longleftrightarrow \exp(x) \leq \exp(y)$; *2)* $x < y \Longleftrightarrow \exp(x) < \exp(y)$.

Доведення. Справді, у випадку $x, y \in \mathbb{R}$ обидві рівносильності є тривіальними, а у випадку, коли $x \notin \mathbb{R}$ або $y \notin \mathbb{R}$ вони є наслідками означення A.27. □

Безпосередньо з твердження A.28 випливає наступне твердження.

Твердження A.29. *1. Бінарне відношення $\leq$ є відношенням лінійного порядку на $\mathbb{R}^{\widehat{+}}$, тобто виконуються такі умови:*

(a) для будь-якого $x \in \mathbb{R}^{\widehat{+}}$ має місце нерівність $x \leq x$;

(b) якщо $x, y \in \mathbb{R}^{\widehat{+}}$, $x \leq y$ і $y \leq x$, то $x = y$;

(c) якщо $x, y, z \in \mathbb{R}^{\widehat{+}}$, $x \leq y$ і $y \leq z$, то $x \leq z$;

(d) для довільних $x, y \in \mathbb{R}^{\widehat{+}}$ має місце хоча б одна з нерівностей $x \leq y$ або $y \leq x$.

2. Бінарне відношення $<$ є відношенням строгого лінійного порядку на $\mathbb{R}^{\widehat{+}}$, породженим (нестрогим) порядком $\leq$, тобто для будь-яких $x, y \in \mathbb{R}^{\widehat{+}}$ співвідношення $x < y$ виконується тоді і тільки тоді, коли $x \leq y$ і $x \neq y$.

Теорема A.30. *1. Алгебраїчна система $\left(\mathbb{R}^{\widehat{+}}, \widehat{+}, \widehat{\times}, <\right)$ є упорядкованим полем.*

2. Елемент $0^{\widehat{+}} = -\infty$ є нульовим елементом поля $\mathbb{R}^{\widehat{+}}$.

3. Число $1^{\widehat{+}} = 0$ є одиничним елементом поля $\mathbb{R}^{\widehat{+}}$.

4. Поле $\mathbb{R}^{\widehat{+}}$ ізоморфне полю дійсних чисел $\mathbb{R}$, при цьому відображення $\mathbb{R}^{\widehat{+}} \ni x \mapsto \exp(x) \in \mathbb{R}$ є ізоморфізмом між цими полями.

Доведення. **1,2,3:** Використовуючи формули (A.106), (A.107), (A.103), (A.104) та твердження A.28, A.29 можна перевірити, що мають місце такі властивості:

(a) для будь-яких $a, b, c \in \mathbb{R}^{\widehat{+}}$ справедливі рівності: $a \,\widehat{+}\, b = b \,\widehat{+}\, a$, $\left(a \,\widehat{+}\, b\right) \widehat{+}\, c = a \,\widehat{+}\, \left(b \,\widehat{+}\, c\right)$, $a \,\widehat{\times}\, b = b \,\widehat{\times}\, a$, $\left(a \,\widehat{\times}\, b\right) \widehat{\times}\, c = a \,\widehat{\times}\, \left(b \,\widehat{\times}\, c\right)$, $a \,\widehat{+}\, 0^{\widehat{+}} = a \,\widehat{\times}\, 1^{\widehat{+}} = a$;

(b) для довільного елемента $a \in \mathbb{R}^{\widehat{+}}$ існує (єдиний) елемент $\widehat{-}\, a \in \mathbb{R}^{\widehat{+}}$ такий, що

$$a \,\widehat{+}\, \left(\widehat{-}\, a\right) = 0^{\widehat{+}}, \text{ де } \widehat{-}\, a := \begin{cases} a + \pi i, & a \in \mathbb{R} \\ 0^{\widehat{+}}, & a = 0^{\widehat{+}} \\ a - \pi i, & a \in \mathbb{R}^{\widehat{+}} \setminus \left(\mathbb{R} \cup \left(0^{\widehat{+}}\right)\right) \end{cases} \quad \left(a \in \mathbb{R}^{\widehat{+}}\right);$$

(c) для будь-якого елемента $a \in \mathbb{R}^{\widehat{+}}$ такого, що $a \neq 0^{\widehat{+}}$ існує (єдиний) елемент $a^{\widehat{-}1} \in \mathbb{R}^{\widehat{+}}$ такий, що $a \,\widehat{\times}\, a^{\widehat{-}1} = 1^{\widehat{+}}$, де $a^{\widehat{-}1} := \begin{cases} -a, & a \in \mathbb{R} \\ -x + \pi i, & a = x + \pi i, \text{ де } x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\left(a \in \mathbb{R}^{\widehat{+}},\ a \neq 0^{\widehat{+}} \right)$;

(d) якщо $a, b, c \in \mathbb{R}^{\widehat{+}}$, $a < b$ і $b < c$ то $a < c$;

(e) для будь-яких $a, b \in \mathbb{R}^{\widehat{+}}$ виконується одне і тільки одне із співвідношень $a = b$, $a < b$ або $b < a$;

(f) якщо $a, b, c \in \mathbb{R}^{\widehat{+}}$ і $a < b$ то $a \,\widehat{+}\, c < b \,\widehat{+}\, c$;

(g) якщо $a, b, c \in \mathbb{R}^{\widehat{+}}$, $a < b$ і $c > 0^{\widehat{+}}$ то $a \,\widehat{\times}\, c < b \,\widehat{\times}\, c$.

Тому, за означенням упорядкованого поля (див. [238, 239]), отримуємо перші три пункти теореми.

4: Функція $\exp(x)$ є бієкцією з $\mathbb{R}^{\widehat{+}}$ на $\mathbb{R}$. Використовуючи рівності (A.103), (A.104), поширені на довільні $x, y \in \mathbb{R}^{\widehat{+}}$, а також твердження A.28 легко перевірити, що ця функція є ізоморфізмом між полями $\mathbb{R}^{\widehat{+}}$ та $\mathbb{R}$. □

Надалі будемо використовувати термін "поле $\mathbb{R}^{\widehat{+}}$", маючи на увазі під цим терміном всю алгебраїчну структуру $\left(\mathbb{R}^{\widehat{+}}, \widehat{+}, \widehat{\times}, \leq\right)$.

Зауваження A.31. Використовуючи твердження A.28 неважко довести, що для $a \in \mathbb{R}^{\widehat{+}}$ умова $a < 0^{\widehat{+}}$ виконується тоді і тільки тоді, коли число a можна подати у вигляді $a = x + \pi i$, де $x \in \mathbb{R}$. Враховуючи рівність $0^{\widehat{+}} = -\infty$, ми бачимо, що в полі $\mathbb{R}^{\widehat{+}}$ існують числа, менші, ніж $-\infty$ (а саме, числа виду $a = x + \pi i$, де $x \in \mathbb{R}$).

Гіперболічне зображення узагальнених перетворень Лоренца В цьому підпункті ми будемо використовувати загальне зображення узагальнених перетворень Лоренца, яке дає наслідок A.19. Це зображення використовує функції $\varphi_0(\theta)$ та $\varphi_1(\theta)$ $(\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$, що визначаються за допомогою формул (A.70).

Покажемо, що ці функції можна виразити через гіперболічні функції, визначені на $\mathbb{R}^{\widehat{+}}$. Для цього введемо нову змінну ψ що задовольняє умову:

$$\frac{1}{\theta} = \exp\left(\frac{\psi + \operatorname{sign}^{\widehat{+}}\psi}{2}\right); \quad \psi \in \mathbb{R}^{\widehat{+}},\ \psi \neq -\infty, \quad \text{де} \tag{A.108}$$

$$\operatorname{sign}^{\widehat{+}} x = \ln^{\widehat{+}}(\operatorname{sign}(\exp(x))) =$$

$$= \begin{cases} 1^{\widehat{+}}, & x \in \mathbb{R} \\ 0^{\widehat{+}}, & x = 0^{\widehat{+}} \\ \widehat{-}\,1^{\widehat{+}}, & x \in \mathbb{R}^{\widehat{+}} \setminus \left(\mathbb{R} \cup \left\{0^{\widehat{+}}\right\}\right) \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \\ -\infty, & x = -\infty \\ \pi i, & x < -\infty \end{cases} \qquad \left(x \in \mathbb{R}^{\widehat{+}}\right)$$

(функція $\operatorname{sign}^{\widehat{+}} x$ є аналогом функції $\operatorname{sign}(x)$ в полі $\mathbb{R}^{\widehat{+}}$).

Змінна ψ в формулі (A.108), однозначно визначається через змінну θ. Справді, у випадку, коли $\theta > 0$, з формули (A.108), випливає, що $\psi \in \mathbb{R}$ (тобто $\psi > -\infty$) , оскільки при $\psi < -\infty$ виконується нерівність $\exp\left(\frac{\psi + \operatorname{sign}^{\widehat{+}}\psi}{2}\right) < 0$. Отже, в цьому випадку рівність (A.108) переписується у вигляді, $\frac{1}{\theta} = \exp\left(\frac{\psi}{2}\right)$. Тому, при $\theta > 0$ маємо, $\psi = 2\ln\left(\frac{1}{\theta}\right)$. Аналогічно, у випадку $\theta < 0$ маємо $\psi \notin \mathbb{R}$, тобто $\psi < -\infty$. Отже, $\psi = \alpha + \pi i$, де $\alpha \in \mathbb{R}$. Тому, в цьому випадку рівність (A.108) переписується у вигляді, $\frac{1}{\theta} = \exp\left(\frac{\alpha + 2\pi i}{2}\right)$. Звідси маємо, $\frac{1}{\theta} = -\exp\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $\alpha = 2\ln\left(-\frac{1}{\theta}\right)$ і $\psi = 2\ln\left(-\frac{1}{\theta}\right) + \pi i$.

Нескладно перевірити, що з рівності (A.108) випливає наступна рівність:

$$\frac{1}{|\theta|} = \exp\left(\frac{\psi - \operatorname{sign}^{\widehat{+}}\psi}{2}\right). \tag{A.109}$$

Застосовуючи рівності (A.108) та (A.109), можна виразити функції $\varphi_0(\theta)$, $\varphi_1(\theta)$ через новий параметр ψ:

$$\varphi_0(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{|\theta|} + \theta\right) = \frac{1}{2}\left(\exp\left(\frac{\psi - \operatorname{sign}^{\widehat{+}}\psi}{2}\right) + \exp\left(-\frac{\psi + \operatorname{sign}^{\widehat{+}}\psi}{2}\right)\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{sign}^{\widehat{+}}\psi\right) \mathsf{ch}\left(\frac{\psi}{2}\right);$$

$$\varphi_1(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{|\theta|} - \theta\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{sign}^{\widehat{+}}\psi\right) \mathsf{sh}\left(\frac{\psi}{2}\right).$$

Використовуючи наведені вище рівності, а також наслідок A.19 отримуємо наступну теорему:

Теорема A.32. *Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$ належить до класу $\mathfrak{DT}(\mathfrak{H}, c)$ тоді і тільки тоді, коли існують числа $s \in \{-1, 1\}$, $\psi \in \mathbb{R}^{\widehat{+}} \setminus \{-\infty\}$, вектор $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ та оператор $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$ такі, що для довільного $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ вектор $L\mathrm{w}$ виражається*

за формулою:

$$L\mathrm{w} = \exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{sign}\,{}^{\widehat{+}}\psi\right)\left(s\,\mathsf{ch}\left(\frac{\psi}{2}\right)\mathcal{T}\left(\mathrm{w}\right) - \mathsf{sh}\left(\frac{\psi}{2}\right)\frac{\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0 +$$
$$+\,J\left(\exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{sign}\,{}^{\widehat{+}}\psi\right)\left(c\,\mathsf{sh}\left(\frac{\psi}{2}\right)\mathcal{T}\left(\mathrm{w}\right)\mathbf{n} - s\,\mathsf{ch}\left(\frac{\psi}{2}\right)\mathbf{X}_1\left[\mathbf{n}\right]\mathrm{w}\right) + \mathbf{X}_1^{\perp}\left[\mathbf{n}\right]\mathrm{w}\right).$$

Оператор лінійного перетворення координат L є v-детермінованим тоді і тільки тоді, коли $\psi \neq \pi i$, і в цьому випадку його швидкість можна обчислити за формулою: $\mathcal{V}\left(L\right) = cs\frac{\mathsf{sh}\left(\frac{\psi}{2}\right)}{\mathsf{ch}\left(\frac{\psi}{2}\right)}\mathbf{n} = cs\,\mathsf{th}\left(\frac{\psi}{2}\right)\,\mathbf{n}$.

Зауваження A.33. У частинному випадку $\mathfrak{H} = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}\right) = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^4$, $\mathbf{n} = (0,1,0,0)$, $\psi\in\mathbb{R}$ і $J\left(0,x,y,z\right) = \left(0,-x,y,z\right)$ $(x,y,z\in\mathbb{R})$, отримуємо формули (A.101) як наслідок з теореми A.32.

Більшість основних результатів підрозділу A.1 були опубліковані в [110]. Окремі результати зазначеного підрозділу опубліковані в [86, 100]. Результати, викладені в параграфі A.1.7 опубліковані в роботі [240]. Також результати даного підрозділу були представлені на конференціях [241–243].

A.2. Алгебраїчні властивості узагальнених перетворень Лоренца

Метою даного підрозділу є дослідити деякі алгебраїчні властивості введених класів узагальнених перетворень Лоренца $\mathfrak{OT}_+\left(\mathfrak{H},c\right)$ та $\mathfrak{OT}\left(\mathfrak{H},c\right)$. Основну увагу буде присвячено дослідженню групових властивостей цих класів.

Нехай $\mathfrak{H}$ — дійсний гільбертовий простір, а $\mathfrak{H}_1$ — введений в (A.1) підпростір простору Мінковського $\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}\right)$, ізоморфний до $\mathfrak{H}$. Введемо таке позначення:

$$\mathbf{E}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n}\right] := \mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n},\mathbb{I}_1\right] \quad \left(\mathbf{n}\in\mathbf{B}_1\left(\mathfrak{H}_1\right),\ \theta\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\quad s\in\{-1,1\}\right), \tag{A.110}$$

де $\mathbb{I}_1 := \mathbb{I}_{\mathfrak{H}_1}$ — одиничний (тотожний) оператор на просторі $\mathfrak{H}_1$. Оператори $\mathbf{E}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n}\right]$ називатимемо ***елементарними*** узагальненими перетвореннями Лоренца.

Нагадаємо, що в формулі (A.22) для довільного унітарного на підпросторі $\mathfrak{H}_1$ оператора $J\in\mathfrak{U}\left(\mathfrak{H}_1\right)$ було введено оператор $\widetilde{J}\in\mathfrak{U}\left(\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}\right)\right)$:

$$\widetilde{J}\mathrm{w} = \widehat{\mathbf{T}}\mathrm{w} + J\mathbf{X}\mathrm{w} = \mathcal{T}\left(\mathrm{w}\right)\mathbf{e}_0 + J\mathbf{X}\mathrm{w} \quad \left(\mathrm{w}\in\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}\right)\right) \tag{A.22: dubl}$$

Легко перевірити, що для довільних $J, J_1\in\mathfrak{U}\left(\mathfrak{H}_1\right)$ виконуються такі рівності:

$$\widetilde{JJ_1} = \widetilde{J}\ \widetilde{J_1}; \qquad \widetilde{J}^{-1} = \widetilde{\left(J^{-1}\right)}. \tag{A.111}$$

Нагадаємо, що, згідно з формулою (A.78) або наслідком A.19, будь-яке узагальнене перетворення Лоренца $L \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c)$ можна подати у вигляді, $L = \mathbf{U}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}, J]$, де $s \in \{-1, 1\}$, $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$.

Лема A.34. *Для будь-якого узагальненого перетворення Лоренца* $\mathbf{U}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}, J] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c)$ *(*$s \in \{-1, 1\}$*,* $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*,* $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$*,* $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$*) справедливі наступні рівності:*

$$\widetilde{J}\mathbf{E}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}] = \mathbf{U}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}, J]; \quad \mathbf{E}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}]\,\widetilde{J} = \mathbf{U}_{\theta,c}\left[s, J^{-1}\mathbf{n}, J\right]. \tag{A.112}$$

Доведення. Перша рівність (A.112) випливає з (A.75), (A.110) та (A.22). Доведемо другу рівність. Нехай, $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Покладемо:

$$\mathrm{w}' := \widetilde{J}\mathrm{w} = \mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0 + J\mathbf{X}\mathrm{w}.$$

Використовуючи (A.75) та (A.110) отримуємо:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}]\,\widetilde{J}\mathrm{w} = \mathbf{E}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}]\,\mathrm{w}' &= \left(s\varphi_0(\theta)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}') - \varphi_1(\theta)\,\frac{\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}'\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0 + \\
&+ c\varphi_1(\theta)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}')\,\mathbf{n} - s\varphi_0(\theta)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}' + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}' = \\
&= \left(s\varphi_0(\theta)\,\mathcal{T}(\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0 + J\mathbf{X}\mathrm{w}) - \varphi_1(\theta)\,\frac{\langle \mathbf{n}, \mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0 + J\mathbf{X}\mathrm{w}\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0 + \\
&+ c\varphi_1(\theta)\,\mathcal{T}(\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0 + J\mathbf{X}\mathrm{w})\,\mathbf{n} - s\varphi_0(\theta)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,(\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0 + J\mathbf{X}\mathrm{w}) + \\
&+ \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,(\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0 + J\mathbf{X}\mathrm{w}) = \\
&= \left(s\varphi_0(\theta)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \varphi_1(\theta)\,\frac{\langle \mathbf{n}, J\mathbf{X}\mathrm{w}\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0 + \\
&+ c\varphi_1(\theta)\,\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n} - s\varphi_0(\theta)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,J\mathbf{X}\mathrm{w} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,J\mathbf{X}\mathrm{w}.
\end{aligned} \tag{A.113}$$

Оскільки J — унітарний оператор з $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_1$, то:

$$\langle \mathbf{n}, J\mathbf{X}\mathrm{w}\rangle = \left\langle J^{-1}\mathbf{n}, \mathbf{X}\mathrm{w}\right\rangle = \left\langle \mathbf{X}J^{-1}\mathbf{n}, \mathrm{w}\right\rangle = \left\langle J^{-1}\mathbf{n}, \mathrm{w}\right\rangle. \tag{A.114}$$

Далі, застосовуючи (A.5),(A.6) та (A.114), маємо:

$$\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,J\mathbf{X}\mathrm{w} = \langle \mathbf{n}, J\mathbf{X}\mathrm{w}\rangle\,\mathbf{n} = J\left\langle J^{-1}\mathbf{n}, \mathrm{w}\right\rangle J^{-1}\mathbf{n} = J\mathbf{X}_1\left[J^{-1}\mathbf{n}\right]\mathrm{w}; \tag{A.115}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,J\mathbf{X}\mathrm{w} &= (\mathbf{X} - \mathbf{X}_1[\mathbf{n}])\,J\mathbf{X}\mathrm{w} = \mathbf{X}J\mathbf{X}\mathrm{w} - J\mathbf{X}_1\left[J^{-1}\mathbf{n}\right]\mathrm{w} = \\
&= J\left(\mathbf{X}\mathrm{w} - \mathbf{X}_1\left[J^{-1}\mathbf{n}\right]\mathrm{w}\right) = J\mathbf{X}_1^{\perp}\left[J^{-1}\mathbf{n}\right]\mathrm{w}.
\end{aligned} \tag{A.116}$$

Підставляючи замість виразів $\langle \mathbf{n}, J\mathbf{X}\mathrm{w}\rangle$, $\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,J\mathbf{X}\mathrm{w}$, $\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,J\mathbf{X}\mathrm{w}$ праві частини рівностей (A.114), (A.115) та (A.116) у рівність (A.113), при цьому враховуючи рів-

ність (A.75) отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]\,\widetilde{J}\mathrm{w} &= \left(s\varphi_0(\theta)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \varphi_1(\theta)\,\frac{\langle J^{-1}\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0 + \\ &\quad + c\varphi_1(\theta)\,\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n} - s\varphi_0(\theta)\,J\mathbf{X}_1\left[J^{-1}\mathbf{n}\right]\mathrm{w} + J\mathbf{X}_1^{\perp}\left[J^{-1}\mathbf{n}\right]\mathrm{w} = \\ &= \left(s\varphi_0(\theta)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \varphi_1(\theta)\,\frac{\langle J^{-1}\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0 + \\ &\quad + J\left(c\varphi_1(\theta)\,\mathcal{T}(\mathrm{w})\,J^{-1}\mathbf{n} - s\varphi_0(\theta)\,\mathbf{X}_1\left[J^{-1}\mathbf{n}\right]\mathrm{w} + \mathbf{X}_1^{\perp}\left[J^{-1}\mathbf{n}\right]\mathrm{w}\right) = \\ &= \mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,J^{-1}\mathbf{n},J\right]\mathrm{w} \quad (\forall \mathrm{w}\in\mathcal{M}(\mathfrak{H}))\,.\end{aligned}$$

□

Наслідок A.35. *Нехай* $\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J]\in\mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$ *(*$s\in\{-1,1\}$, $\theta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\mathbf{n}\in\mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, $J\in\mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$*) і* $J_1\in\mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$.

Тоді $\widetilde{J}_1\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J]\,,\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J]\,\widetilde{J}_1\in\mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$, *причому:*

$$\widetilde{J}_1\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J] = \mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J_1J]\,; \tag{A.117}$$

$$\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J]\,\widetilde{J}_1 = \mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,J_1^{-1}\mathbf{n},JJ_1\right]. \tag{A.118}$$

Доведення. Рівність (A.117) випливає з рівності (A.111) та леми A.34. Доведемо рівність (A.118). Використовуючи лему A.34 та рівність (A.117) отримуємо:

$$\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J]\,\widetilde{J}_1 = \widetilde{J}\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]\,\widetilde{J}_1 = \widetilde{J}\mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,J_1^{-1}\mathbf{n},J_1\right] = \mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,J_1^{-1}\mathbf{n},JJ_1\right].$$ □

З леми A.34 і наслідку A.35 випливає, що питання про належність добутку (композиції) будь-яких узагальнених перетворень Лоренца до вихідного класу $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$ може бути зведене до питання про належність до $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$ добутку елементарних узагальнених перетворень Лоренца, яке розглядатиметься в наступних параграфах.

A.2.1. Композиція узагальнених перетворень Лоренца з паралельними напрямками руху

Спочатку дослідимо композицію елементарних узагальнених перетворень Лоренца з однаковим напрямним вектором.

Введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}(\xi,\eta) &:= \frac{1}{2}(\operatorname{sign}\xi+1)(\operatorname{sign}\eta+1)-1 \\ &= \begin{cases}1, & \xi,\eta>0\\ -1, & \xi<0 \text{ або } \eta<0\end{cases}, \qquad \xi,\eta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\,;\end{aligned} \tag{A.119}$$

$$\mathbb{I}_{\sigma,\mu}[\mathbf{n}]\;x := \sigma\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,x + \mu\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,x = \sigma\langle\mathbf{n},x\rangle\,\mathbf{n} + \mu\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,x \quad (x\in\mathfrak{H}_1) \tag{A.120}$$
$$(\mathbf{n}\in\mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)\,,\ \sigma,\mu\in\{-1,1\}).$$

Очевидно, що $\mathbb{I}_{\sigma,\mu}[\mathbf{n}]\in\mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$ (для довільних $\mathbf{n}\in\mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ і $\sigma,\mu\in\{-1,1\}$).

Лема A.36. *Нехай* $\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}], \mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\mathbf{n}]$ *(*$\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, $\theta,\theta_1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $s,s_1 \in \{-1,1\}$*) — елементарні узагальнені перетворення Лоренца з однаковим напрямним вектором* $\mathbf{n}$*. Тоді:*

$$\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\mathbf{n}] = \mathbf{U}_{\theta\theta_1^{-ss_1},c}[s',-ss'\mathbf{n},\mathbb{I}_{-1,1}[\mathbf{n}]],\ \text{де } s' = \mathfrak{S}(ss_1,\theta_1).$$

Доведення. Зафіксуємо довільний вектор $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Покладемо: $\mathrm{w}' := \mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\mathbf{n}]\,\mathrm{w}$. Використовуючи формули (A.75),(A.110) та рівності (A.6) отримуємо:

$$\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\mathbf{n}]\,\mathrm{w} = \mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]\,\mathrm{w}' = \left(s\varphi_0(\theta)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}') - \varphi_1(\theta)\,\frac{\langle\mathbf{n},\mathrm{w}'\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0 + \\ + c\varphi_1(\theta)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}')\,\mathbf{n} - s\varphi_0(\theta)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}' + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}'; \tag{A.121}$$

$$\mathrm{w}' = \left(s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \varphi_1(\theta_1)\,\frac{\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0 + \\ + c\varphi_1(\theta_1)\,\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n} - s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w};$$

$$\mathcal{T}(\mathrm{w}') = s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \varphi_1(\theta_1)\,\frac{\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle}{c}; \tag{A.122}$$

$$\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}' = c\varphi_1(\theta_1)\,\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n} - s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}; \tag{A.123}$$

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{n},\mathrm{w}'\rangle &= \langle\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathbf{n},\mathrm{w}'\rangle = \langle\mathbf{n},\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}'\rangle = \\ &= \langle\mathbf{n}, c\varphi_1(\theta_1)\,\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n} - s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\rangle = \\ &= c\varphi_1(\theta_1)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}) - s_1\varphi_0(\theta_1)\,\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle;\end{aligned} \tag{A.124}$$

$$\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}' = \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}. \tag{A.125}$$

Підставляючи значення $\mathcal{T}(\mathrm{w}')$, $\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}'$, $\langle\mathbf{n},\mathrm{w}'\rangle$, $\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}'$ з (A.122),(A.123),(A.124) та (A.125) в (A.121) одержуємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\mathbf{n}]\,\mathrm{w} &= \Bigg(s\varphi_0(\theta)\left(s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \varphi_1(\theta_1)\,\frac{\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle}{c}\right) - \\ &- \varphi_1(\theta)\,\frac{c\varphi_1(\theta_1)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}) - s_1\varphi_0(\theta_1)\,\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle}{c}\Bigg)\mathbf{e}_0 + \\ &+ c\varphi_1(\theta)\left(s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \varphi_1(\theta_1)\,\frac{\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle}{c}\right)\mathbf{n} - \\ &- s\varphi_0(\theta)\,(c\varphi_1(\theta_1)\,\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n} - s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}) + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w} = \\ &= \Bigg((ss_1\varphi_0(\theta)\,\varphi_0(\theta_1) - \varphi_1(\theta)\,\varphi_1(\theta_1))\,\mathcal{T}(\mathrm{w}) + \\ &+ s\,(ss_1\varphi_1(\theta)\,\varphi_0(\theta_1) - \varphi_0(\theta)\,\varphi_1(\theta_1))\,\frac{\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle}{c}\Bigg)\mathbf{e}_0 +\end{aligned}$$

$$+ cs\left(ss_1\varphi_1(\theta)\varphi_0(\theta_1) - \varphi_0(\theta)\varphi_1(\theta_1)\right)\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n}+$$
$$+ \left(ss_1\varphi_0(\theta)\varphi_0(\theta_1) - \varphi_1(\theta)\varphi_1(\theta_1)\right)\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}. \tag{A.126}$$

Використовуючи означення функцій $\varphi_0(\cdot)$, $\varphi_1(\cdot)$ (див. (A.70)) отримуємо:

$$\begin{aligned}
&ss_1\varphi_0(\theta)\varphi_0(\theta_1) - \varphi_1(\theta)\varphi_1(\theta_1) = \\
&\quad = ss_1\frac{1}{2}\left(\frac{1}{|\theta|}+\theta\right)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{|\theta_1|}+\theta_1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{|\theta|}-\theta\right)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{|\theta_1|}-\theta_1\right) = \\
&\quad = \frac{1}{4}\left(ss_1\left(\frac{1}{|\theta|}\frac{1}{|\theta_1|}+\theta\frac{1}{|\theta_1|}+\frac{1}{|\theta|}\theta_1+\theta\theta_1\right) - \left(\frac{1}{|\theta|}\frac{1}{|\theta_1|}-\theta\frac{1}{|\theta_1|}-\frac{1}{|\theta|}\theta_1+\theta\theta_1\right)\right) = \\
&\quad = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{|\theta_1|}+\frac{\theta_1}{|\theta|}\right), & ss_1 = 1 \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{|\theta\theta_1|}+\theta\theta_1\right), & ss_1 = -1 \end{cases} = \begin{cases} \varphi_0\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right), & ss_1 = 1,\ \theta_1 > 0 \\ -\varphi_0\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right), & ss_1 = 1,\ \theta_1 < 0 = \\ -\varphi_0(\theta\theta_1), & ss_1 = -1 \end{cases} \\
&\quad = \mathfrak{S}(ss_1,\theta_1)\,\varphi_0\left(\theta\theta_1^{-ss_1}\right) = s'\varphi_0(\theta'),
\end{aligned} \tag{A.127}$$

де $s' = \mathfrak{S}(ss_1,\theta_1)$; $\theta' = \theta\theta_1^{-ss_1}$. Аналогічно знаходимо:

$$ss_1\varphi_1(\theta)\varphi_0(\theta_1) - \varphi_0(\theta)\varphi_1(\theta_1) = s'\varphi_1(\theta'). \tag{A.128}$$

Підставляючи праві частини рівностей (A.127), (A.128) замість відповідних виразів у формулі (A.126), отримуємо:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\mathbf{n}]\,\mathrm{w} = &\left(s'\varphi_0(\theta')\mathcal{T}(\mathrm{w}) + ss'\varphi_1(\theta')\frac{\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0+ \\
&+ css'\varphi_1(\theta')\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n} + s'\varphi_0(\theta')\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}.
\end{aligned}$$

Враховуючи рівності (A.6) останню формулу можна переписати у вигляді:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\mathbf{n}]\,\mathrm{w} = &\left(s'\varphi_0(\theta')\mathcal{T}(\mathrm{w}) + \varphi_1(\theta')\frac{\langle ss'\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0+ \\
&+ c\varphi_1(\theta')\mathcal{T}(\mathrm{w})(ss'\mathbf{n}) + s'\varphi_0(\theta')\mathbf{X}_1[ss'\mathbf{n}]\,\mathrm{w} + \mathbf{X}_1^{\perp}[ss'\mathbf{n}]\,\mathrm{w} = \\
&= \mathbf{U}_{\theta\theta_1^{-ss_1},c}[s',-ss'\mathbf{n},\mathbb{I}_{-1,1}[\mathbf{n}]]\,\mathrm{w}.
\end{aligned}$$

□

Тепер розглянемо композицію елементарних узагальнених перетворень Лоренца $\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]$ та $\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\mathbf{n}_1]$ з паралельними напрямними векторами $\mathbf{n} \parallel \mathbf{n}_1$ (що рівносильно $\mathbf{n} = \sigma\mathbf{n}_1$, де $\sigma \in \{-1,1\}$).

Лема A.37. *Нехай* $\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]$, $\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\sigma\mathbf{n}]$ $(\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1),\ \theta,\theta_1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\quad \sigma,s,s_1 \in \{-1,1\})$ — *елементарні узагальнені перетворення Лоренца з паралельними напрямками руху. Тоді справедлива наступна рівність:*

$$\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\sigma\mathbf{n}] = \mathbf{U}_{\theta\theta_1^{-\sigma ss_1},c}[\sigma s',-\sigma ss'\mathbf{n},\mathbb{I}_{-1,1}[\mathbf{n}]],\quad \text{де } s' = \mathfrak{S}(\sigma ss_1,\theta_1).$$

Доведення. Розглянемо довільні елементарні узагальнені перетворення Лоренца з паралельними напрямками руху $\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]$, $\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\sigma\mathbf{n}] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$. Використовуючи формули (A.75),(A.110) та рівності (A.6) отримуємо:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\sigma\mathbf{n}]\,\mathrm{w} &= \left(s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \varphi_1(\theta_1)\,\frac{\langle\sigma\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0 + \\
&\quad + c\varphi_1(\theta_1)\,\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\sigma\mathbf{n} - s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathbf{X}_1[\sigma\mathbf{n}]\,\mathrm{w} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\sigma\mathbf{n}]\,\mathrm{w} = \\
&= \left(s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \varphi_1(\theta_1)\,\frac{\langle\sigma\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0 + \\
&\quad + c\varphi_1(\theta_1)\,\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\sigma\mathbf{n} - s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w} = \\
&= \sigma\left(\sigma s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \varphi_1(\theta_1)\,\frac{\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0 + \\
&\quad + \sigma\left(c\varphi_1(\theta_1)\,\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n} - \sigma s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w} + \sigma\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right) = \\
&= \sigma\mathbf{U}_{\theta_1,c}[\sigma s_1,\mathbf{n},\mathbb{I}_{1,\sigma}[\mathbf{n}]]\,\mathrm{w} \qquad (\mathrm{w}\in\mathcal{M}(\mathfrak{H}))\,.
\end{aligned}$$

Звідси, враховуючи, що $(\mathbb{I}_{1,\sigma}[\mathbf{n}])^{-1}\mathbf{n} = \mathbf{n}$ і застосовуючи лему A.34, маємо:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\sigma\mathbf{n}] &= \sigma\mathbf{U}_{\theta_1,c}[\sigma s_1,\mathbf{n},\mathbb{I}_{1,\sigma}[\mathbf{n}]] = \sigma\mathbf{E}_{\theta_1,c}[\sigma s_1,\mathbf{n}]\,\widetilde{\mathbb{I}_{1,\sigma}}[\mathbf{n}] \\
&\qquad (\mathbf{n}\in\mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)\,,\ \theta_1\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\,,\ \sigma,s_1\in\{-1,1\}).
\end{aligned} \tag{A.129}$$

Отже, скориставшись лемою A.36 та лемою A.34, отримаємо:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\sigma\mathbf{n}] &= \sigma\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1,c}[\sigma s_1,\mathbf{n}]\,\widetilde{\mathbb{I}_{1,\sigma}}[\mathbf{n}] = \\
&= \sigma\mathbf{U}_{\theta\theta_1^{-\sigma s s_1},c}[s',-ss'\mathbf{n},\mathbb{I}_{-1,1}[\mathbf{n}]]\,\widetilde{\mathbb{I}_{1,\sigma}}[\mathbf{n}] = \\
&= \widetilde{\mathbb{I}_{-1,1}}[\mathbf{n}]\left(\sigma\mathbf{E}_{\theta\theta_1^{-\sigma s s_1},c}[s',-ss'\mathbf{n}]\,\widetilde{\mathbb{I}_{1,\sigma}}[\mathbf{n}]\right),
\end{aligned} \tag{A.130}$$

де $s' = \mathfrak{S}(\sigma s s_1,\theta_1)$. Згідно з рівностями (A.120) та (A.6), $\mathbb{I}_{1,\sigma}[\mathbf{n}] = \mathbb{I}_{1,\sigma}[-ss'\mathbf{n}]$. Отже, рівність (A.130) можна переписати у вигляді:

$$\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\sigma\mathbf{n}] = \widetilde{\mathbb{I}_{-1,1}}[\mathbf{n}]\left(\sigma\mathbf{E}_{\theta\theta_1^{-\sigma s s_1},c}[\sigma(\sigma s'),-ss'\mathbf{n}]\,\widetilde{\mathbb{I}_{1,\sigma}}[-ss'\mathbf{n}]\right).$$

І, скориставшись рівністю (A.129), отримаємо:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\sigma\mathbf{n}] &= \widetilde{\mathbb{I}_{-1,1}}[\mathbf{n}]\left(\mathbf{E}_{\theta\theta_1^{-\sigma s s_1},c}[\sigma s',-\sigma ss'\mathbf{n}]\right) = \\
&= \mathbf{U}_{\theta\theta_1^{-\sigma s s_1},c}[\sigma s',-\sigma ss'\mathbf{n},\mathbb{I}_{-1,1}[\mathbf{n}]]\,.
\end{aligned}$$

□

Наступне твердження показує, що композиція довільних узагальнених перетворень Лоренца з паралельними напрямками руху завжди є узагальненим перетворенням Лоренца.

Твердження A.38. *Нехай,* $\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J]\,,\mathbf{U}_{\theta_1,c}[s_1,\sigma J\mathbf{n},J_1] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$.

Тоді $\mathbf{U}_{\theta_1,c}[s_1,\sigma J\mathbf{n},J_1]\,\mathbf{U}_{\theta,c}[s,\mathbf{n},J] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$, *причому:*

$$\mathbf{U}_{\theta_1,c}\left[s_1,\sigma J\mathbf{n},J_1\right]\mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n},J\right]=\mathbf{U}_{\theta_1\theta^{-\sigma s_1 s},c}\left[\sigma s',-s_1 s'\mathbf{n},J_1 J\mathbb{I}_{-1,1}\left[\mathbf{n}\right]\right],\quad \textit{де } s'=\mathfrak{S}\left(\sigma s_1 s,\theta\right).$$

Доведення. Згідно з лемою A.34, маємо:

$$\mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n},J\right]=\mathbf{E}_{\theta,c}\left[s,J\mathbf{n}\right]\widetilde{J};\quad \mathbf{U}_{\theta_1,c}\left[s_1,\sigma J\mathbf{n},J_1\right]=\widetilde{J}_1\mathbf{E}_{\theta_1,c}\left[s_1,\sigma J\mathbf{n}\right].$$

Далі, скориставшись лемою A.37, отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{\theta_1,c}\left[s_1,\sigma J\mathbf{n},J_1\right]\mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n},J\right]&=\widetilde{J}_1\mathbf{E}_{\theta_1,c}\left[s_1,\sigma J\mathbf{n}\right]\mathbf{E}_{\theta,c}\left[s,J\mathbf{n}\right]\widetilde{J}=\\&=\widetilde{J}_1\mathbf{U}_{\theta_1\theta^{-\sigma s_1 s},c}\left[\sigma s',-\sigma s_1 s'(\sigma J\mathbf{n}),\mathbb{I}_{-1,1}\left[\sigma J\mathbf{n}\right]\right]\widetilde{J}=\\&=\widetilde{J}_1\mathbf{U}_{\theta_1\theta^{-\sigma s_1 s},c}\left[\sigma s',-s_1 s' J\mathbf{n},\mathbb{I}_{-1,1}\left[J\mathbf{n}\right]\right]\widetilde{J},\end{aligned}$$

де $s'=\mathfrak{S}\left(\sigma s_1 s,\theta\right)$. Застосовуючи до правої частини останньої формули наслідок A.35, маємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{\theta_1,c}\left[s_1,\sigma J\mathbf{n},J_1\right]\mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n},J\right]&=\widetilde{J}_1\mathbf{U}_{\theta_1\theta^{-\sigma s_1 s},c}\left[\sigma s',-s_1 s'\mathbf{n},\mathbb{I}_{-1,1}\left[J\mathbf{n}\right]J\right]=\\&=\mathbf{U}_{\theta_1\theta^{-\sigma s_1 s},c}\left[\sigma s',-s_1 s'\mathbf{n},J_1\mathbb{I}_{-1,1}\left[J\mathbf{n}\right]J\right].\end{aligned}\tag{A.131}$$

Використовуючи рівність (A.120) та унітарність оператора J для довільного $x\in\mathfrak{H}_1$ отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_{-1,1}\left[J\mathbf{n}\right]Jx&=-\mathbf{X}_1\left[J\mathbf{n}\right]Jx+\mathbf{X}_1^{\perp}\left[J\mathbf{n}\right]Jx=\\&=-\mathbf{X}_1\left[J\mathbf{n}\right]Jx+\left(\mathbf{X}-\mathbf{X}_1\left[J\mathbf{n}\right]\right)Jx=-\left\langle J\mathbf{n},Jx\right\rangle J\mathbf{n}+\mathbf{X}Jx-\left\langle J\mathbf{n},Jx\right\rangle J\mathbf{n}=\\&=-\left\langle\mathbf{n},x\right\rangle J\mathbf{n}+Jx-\left\langle\mathbf{n},x\right\rangle J\mathbf{n}=J\left(-\left\langle\mathbf{n},x\right\rangle\mathbf{n}+\mathbf{X}x-\left\langle\mathbf{n},x\right\rangle\mathbf{n}\right)=\\&=J\left(-\mathbf{X}_1\left[\mathbf{n}\right]x+\left(\mathbf{X}-\mathbf{X}_1\left[\mathbf{n}\right]\right)x\right)=J\mathbb{I}_{-1,1}\left[\mathbf{n}\right]x.\end{aligned}$$

Отже, згідно з формулою (A.131) маємо:

$$\mathbf{U}_{\theta_1,c}\left[s_1,\sigma J\mathbf{n},J_1\right]\mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n},J\right]=\mathbf{U}_{\theta_1\theta^{-\sigma s_1 s},c}\left[\sigma s',-s_1 s'\mathbf{n},J_1 J\mathbb{I}_{-1,1}\left[\mathbf{n}\right]\right].$$

□

Зауваження A.39. Оператори перетворення координат $\mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n},J\right]$ та $\mathbf{U}_{\theta_1,c}\left[s_1,\sigma J\mathbf{n},J_1\right]$ у твердженні A.38 справді мають паралельні напрямки руху. Щоб пояснити останню тезу для прикладу розглянемо випадок $\theta\neq-1$. Тоді, згідно з теоремою A.18, перетворення координат $\mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n},J\right]$ є v-детермінованим, причому $\mathcal{V}\left(\mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n},J\right]\right)=cs\frac{1-\theta|\theta|}{1+\theta|\theta|}\mathbf{n}$. Тому згідно з формулою (A.55), оператор лінійного перетворення координат $\left(\mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n},J\right]\right)^{-1}$ також є v-детермінованим, причому $\mathcal{V}\left(\left(\mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n},J\right]\right)^{-1}\right)=J\mathcal{V}\left(\mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n},J\right]\right)=cs\frac{1-\theta|\theta|}{1+\theta|\theta|}J\mathbf{n}$. Припустимо, що (v-детермінований) оператор перетворення координат $\mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n},J\right]$ відображає координати довільної точки в нерухомій системі відліку $\boldsymbol{l}$ в координати цієї ж точки в іншій системі відліку [A.2] $\boldsymbol{l}'$, що рухається зі швидкістю $\mathcal{V}\left(\mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n},J\right]\right)=cs\frac{1-\theta|\theta|}{1+\theta|\theta|}\mathbf{n}$ відносно системи відліку $\boldsymbol{l}$. Тоді, система відліку $\boldsymbol{l}'$ буде рухатись відносно системи

[A.2] В цьому зауваженні системи відліку $\boldsymbol{l}$ та $\boldsymbol{l}'$ слід розуміти в звичайному фізичному сенсі.

відліку $\boldsymbol{l}$ із швидкістю $\mathcal{V}\left(\left(\mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n},J\right]\right)^{-1}\right) = cs\frac{1-\theta|\theta|}{1+\theta|\theta|}J\mathbf{n}$. Отже, напрямний вектор руху системи відліку $\boldsymbol{l}$ відносно $\boldsymbol{l}'$ паралельний вектору $J\mathbf{n}$. Таким чином, система відліку $\boldsymbol{l}''$, пов'язана з перетворенням координат $\mathbf{U}_{\theta_1}\left[s_1,\sigma J\mathbf{n},J_1\right]$ має напрямний вектор руху $\sigma J\mathbf{n}$, паралельний вектору $J\mathbf{n}$.

Наслідок A.40. *Нехай $\mathfrak{H}$ — дійсний гільбертовий простір такий, що* $\dim(\mathfrak{H}) = 1$. *Тоді для довільних операторів $L, L_1 \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$ маємо $L_1L \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$.*

Доведення. Нехай, $L, L_1 \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$, де $\mathfrak{H}$ — дійсний гільбертовий простір такий, що $\dim(\mathfrak{H}) = 1$. Тоді, згідно з формулою (A.78), оператори L,L_1 можна подати у вигляді:

$$L = \mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n},J\right], \qquad L_1 = \mathbf{U}_{\theta_1,c}\left[s_1,\mathbf{n}_1,J_1\right],$$

де $s, s_1 \in \{-1,1\}$, $\theta,\theta_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\mathbf{n},\mathbf{n}_1 \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, $J, J_1 \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$. Оскільки підпростір $\mathfrak{H}_1$ простору $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ ізоморфний простору $\mathfrak{H}$, то $\dim(\mathfrak{H}_1) = \dim(\mathfrak{H}) = 1$. Тому існує число $\sigma \in \{-1,1\}$ таке, що $\mathbf{n}_1 = \sigma\mathbf{n}$. Оскільки оператор J є унітарним в одновимірному просторі $\mathfrak{H}_1$, то існує число $\sigma' \in \{-1,1\}$ таке, що $J\mathbf{n} = \sigma'\mathbf{n}$. Отже, $\mathbf{n}_1 = \sigma\mathbf{n} = \sigma\sigma' J\mathbf{n} = \widetilde{\sigma}J\mathbf{n}$, де $\widetilde{\sigma} = \sigma\sigma' \in \{-1,1\}$. Тобто, $\mathbf{U}_{\theta_1,c}\left[s_1,\mathbf{n}_1,J_1\right] = \mathbf{U}_{\theta_1,c}\left[s_1,\widetilde{\sigma}J\mathbf{n},J_1\right]$. І, згідно з твердженням A.38, маємо, $L_1L = \mathbf{U}_{\theta_1,c}\left[s_1,\widetilde{\sigma}J\mathbf{n},J_1\right]\mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n},J\right] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$. □

Наступний наслідок показує, що операція взяття оберненого оператора не виводить за межі класу узагальнених перетворень Лоренца $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$.

Наслідок A.41. *Нехай,* $\mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n},J\right] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$. *Тоді* $\mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n},J\right]^{-1} \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$, *причому:*

$$\mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n},J\right]^{-1} = \mathbf{U}_{\theta^s,c}\left[s_\theta, s_\theta J\mathbf{n}, J^{-1}\right], \qquad \text{де } s_\theta = \mathfrak{S}(s,\theta). \tag{A.132}$$

Доведення. Розглянемо довільний оператор $\mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n},J\right] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$. Покладемо:

$$\theta_1 := \theta^s, \quad s_1 := \sigma := s_\theta = \mathfrak{S}(s,\theta), \quad J_1 := J^{-1}.$$

Згідно з твердженням A.38 маємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{\theta_1,c}\left[s_1,\sigma J\mathbf{n},J_1\right]\mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n},J\right] &= \mathbf{U}_{\theta_1\theta^{-\sigma s_1 s},c}\left[\sigma s', -s_1 s'\mathbf{n}, J_1 J\mathbb{I}_{-1,1}\left[\mathbf{n}\right]\right] = \\ &= \mathbf{U}_{\theta^s\theta^{-s_\theta\cdot s_\theta\cdot s},c}\left[s_\theta s', -s_\theta s'\mathbf{n}, J^{-1}J\mathbb{I}_{-1,1}\left[\mathbf{n}\right]\right] = \\ &= \mathbf{U}_{1,c}\left[s_\theta s', -s_\theta s'\mathbf{n}, \mathbb{I}_{-1,1}\left[\mathbf{n}\right]\right],\end{aligned}$$

де $s' = \mathfrak{S}(\sigma s_1 s,\theta) = \mathfrak{S}(s_\theta s_\theta s,\theta) = \mathfrak{S}(s,\theta) = s_\theta$. Отже:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{\theta_1,c}\left[s_1,\sigma J\mathbf{n},J_1\right]\mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n},J\right] &= \mathbf{U}_{1,c}\left[s_\theta s_\theta,\ -s_\theta s_\theta\mathbf{n}, \mathbb{I}_{-1,1}\left[\mathbf{n}\right]\right] = \\ &= \mathbf{U}_{1,c}\left[1, -\mathbf{n}, \mathbb{I}_{-1,1}\left[\mathbf{n}\right]\right].\end{aligned}$$

Використовуючи (A.75), (A.120) та (A.6), неважко переконатись, що для будь-якого $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ виконується рівність $\mathbf{U}_{1,c}\left[1,-\mathbf{n},\mathbb{I}_{-1,1}\left[\mathbf{n}\right]\right]\mathrm{w} = \mathrm{w}$. Отже, $\mathbf{U}_{1,c}\left[1,-\mathbf{n},\mathbb{I}_{-1,1}\left[\mathbf{n}\right]\right] = \mathbb{I}$. Таким чином, $\mathbf{U}_{\theta_1,c}\left[s_1,\sigma J\mathbf{n},J_1\right]\mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n},J\right] = \mathbb{I}$. Звідси:

$$\mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n},J\right]^{-1} = \mathbf{U}_{\theta_1,c}\left[s_1,\sigma J\mathbf{n},J_1\right] = \mathbf{U}_{\theta^s,c}\left[s_\theta, s_\theta J\mathbf{n}, J^{-1}\right].$$ □

Зауваження A.42. Застосовуючи формули (A.76) та (A.119), співвідношення (A.132) можна переписати у вигляді:

$$\mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n},J\right]^{-1}=\mathbf{U}_{\theta,c}\left[\widetilde{s}_{\theta},s\widetilde{s}_{\theta}J\mathbf{n},J^{-1}\right],\quad \text{де } \widetilde{s}_{\theta}=s\,\mathrm{sign}\,\theta. \tag{A.133}$$

Справді, нехай $s\in\{-1,1\}$, $\theta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\mathbf{n}\in\mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ і $J\in\mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$. Позначимо, $s_{\theta}:=\mathfrak{S}(s,\theta)$, $\widetilde{s}_{\theta}:=s\,\mathrm{sign}\,\theta$. Тоді отримаємо наступне:

1) У випадку $s=1$ маємо, $s_{\theta}=\mathfrak{S}(1,\theta)=\mathrm{sign}\,\theta$, $\widetilde{s}_{\theta}=\mathrm{sign}\,\theta$. Отже, за формулою (A.132), в цьому випадку одержуємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n},J\right]^{-1}&=\mathbf{U}_{\theta^{s},c}\left[s_{\theta},s_{\theta}J\mathbf{n},J^{-1}\right]=\mathbf{U}_{\theta,c}\left[\mathrm{sign}\,\theta,\mathrm{sign}\,\theta J\mathbf{n},J^{-1}\right]=\\&=\mathbf{U}_{\theta,c}\left[\widetilde{s}_{\theta},s\widetilde{s}_{\theta}J\mathbf{n},J^{-1}\right].\end{aligned}$$

2) У випадку $s=-1$ маємо, $s_{\theta}=\mathfrak{S}(-1,\theta)=-1$, $\widetilde{s}_{\theta}=-\mathrm{sign}\,\theta$. Отже, використовуючи (A.132) і (A.76), дістаємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n},J\right]^{-1}&=\mathbf{U}_{\theta^{-1},c}\left[-1,-J\mathbf{n},J^{-1}\right]=\\&=\mathbf{U}_{(\theta^{-1})^{-1},c}\left[(-1)\mathrm{sign}\left(\theta^{-1}\right),-\mathrm{sign}\left(\theta^{-1}\right)(-J\mathbf{n}),J^{-1}\right]=\\&=\mathbf{U}_{\theta,c}\left[-\mathrm{sign}\,(\theta),\mathrm{sign}\,\theta J\mathbf{n},J^{-1}\right]=\mathbf{U}_{\theta,c}\left[\widetilde{s}_{\theta},s\widetilde{s}_{\theta}J\mathbf{n},J^{-1}\right].\end{aligned}$$

Наслідок A.41 показує, що клас операторів $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$ є інваріантним відносно операції взяття оберненого оператора. Класи операторів $\mathfrak{O}(\mathfrak{H},c)$ та $\mathfrak{O}_{+}(\mathfrak{H},c)$ також є інваріантним відносно зазначеної вище операції (це випливає з тверджень A.5 і A.22 відповідно). Проте, виявляється, що клас $\mathfrak{OT}_{+}(\mathfrak{H},c)$ не є інваріантним відносно операції взяття оберненого оператора.

Наслідок A.43. *Якщо* $L\in\mathfrak{OT}_{+}(\mathfrak{H},c)\setminus(\mathfrak{O}_{+}(\mathfrak{H},c)\cup\mathfrak{OT}_{\infty}(\mathfrak{H},c))$ *то* $L^{-1}\notin\mathfrak{OT}_{+}(\mathfrak{H},c)$.

Доведення. Нехай, $L\in\mathfrak{OT}_{+}(\mathfrak{H},c)\setminus(\mathfrak{O}_{+}(\mathfrak{H},c)\cup\mathfrak{OT}_{\infty}(\mathfrak{H},c))$. Тоді $L\in\mathfrak{OT}_{+}(\mathfrak{H},c)$ і $L\notin\mathfrak{O}_{+}(\mathfrak{H},c)\cup\mathfrak{OT}_{\infty}(\mathfrak{H},c)$. Оскільки $L\in\mathfrak{OT}_{+}(\mathfrak{H},c)$, то, за формулою (A.98), оператор L можна подати у вигляді, $L=\mathbf{U}_{\theta,c}[1,\mathbf{n},J]$, де $\theta\in[-1,1]\setminus\{0\}$, $\mathbf{n}\in\mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, $J\in\mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$. Оскільки $L\notin\mathfrak{O}_{+}(\mathfrak{H},c)\cup\mathfrak{OT}_{\infty}(\mathfrak{H},c)$, то, згідно з формулами (A.96) та (A.85), маємо, $\theta<0$ і $\theta\neq-1$. Отже, за рівністю (A.133), маємо, $L^{-1}=(\mathbf{U}_{\theta,c}[1,\mathbf{n},J])^{-1}=\mathbf{U}_{\theta,c}[-1,-J\mathbf{n},J^{-1}]$, Тому, за формулою (A.100), $L^{-1}\in\mathfrak{OT}_{-}(\mathfrak{H},c)$. І, враховуючи, що $\theta\neq-1$, згідно з формулою (A.84), отримуємо, $L^{-1}=\mathbf{U}_{\theta,c}[-1,-J\mathbf{n},J^{-1}]\in\mathfrak{OT}_{\mathbf{fin}}(\mathfrak{H},c)$. Отже, згідно з (A.83), маємо $L^{-1}\notin\mathfrak{OT}_{\infty}(\mathfrak{H},c)$. Таким чином, $L^{-1}\in\mathfrak{OT}_{-}(\mathfrak{H},c)$ і $L^{-1}\notin\mathfrak{OT}_{\infty}(\mathfrak{H},c)$. Звідси, застосовуючи твердження A.24, отримуємо $L^{-1}\notin\mathfrak{OT}_{+}(\mathfrak{H},c)$. □

Довільний оператор виду $L=\mathbf{W}_{\lambda,c}[1,\mathbf{n},J]$, де $c<\lambda<\infty$, $\mathbf{n}\in\mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ і $J\in\mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$ задовольняє умову $L\in\mathfrak{OT}_{+}(\mathfrak{H},c)\setminus(\mathfrak{O}_{+}(\mathfrak{H},c)\cup\mathfrak{OT}_{\infty}(\mathfrak{H},c))$. Справді, за формулою (A.97), маємо $L\in\mathfrak{OT}_{+}(\mathfrak{H},c)$. Згідно з (A.84), маємо, $L\in\mathfrak{OT}_{\mathbf{fin}}(\mathfrak{H},c)$. А тому, згідно (A.83), отримуємо $L\notin\mathfrak{OT}_{\infty}(\mathfrak{H},c)$. Оскільки $c<\lambda<\infty$ то, згідно

з твердженням A.16, маємо, $\|\mathcal{V}(L)\| = |\lambda| > c$. Отже, використовуючи твердження A.6, отримуємо, $L \notin \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, c)$. Тому, за формулою (A.87), маємо, $L \notin \mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c)$. Таким чином, $L \in \mathfrak{OT}_+(\mathfrak{H}, c)$, $L \notin \mathfrak{OT}_\infty(\mathfrak{H}, c)$ і $L \notin \mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c)$. Отже, клас операторів $\mathfrak{OT}_+(\mathfrak{H}, c) \setminus (\mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c) \cup \mathfrak{OT}_\infty(\mathfrak{H}, c))$ — непорожній. Тому, використовуючи наслідок A.43, отримуємо такий наслідок:

Наслідок A.44. *Клас операторів $\mathfrak{OT}_+(\mathfrak{H}, c)$ не утворює групу операторів над простором $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$.*

Безпосередньо з наслідків A.40 та A.41 випливає наступний наслідок.

Наслідок A.45. *Нехай, $\mathfrak{H}$ — дійсний гільбертовий простір такий, що $\dim(\mathfrak{H}) = 1$. Тоді клас операторів $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c)$ є групою операторів над простором $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$.*

A.2.2. Композиція узагальнених перетворень Лоренца з перпендикулярними напрямками руху

Лема A.46. *Нехай, $\mathbf{E}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}], \mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1, \mathbf{n}_1] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c)$ — елементарні узагальнені перетворення Лоренца з перпендикулярними напрямними векторами, тобто $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_1 \rangle = 0$. Тоді для довільного вектора $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ справедлива рівність:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}]\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1, \mathbf{n}_1]\,\mathrm{w} = \Bigg(& ss_1\varphi_0(\theta)\,\varphi_0(\theta_1)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \\
& - \left(s\varphi_0(\theta)\,\varphi_1(\theta_1)\,\frac{\langle \mathbf{n}_1, \mathrm{w} \rangle}{c} + \varphi_1(\theta)\,\frac{\langle \mathbf{n}, \mathrm{w} \rangle}{c} \right) \Bigg) \mathbf{e}_0 + \\
& + c\varphi_1(\theta) \left(s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \varphi_1(\theta_1)\,\frac{\langle \mathbf{n}_1, \mathrm{w} \rangle}{c} \right) \mathbf{n} - (s\varphi_0(\theta) + 1)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w} + \\
& + c\varphi_1(\theta_1)\,\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n}_1 - s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}_1]\,\mathrm{w} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}_1]\,\mathrm{w}.
\end{aligned} \tag{A.134}$$

Доведення. Зафіксуємо довільний вектор $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Покладемо: $\mathrm{w}' := \mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1, \mathbf{n}_1]\,\mathrm{w}$. Тоді, використовуючи формули (A.75),(A.110), рівності (A.6) і враховуючи той факт, що $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_1 \rangle = 0$, отримуємо:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1, \mathbf{n}_1]\,\mathrm{w} = \mathbf{E}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}]\,\mathrm{w}' = & \left(s\varphi_0(\theta)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}') - \varphi_1(\theta)\,\frac{\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}' \rangle}{c} \right) \mathbf{e}_0 + \\
& + c\varphi_1(\theta)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}')\,\mathbf{n} - s\varphi_0(\theta)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}' + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}';
\end{aligned} \tag{A.135}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{w}' = & \left(s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \varphi_1(\theta_1)\,\frac{\langle \mathbf{n}_1, \mathrm{w} \rangle}{c} \right) \mathbf{e}_0 + \\
& + c\varphi_1(\theta_1)\,\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n}_1 - s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}_1]\,\mathrm{w} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}_1]\,\mathrm{w};
\end{aligned}$$

$$\mathcal{T}(\mathrm{w}') = s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \varphi_1(\theta_1)\,\frac{\langle \mathbf{n}_1, \mathrm{w} \rangle}{c}; \tag{A.136}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}' = \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\left(\widehat{\mathbf{T}}\mathrm{w}' + \mathbf{X}\mathrm{w}'\right) = \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathbf{X}\mathrm{w}' = \\
&\quad = \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\left(c\varphi_1(\theta_1)\,\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n}_1 - s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}_1]\,\mathrm{w} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}_1]\,\mathrm{w}\right) = \\
&\quad = c\varphi_1(\theta_1)\,\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathbf{n}_1 - s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}_1]\,\mathrm{w} + +\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}_1]\,\mathrm{w}. \qquad (\mathrm{A}.137)
\end{aligned}$$

Оскільки $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_1\rangle = 0$, то:

$$\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathbf{n}_1 = \langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_1\rangle\,\mathbf{n} = \mathbf{0}; \qquad \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}_1] = \mathbb{O};$$

$$\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}_1] = \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\left(\mathbf{X} - \mathbf{X}_1[\mathbf{n}_1]\right) = \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathbf{X} = \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,.$$

Отже, згідно з (A.137), отримуємо:

$$\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}' = \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}; \qquad (\mathrm{A}.138)$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}'\rangle = \langle \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathbf{n}, \mathrm{w}'\rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}'\rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\rangle = \\
= \langle \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle = \langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle\,. \qquad (\mathrm{A}.139)
\end{aligned}$$

Далі, використовуючи (A.138), маємо:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}' = \left(\mathbf{X} - \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\right)\mathrm{w}' = \mathbf{X}\mathrm{w}' - \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w} = \\
&\qquad = c\varphi_1(\theta_1)\,\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n}_1 - s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}_1]\,\mathrm{w} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}_1]\,\mathrm{w} - \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}. \qquad (\mathrm{A}.140)
\end{aligned}$$

Підставляючи значення $\mathcal{T}(\mathrm{w}')$, $\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}'$, $\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}'\rangle$, $\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}'$ з формул (A.136),(A.138),(A.139),(A.140) в (A.135), отримуємо:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\mathbf{n}_1]\,\mathrm{w} = \mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]\,\mathrm{w}' = \\
&\quad = \left(ss_1\varphi_0(\theta)\,\varphi_0(\theta_1)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \left(s\varphi_0(\theta)\,\varphi_1(\theta_1)\,\frac{\langle \mathbf{n}_1, \mathrm{w}\rangle}{c} + \varphi_1(\theta)\,\frac{\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle}{c}\right)\right)\mathbf{e}_0 + \\
&\qquad + c\varphi_1(\theta)\left(s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \varphi_1(\theta_1)\,\frac{\langle \mathbf{n}_1, \mathrm{w}\rangle}{c}\right)\mathbf{n} - \\
&\qquad - s\varphi_0(\theta)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w} + c\varphi_1(\theta_1)\,\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n}_1 - \\
&\qquad - s_1\varphi_0(\theta_1)\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}_1]\,\mathrm{w} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}_1]\,\mathrm{w} - \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w},
\end{aligned}$$

що й необхідно було довести. □

Лема A.47. *Нехай,* $\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}], \mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\mathbf{n}_1] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H}, c)$ *— елементарні узагальнені перетворення Лоренца, причому* $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_1\rangle = 0$. *Тоді:*

1. Оператор лінійного перетворення координат $\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\mathbf{n}_1]$ *є v-детермінованим тоді і тільки тоді, коли* $\theta, \theta_1 \neq -1$ *(тобто* $\theta \neq -1$ *і*

$\theta_1 \neq -1$), причому у випадку $\theta, \theta_1 \neq -1$ справедлива рівність:

$$\|\mathcal{V}\left(\mathbf{E}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n}\right]\mathbf{E}_{\theta_1,c}\left[s_1,\mathbf{n}_1\right]\right)\| = c\sqrt{1+\frac{1-\operatorname{sign}\theta_1}{\varphi_0^2\left(\theta_1\right)}-\frac{\operatorname{sign}\theta}{\varphi_0^2\left(\theta\right)\varphi_0^2\left(\theta_1\right)}}. \tag{A.141}$$

2. Для $\theta, \theta_1 \neq -1$ нерівність $\|\mathcal{V}\left(\mathbf{E}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n}\right]\mathbf{E}_{\theta_1,c}\left[s_1,\mathbf{n}_1\right]\right)\| < c$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\theta, \theta_1 > 0$.

Доведення. **1.** Застосовуючи наслідок A.41, лему A.34 та рівність (A.120) отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n}\right]^{-1} &= \mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n},\mathbb{I}_1\right]^{-1} = \mathbf{U}_{\theta^s,c}\left[s_\theta, s_\theta\mathbf{n},\mathbb{I}_1^{-1}\right] = \\ &= \mathbf{U}_{\theta^s,c}\left[s_\theta, s_\theta\mathbf{n},\mathbb{I}_1\right] = \mathbf{E}_{\theta^s,c}\left[s_\theta, s_\theta\mathbf{n}\right]; \\ \mathbf{E}_{\theta_1,c}\left[s_1,\mathbf{n}_1\right]^{-1} &= \mathbf{E}_{\theta_1^{s_1},c}\left[\left(s_1\right)_{\theta_1}, \left(s_1\right)_{\theta_1}\mathbf{n}_1\right],\end{aligned}$$

де $s_\theta = \mathfrak{S}(s,\theta)$, $\left(s_1\right)_{\theta_1} = \mathfrak{S}\left(s_1,\theta_1\right)$. Звідси:

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{E}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n}\right]\ \mathbf{E}_{\theta_1,c}\left[s_1,\mathbf{n}_1\right]\right)^{-1} &= \mathbf{E}_{\theta_1,c}\left[s_1,\mathbf{n}_1\right]^{-1}\mathbf{E}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n}\right]^{-1} = \\ &= \mathbf{E}_{\theta_1^{s_1},c}\left[\left(s_1\right)_{\theta_1}, \left(s_1\right)_{\theta_1}\mathbf{n}_1\right]\mathbf{E}_{\theta^s,c}\left[s_\theta, s_\theta\mathbf{n}\right].\end{aligned} \tag{A.142}$$

Підставимо в (A.142) вектор $\mathrm{w} = \mathbf{e}_0$ і скористаємося рівністю (A.134):

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{E}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n}\right]\mathbf{E}_{\theta_1,c}\left[s_1,\mathbf{n}_1\right]\right)^{-1}\mathbf{e}_0 &= \mathbf{E}_{\theta_1^{s_1},c}\left[\left(s_1\right)_{\theta_1}, \left(s_1\right)_{\theta_1}\mathbf{n}_1\right]\mathbf{E}_{\theta^s,c}\left[s_\theta, s_\theta\mathbf{n}\right]\mathbf{e}_0 = \\ &= \left(s_1\right)_{\theta_1} s_\theta\varphi_0\left(\theta_1^{s_1}\right)\varphi_0\left(\theta^s\right)\mathcal{T}\left(\mathbf{e}_0\right)\mathbf{e}_0 + \\ &\quad + c\varphi_1\left(\theta_1^{s_1}\right)s_\theta\varphi_0\left(\theta^s\right)\mathcal{T}\left(\mathbf{e}_0\right)\left(s_1\right)_{\theta_1}\mathbf{n}_1 + c\varphi_1\left(\theta^s\right)\mathcal{T}\left(\mathbf{e}_0\right)\left(s_\theta\mathbf{n}\right) = \\ &= \left(s_1\right)_{\theta_1} s_\theta\varphi_0\left(\theta_1^{s_1}\right)\varphi_0\left(\theta^s\right)\mathbf{e}_0 + \\ &\quad + cs_\theta\left(s_1\right)_{\theta_1}\varphi_1\left(\theta_1^{s_1}\right)\varphi_0\left(\theta^s\right)\mathbf{n}_1 + cs_\theta\varphi_1\left(\theta^s\right)\mathbf{n}.\end{aligned} \tag{A.143}$$

З рівності (A.143) випливає, що $\mathcal{T}\left(\left(\mathbf{E}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n}\right]\mathbf{E}_{\theta_1,c}\left[s_1,\mathbf{n}_1\right]\right)^{-1}\mathbf{e}_0\right) = \left(s_1\right)_{\theta_1} s_\theta\varphi_0\left(\theta_1^{s_1}\right)\varphi_0\left(\theta^s\right)$ (де $\left(s_1\right)_{\theta_1}, s_\theta \in \{-1,1\}$). Отже, нерівність $\mathcal{T}\left(\mathbf{E}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n}\right]\mathbf{E}_{\theta_1,c}\left[s_1,\mathbf{n}_1\right]\mathbf{e}_0\right) \neq 0$ справедлива тоді і тільки тоді, коли $\varphi_0\left(\theta_1^{s_1}\right)\varphi_0\left(\theta^s\right) \neq 0$, тобто тоді і тільки тоді, коли $\theta, \theta_1 \neq -1$. Отже, за означенням A.2, оператор перетворення координат $\mathbf{E}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n}\right]\mathbf{E}_{\theta_1}\left[s_1,\mathbf{n}_1\right]$ є v-детермінованим тоді і тільки тоді, коли $\theta, \theta_1 \neq -1$.

Розглянемо тепер випадок $\theta, \theta_1 \neq -1$. За означенням A.2, на основі рівності (A.143), отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}\left(\mathbf{E}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n}\right]\mathbf{E}_{\theta_1,c}\left[s_1,\mathbf{n}_1\right]\right) &= \frac{\mathbf{X}\left(\mathbf{E}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n}\right]\mathbf{E}_{\theta_1,c}\left[s_1,\mathbf{n}_1\right]\right)^{-1}\mathbf{e}_0}{\mathcal{T}\left(\left(\mathbf{E}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n}\right]\mathbf{E}_{\theta_1,c}\left[s_1,\mathbf{n}_1\right]\right)^{-1}\mathbf{e}_0\right)} = \\ &= \frac{cs_\theta\left(s_1\right)_{\theta_1}\varphi_1\left(\theta_1^{s_1}\right)\varphi_0\left(\theta^s\right)\mathbf{n}_1 + cs_\theta\varphi_1\left(\theta^s\right)\mathbf{n}}{\left(s_1\right)_{\theta_1} s_\theta\varphi_0\left(\theta_1^{s_1}\right)\varphi_0\left(\theta^s\right)} = \\ &= c\frac{\varphi_1\left(\theta_1^{s_1}\right)\varphi_0\left(\theta^s\right)\mathbf{n}_1 + \mathfrak{S}\left(s_1,\theta_1\right)\varphi_1\left(\theta^s\right)\mathbf{n}}{\varphi_0\left(\theta_1^{s_1}\right)\varphi_0\left(\theta^s\right)}.\end{aligned}$$

Оскільки $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_1 \rangle = 0$, то:

$$\|\mathcal{V}\left(\mathbf{E}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n}\right]\mathbf{E}_{\theta_1,c}\left[s_1,\mathbf{n}_1\right]\right)\| = c\sqrt{\frac{\left(\varphi_1\left(\theta_1^{s_1}\right)\varphi_0(\theta^s)\right)^2+(\varphi_1(\theta^s))^2}{\varphi_0^2\left(\theta_1^{s_1}\right)\varphi_0^2(\theta^s)}}.$$

Згідно з двома нижніми рівностями (A.71) при $s \in \{-1,1\}$ маємо, $|\varphi_0(\theta^s)| = |\varphi_0(\theta)|$, $|\varphi_1(\theta^s)| = |\varphi_1(\theta)|$. Отже:

$$\|\mathcal{V}\left(\mathbf{E}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n}\right]\mathbf{E}_{\theta_1,c}\left[s_1,\mathbf{n}_1\right]\right)\| = c\sqrt{\frac{\varphi_1^2(\theta_1)\varphi_0^2(\theta)+\varphi_1^2(\theta)}{\varphi_0^2(\theta_1)\varphi_0^2(\theta)}}.$$

Звідси, використовуючи рівності (A.71), маємо:

$$\|\mathcal{V}\left(\mathbf{E}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n}\right]\mathbf{E}_{\theta_1,c}\left[s_1,\mathbf{n}_1\right]\right)\| = c\sqrt{\frac{\varphi_0^2(\theta_1)-\operatorname{sign}\theta_1}{\varphi_0^2(\theta_1)}+\frac{\varphi_0^2(\theta)-\operatorname{sign}\theta}{\varphi_0^2(\theta)\,\varphi_0^2(\theta_1)}} =$$

$$= c\sqrt{1+\frac{1-\operatorname{sign}\theta_1}{\varphi_0^2(\theta_1)}-\frac{\operatorname{sign}\theta}{\varphi_0^2(\theta)\,\varphi_0^2(\theta_1)}}.$$

2. Нехай $\theta, \theta_1 \neq -1$.

а) У випадку $\theta, \theta_1 > 0$ ($\operatorname{sign}\theta = \operatorname{sign}\theta_1 = 1$), згідно з рівністю (A.141), маємо:

$$\|\mathcal{V}\left(\mathbf{E}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n}\right]\mathbf{E}_{\theta_1,c}\left[s_1,\mathbf{n}_1\right]\right)\| = c\sqrt{1-\frac{1}{\varphi_0^2(\theta)\varphi_0^2(\theta_1)}} < c.$$

б) Аналогічно випадках $\theta < 0$, $\theta_1 > 0$ ($\operatorname{sign}\theta = -1$, $\operatorname{sign}\theta_1 = 1$) та $\theta_1 < 0$ ($\operatorname{sign}\theta_1 = -1$), скориставшись рівностями (A.71) отримуємо відповідно:

$$\|\mathcal{V}\left(\mathbf{E}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n}\right]\mathbf{E}_{\theta_1,c}\left[s_1,\mathbf{n}_1\right]\right)\| = c\sqrt{1+\frac{1}{\varphi_0^2(\theta)\,\varphi_0^2(\theta_1)}} > c;$$

$$\|\mathcal{V}\left(\mathbf{E}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n}\right]\mathbf{E}_{\theta_1,c}\left[s_1,\mathbf{n}_1\right]\right)\| = c\sqrt{1+\frac{2}{\varphi_0^2(\theta_1)}-\frac{\operatorname{sign}\theta}{\varphi_0^2(\theta)\,\varphi_0^2(\theta_1)}} =$$

$$= c\sqrt{1+\frac{\varphi_0^2(\theta)+(\varphi_0^2(\theta)-\operatorname{sign}\theta)}{\varphi_0^2(\theta)\,\varphi_0^2(\theta_1)}} = c\sqrt{1+\frac{\varphi_0^2(\theta)+\varphi_1^2(\theta)}{\varphi_0^2(\theta)\,\varphi_0^2(\theta_1)}} > c.$$

□

Лема A.48. *Нехай, для елементарних узагальнених перетворень Лоренца* $\mathbf{E}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n}\right], \mathbf{E}_{\theta_1,c}\left[s_1,\mathbf{n}_1\right] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$ *з перпендикулярними напрямними векторами* $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_1 \rangle = 0$ *має місце рівність:*

$$\mathbf{E}_{\theta,c}\left[s,\mathbf{n}\right]\mathbf{E}_{\theta_1,c}\left[s_1,\mathbf{n}_1\right] = \mathbf{U}_{\theta',c}\left[s',\mathbf{n}',J'\right],$$

де $s' \in \{-1,1\}$, $\theta' \in [-1,1] \setminus \{0\}$, $\mathbf{n}' \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, $J' \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$. *Тоді:*

1. $\operatorname{sign}\theta' = \mathfrak{S}(\theta,\theta_1)$;

2. $\varphi_0(\theta') = |\varphi_0(\theta)\,\varphi_0(\theta_1)|$;

3. *якщо* $\theta, \theta_1 \neq -1$, *то* $s' = ss_1\operatorname{sign}\left(\varphi_0(\theta)\,\varphi_0(\theta_1)\right)$;

4. $\varphi_1(\theta') = \sqrt{\varphi_0^2(\theta)\,\varphi_0^2(\theta_1) - \mathfrak{S}(\theta,\theta_1)}$;

якщо, додатково, $\theta, \theta_1 \neq 1$, *то:*

5. $\mathbf{n}' = \dfrac{s\varphi_0(\theta)\varphi_1(\theta_1)\mathbf{n}_1 + \varphi_1(\theta)\mathbf{n}}{\varphi_1(\theta')} = \dfrac{s\varphi_0(\theta)\varphi_1(\theta_1)\mathbf{n}_1 + \varphi_1(\theta)\mathbf{n}}{\sqrt{\varphi_0^2(\theta)\varphi_0^2(\theta_1) - \mathfrak{S}(\theta,\theta_1)}}$;

6. $J'\mathbf{n}' = \dfrac{s_1\varphi_1(\theta)\varphi_0(\theta_1)\mathbf{n} + \varphi_1(\theta_1)\mathbf{n}_1}{\sqrt{\varphi_0^2(\theta)\varphi_0^2(\theta_1) - \mathfrak{S}(\theta,\theta_1)}}$.

Доведення. **1.** Нехай $\theta, \theta_1 \neq -1$. Тоді, згідно з лемою A.47, оператор лінійного перетворення координат $\mathbf{U}_{\theta',c}[s',\mathbf{n}',J'] = \mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\mathbf{n}_1]$ є v-детермінованим, причому нерівність $\|\mathcal{V}(\mathbf{U}_{\theta',c}[s',\mathbf{n}',J'])\| < c$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\theta, \theta_1 > 0$. За теоремою A.18 та наслідком A.19, маємо, $\|\mathcal{V}(\mathbf{U}_{\theta',c}[s',\mathbf{n}',J'])\| = c\left|\frac{1-\theta'|\theta'|}{1+\theta'|\theta'|}\right| \|\mathbf{n}'\| = c\left|\frac{1-\theta'|\theta'|}{1+\theta'|\theta'|}\right|$. Звідси видно, що нерівність $\theta' > 0$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\|\mathcal{V}(\mathbf{U}_{\theta',c}[s',\mathbf{n}',J'])\| < c$, тобто тоді і тільки тоді, коли $\theta, \theta_1 > 0$. У випадку, коли $\theta = -1$ або $\theta_1 = -1$, за лемою A.47, оператор перетворення координат $\mathbf{U}_{\theta',c}[s',\mathbf{n}',J']$ не є v-детермінованим. А це, за теоремою A.18, можливо лише коли $\theta' = -1$. Отже і у випадку $\theta = -1$ або $\theta_1 = -1$ нерівність $\operatorname{sign}\theta' = \mathfrak{S}(\theta,\theta_1)$ також залишається істинною.

2,3. Згідно з умовою леми і теоремою A.18, для довільного $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ маємо:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\mathbf{n}_1]\,\mathrm{w} = \mathbf{U}_{\theta',c}[s',\mathbf{n}',J']\,\mathrm{w} = \\
&\quad = \left(s'\varphi_0(\theta')\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \varphi_1(\theta')\frac{\langle\mathbf{n}',\mathrm{w}\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0 + \\
&\qquad + J'\left(c\varphi_1(\theta')\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n}' - s'\varphi_0(\theta')\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}']\,\mathrm{w} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}']\,\mathrm{w}\right).
\end{aligned} \tag{A.144}$$

Прирівнюючи в правих частинах рівностей (A.134) і (A.144) коефіцієнти при векторі $\mathbf{e}_0$ отримуємо рівність:

$$\begin{aligned}
&ss_1\varphi_0(\theta)\varphi_0(\theta_1)\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \left(s\varphi_0(\theta)\varphi_1(\theta_1)\frac{\langle\mathbf{n}_1,\mathrm{w}\rangle}{c} + \varphi_1(\theta)\frac{\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle}{c}\right) = \\
&\qquad = s'\varphi_0(\theta')\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \varphi_1(\theta')\frac{\langle\mathbf{n}',\mathrm{w}\rangle}{c} \qquad (\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})).
\end{aligned} \tag{A.145}$$

Підставимо в останню рівність вектор виду $\mathrm{w}_0 = \mathbf{e}_0$. Тоді отримаємо:

$$ss_1\varphi_0(\theta)\varphi_0(\theta_1) = s'\varphi_0(\theta').$$

Отже з рівності (A.145) випливає, що, $s\varphi_0(\theta)\varphi_1(\theta_1)\frac{\langle\mathbf{n}_1,\mathrm{w}\rangle}{c} + \varphi_1(\theta)\frac{\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle}{c} = \varphi_1(\theta')\frac{\langle\mathbf{n}',\mathrm{w}\rangle}{c}$ $(\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}))$, тобто: $\langle s\varphi_0(\theta)\varphi_1(\theta_1)\mathbf{n}_1 + \varphi_1(\theta)\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle = \langle\varphi_1(\theta')\mathbf{n}',\mathrm{w}\rangle$ $(\forall\,\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}))$. Звідси, $s\varphi_0(\theta)\varphi_1(\theta_1)\mathbf{n}_1 + \varphi_1(\theta)\mathbf{n} = \varphi_1(\theta')\mathbf{n}'$. Таким чином, справедливі наступні рівності:

$$\left.\begin{aligned}
s'ss_1\varphi_0(\theta)\varphi_0(\theta_1) &= \varphi_0(\theta') \\
s\varphi_0(\theta)\varphi_1(\theta_1)\mathbf{n}_1 + \varphi_1(\theta)\mathbf{n} &= \varphi_1(\theta')\mathbf{n}'
\end{aligned}\right\} \tag{A.146}$$

За умовою леми, маємо $\theta' \in [-1,1] \setminus \{0\}$, а отже $\varphi_0(\theta') = \frac{1+\theta'|\theta'|}{2|\theta'|} \geq 0$. Тому з першої рівності (A.146) випливає рівність, $\varphi_0(\theta') = |\varphi_0(\theta')| = |\varphi_0(\theta)\varphi_0(\theta_1)|$. І, беручи до уваги умову $\theta, \theta_1 \neq -1$ (з якої випливає, що $\varphi_0(\theta)\varphi_0(\theta_1) \neq 0$), отримуємо рівність, $s's s_1 = \operatorname{sign}(\varphi_0(\theta)\varphi_0(\theta_1))$.

4. Використовуючи рівності (A.71), а також перший і другий пункти даної леми отримуємо, $\varphi_1^2(\theta') = \varphi_0^2(\theta') - \operatorname{sign}\theta' = \varphi_0^2(\theta)\varphi_0^2(\theta_1) - \mathfrak{S}(\theta,\theta_1)$. Оскільки, за умовою леми, $\theta' \in [-1,1] \setminus \{0\}$, то $\varphi_1(\theta') = \frac{1-\theta'|\theta'|}{2|\theta'|} \geq 0$. Отже, $\varphi_1(\theta') = \sqrt{\varphi_0^2(\theta)\varphi_0^2(\theta_1) - \mathfrak{S}(\theta,\theta_1)}$.

5. Нехай, $\theta \neq 1$ і $\theta_1 \neq 1$. Легко перевірити, що тоді $\sqrt{\varphi_0^2(\theta)\varphi_0^2(\theta_1) - \mathfrak{S}(\theta,\theta_1)} > 0$. Отже, п'ятий пункт леми випливає з її четвертого пункту та другої рівності (A.146).

6. Підставляючи в рівності (A.134) та (A.144) $\mathrm{w} = \mathbf{e}_0$, та враховуючи, що $\langle \mathbf{n}, \mathbf{e}_0 \rangle = \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{e}_0 \rangle = 0$ і $\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\mathbf{e}_0 = \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\mathbf{e}_0 = \mathbf{0}$, отримуємо:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\mathbf{n}_1]\mathbf{e}_0 = \\
&\quad = ss_1\varphi_0(\theta)\varphi_0(\theta_1)\mathbf{e}_0 + cs_1\varphi_1(\theta)\varphi_0(\theta_1)\mathbf{n} + c\varphi_1(\theta_1)\mathbf{n}_1; \qquad \text{(A.147)}\\
&\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\mathbf{n}_1]\mathbf{e}_0 = \left(s'\varphi_0(\theta')\mathcal{T}(\mathbf{e}_0) - \varphi_1(\theta')\frac{\langle \mathbf{n}', \mathbf{e}_0\rangle}{c}\right)\mathbf{e}_0 + \\
&\quad + J'\left(c\varphi_1(\theta')\mathcal{T}(\mathbf{e}_0)\mathbf{n}' - s'\varphi_0(\theta')\mathbf{X}_1[\mathbf{n}']\mathbf{e}_0 + \right.\\
&\qquad \left. + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}']\mathbf{e}_0\right) = s'\varphi_0(\theta')\mathbf{e}_0 + c\varphi_1(\theta')J'\mathbf{n}' \qquad \text{(A.148)}
\end{aligned}$$

Прирівнюючи праві частини рівностей (A.147) і (A.148) отримуємо:

$$s'\varphi_0(\theta')\mathbf{e}_0 + c\varphi_1(\theta')J'\mathbf{n}' = ss_1\varphi_0(\theta)\varphi_0(\theta_1)\mathbf{e}_0 + cs_1\varphi_1(\theta)\varphi_0(\theta_1)\mathbf{n} + c\varphi_1(\theta_1)\mathbf{n}_1.$$

Звідси, враховуючи першу рівність (A.146) та пункт 4 даної леми маємо:

$$\begin{aligned}
c\varphi_1(\theta')J'\mathbf{n}' &= cs_1\varphi_1(\theta)\varphi_0(\theta_1)\mathbf{n} + c\varphi_1(\theta_1)\mathbf{n}_1;\\
J'\mathbf{n}' &= \frac{s_1\varphi_1(\theta)\varphi_0(\theta_1)\mathbf{n} + \varphi_1(\theta_1)\mathbf{n}_1}{\varphi_1(\theta')} = \frac{s_1\varphi_1(\theta)\varphi_0(\theta_1)\mathbf{n} + \varphi_1(\theta_1)\mathbf{n}_1}{\sqrt{\varphi_0^2(\theta)\varphi_0^2(\theta_1) - \mathfrak{S}(\theta,\theta_1)}}.
\end{aligned}$$

□

Теорема A.49. *Нехай,* $\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}], \mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\mathbf{n}_1] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$ *— елементарні узагальнені перетворення Лоренца з перпендикулярними напрямними векторами (*$\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_1\rangle = 0$*). Добуток перетворень* $\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]$ *і* $\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\mathbf{n}_1]$ *належить до класу* $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$ *тоді і тільки тоді, коли виконується хоч одна з умов:*

1) $\theta, \theta_1 > 0$, *2)* $\theta = 1$ *або* $\theta_1 = 1$, *3)* $\theta = \theta_1 = -1$.

Доведення. Доведення теореми розіб'ємо на наступні випадки.

Випадок 1: $\theta, \theta_1 > 0$. В цьому випадку, згідно з теоремою A.18, $\|\mathcal{V}(\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}])\| = c\left|\frac{1-\theta|\theta|}{1+\theta|\theta|}\right| < c$ і $\mathcal{V}(\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\mathbf{n}_1]) < c$. Отже, за лемою A.20, $\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}], \mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\mathbf{n}_1] \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H},c)$. Оскільки (згідно з твердженням A.5) множина операторів $\mathfrak{O}(\mathfrak{H},c)$ є групою операторів, то $\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\mathbf{n}_1] \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H},c) \subseteq \mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$.

Випадок 2: $\theta = 1$ або $\theta_1 = 1$. Спочатку розглянемо підвипадок, коли, $\theta = 1$. Тоді, перетворення координат $\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]$ має вигляд:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]\,\mathrm{w} = \mathbf{E}_{1,c}[s,\mathbf{n}]\,\mathrm{w} = s\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0 - s\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w} = \\ = s\left(\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0 - \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w} + s\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right) = \\ = s\left(\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0 + \mathbb{I}_{-1,s}[\mathbf{n}]\left(\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right)\right).\end{aligned}$$

Отже, використовуючи формулу (A.22), отримуємо:

$$\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]\,\mathrm{w} = s\left(\mathbb{I}_{-1,s}[\mathbf{n}]\right)^{\sim}\left(\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0 + \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathrm{w} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right) = s\left(\mathbb{I}_{-1,s}[\mathbf{n}]\right)^{\sim}\mathrm{w}.$$

Отже, $\mathbf{E}_{1,c}[s,\mathbf{n}] = s\left(\mathbb{I}_{-1,s}[\mathbf{n}]\right)^{\sim}$. Аналогічно отримуємо, $\mathbf{E}_{1,c}[s,\mathbf{n}_1] = s\left(\mathbb{I}_{-1,s}[\mathbf{n}_1]\right)^{\sim}$. Далі, згідно з (A.111) та (A.120), маємо $\left(\left(\mathbb{I}_{-1,s}[\mathbf{n}_1]\right)^{\sim}\right)^2 = \left(\left(\mathbb{I}_{-1,s}[\mathbf{n}_1]\right)^2\right)^{\sim} = \widetilde{\mathbb{I}_1} = \mathbb{I}$. Тому, застосовуючи лему A.34, отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}] = s\left(\mathbb{I}_{-1,s}[\mathbf{n}]\right)^{\sim} = s\left(\left(\mathbb{I}_{-1,s}[\mathbf{n}]\right)^{\sim}\left(\mathbb{I}_{-1,s}[\mathbf{n}_1]\right)^{\sim}\right)\left(\mathbb{I}_{-1,s}[\mathbf{n}_1]\right)^{\sim} = \\ = \left(\mathbb{I}_{-1,s}[\mathbf{n}]\,\mathbb{I}_{-1,s}[\mathbf{n}_1]\right)^{\sim}\mathbf{E}_{1,c}[s,\mathbf{n}_1] = \mathbf{U}_{1,c}\left[s,\mathbf{n}_1,\mathbb{I}_{-1,s}[\mathbf{n}]\,\mathbb{I}_{-1,s}[\mathbf{n}_1]\right].\end{aligned}$$

Отже, у випадку $\theta = 1$ оператори перетворення координат $\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]$ і $\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\mathbf{n}_1]$ насправді мають паралельні напрямки руху. Тому, згідно з твердженням A.38, маємо:

$$\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\mathbf{n}_1] = \mathbf{U}_{1,c}\left[s,\mathbb{I}_1\mathbf{n}_1,\mathbb{I}_{-1,s}[\mathbf{n}]\,\mathbb{I}_{-1,s}[\mathbf{n}_1]\right]\,\mathbf{U}_{\theta_1,c}[s_1,\mathbf{n}_1,\mathbb{I}_1] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c).$$

Аналогічно коли $\theta_1 = 1$ маємо:

$$\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\mathbf{n}_1] = \mathbf{U}_{1,c}\left[s_1,\mathbf{n},\mathbb{I}_{-1,s_1}[\mathbf{n}_1]\,\mathbb{I}_{-1,s_1}[\mathbf{n}]\right].$$

Оскільки $\langle\mathbf{n},\mathbf{n}_1\rangle = 0$, то $\mathbb{I}_{-1,s_1}[\mathbf{n}_1]\,\mathbb{I}_{-1,s_1}[\mathbf{n}]\,\mathbf{n} = -s_1\mathbf{n}$. Тому, згідно з твердженням A.38, одержуємо:

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\mathbf{n}_1] = \\ &\quad = \mathbf{U}_{\theta,c}\left[s,-s_1\mathbb{I}_{-1,s_1}[\mathbf{n}_1]\,\mathbb{I}_{-1,s_1}[\mathbf{n}]\,\mathbf{n},\mathbb{I}_1\right]\,\mathbf{U}_{1,c}\left[s_1,\mathbf{n},\mathbb{I}_{-1,s_1}[\mathbf{n}_1]\,\mathbb{I}_{-1,s_1}[\mathbf{n}]\right] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c).\end{aligned}$$

Випадок 3: $\theta = \theta_1 = -1$. Оскільки $\varphi_0(-1) = 0$, $\varphi_1(-1) = 1$, то у цьому випадку оператори $\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]$ і $\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\mathbf{n}_1]$ можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]\,\mathrm{w} &= -\frac{\langle\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle}{c}\mathbf{e}_0 + c\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w},\\ \mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\mathbf{n}_1]\,\mathrm{w} &= -\frac{\langle\mathbf{n}_1,\mathrm{w}\rangle}{c}\mathbf{e}_0 + c\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n}_1 + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}_1]\,\mathrm{w}.\end{aligned}$$

Отже, враховуючи, що $\langle\mathbf{n},\mathbf{n}_1\rangle = 0$, для довільного вектора $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ отримуємо:

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\mathbf{n}_1]\,\mathrm{w} = \\ &\quad = -\frac{\left\langle\mathbf{n},-\frac{\langle\mathbf{n}_1,\mathrm{w}\rangle}{c}\mathbf{e}_0 + c\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n}_1 + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}_1]\,\mathrm{w}\right\rangle}{c}\mathbf{e}_0 +\end{aligned}$$

$$+ c\mathcal{T}\left(-\frac{\langle \mathbf{n}_1, \mathrm{w}\rangle}{c}\mathbf{e}_0 + c\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n}_1 + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}_1]\,\mathrm{w}\right)\mathbf{n}+$$
$$+ \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\left(-\frac{\langle \mathbf{n}_1, \mathrm{w}\rangle}{c}\mathbf{e}_0 + c\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n}_1 + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}_1]\,\mathrm{w}\right) =$$
$$= -\frac{\left\langle \mathbf{n}, \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}_1]\,\mathrm{w}\right\rangle}{c}\mathbf{e}_0 - c\frac{\langle \mathbf{n}_1, \mathrm{w}\rangle}{c}\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\left(c\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n}_1 + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}_1]\,\mathrm{w}\right) =$$
$$= -\frac{\left\langle \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}_1]\,\mathbf{n}, \mathrm{w}\right\rangle}{c}\mathbf{e}_0 - \langle \mathbf{n}_1, \mathrm{w}\rangle\,\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\left(c\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n}_1 + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}_1]\,\mathrm{w}\right). \tag{A.149}$$

Оскільки $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_1\rangle = 0$, то, використовуючи формули (A.6) маємо:

$$\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}_1]\,\mathbf{n} = \mathbf{X}\mathbf{n} - \mathbf{X}_1[\mathbf{n}_1]\,\mathbf{n} = \mathbf{n} - \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}\rangle\,\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}, \qquad \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_1.$$

Підставивши отримані значення в формулу (A.149) будемо мати:

$$\mathbf{E}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1, \mathbf{n}_1]\,\mathrm{w} = -\frac{\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle}{c}\mathbf{e}_0 + c\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n}_1 - \langle \mathbf{n}_1, \mathrm{w}\rangle\,\mathbf{n}+$$
$$+ \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}_1]\,\mathrm{w} \quad (\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})). \tag{A.150}$$

(підкреслимо, що, оскільки $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_1\rangle = 0$, то $\mathbf{X}_1[\mathbf{n}]\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}_1] = \mathbf{X}_1[\mathbf{n}_1]\,\mathbf{X}_1[\mathbf{n}] = \mathbb{O}$, а отже, згідно (A.6), оператори $\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}] = \mathbf{X} - \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]$ і $\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}_1] = \mathbf{X} - \mathbf{X}_1[\mathbf{n}_1]$ комутують).

Покладемо:

$$\mathcal{J}_{\mathbf{n},\mathbf{n}_1}x = \langle \mathbf{n}, x\rangle\,\mathbf{n}_1 - \langle \mathbf{n}_1, x\rangle\,\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}_1]\,\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,x, \quad x \in \mathfrak{H}_1.$$

Використовуючи оператор $\mathcal{J}_{\mathbf{n},\mathbf{n}_1}$, а також співвідношення (A.6), рівність (A.150) можна переписати у вигляді:

$$\mathbf{E}_{\theta,c}[s, \mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1, \mathbf{n}_1]\,\mathrm{w} =$$
$$= -\frac{\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle}{c}\mathbf{e}_0 + \mathcal{J}_{\mathbf{n},\mathbf{n}_1}\left(c\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right) \quad (\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})). \tag{A.151}$$

Доведемо, що $\mathcal{J}_{\mathbf{n},\mathbf{n}_1} \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$. Оскільки $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_1\rangle = 0$ і оператори $\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]$, $\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}_1]$ комутують, то для довільного $x \in \mathfrak{H}_1$ вектори $\mathbf{n}, \mathbf{n}_1$ і $\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}_1]\,\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,x$ — попарно ортогональні. Отже, за означенням оператора $\mathcal{J}_{\mathbf{n},\mathbf{n}_1}$, для довільного $x \in \mathfrak{H}_1$ справедлива рівність:

$$\|\mathcal{J}_{\mathbf{n},\mathbf{n}_1}x\|^2 = \langle \mathbf{n}, x\rangle^2 + \langle \mathbf{n}_1, x\rangle^2 + \left\|\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}_1]\,\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,x\right\|^2.$$

Далі, враховуючи (A.6), маємо:

$$\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}_1] = (\mathbf{X} - \mathbf{X}_1[\mathbf{n}])\,(\mathbf{X} - \mathbf{X}_1[\mathbf{n}_1]) = \mathbf{X} - \mathbf{X}_1[\mathbf{n}_1] - \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]. \tag{A.152}$$

Тому, для будь-якого вектора $x \in \mathfrak{H}_1$ отримуємо:

$$\|\mathcal{J}_{\mathbf{n},\mathbf{n}_1}x\|^2 = \langle \mathbf{n}, x\rangle^2 + \langle \mathbf{n}_1, x\rangle^2 + \left\|\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}_1]\,\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,x\right\|^2 =$$

$$= \left\| \langle \mathbf{n}, x \rangle \mathbf{n} + \langle \mathbf{n}_1, x \rangle \mathbf{n}_1 + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}_1] \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}] x \right\|^2 =$$
$$= \left\| \mathbf{X}_1[\mathbf{n}] x + \mathbf{X}_1[\mathbf{n}_1] x + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}_1] \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}] x \right\|^2 =$$
$$= \left\| \mathbf{X}_1[\mathbf{n}] x + \mathbf{X}_1[\mathbf{n}_1] x + (\mathbf{X} - \mathbf{X}_1[\mathbf{n}_1] - \mathbf{X}_1[\mathbf{n}]) x \right\|^2 = \|\mathbf{X}x\|^2 = \|x\|^2 .$$

Отже, оператор $\mathcal{J}_{\mathbf{n},\mathbf{n}_1}$ є ізометричним. Використовуючи означення оператора $\mathcal{J}_{\mathbf{n},\mathbf{n}_1}$, комутування операторів $\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]$ та $\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}_1]$, а також рівність (A.152), неважко переконатися, що $\mathcal{J}_{\mathbf{n},\mathbf{n}_1}\mathcal{J}_{\mathbf{n}_1,\mathbf{n}}x = \mathcal{J}_{\mathbf{n}_1,\mathbf{n}}\mathcal{J}_{\mathbf{n},\mathbf{n}_1}x = x$ $(x \in \mathfrak{H}_1)$. Тому, оператор $\mathcal{J}_{\mathbf{n},\mathbf{n}_1}$ має обернений оператор $\mathcal{J}_{\mathbf{n}_1,\mathbf{n}}$ на $\mathfrak{H}_1$. Тобто, $\mathcal{J}_{\mathbf{n},\mathbf{n}_1} \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$.

Таким чином, згідно з рівністю (A.151), маємо, $\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\mathbf{n}_1] = \mathbf{U}_{-1,c}[1,\mathbf{n},\mathcal{J}_{\mathbf{n},\mathbf{n}_1}] \in \mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$.

Випадок 4: $\theta_1 < 0$, $\theta \notin \{-1,1\}$. Припустимо, що в цьому випадку добуток операторів $\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\mathbf{n}_1]$ належить до класу $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$. Тоді, за теоремою A.18, існують числа $s' \in \{-1,1\}$, $\theta' \in [-1,1] \setminus \{0\}$, вектор $\mathbf{n}' \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ і оператор $J' \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$ такі, що $\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\mathbf{n}_1] = \mathbf{U}_{\theta',c}[s',\mathbf{n}',J']$. Звідси, за лемою A.48, маємо $\mathbf{n}' = \frac{s\varphi_0(\theta)\varphi_1(\theta_1)\mathbf{n}_1+\varphi_1(\theta)\mathbf{n}}{\sqrt{\varphi_0^2(\theta)\varphi_0^2(\theta_1)-\mathfrak{S}(\theta,\theta_1)}}$. Тому, враховуючи, що $\langle \mathbf{n},\mathbf{n}_1 \rangle = 0$ і використовуючи формули (A.71), отримуємо:

$$\|\mathbf{n}'\| = \sqrt{\frac{\varphi_0^2(\theta)\varphi_1^2(\theta_1) + \varphi_1^2(\theta)}{\varphi_0^2(\theta)\varphi_0^2(\theta_1) - \mathfrak{S}(\theta,\theta_1)}} =$$
$$= \sqrt{\frac{\varphi_0^2(\theta)(\varphi_0^2(\theta_1) - \operatorname{sign}\theta_1) + (\varphi_0^2(\theta) - \operatorname{sign}\theta)}{\varphi_0^2(\theta)\varphi_0^2(\theta_1) - \mathfrak{S}(\theta,\theta_1)}} =$$
$$= \sqrt{\frac{\varphi_0^2(\theta)(\varphi_0^2(\theta_1) + 1) + (\varphi_0^2(\theta) - \operatorname{sign}\theta)}{\varphi_0^2(\theta)\varphi_0^2(\theta_1) + 1}} =$$
$$= \sqrt{1 + \frac{2\varphi_0^2(\theta) - 1 - \operatorname{sign}\theta}{\varphi_0^2(\theta)\varphi_0^2(\theta_1) + 1}}. \tag{A.153}$$

Оскільки $\theta \notin \{-1,1\}$, то $\varphi_0(\theta) = \frac{1+\theta|\theta|}{2|\theta|} \neq 0$, $\varphi_1(\theta) = \frac{1-\theta|\theta|}{2|\theta|} \neq 0$. Отже, у випадку $\theta < 0$ на основі рівності (A.153) маємо:

$$\|\mathbf{n}'\| = \sqrt{1 + \frac{2\varphi_0^2(\theta)-1-(-1)}{\varphi_0^2(\theta)\varphi_0^2(\theta_1)+1}} = \sqrt{1 + \frac{2\varphi_0^2(\theta)}{\varphi_0^2(\theta)\varphi_0^2(\theta_1)+1}} > 1,$$

а у випадку $\theta > 0$ маємо:

$$\|\mathbf{n}'\| = \sqrt{1 + \frac{2\varphi_0^2(\theta)-2}{\varphi_0^2(\theta)\varphi_0^2(\theta_1)+1}} = \sqrt{1 + \frac{2\varphi_1^2(\theta)}{\varphi_0^2(\theta)\varphi_0^2(\theta_1)+1}} > 1.$$

Таким чином, в обох випадках виконується нерівність $\|\mathbf{n}'\| > 1$, що суперечить умові $\mathbf{n}' \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$. Остання суперечність доводить, що добуток операторів $\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\mathbf{n}_1]$ не може належати до класу $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$.

Випадок 5: $\theta < 0$, $\theta_1 \notin \{-1,1\}$. Припустимо, що в цьому випадку оператор $\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\mathbf{n}_1]$ належить до класу $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$. Тоді, за теоремою A.18, існують

числа $s' \in \{-1,1\}$, $\theta' \in [-1,1] \setminus \{0\}$, вектор $\mathbf{n}' \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ і оператор $J' \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$ такі, що $\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\mathbf{n}_1] = \mathbf{U}_{\theta',c}[s',\mathbf{n}',J']$. Звідси, за лемою A.48, маємо, $J'\mathbf{n}' = \frac{s_1\varphi_1(\theta)\varphi_0(\theta_1)\mathbf{n}+\varphi_1(\theta_1)\mathbf{n}_1}{\sqrt{\varphi_0^2(\theta)\varphi_0^2(\theta_1)-\mathfrak{S}(\theta,\theta_1)}}$. Тому, враховуючи, що $\langle \mathbf{n},\mathbf{n}_1\rangle = 0$ і використовуючи формули (A.71), аналогічно до попереднього випадку, отримуємо:

$$\|J'\mathbf{n}'\| = \sqrt{\frac{\varphi_0^2(\theta_1)\,\varphi_1^2(\theta)+\varphi_1^2(\theta_1)}{\varphi_0^2(\theta)\,\varphi_0^2(\theta_1)-\mathfrak{S}(\theta,\theta_1)}} = \sqrt{1+\frac{2\varphi_0^2(\theta_1)-1-\operatorname{sign}\theta_1}{\varphi_0^2(\theta)\,\varphi_0^2(\theta_1)+1}}. \tag{A.154}$$

Оскільки $\theta_1 \notin \{-1,1\}$, то $\varphi_0(\theta_1) \neq 0$, $\varphi_1(\theta_1) \neq 0$. Отже, у випадку $\theta_1 < 0$ на основі рівності (A.154) маємо, $\|J'\mathbf{n}'\| = \sqrt{1+\frac{2\varphi_0^2(\theta_1)-1-(-1)}{\varphi_0^2(\theta)\varphi_0^2(\theta_1)+1}} = \sqrt{1+\frac{2\varphi_0^2(\theta_1)}{\varphi_0^2(\theta)\varphi_0^2(\theta_1)+1}} > 1$, а у випадку $\theta_1 > 0$ маємо, $\|J'\mathbf{n}'\| = \sqrt{1+\frac{2\varphi_0^2(\theta_1)-2}{\varphi_0^2(\theta)\varphi_0^2(\theta_1)+1}} = \sqrt{1+\frac{2\varphi_1^2(\theta_1)}{\varphi_0^2(\theta)\varphi_0^2(\theta_1)+1}} > 1$. Таким чином, в обох випадках справедлива нерівність $\|J'\mathbf{n}'\| > 1$. Але, оскільки J' — унітарний оператор і $\mathbf{n}' \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, то мусить виконуватись рівність $\|J'\mathbf{n}'\| = 1$. Остання суперечність доводить, що і в цьому випадку $\mathbf{E}_{\theta,c}[s,\mathbf{n}]\,\mathbf{E}_{\theta_1,c}[s_1,\mathbf{n}_1] \notin \mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$. □

Наступний наслідок випливає безпосередньо з теореми A.49.

Наслідок A.50. *Нехай, $\mathfrak{H}$ — дійсний гільбертовий простір такий, що* $\dim(\mathfrak{H}) > 1$. *Тоді клас операторів $\mathfrak{OT}(\mathfrak{H},c)$ не утворює групи операторів над простором $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$.*

Доведення. Справді, у випадку, коли $\dim(\mathfrak{H}) > 1$, існують вектори $\mathbf{n},\mathbf{n}_1 \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ такі, що $\langle \mathbf{n},\mathbf{n}_1\rangle = 0$. □

A.2.3. Деякі зауваження щодо перетворень Галілея в гільбертовому просторі

В формулі (A.65) для довільних фіксованих значень $c \in (0,\infty)$, $\lambda \in [0,\infty] \setminus \{c\}$, $s \in \{-1,1\}$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ було введено оператори узагальнених перетворень Лоренца виду $\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J] \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$. В наступній формулі означення перетворень $\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J]$ поширено на випадок $c = \infty$:

$$\mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s,\mathbf{n},J]\,\mathrm{w} := s\mathcal{T}(\mathrm{w})\mathbf{e}_0 + J\left((\lambda\mathcal{T}(\mathrm{w}) - s\langle \mathbf{n},\mathrm{w}\rangle)\,\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right) \quad (\forall \mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})),$$

Таким чином, для довільних фіксованих $c \in (0,\infty]$, $\lambda \in [0,\infty] \setminus \{c\}$, $s \in \{-1,1\}$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ і $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ маємо:

$$\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J]\,\mathrm{w} = \\ = \begin{cases} \frac{\left(s\mathcal{T}(\mathrm{w})-\frac{\lambda}{c^2}\langle \mathbf{n},\mathrm{w}\rangle\right)}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}\mathbf{e}_0 + J\left(\frac{\lambda\mathcal{T}(\mathrm{w})-s\langle \mathbf{n},\mathrm{w}\rangle}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right), & \lambda < \infty,\ c < \infty; \\ -\frac{\langle \mathbf{n},\mathrm{w}\rangle}{c}\mathbf{e}_0 + J\left(c\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right), & \lambda = \infty,\ c < \infty; \\ s\mathcal{T}(\mathrm{w})\mathbf{e}_0 + J\left((\lambda\mathcal{T}(\mathrm{w}) - s\langle \mathbf{n},\mathrm{w}\rangle)\,\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right), & \lambda < \infty,\ c = \infty. \end{cases} \tag{A.155}$$

У випадку $\mathfrak{H} = \mathbb{R}^3$ оператори виду $\mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s, \mathbf{n}, J]$ $(\lambda < \infty)$ являють собою перетворення Галілея для систем відліку, які "стартували" в нульовий момент часу з початку з початку координат. Неважко довести, що $\mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s, \mathbf{n}, J] = \lim_{c\to\infty} \mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J]$, де границя існує у рівномірній операторній топології.

Твердження A.51. *Для довільних фіксованих* $\lambda \in [0, \infty)$, $s \in \{-1, 1\}$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ *оператор* $\mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s, \mathbf{n}, J]$ *є оператором лінійного перетворення координат (тобто оператор* $\mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s, \mathbf{n}, J]$ *має обернений оператор* $\mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s, \mathbf{n}, J]^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$*). При цьому:*

$$\mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s, \mathbf{n}, J]^{-1} = \mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s, J\mathbf{n}, J^{-1}].$$

Доведення. Легко перевірити, що $\mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s, \mathbf{n}, J] \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$. Доведемо рівність:

$$\mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s, \mathbf{n}, J]\, \mathbf{W}_{\lambda,\infty}\left[s, J\mathbf{n}, J^{-1}\right] = \mathbb{I}, \tag{A.156}$$

де $\mathbb{I} = \mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}$ — одиничний (тотожний) оператор на просторі $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Зафіксуємо довільний вектор $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Згідно з (A.155) маємо:

$$\begin{aligned} &\mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s, \mathbf{n}, J]\mathbf{W}_{\lambda,\infty}\left[s, J\mathbf{n}, J^{-1}\right]\mathrm{w} = \mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s, \mathbf{n}, J]\,\widetilde{\mathrm{w}}, \quad \text{де} \\ &\qquad \widetilde{\mathrm{w}} = \mathbf{W}_{\lambda,\infty}\left[s, J\mathbf{n}, J^{-1}\right]\mathrm{w} = s\mathcal{T}(\mathrm{w})\mathbf{e}_0 + \\ &\qquad\qquad + J^{-1}\left((\lambda\mathcal{T}(\mathrm{w}) - s\langle J\mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle)\, J\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[J\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right). \end{aligned} \tag{A.157}$$

Далі, застосовуючи співвідношення (A.2), (A.5) і беручи до уваги той факт, що J є унітарним оператором на підпросторі $\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathcal{M}(\mathfrak{H})$, отримуємо:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\widetilde{\mathrm{w}}) &= s\mathcal{T}(\mathrm{w}); \\ \langle \mathbf{n}, \widetilde{\mathrm{w}}\rangle &= (\lambda\mathcal{T}(\mathrm{w}) - s\langle J\mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle)\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle + \left\langle \mathbf{n}, J^{-1}\mathbf{X}_1^{\perp}[J\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right\rangle = \\ &= (\lambda\mathcal{T}(\mathrm{w}) - s\langle J\mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle) + \left\langle J\mathbf{n}, \mathbf{X}_1^{\perp}[J\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right\rangle = \lambda\mathcal{T}(\mathrm{w}) - s\langle J\mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle; \\ \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\widetilde{\mathrm{w}} &= (\mathbf{X} - \mathbf{X}_1[\mathbf{n}])\,\widetilde{\mathrm{w}} = \\ &= J^{-1}\left((\lambda\mathcal{T}(\mathrm{w}) - s\langle J\mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle)\, J\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[J\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right) - \langle \mathbf{n}, \widetilde{\mathrm{w}}\rangle\,\mathbf{n} = \\ &= J^{-1}\left(\langle \mathbf{n}, \widetilde{\mathrm{w}}\rangle\, J\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[J\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right) - \langle \mathbf{n}, \widetilde{\mathrm{w}}\rangle\,\mathbf{n} = J^{-1}\mathbf{X}_1^{\perp}[J\mathbf{n}]\,\mathrm{w}. \end{aligned}$$

Звідси, використовуючи формули (A.157), (A.155) і (A.6) дістаємо:

$$\begin{aligned} &\mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s, \mathbf{n}, J]\,\mathbf{W}_{\lambda,\infty}\left[s, J\mathbf{n}, J^{-1}\right]\mathrm{w} = \\ &\quad = s\mathcal{T}(\widetilde{\mathrm{w}})\mathbf{e}_0 + J\left((\lambda\mathcal{T}(\widetilde{\mathrm{w}}) - s\langle \mathbf{n}, \widetilde{\mathrm{w}}\rangle)\,\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\widetilde{\mathrm{w}}\right) = \\ &\quad = s\,(s\mathcal{T}(\mathrm{w}))\,\mathbf{e}_0 + J\left((\lambda\,(s\mathcal{T}(\mathrm{w})) - s\,(\lambda\mathcal{T}(\mathrm{w}) - s\langle J\mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle))\,\mathbf{n} + J^{-1}\mathbf{X}_1^{\perp}[J\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right) = \\ &\quad = \mathcal{T}(\mathrm{w})\mathbf{e}_0 + \langle J\mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle\, J\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[J\mathbf{n}]\,\mathrm{w} = \widehat{\mathbf{T}}\mathrm{w} + \mathbf{X}_1[J\mathbf{n}]\,\mathrm{w} + \mathbf{X}_1^{\perp}[J\mathbf{n}]\,\mathrm{w} = \mathrm{w}. \end{aligned}$$

Отже, рівність (A.156) — доведена. Застосовуючи рівність (A.156) до оператора $\mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s, J\mathbf{n}, J^{-1}]$, отримуємо рівність: $\mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s, J\mathbf{n}, J^{-1}]\,\mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s, \mathbf{n}, J] = \mathbb{I}$.
Таким чином, $\mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s, \mathbf{n}, J]^{-1} = \mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s, J\mathbf{n}, J^{-1}] \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$. □

Нехай, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$, $s \in \{-1, 1\}$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$. Позначимо:

$$J_{(s,\mathbf{n})} := J\,\mathbb{I}_{-s,1}[\mathbf{n}], \tag{A.158}$$

де оператор $\mathbb{I}_{-s,1}[\mathbf{n}]$ введений в формулі (A.120) (див. додаток A.2). Використовуючи оператори виду (A.158) перепишемо зображення (A.155) для операторів $\mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s, \mathbf{n}, J]$ в дещо іншому вигляді. Застосовуючи рівність $(\mathbb{I}_{-s,1}[\mathbf{n}])^2 = \mathbb{I}$, а також рівності (A.155), (A.120) і (A.5) для довільних $\lambda \in [0, \infty)$, $s \in \{-1, 1\}$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ і $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ отримуємо:

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s, \mathbf{n}, J]\,\mathrm{w} &= s\mathcal{T}(\mathrm{w})\mathbf{e}_0 + J_{(s,\mathbf{n})}\mathbb{I}_{-s,1}[\mathbf{n}]\left((\lambda\mathcal{T}(\mathrm{w}) - s\langle\mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle)\,\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right) = \\
&= s\mathcal{T}(\mathrm{w})\mathbf{e}_0 + J_{(s,\mathbf{n})}\left((\langle\mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle - \lambda s\mathcal{T}(\mathrm{w}))\,\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right) = \\
&= s\mathcal{T}(\mathrm{w})\mathbf{e}_0 + J_{(s,\mathbf{n})}\left((\langle\mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle - \lambda s\mathcal{T}(\mathrm{w}))\,\mathbf{n} + \mathbf{X}\mathrm{w} - \langle\mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle\,\mathbf{n}\right) = \\
&= s\mathcal{T}(\mathrm{w})\mathbf{e}_0 + J_{(s,\mathbf{n})}\left(\mathbf{X}\mathrm{w} - \lambda s\mathcal{T}(\mathrm{w})\mathbf{n}\right).
\end{aligned}$$

Отже, для довільних $\lambda \in [0, \infty)$, $s \in \{-1, 1\}$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ і $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ маємо:

$$\mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s, \mathbf{n}, J]\,\mathrm{w} = s\mathcal{T}(\mathrm{w})\mathbf{e}_0 + J_{(s,\mathbf{n})}\left(\mathbf{X}\mathrm{w} - \lambda s\mathcal{T}(\mathrm{w})\mathbf{n}\right); \tag{A.159}$$

$$\mathcal{T}\left(\mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s, \mathbf{n}, J]\,\mathrm{w}\right) = s\mathcal{T}(\mathrm{w}); \tag{A.160}$$

$$\mathbf{X}\mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s, \mathbf{n}, J]\,\mathrm{w} = J_{(s,\mathbf{n})}\left(\mathbf{X}\mathrm{w} - \lambda s\mathcal{T}(\mathrm{w})\mathbf{n}\right). \tag{A.161}$$

Позначимо через $\mathfrak{O}(\mathfrak{H}, \infty)$ наступний клас операторів:

$$\mathfrak{O}(\mathfrak{H}, \infty) := \Big\{\mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s, \mathbf{n}, J] \mid \lambda \in [0, \infty),\ s \in \{-1, 1\},\ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1),\ \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)\Big\}.$$

Використовуючи співвідношення (A.159), (A.160), (A.161) для довільних операторів виду $L = \mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s, \mathbf{n}, J] \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, \infty)$, $L_1 = \mathbf{W}_{\lambda_1,\infty}[s_1, \mathbf{n}_1, J_1] \in \mathfrak{O}(\mathfrak{H}, \infty)$ (де $\lambda, \lambda_1 \in [0, \infty)$, $s, s_1 \in \{-1, 1\}$, $J, J_1 \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{n}, \mathbf{n}_1 \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$) і довільного вектора $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ отримуємо:

$$\begin{aligned}
L_1 L\mathrm{w} &= \mathbf{W}_{\lambda_1,\infty}[s_1, \mathbf{n}_1, J_1]\,\mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s, \mathbf{n}, J]\,\mathrm{w} = \\
&= s_1\left(s\mathcal{T}(\mathrm{w})\right)\mathbf{e}_0 + (J_1)_{(s_1,\mathbf{n}_1)}\left(J_{(s,\mathbf{n})}\left(\mathbf{X}\mathrm{w} - \lambda s\mathcal{T}(\mathrm{w})\mathbf{n}\right) - \lambda_1 s_1\left(s\mathcal{T}(\mathrm{w})\right)\mathbf{n}_1\right) = \\
&= ss_1\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0 + (J_1)_{(s_1,\mathbf{n}_1)}\,J_{(s,\mathbf{n})}\left(\mathbf{X}\mathrm{w} - \lambda s\mathcal{T}(\mathrm{w})\mathbf{n} - \lambda_1 s_1 s\mathcal{T}(\mathrm{w})\,J_{(s,\mathbf{n})}^{-1}\mathbf{n}_1\right) =
\end{aligned}$$

$$= ss_1\mathcal{T}\left(\mathrm{w}\right)\mathbf{e}_0 + \left(J_1\right)_{(s_1,\mathbf{n}_1)} J_{(s,\mathbf{n})}\left(\mathbf{X}\mathrm{w} - ss_1\mathcal{T}(\mathrm{w})\left(\lambda s_1\mathbf{n} - \lambda_1 J^{-1}_{(s,\mathbf{n})}\mathbf{n}_1\right)\right) =$$
$$= ss_1\mathcal{T}\left(\mathrm{w}\right)\mathbf{e}_0 + \left(J_2\right)_{(ss_1,\mathbf{n}_2)}\left(\mathbf{X}\mathrm{w} - \lambda_2 ss_1\mathcal{T}(\mathrm{w})\mathbf{n}_2\right) = \mathbf{W}_{\lambda_2,\infty}\left[ss_1,\mathbf{n}_2,J_2\right]\mathrm{w},$$

де $\lambda_2 = \left\|\lambda s_1\mathbf{n} - \lambda_1 J^{-1}_{(s,\mathbf{n})}\mathbf{n}_1\right\|$; $\mathbf{n}_2 = \begin{cases} \frac{\lambda s_1\mathbf{n} - \lambda_1 J^{-1}_{(s,\mathbf{n})}\mathbf{n}_1}{\lambda_2}, & \lambda_2 \neq 0 \\ \mathbf{n}, & \lambda_2 = 0 \end{cases}$; $J_2 = \left(J_1\right)_{(s_1,\mathbf{n}_1)} J_{(s,\mathbf{n})}\mathbb{I}_{-ss_1,1}\left[\mathbf{n}_2\right]$. Неважко переконатись, що $\lambda_2 \in [0,\infty)$, $\mathbf{n}_2 \in \mathbf{B}_1\left(\mathfrak{H}_1\right)$ і $J_2 \in \mathfrak{U}\left(\mathfrak{H}_1\right)$. Тому добуток операторів $\mathbf{W}_{\lambda_1,\infty}\left[s_1,\mathbf{n}_1,J_1\right]\mathbf{W}_{\lambda,\infty}\left[s,\mathbf{n},J\right]$ можна подати у вигляді:

$$\mathbf{W}_{\lambda_1,\infty}\left[s_1,\mathbf{n}_1,J_1\right]\mathbf{W}_{\lambda,\infty}\left[s,\mathbf{n},J\right] = \mathbf{W}_{\lambda_2,\infty}\left[ss_1,\mathbf{n}_2,J_2\right], \tag{A.162}$$

де $\lambda_2 \in [0,\infty)$, $ss_1 \in \{-1,1\}$, $\mathbf{n}_2 \in \mathbf{B}_1\left(\mathfrak{H}_1\right)$, $J_2 \in \mathfrak{U}\left(\mathfrak{H}_1\right)$. Таким чином, ми бачимо, що для довільних операторів $L_1, L \in \mathfrak{O}\left(\mathfrak{H},\infty\right)$ оператор L_1L належить до класу $\mathfrak{O}\left(\mathfrak{H},\infty\right)$. Використовуючи отриманий результат, а також твердження A.51 приходимо до наступного висновку:

Наслідок A.52. *Клас операторів $\mathfrak{O}\left(\mathfrak{H},\infty\right)$ є групою операторів над простором Мінковського $\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}\right)$, породженим гільбертовим простором $\mathfrak{H}$.*

По аналогії з формулою (A.88) введемо клас операторів $\mathfrak{O}_+\left(\mathfrak{H},\infty\right)$ (для випадку, коли швидкість світла — нескінченна):

$$\mathfrak{O}_+\left(\mathfrak{H},\infty\right) = \left\{\mathbf{W}_{\lambda,c}\left[s,\mathbf{n},J\right] \in \mathfrak{O}\left(\mathfrak{H},\infty\right) \mid s = 1\right\}.$$

Застосовуючи твердження A.51 та формулу (A.162) отримуємо наступний наслідок.

Наслідок A.53. *Множина операторів $\mathfrak{O}_+\left(\mathfrak{H},\infty\right)$ є групою операторів над простором $\mathcal{M}\left(\mathfrak{H}\right)$.*

Основні результати підрозділу A.2 були опубліковані в [111], а також були представлені на конференціях [241, 242, 244]. Окремі результати даного підрозділу опубліковані в [100].

Додаток Б

Побудова тахіонових кінематик в сенсі M. Hassani

Цікавий варіант узагальнених перетворень Лоренца було запропоновано в роботах M.E. Hassani (див, наприклад, [59]), для спеціального випадку, коли обидві системи відліку рухаються вздовж спільної осі абсцис "x" в тривимірному просторі і мають паралельні напрямки відповідних осей "y" та "z". В зазначеному спеціальному випадку ці перетворення можна подати у вигляді:

$$t' = \frac{t - \frac{Vx}{\vartheta(|V|)^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{\vartheta(|V|)^2}}}; \quad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{\vartheta(|V|)^2}}}; \quad y' = y, \quad z' = z, \quad \text{де:} \tag{Б.1}$$

- V — швидкість рухомої системи відліку $\mathfrak{l}'$, яка рухається відносно нерухомої системи $\mathfrak{l}$ зі сталою швидкістю V;
- (t, x, y, z) — просторово-часові координати довільної точки $\mathbf{M}$ в сис. відліку $\mathfrak{l}$;
- (t', x', y', z') — координати цієї ж точки $\mathbf{M}$ в рухомій системі відліку $\mathfrak{l}'$;
- ϑ : — довільна функція $[0, \infty) \to \mathbb{R}$, що має такі властивості:

$$\left.\begin{array}{ll} \vartheta(V) = c \quad \text{при} \quad 0 \leq V < c; \\ \vartheta(V) > V \quad \text{при} \quad c \leq V < \infty; \end{array}\right\} \tag{Б.2}$$

(Нагадаємо, що в даній роботі число c означає фіксовану додатну дійсну константу, яка має фізичний зміст швидкості світла в вакуумі.) Зазначимо, що у частинному випадку, коли функція $\vartheta(V)$ при $V > c$ задається формулою $\vartheta(V) = c\sqrt{1 + \frac{V^2}{c^2}}$, перетворення (Б.1) були отримані в роботах [245, 246] [Б.1].

В цьому додатку наведені вище узагальнені перетворення Лоренца в сенсі M. Hassani буде записано для абстрактного випадку простору Мінковського над до-

[Б.1] На думку автора даної дисертаційної роботи, більш цікавим і змістовним був-би частинний випадок, коли $\vartheta(V) = c\sqrt{1 + \frac{(V-c)^2}{c^2}}$ при $V > c$.

вільним дійсним гільбертовим простором і для систем відліку з довільною орієнтацією осей. Крім цього, на основі отриманих перетворень будуть побудовані відповідні універсальні кінематики.

Перш за все зауважимо, що умови (Б.2) на функцію ϑ можна послабити. Позначимо через Υ клас функцій $\vartheta : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, що задовольняють такі умови:

$$\mathbf{1})\ \vartheta(\lambda) \geq \lambda \text{ при } \lambda \in [0,\infty); \quad \mathbf{2})\ \exists\, \eta > 0\ \forall\, \lambda \in [0,\eta)\ (\vartheta(\lambda) > \lambda)\,. \tag{Б.3}$$

Для довільної функції $\vartheta \in \Upsilon$ покладемо:

$$\mathfrak{D}_*[\vartheta] := \{\lambda \in [0,\infty) \mid \vartheta(\lambda) > \lambda\}\,.$$

Згідно з умовами (Б.3) маємо, $\mathfrak{D}_*[\vartheta] \neq \emptyset$, крім того $[0,\eta) \subseteq \mathfrak{D}_*[\vartheta]$ для деякого $\eta > 0$.

Нехай $(\mathfrak{H}, \|\cdot\|, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — дійсний гільбертовий простір. Тоді, згідно з формулами (А.155) і (2.17) для довільних значень $\vartheta \in \Upsilon$, $\lambda \in \mathfrak{D}_*[\vartheta]$, $s \in \{-1,1\}$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ і $\mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ визначений оператор афінного перетворення координат $\mathbf{W}_{\lambda,\vartheta(\lambda)}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}]\,\mathrm{w} := \mathbf{W}_{\lambda,\vartheta(\lambda)}[s,\mathbf{n},J](\mathrm{w}+\mathbf{a})$. Для $\vartheta \in \Upsilon$ введемо наступні класи операторів (афінного) перетворення координат:

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}(\mathfrak{H},[\vartheta]) := \big\{&\mathbf{W}_{\lambda,\vartheta(\lambda)}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}] \mid s \in \{-1,1\}\,,\ \lambda \in \mathfrak{D}_*[\vartheta]\,,\\ &\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)\,,\ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)\,,\ \mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})\big\}\,;\\ \mathfrak{P}_+(\mathfrak{H},[\vartheta]) := \big\{&\mathbf{W}_{\lambda,\vartheta(\lambda)}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}] \in \mathfrak{P}(\mathfrak{H},[\vartheta]) \mid s = 1\big\}\,;\end{aligned}$$

Нехай, $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина така, що $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathfrak{H}$ і $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = (\mathbb{R},\leq)$, де $\leq$ — стандартний порядок на полі дійсних чисел $\mathbb{R}$ (див. примітку 2.1 внизу сторінки 152). Введемо наступні універсальні кінематики:

$$\mathfrak{UH}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},\vartheta) := \mathfrak{Ku}(\mathfrak{P}(\mathfrak{H},[\vartheta]),\mathcal{B};\,\mathfrak{H})\,; \quad \mathfrak{UH}(\mathfrak{H},\mathcal{B},\vartheta) := \mathfrak{Ku}(\mathfrak{P}_+(\mathfrak{H},[\vartheta]),\mathcal{B};\,\mathfrak{H})\,.$$

Зокрема у випадку $\vartheta(\lambda)=\vartheta_c(\lambda)=\begin{cases} c, & 0 \leq \lambda < c \\ \lambda, & \lambda \geq c \end{cases}$ $(\lambda \geq 0)$ (де $c \in (0,\infty)$), маємо $\mathfrak{D}_*[\vartheta_c] = [0,c)$, $\mathfrak{P}(\mathfrak{H},[\vartheta_c]) = \mathfrak{P}(\mathfrak{H},c)$, $\mathfrak{P}_+(\mathfrak{H},[\vartheta_c]) = \mathfrak{P}_+(\mathfrak{H},c)$, а отже $\mathfrak{UH}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},\vartheta_c) = \mathfrak{UP}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$, $\mathfrak{UH}(\mathfrak{H},\mathcal{B},\vartheta_c) = \mathfrak{UP}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$.

Кінематики типу $\mathfrak{UH}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},\vartheta)$ та $\mathfrak{UH}(\mathfrak{H},\mathcal{B},\vartheta)$ будемо називати кінематиками в сенсі M. Hassani. Можна довести, що (подібно до кінематик типу $\mathfrak{UPT}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$ та $\mathfrak{UPT}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c)$) кінематики типу $\mathfrak{UH}_0(\mathfrak{H},\mathcal{B},c,\vartheta)$ та $\mathfrak{UH}(\mathfrak{H},\mathcal{B},c,\vartheta)$, не задовольняють умовам принципу відносності при умові, якщо не існує числа $c > 0$ такого, що $\vartheta(\lambda) = \vartheta_c(\lambda)$ при $\lambda > 0$, оскільки при зазначеній умові класи операторів $\mathfrak{P}(\mathfrak{H},[\vartheta])$ та $\mathfrak{P}_+(\mathfrak{H},[\vartheta])$ не утворюють груп в просторі Мінковського $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ (див. [247] або пре-

принт [248]).

У випадку, коли $\dim(\mathfrak{H}) = 3$, $\vartheta(\lambda) = c$ при $0 \leq \lambda < c$ (де $c > 0$) і $\vartheta(\lambda) > \lambda$ при $\lambda > c$ кінематика типу $\mathfrak{UH}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, \vartheta)$ є розширенням класичної кінематики Лоренца-Пуанкаре $\mathfrak{UP}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$ за межі світлового бар'єру.

Цікавим, також, є випадок, коли функція $\vartheta \in \Upsilon$ задовольняє такі умови:

$$\textbf{а)}\ \vartheta(\lambda) > \lambda \quad (\lambda > 0)\,, \qquad \textbf{б)}\ |\vartheta(\lambda) - c| < \varepsilon \quad (0 \leq \lambda < c - \varepsilon_1)\,.$$

де $0 < \varepsilon, \varepsilon_1 < c$. В зазначеному випадку кінематика типу $\mathfrak{UH}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, \vartheta)$ є прикладом кінематики з перехідним (хоча при достатньо малих значеннях ε і ε_1 важко перехідним) світловим бар'єром, яка в досвітловому діапазоні може як завгодно мало відрізнятись від класичної кінематики Лоренца-Пуанкаре.

Зауваження Б.1. Використовуючи теорему 3.101 можна довести, що довільна узагальнена кінематика Хассані виду $\mathfrak{UH}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, \vartheta)$ ("з позитивним напрямком часу") є безумовно часонезворотною. Детально доведення останнього факту викладено в статті [249] (див. також препринт [250]). Математично строге означення безумовної часонезворотності для універсальних кінематик дано в розділі 3.9 даної дисертації.

Основні результати даного додатку були опубліковані в [247–250], а також представлені на конференціях [251, 252].

Додаток В

Доведення теореми про еволюційне розширення

Для доведення теореми 3.61 необхідно довести деякі допоміжні леми.

Лема В.1. *Нехай, $\mathfrak{Q}$ — довільний координатний простір і $\mathcal{R}$ — система абстрактних траєкторій з $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ в множину $M \subseteq \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$.*

Тоді для довільної множини $\mathcal{K}$ існує базова кінематична множина $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_{\mathcal{K}}$ така, що:

1. $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_{\mathcal{K}}\right) = \mathbb{T}$. 2. $\mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_{\mathcal{K}}\right) = \mathfrak{Q}$. 3. $\mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_{\mathcal{K}}\right) \cap \mathcal{K} = \emptyset$.
4. *Всі траєкторії $r \in \mathcal{R}$ є траєкторіями ліній долі $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_{\mathcal{K}}$ (тобто $\forall\, r \in \mathcal{R}\, \exists\, L \in \mathbb{L}d\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_{\mathcal{K}}\right)\ \left(r = \mathfrak{tr}j_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_{\mathcal{K}}}[L]\right)$).*

Доведення. Очевидно досить довести лему лише для випадку непорожньої множини $\mathcal{K}$. Отже, надалі вважатимемо, що $\mathcal{K} \neq \emptyset$.

Нехай, ξ — довільна множина, що має наступну властивість:

$$\forall x \in \mathcal{K} \quad (\{\xi\} \notin x)\,. \tag{B.1}$$

Така множина ξ існує. Справді, покладемо:

$$Y := \{y \,|\, \exists x \in \mathcal{K}\ (y \in x)\} = \bigcup_{X \in \mathcal{K}} X; \qquad Y_1 := \left\{\{u\} \mid u \in 2^Y\right\}.$$

Зауважимо, що в даній роботі ми дотримуємося (канонічної) класичної аксіоматизації теорії множин [74] або ж близької до класичної [253], тобто жодна множина не містить урелементів (атомів). Тому застосування операції $\bigcup\limits_{X \in \mathbf{K}} X$ є коректним для будь-якої непорожньої множини $\mathbf{K}$. За теоремою Кантора, маємо $\mathbf{card}(Y) < \mathbf{card}\,(Y_1)$. Отже, $Y_1 \setminus Y \neq \emptyset$. Тому, довільна множина $\xi \in 2^Y$ така, що $\{\xi\} \in Y_1 \setminus Y$ задовольнятиме умову (B.1). Отже, зафіксуємо довільну множину ξ, що задовольняє (B.1).

Для довільної траєкторії $r \in \mathcal{R}$ покладемо:

$$r^{\#}(t) := (\xi, r, r(t))\,, \quad t \in \mathfrak{D}(r) \qquad \left(\mathfrak{D}\left(r^{\#}\right) = \mathfrak{D}(r) \subseteq \mathbf{T}\right) \tag{B.2}$$
$$\mathcal{R}^{\#} := \left\{r^{\#} \,|\, r \in \mathcal{R}\right\}.$$

Підкреслимо, що в формулі (B.2) довільна упорядкована пара трактується стандартним чином як множина $(a,b) = \{\{a\}, \{a,b\}\}$, а упорядкована трійка — як множина виду $(a,b,c) = (a,(b,c)) = \{\{a\}, \{a,(b,c)\}\}$.

Доведемо, що $\mathcal{R}^{\#}$ є системою індивідуальних траєкторій з $\mathbb{T}$ у $\bigcup_{r\in\mathcal{R}} \mathfrak{R}\left(r^{\#}\right)$. Тобто необхідно довести, що для довільних $r_1^{\#}$, $r_2^{\#} \in \mathcal{R}^{\#}$ з умови $r_1^{\#} \neq r_2^{\#}$ випливає рівність, $r_1^{\#} \cap r_2^{\#} = \emptyset$. Розглянемо довільні, $r_1^{\#}$, $r_2^{\#} \in \mathcal{R}^{\#}$ такі, що $r_1^{\#} \neq r_2^{\#}$. Припустимо, що існує пара $\left(t, x^{\#}\right) \in r_1^{\#} \cap r_2^{\#}$ (де $t \in \mathbf{T}$). Тоді маємо, $t \in \mathfrak{D}\left(r_1\right) \cap \mathfrak{D}\left(r_2\right)$ і $x^{\#} = r_1^{\#}(t) = r_2^{\#}(t)$. Оскільки $r_1^{\#}(t) = r_2^{\#}(t)$, то, згідно з (B.2), отримуємо, $r_1 = r_2$, а отже $r_1^{\#} = r_2^{\#}$, що суперечить початковій умові $r_1^{\#} \neq r_2^{\#}$. Отже, зроблене припущення — помилкове, а тому рівність $r_1^{\#} \cap r_2^{\#} = \emptyset$ виконується для будь-яких $r_1^{\#}$, $r_2^{\#} \in \mathcal{R}^{\#}$ таких, що $r_1^{\#} \neq r_2^{\#}$. Таким чином, $\mathcal{R}^{\#}$ є системою індивідуальних траєкторій. Покладемо:

$$\mathcal{B} := \mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \mathcal{R}^{\#}\right).$$

Застосовуючи теорему 1.63 та теорему 1.82, отримуємо:

$$\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = \mathbb{T}. \tag{B.3}$$

$$\mathbb{L}d(\mathcal{B}) = \mathbb{L}d\left(\mathcal{A}t\left(\mathbb{T}, \mathcal{R}^{\#}\right)\right) = \mathcal{R}^{\#}; \tag{B.4}$$

Доведемо, що:

$$\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \cap \mathcal{K} = \emptyset. \tag{B.5}$$

Згідно з властивістю 1.60(9), справедлива рівність:

$$\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) = \left\{\mathsf{bs}\left(\omega\right) \mid \omega \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})\right\}. \tag{B.6}$$

За теоремою 1.63, маємо:

$$\mathbb{Bs}(\mathcal{B}) = \bigcup_{r^{\#}\in\mathcal{R}^{\#}} r^{\#}. \tag{B.7}$$

Комбінуючи формули (B.6) і (B.7), отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) &= \left\{\mathsf{bs}\left(\omega\right) \mid \omega \in \bigcup_{r^{\#}\in\mathcal{R}^{\#}} r^{\#}\right\} = \left\{\mathsf{bs}\left(\omega\right) \mid \exists r^{\#} \in \mathcal{R}^{\#}\left(\omega \in r^{\#}\right)\right\} = \\ &= \left\{\mathsf{bs}\left(\omega\right) \mid \exists r^{\#} \in \mathcal{R}^{\#}\left(\mathsf{bs}\left(\omega\right) = r^{\#}\left(\mathsf{tm}\left(\omega\right)\right)\right)\right\} = \bigcup_{r^{\#}\in\mathcal{R}^{\#}} \mathfrak{R}\left(r^{\#}\right)\end{aligned} \tag{B.8}$$

(нагадаємо, що через $\mathfrak{R}\left(r^{\#}\right)$ позначається область значень траєкторії $r^{\#}$). Розглянемо довільний елемент $y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$. Згідно з рівністю (B.8), існують траєкторія $r^{\#} \in \mathcal{R}^{\#}$ і момент часу $t \in \mathbf{T}$ такі, що $t \in \mathfrak{D}\left(r^{\#}\right)$ і $y = r^{\#}(t)$. Припустимо, що $y \in \mathcal{K}$. Тоді отримаємо, $r^{\#}(t) \in \mathcal{K}$, тобто, згідно (B.2), $(\xi, r, r(t)) \in \mathcal{K}$. Але,

$(\xi, r, r(t)) = \{\{\xi\}, \{\xi, (r, r(t))\}\}$. Отже, для елемента $y = \{\{\xi\}, \{\xi, (r, r(t))\}\} \in \mathcal{K}$ маємо співвідношення $\{\xi\} \in y$, яке суперечить співвідношенню (B.1). Отже, зроблене припущення — помилкове. Тому жоден елемент $y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ не може належати до $\mathcal{K}$. Рівність (B.5) доведено.

Нагадаємо, що, згідно з (B.8), $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) = \bigcup\limits_{r^{\#} \in \mathcal{R}^{\#}} \mathfrak{R}\left(r^{\#}\right)$. Тому, для $x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) = \bigcup\limits_{r^{\#} \in \mathcal{R}^{\#}} \mathfrak{R}\left(r^{\#}\right)$ покладемо:

$$k(x) := r(t) \qquad \left(\text{де } r^{\#} \in \mathcal{R}^{\#},\ x \in \mathfrak{R}\left(r^{\#}\right),\ x = r^{\#}(t)\right). \tag{B.9}$$

Згідно із співвідношенням (B.2), для довільних $r^{\#}, r_1^{\#} \in \mathcal{R}^{\#}$, $t \in \mathfrak{D}(r)$ і $t_1 \in \mathfrak{D}(r_1)$ з умови $x = r^{\#}(t) = r_1^{\#}(t_1)$ випливає, що $r(t) = r_1(t_1)$. Отже, відображення $k : \mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \to \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ у формулі (B.9) визначено коректно. Тому, пара:

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}} = (\mathcal{B}, (\mathfrak{Q},\, k)) \tag{B.10}$$

є базовою кінематичною множиною. При цьому:

$$\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}\right) = \mathcal{B}, \quad \mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}\right) = \mathfrak{Q}, \qquad \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}} = k, \quad \mathbb{L}d\left(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}\right) = \mathbb{L}d(\mathcal{B}). \tag{B.11}$$

Згідно з (B.10), (B.3), (B.5) та позначеннями, прийнятими в теорії кінематичних мінливих множин (див. параграф 2.2.3), маємо:

$$\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{B}\right) = \mathbb{T}; \quad \mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}\right) \cap \mathcal{K} = \mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \cap \mathcal{K} = \emptyset.$$

Отже, базова кінематична множина $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}$ задовольняє перші три умови леми B.1. Перевіримо виконання четвертої умови цієї леми для $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}$.

Розглянемо довільну траєкторію $r \in \mathcal{R}$. Тоді, очевидно, $r^{\#} \in \mathcal{R}^{\#}$. Отже, згідно з (B.4) і (B.11), отримуємо, $r^{\#} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B}) = \mathbb{L}d\left(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}\right)$. Згідно з (B.2), маємо, $\mathfrak{D}\left(r^{\#}\right) = \mathfrak{D}(r)$. Тому, використовуючи означення координат Мінковського (див. (2.2)), а також формули (2.7), (B.11) і (B.9) отримуємо:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{tr}\mathfrak{j}_{\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}}\left[r^{\#}\right] &= \left\{\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}} \rangle}(\omega) \mid \omega \in r^{\#}\right\} = \left\{\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}} \rangle}\left(\left(t, r^{\#}(t)\right)\right) \mid t \in \mathfrak{D}\left(r^{\#}\right)\right\} = \\
&= \left\{\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}} \rangle}\left(\left(t, r^{\#}(t)\right)\right) \mid t \in \mathfrak{D}\left(r\right)\right\} = \left\{\left(t, \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}}\left(r^{\#}(t)\right)\right) \mid t \in \mathfrak{D}\left(r\right)\right\} = \\
&= \left\{\left(t, k\left(r^{\#}(t)\right)\right) \mid t \in \mathfrak{D}\left(r\right)\right\} = \left\{(t,\, r(t)) \mid t \in \mathfrak{D}\left(r\right)\right\} = r.
\end{aligned}$$

Отже, для довільної траєкторії $r \in \mathcal{R}$ існує лінія долі $r^{\#} \in \mathbb{L}d\left(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}\right)$ така, що $\mathfrak{tr}\mathfrak{j}_{\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}}\left[r^{\#}\right] = r$. тобто четверта умова даної леми для $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{b}}$ також виконується. □

Наслідок B.2. *Нехай, $\mathfrak{Q}$ – довільний координатний простір і $\mathcal{R}$ — система абстрактних траєкторій з $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ в множину $M \subseteq \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$.*

Тоді для довільної множини $\mathcal{K}$ існує базова кінематична множина $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_{\mathcal{K}}$, що задовольняє умови 1,2,4 леми B.1, а також умову:

3′. $\left(\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_{\mathcal{K}}\right) \cup \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_{\mathcal{K}}\right)\right) \cap \mathcal{K} = \emptyset$.

Доведення. Покладемо, $\mathcal{K}_1 := \bigcup_{W \in \mathcal{K}} W$; $\mathcal{K}_2 := \bigcup_{W_1 \in \mathcal{K}_1} W_1$. Згідно з лемою B.1, існує базова кінематична множина $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_{\mathcal{K}}$, що задовольняє такі умови:

1. $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_{\mathcal{K}}\right) = \mathbb{T}$; 2. $\mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_{\mathcal{K}}\right) = \mathfrak{Q}$;
3. $\mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_{\mathcal{K}}\right) \cap (\mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}) = \emptyset$; 4. $\forall r \in \mathcal{R}\, \exists L \in \mathbb{L}d\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_{\mathcal{K}}\right) \left(r = \mathfrak{tr}\mathfrak{j}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_{\mathcal{K}}}[L]\right)$.

З умови 3 випливає рівність $\mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_{\mathcal{K}}\right) \cap \mathcal{K} = \emptyset$. Отже, для доведення наслідку лишається показати, що $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_{\mathcal{K}}\right) \cap \mathcal{K} = \emptyset$. Припустимо супротивне. Тоді існує елементарно-часовий стан $\omega = (t, x) \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_{\mathcal{K}}\right)$ такий, що $\omega \in \mathcal{K}$ (де $x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_{\mathcal{K}}\right)$). Оскільки $\omega = (t, x) = \{\{t\}, \{t, x\}\} \in \mathcal{K}$ і $\{t, x\} \in \omega$, то, $\{t, x\} \in \bigcup_{W \in \mathcal{K}} W = \mathcal{K}_1$. Оскільки $x \in \{t, x\}$, де $\{t, x\} \in \mathcal{K}_1$, то $x \in \bigcup_{W_1 \in \mathcal{K}_1} W_1 = \mathcal{K}_2$. Отже, $x \in \mathcal{K}_2$, що суперечить умові 3 (тобто умові $\mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_{\mathcal{K}}\right) \cap (\mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}) = \emptyset$). Отримана суперечність доводить рівність $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_{\mathcal{K}}\right) \cap \mathcal{K} = \emptyset$. Таким чином, $\left(\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_{\mathcal{K}}\right) \cup \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}_{\mathcal{K}}\right)\right) \cap \mathcal{K} = \emptyset$. □

Лема B.3. *Нехай, $\mathcal{F}$ — довільна універсальна кінематика і $\mathfrak{l}_0 \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ — довільна система відліку $\mathcal{F}$. Нехай $\mathcal{R}$ — довільна система абстрактних траєкторій з $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}_0)$ в множину $M \subseteq \mathbf{Zk}(\mathfrak{l}_0)$.*

Тоді існує еволюційно видима універсальна кінематика $\mathcal{F}_1$ така, що:

1. *$\mathcal{F}_1$ диз'юнктна з $\mathcal{F}$;*
2. *всі траєкторії $r \in \mathcal{R}$ є траєкторіями ліній долі системи відліку $\mathfrak{l}_0 \downharpoonright \mathcal{F}_1$ (тобто $\forall r \in \mathcal{R}\, \exists L \in \mathbb{L}d(\mathfrak{l}_0 \downharpoonright \mathcal{F}_1)\, (r = \mathfrak{tr}\mathfrak{j}_{\mathfrak{l}_0 \downharpoonright \mathcal{F}_1}[L, \mathcal{F}_1])$).*

Доведення. Оскільки $\mathcal{F} \upharpoonright \mathfrak{l}_0$ є базовою кінематичною множиною і $\mathbf{Zk}(\mathfrak{l}_0) = \mathbf{Zk}(\mathcal{F} \upharpoonright \mathfrak{l}_0) = \mathbf{Zk}(\mathsf{BG}(\mathcal{F} \upharpoonright \mathfrak{l}_0))$, то, за наслідком B.2, існує базова кінематична множина $\mathfrak{C}^{(0)}$, що задовольняє такі умови:

$(\mathbf{C}^1_0)$: $\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{F} \upharpoonright \mathfrak{l}_0) = \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}_0)$;

$(\mathbf{C}^2_0)$: $\mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right) = \mathsf{BG}(\mathcal{F} \upharpoonright \mathfrak{l}_0) = \mathsf{BG}(\mathfrak{l}_0, \mathcal{F})$;

$(\mathbf{C}^3_0)$: $\left(\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right) \cup \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)\right) \cap \left(\bigcup_{\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})} \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\right) = \emptyset$;

$(\mathbf{C}^4_0)$: $\forall r \in \mathcal{R}\, \exists L \in \mathbb{L}d\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right) (r = \mathfrak{tr}\mathfrak{j}_{\mathfrak{C}^{(0)}}[L])$.

З умов $(\mathbf{C}^1_0)$, $(\mathbf{C}^2_0)$ випливає, що:

$$\begin{aligned}\mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right) &= \mathbf{Tm}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right) \times \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right) = \mathbf{Tm}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right) \times \mathbf{Zk}\left(\mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)\right) = \\ &= \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}_0) \times \mathbf{Zk}(\mathsf{BG}(\mathfrak{l}_0, \mathcal{F})) = \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}_0) \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{l}_0, \mathcal{F}) = \mathbb{M}k(\mathfrak{l}_0, \mathcal{F}). \qquad (B.12)\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{1.}}$ Для довільних індекса $\alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F})$ і $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)$ покладемо:

$$\mathcal{U}_\alpha(\omega) := \begin{cases} \left(\mathsf{tm}\left([\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}) \leftarrow \mathfrak{l}_0,\, \mathcal{F}]\,\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{C}^{(0)}\rangle}(\omega)\right), \omega\right), & \alpha \neq \alpha_0 \\ \omega, & \alpha = \alpha_0, \end{cases} \tag{B.13}$$

де $\alpha_0 = \mathtt{ind}\,(\mathfrak{l}_0)$. $\mathcal{U}_\alpha$ є ін'єктивним відображенням з множини $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)$ в множину $\mathbf{Tm}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F})) \times \mathcal{X}_\alpha$, де

$$\mathcal{X}_\alpha = \begin{cases} \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right), & \alpha \neq \alpha_0 \\ \mathfrak{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right), & \alpha = \alpha_0. \end{cases} \tag{B.14}$$

Для довільних $\alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F})$ і $\mathrm{w} \in \mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right) = \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l}_0, \mathcal{F})$ покладемо:

$$\mathcal{K}_\alpha(\mathrm{w}) := [\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}) \leftarrow \mathfrak{l}_0,\, \mathcal{F}]\,\mathrm{w}. \tag{B.15}$$

$\boxed{\mathbf{2.}}$ Зафіксуємо довільний індекс $\alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F})$. Доведемо, що п'ятірка $(\mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}))\,, \mathcal{X}_\alpha, \mathcal{U}_\alpha, \mathsf{BG}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F})\,, \mathcal{F})\,, \mathcal{K}_\alpha)$ є універсальним кінематичним проектором для $\mathfrak{C}^{(0)}$.

2.1) Оскільки $\mathcal{U}_\alpha$ є ін'єктивним відображенням з $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)\right)$ в $\mathbf{Tm}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F})) \times \mathcal{X}_\alpha$, то, згідно з означеннями 1.132 і 1.138, упорядкована трійка $(\mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}))\,, \mathcal{X}_\alpha, \mathcal{U}_\alpha)$ є ін'єктивним еволюційним проектором для базової мінливої множини $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)$.

2.2) Згідно з означенням 3.1 і системою позначень теорії універсальних кінематик (див. параграф 3.2.2), $\mathsf{BG}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F})\,, \mathcal{F})$ є координатним простором.

2.3) За означенням 3.1 і системою позначень теорії універсальних кінематик, ***відображення $\mathcal{K}_\alpha$, що задається формулою (B.15), є бієкцією з*** $\mathbb{M}k\,(\mathfrak{l}_0, \mathcal{F})$ ***на*** $\mathbb{M}k\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F})\,, \mathcal{F}) = \mathbf{Tm}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F})) \times \mathbf{Zk}\,(\mathsf{BG}\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F})\,, \mathcal{F}))$, де $\mathbb{M}k\,(\mathfrak{l}_0, \mathcal{F}) = \mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)$ (згідно з (B.12)). При цьому, використовуючи (B.15), а також рівності (3.3) і (3.4), для довільного $\mathrm{w} \in \mathbb{M}k\,(\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F})\,, \mathcal{F})$ отримуємо:

$$\mathcal{K}_\alpha^{[-1]}(\mathrm{w}) = [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F})\,,\, \mathcal{F}]\,\mathrm{w} \tag{B.16}$$

2.4) Нехай $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)$ і $\mathsf{bs}\,(\mathcal{U}_\alpha\,(\omega_1)) = \mathsf{bs}\,(\mathcal{U}_\alpha\,(\omega_2))$. Тоді при $\alpha \neq \alpha_0$ використовуючи (B.13) отримуємо рівність, $\omega_1 = \omega_2$, а отже і рівність $\mathsf{bs}\left(\mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{C}^{(0)}\rangle}\,(\omega_1)\right)\right) = \mathsf{bs}\left(\mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{C}^{(0)}\rangle}\,(\omega_2)\right)\right)$.

У випадку $\alpha = \alpha_0$, згідно з (B.13), маємо:

$$\mathsf{bs}\,(\omega_1) = \mathsf{bs}\,(\omega_2)\,. \tag{B.17}$$

Оскільки $\alpha_0 = \mathtt{ind}\,(\mathfrak{l}_0)$, то $\mathbf{lk}_\alpha\,(\mathcal{F}) = \mathbf{lk}_{\alpha_0}\,(\mathcal{F}) = \mathfrak{l}_0$. Отже, використовуючи (B.15) і

(3.3), одержуємо:

$$\mathcal{K}_{\alpha}(\mathrm{w}) = \mathcal{K}_{\alpha_0}(\mathrm{w}) = [\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathfrak{l}_0, \mathcal{F}]\,\mathrm{w} = \mathrm{w}, \quad (\mathrm{w} \in \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l}_0, \mathcal{F})). \tag{B.18}$$

Тому, використовуючи означення координат Мінковського для базових кінематичних множин (див. формулу (2.2)), для довільного $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)$ маємо:

$$\mathsf{bs}\left(\mathcal{K}_{\alpha}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{C}^{(0)} \rangle}(\omega)\right)\right) = \mathsf{bs}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{C}^{(0)} \rangle}(\omega)\right) = \mathsf{bs}\left((\mathsf{tm}\,(\omega)\,,\ \mathsf{q}_{\mathfrak{C}^{(0)}}\,(\mathsf{bs}\,(\omega)))\right) = \mathsf{q}_{\mathfrak{C}^{(0)}}\,(\mathsf{bs}\,(\omega)).$$

Звідси, враховуючи (B.17), отримуємо, $\mathsf{bs}\left(\mathcal{K}_{\alpha}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{C}^{(0)} \rangle}(\omega_1)\right)\right) = \mathsf{bs}\left(\mathcal{K}_{\alpha}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{C}^{(0)} \rangle}(\omega_2)\right)\right)$.

Отже, в обох випадках для $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)$ з умови $\mathsf{bs}\,(\mathcal{U}_{\alpha}\,(\omega_1)) = \mathsf{bs}\,(\mathcal{U}_{\alpha}\,(\omega_2))$ випливає рівність, $\mathsf{bs}\left(\mathcal{K}_{\alpha}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{C}^{(0)} \rangle}(\omega_1)\right)\right) = \mathsf{bs}\left(\mathcal{K}_{\alpha}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{C}^{(0)} \rangle}(\omega_2)\right)\right)$.

2.5) У випадку $\alpha \neq \alpha_0$, використовуючи (B.13), (B.15), для довільного елемента $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)$ отримуємо:

$$\mathsf{tm}\,(\mathcal{U}_{\alpha}\,(\omega)) = \mathsf{tm}\left([\mathbf{lk}_{\alpha}\,(\mathcal{F}) \leftarrow \mathfrak{l}_0,\ \mathcal{F}]\,\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{C}^{(0)} \rangle}(\omega)\right) = \mathsf{tm}\left(\mathcal{K}_{\alpha}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{C}^{(0)} \rangle}(\omega)\right)\right).$$

Тепер розглянемо випадок $\alpha = \alpha_0$. Тоді, згідно з (B.13), маємо, $\mathcal{U}_{\alpha}\,(\omega) = \omega$ $(\forall\, \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right))$. Тому, використовуючи (B.18) для кожного $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)$ отримуємо:

$$\mathsf{tm}\,(\mathcal{U}_{\alpha}\,(\omega)) = \mathsf{tm}\,(\omega) = \mathsf{tm}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{C}^{(0)} \rangle}(\omega)\right) = \mathsf{tm}\left(\mathcal{K}_{\alpha}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{C}^{(0)} \rangle}(\omega)\right)\right).$$

Таким чином, рівність $\mathsf{tm}\,(\mathcal{U}_{\alpha}\,(\omega)) = \mathsf{tm}\left(\mathcal{K}_{\alpha}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{C}^{(0)} \rangle}(\omega)\right)\right)$ $(\forall \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right))$ виконується в обох випадках.

З результатів, отриманих в пунктах 2.1)–2.5), за означенням 3.4, випливає, що п'ятірка $(\mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathbf{lk}_{\alpha}\,(\mathcal{F}))\,, \mathcal{X}_{\alpha}, \mathcal{U}_{\alpha}, \mathsf{BG}\,(\mathbf{lk}_{\alpha}\,(\mathcal{F})\,, \mathcal{F})\,, \mathcal{K}_{\alpha})$ є універсальним кінематичним проектором для базової кінематичної множини $\mathfrak{C}^{(0)}$ (при довільному значенні індекса $\alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F})$). Отже, згідно з означенням 3.4 (пункт 2), наступна індексована сім'я є універсальним кінематичним мультипроектором для $\mathfrak{C}^{(0)}$:

$$\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathbf{lk}_{\alpha}\,(\mathcal{F}))\,, \mathcal{X}_{\alpha}, \mathcal{U}_{\alpha}, \mathsf{BG}\,(\mathbf{lk}_{\alpha}\,(\mathcal{F})\,, \mathcal{F})\,, \mathcal{K}_{\alpha})\ \mid \alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}))\,.$$

$\boxed{\mathbf{3.}}$ Враховуючи означення 3.6 і теорему 3.5, можна покласти:

$$\mathcal{F}_1 := \mathfrak{Ku}\left[\mathfrak{P}, \mathfrak{C}^{(0)}\right], \tag{B.19}$$

3.1) Спочатку доведемо, що $\mathcal{F}_1\,[\equiv]\,\mathcal{F}$.

3.1.1) Згідно з властивістю 3.7(2) маємо, $\mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd\left(\mathfrak{Ku}\left[\mathfrak{P}, \mathfrak{C}^{(0)}\right]\right) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F})$.

3.1.2) Використовуючи властивість 3.7(1) отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}k\,(\mathcal{F}_1) &= \mathcal{L}k\left(\mathfrak{Ku}\left[\mathfrak{P}, \mathfrak{C}^{(0)}\right]\right) = \\ &= \left\{\left(\alpha, \mathcal{U}_{\alpha}\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right),\ \mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathbf{lk}_{\alpha}\,(\mathcal{F}))\right]\right) \,\middle|\, \alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F})\right\}.\end{aligned} \tag{B.20}$$

Застосовуючи формулу (B.20), для довільного індекса $\alpha \in \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd\,(\mathcal{F})$ отри-

муємо рівність:

$$\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1) = \left(\alpha, \mathcal{U}_\alpha\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right), \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})\right)\right]\right). \tag{B.21}$$

Отже, в силу теореми 1.133, маємо:

$$\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathcal{U}_\alpha\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right), \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})\right)\right]\right) = \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})\right),$$

а, в силу теореми 3.5 (пункт 2) одержуємо:

$$\mathsf{BG}\left(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1), \mathcal{F}_1\right) = \mathsf{BG}\left(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}), \mathcal{F}\right).$$

3.1.3) Розглянемо довільні індекси $\alpha, \beta \in \mathcal{I}nd(\mathcal{F}_1) = \mathcal{I}nd(\mathcal{F})$. Враховуючи формулу (B.21), покладемо:

$$\mathfrak{l} := \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1) = \left(\alpha, \mathcal{U}_\alpha\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right), \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})\right)\right]\right);$$

$$\mathfrak{m} := \mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_1) = \left(\beta, \mathcal{U}_\beta\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right), \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F})\right)\right]\right).$$

Використовуючи властивість 3.7(7), а також рівності (B.15), (B.16) і (3.4), для кожного $\omega \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}, \mathcal{F}_1) = \mathbb{M}k\left(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1), \mathcal{F}_1\right)$ отримуємо:

$$\begin{aligned}[\mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}_1) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1), \mathcal{F}_1]\,\mathrm{w} = [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}_1]\,\mathrm{w} = \mathcal{K}_\beta\left(\mathcal{K}_\alpha^{[-1]}(\mathrm{w})\right) = \\ = [\mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}) \leftarrow \mathfrak{l}_0, \mathcal{F}]\,[\mathfrak{l}_0 \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}), \mathcal{F}]\,\mathrm{w} = [\mathbf{lk}_\beta(\mathcal{F}) \leftarrow \mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}), \mathcal{F}]\,\mathrm{w}.\end{aligned}$$

3.1.4) За означенням 3.12, з результатів, отриманих в підпунктах 3.1.1)–3.1.3), випливає співвідношення $\mathcal{F}\,[\equiv]\,\mathcal{F}_1$.

3.2) Доведемо, що універсальна кінематика $\mathcal{F}_1$ — диз'юнктна з $\mathcal{F}$. Враховуючи рівність (B.21) і теорему 1.133 для довільного індекса $\alpha \in \mathcal{I}nd(\mathcal{F})$ отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)\right) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathcal{U}_\alpha\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right), \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})\right)\right]\right) = \\ = \mathcal{U}_\alpha\left(\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)\right)\right) = \mathcal{U}_\alpha\left(\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)\right) = \left\{\mathcal{U}_\alpha(\omega) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)\right\}.\end{aligned}$$

Оскільки $\mathcal{U}_\alpha$ є відображенням з $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)$ в $\mathbf{Tm}\left(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})\right) \times \mathcal{X}_\alpha$, то, враховуючи останню рівність та властивість 1.60(9), одержуємо, $\mathfrak{Bs}\left(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)\right) = \left\{\mathsf{bs}\left(\mathcal{U}_\alpha(\omega)\right) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)\right\} \subseteq \mathcal{X}_\alpha$, де, згідно з формулою (B.14), $\mathcal{X}_\alpha \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right) \cup \mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)$. Тому, з умови $(\mathbf{C}_0^3)$ отримуємо, співвідношення, $\mathcal{X}_\alpha \cap \mathfrak{Bs}\left(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})\right) = \emptyset$ $(\forall\, \alpha \in \mathcal{I}nd(\mathcal{F}))$. Таким чином, для довільного $\alpha \in \mathcal{I}nd(\mathcal{F})$ маємо:

$$\mathfrak{Bs}\left(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F}_1)\right) \cap \mathfrak{Bs}\left(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})\right) \subseteq \mathcal{X}_\alpha \cap \mathfrak{Bs}\left(\mathbf{lk}_\alpha(\mathcal{F})\right) = \emptyset. \tag{B.22}$$

Звідси, враховуючи, що, згідно з пунктом 3.1), $\mathcal{F}_1\,[\equiv]\,\mathcal{F}$, за означенням 3.41, отримуємо, що універсальна кінематика $\mathcal{F}_1$ — диз'юнктна з $\mathcal{F}$.

3.3) Оскільки $\alpha_0 = \mathtt{ind}(\mathfrak{l}_0)$, то, використовуючи формули (3.64), (B.21) та умову

$(\mathbf{C}_0^1)$, отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1} &= \mathbf{lk}_{\alpha_0}(\mathcal{F}_1) = \left(\alpha_0, \mathcal{U}_{\alpha_0}\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right), \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathbf{lk}_{\alpha_0}(\mathcal{F})\right)\right]\right) = \\ &= \left(\alpha_0, \mathcal{U}_{\alpha_0}\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right), \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{l}_0\right)\right]\right) = \left(\alpha_0, \mathcal{U}_{\alpha_0}\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right), \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)\right]\right). \quad (\text{B}.23)\end{aligned}$$

Оскільки, згідно з (B.13), $\mathcal{U}_{\alpha_0}$ є тотожним відображенням, то, враховуючи зауваження 1.137, маємо $\mathcal{U}_{\alpha_0}\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right), \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)\right] = \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)$. Отже, з рівності (B.23), випливає рівність, $\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1} = \left(\alpha_0, \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)\right)$, з якої отримуємо рівності:

$$\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}\right) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)\right) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right); \quad (\text{B}.24)$$

$$\mathbb{L}d\left(\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}\right) = \mathbb{L}d\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right). \quad (\text{B}.25)$$

Розглянемо довільну траєкторію $r \in \mathcal{R}$. За умовою $(\mathbf{C}_0^4)$, існує лінія долі $L \in \mathbb{L}d\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)$ така, що:

$$r = \mathfrak{trj}_{\mathfrak{C}^{(0)}}[L]. \quad (\text{B}.26)$$

Використовуючи рівність (B.23), а також властивість 3.7(4) отримуємо:

$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1} \rangle}(\omega, \mathcal{F}_1) = \mathcal{K}_{\alpha_0}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{C}^{(0)} \rangle}\left(\mathcal{U}_{\alpha_0}^{[-1]}(\omega)\right)\right) \qquad (\forall\, \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}\right)),$$

де (згідно з формулою (B.24)) $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}\right) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)$. З рівностей (B.13) та (B.18) випливає, що відображення $\mathcal{U}_{\alpha_0}$ і $\mathcal{K}_{\alpha_0}$ є тотожними відображеннями. Тому:

$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1} \rangle}(\omega, \mathcal{F}_1) = \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{C}^{(0)} \rangle}(\omega) \qquad \left(\forall\, \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}\right) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(0)}\right)\right).$$

Отже, з рівності (B.26), використовуючи рівності (3.111) та (2.7), отримуємо:

$$\begin{aligned}r &= \mathfrak{trj}_{\mathfrak{C}^{(0)}}[L] = \left\{\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{C}^{(0)} \rangle}(\omega) \mid \omega \in L\right\} = \\ &= \left\{\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1} \rangle}(\omega, \mathcal{F}_1) \mid \omega \in L\right\} = \mathfrak{trj}_{\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}}[L, \mathcal{F}_1],\end{aligned}$$

де, $L \in \mathbb{L}d\left(\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}\right)$ (за формулою (B.25)). Таким чином, вище було доведено, що:

$$\forall r \in \mathcal{R}\, \exists L \in \mathbb{L}d\left(\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}\right) \left(r = \mathfrak{trj}_{\mathfrak{l}_0 \lfloor_{\mathcal{F}_1}}[L, \mathcal{F}_1]\right).$$

З результатів, отриманих вище в пунктах пунктів 3.2), 3.3) випливає, що універсальна кінематика $\mathcal{F}_1$ задовольняє умови 1,2 даної леми. При цьому, згідно з рівністю (B.19) і наслідком 3.59, універсальна кінематика $\mathcal{F}_1$ є еволюційно видимою. □

Доведення теореми 3.61. Нехай, $\mathcal{F}$ — універсальна кінематика, $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ і $\mathcal{R}$ — система абстрактних траєкторій з $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l})$ в множину $M \subseteq \mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$. За лемою B.3, існує еволюційно видима універсальна кінематика $\mathcal{F}_1^{\sim}$ така, що:

1) $\mathcal{F}_1^{\sim}$ диз'юнктна з $\mathcal{F}$; (B.27)

2) $\forall\, r \in \mathcal{R}\, \exists\, L \in \mathbb{L}d\left(\mathfrak{l} \lfloor \mathcal{F}_1^{\sim}\right) \left(r = \mathfrak{trj}_{\mathfrak{l} \lfloor \mathcal{F}_1^{\sim}}[L, \mathcal{F}_1^{\sim}]\right)$. (B.28)

Покладемо: $\mathcal{F}_1 := \mathcal{F}_1^{\sim} \overset{\leftarrow}{\sqcup} \mathcal{F}.$ (B.29)

Оскільки, згідно (B.27), кінематика $\mathcal{F}_1^{\sim}$ диз'юнктна з $\mathcal{F}$, то диз'юнктне еволюційне об'єднання в правій частині (B.29) існує (згідно з теоремою 3.51). Доведемо, що універсальна кінематика $\mathcal{F}_1$ задовольняє умови теореми 3.61.

1. Розглянемо довільну траєкторію $r \in \mathcal{R}$. За умовою (B.28), існує лінія долі $L \in \mathbb{L}d\,(\mathfrak{l} \downharpoonleft \mathcal{F}_1^{\sim})$ така, що:

$$r = \mathfrak{trj}_{\mathfrak{l}|\mathcal{F}_1^{\sim}}\,[L, \mathcal{F}_1^{\sim}]\,. \tag{B.30}$$

Оскільки $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1^{\sim} \overset{\leftarrow}{\sqcup} \mathcal{F}$, то, згідно з твердженням 3.48, пункт 1, маємо, $\mathcal{F}_1^{\sim} \underset{\rightarrow}{\sqsubset} \mathcal{F}_1$. Отже, згідно з твердженням 3.38, пункт 4, отримуємо:

$$\mathbb{L}d\,(\mathfrak{l} \downharpoonleft \mathcal{F}_1^{\sim}) = \mathbb{L}d\left(\mathbf{lk}_{\mathtt{ind}(\mathfrak{l})}\,(\mathcal{F}_1^{\sim})\right) \subseteq \mathbb{L}d\left(\mathbf{lk}_{\mathtt{ind}(\mathfrak{l})}\,(\mathcal{F}_1)\right) = \mathbb{L}d\,(\mathfrak{l} \downharpoonleft \mathcal{F}_1)\,.$$

Звідси, оскільки $L \in \mathbb{L}d\,(\mathfrak{l} \downharpoonleft \mathcal{F}_1^{\sim})$, маємо $L \in \mathbb{L}d\,(\mathfrak{l} \downharpoonleft \mathcal{F}_1)$. При цьому, використовуючи рівності (B.30) та (3.111), а також твердження 3.38, пункт 6 отримуємо:

$$\begin{aligned} r &= \mathfrak{trj}_{\mathfrak{l}|\mathcal{F}_1^{\sim}}\,[L, \mathcal{F}_1^{\sim}] = \left\{\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}|\mathcal{F}_1^{\sim}\rangle}\,(\omega, \mathcal{F}_1^{\sim}) \mid \omega \in L\right\} = \\ &= \left\{\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}|\mathcal{F}_1\rangle}\,(\omega, \mathcal{F}_1) \mid \omega \in L\right\} = \mathfrak{trj}_{\mathfrak{l}|\mathcal{F}_1}\,[L, \mathcal{F}_1]\,. \end{aligned}$$

Отже, перший пункт теореми 3.61 для універсальної кінематики $\mathcal{F}_1$ виконується.

2. Нехай, додатково, кінематика $\mathcal{F}$ є еволюційно видимою. Нагадаємо, що універсальна кінематика $\mathcal{F}_1^{\sim}$ є еволюційно видимою також (згідно з першим абзацом доведення даної теореми). Тому універсальна кінематика $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1^{\sim} \overset{\leftarrow}{\sqcup} \mathcal{F}$ є еволюційно видимою також (за теоремою 3.60). $\square$

Бібліоґрафія

1. Проблемы Гильберта / под ред. Александров П.С. — Москва : “Наука”, 1969. — С. 1–240.

2. Гладун А.Д. Шестая проблема Гильберта // Потенциал. — 2006. — № 3. — Режим доступа: http://potential.org.ru/Home/ProblemGilbert.

3. Petunin Yu.I., Klyushin. D.A. A structural approach to solving the 6th Hilbert problem // Theory of Probability and Mathematical Statistics. — 2005. — Vol. 71, no. 71. — P. 165–179. — Access mode: https://doi.org/10.1090/S0094-9000-05-00656-3.

4. Petrina D.Ya. Mathematical Foundations of Quantum Statistical Mechanics. Continuous Systems. — Amsterdam : Kluwer, 1995. — P. 1–624.

5. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров И.Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. — Москва : “Наука”, 1969. — С. 1–424.

6. Arnold A. Mathematical properties of quantum evolution equations vol 1946. – Springer, 2008. // Quantum Transport. — Berlin, Heidelberg : Springer, 2008. — Vol. 1946 of Lect. Notes in Math. — P. 45–109. — ISBN: 978-3-540-79573-5. — Access mode: https://doi.org/10.1007/978-3-540-79574-2_2.

7. Cercignani C., Gerasimenko V.I., Petrina D.Ya. Many-Particle Dynamics and Kinetic Equations. — Kluwer Acad. Publ., 1997. — P. 1–251. — ISBN: 079-234-6963.

8. Gorini Vittorio. Linear kinematical groups // Communications in Mathematical Physics. — 1971. — Jun. — Vol. 21, no. 2. — P. 150–163. — Access mode: https://doi.org/10.1007/BF01646749.

9. Berzi Vittorio, Gorini Vittorio. On space-time, reference frames and the structure of relativity groups // Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.). — 1972. — Vol. 16. — P. 1–22.

10. Lugiato Luigi A., Gorini Vittorio. On the Structure of Relativity Groups // Journal of Mathematical Physics. — 1972. — Vol. 13, no. 5. — P. 665–671. — Access mode: https://doi.org/10.1063/1.1666034.

11. McKinsey J. C. C., Sugar A. C., Suppes Patrick. Axiomatic foundations of classical particle mechanics // J. Rational Mech. Anal. — 1953. — Vol. 2. — P. 253–272.

12. Schutz John W. Foundations of special relativity: kinematic axioms for Minkowski space-time. — Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973. — Vol. 361 of Lecture Notes in Mathematics. — P. xx+314.

13. da Costa Newton C. A., Doria F. Antonio. Suppes predicates for classical physics // The space of mathematics (San Sebastiàn, 1990). — Found. Comm. Cogn. de Gruyter, Berlin, 1992. — P. 168–191.

14. da Costa Newton C. A., Doria F. Antonio. Janus–Faced Physics: On Hilbert's 6th Problem // Randomness and Complexity, From Leibniz to Chaitin. — World Scientific, 2007. — P. 25–68. — Access mode: https://doi.org/10.1142/9789812770837_0003.

15. Sant'Anna Adonai S. The definability of physical concepts // Bol. Soc. Parana. Mat. (3). — 2005. — Vol. 23, no. 1-2. — P. 163–175. — Access mode: http://dx.doi.org/10.5269/bspm.v23i1-2.7471.

16. Pimenov R. I. Mathematical Temporal Constructions // On the Way to Understanding the Time Phenomenon: The Constructions of Time in Natural Science (Part I) . — Singapore – New Jersey – London – Hong Kong : WORLD SCIENTIFIC, 1995. — P. 99–135. — ISBN: 978-981-02-1360-2. — Access mode: http://dx.doi.org/10.1142/9789812832092_0008.

17. Пименов Р.И. Основы теории темпорального универсума. — Москва : ЛЕНАНД, 2006. — С. 1–200. — ISBN: 5-9710-0042-X.

18. da Costa N.C.A., Sant'Anna A.S. The Mathematical Role of Time and Space-Time in Classical Physics // Found. Phys. Lett. — 2001. — Vol. 14, no. 6. — P. 553–563. — Access mode: http://dx.doi.org/10.1023/A:1015561807144.

19. Mamone-Capria Marco. On the Fundamental Theorem of the Theory of Relativity // Foundations of Physics. — 2016. — Dec. — Vol. 46, no. 12. — P. 1680–1712. — Access mode: https://doi.org/10.1007/s10701-016-0038-3.

20. Sant'Anna Adonai S., Santos Alexandre M. S. Quasi-set-theoretical foundations of statistical mechanics: a research program // Foundations of Physics. — 2000. — Vol. 30, no. 1. — P. 101–120. — Access mode: http://dx.doi.org/10.1023/A:1003643109795.

21. Madarász Judit, Németi István, Székely Gergely. First-Order Logic Foundation of Relativity Theories // Mathematical Problems from Applied Logic II: Logics for the XXIst Century. — International Mathematical Series ed. — New York, NY : Springer New York, 2007. — Vol. 5. — P. 217–252. — ISBN: 978-0-387-69245-6. — Access mode: http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-69245-6_4.

22. On Logical analysis of relativity theories / Andréka Hajnal, Madarász J.X., Németi I., and Székely G. // Hungarian Philosophical Review. — 2010. — Vol. 54, no. 4. — P. 204–222. — Access mode: https://arxiv.org/abs/1105.0885.

23. Madarász Judit X., Németi István, Székely Gergely. Twin paradox and the logical foundation of relativity theory // Foundations of Physics. — 2006. — Vol. 36, no. 5. — P. 681–714. — Access mode: http://dx.doi.org/10.1007/s10701-005-9041-9.

24. Szekely Gergely. First-order logic investigation of relativity theory with an emphasis on accelerated observers : Ph. D. thesis. — Eötvös Loránd University, Faculty of Sciences, Institute of Mathematics, 2009. — P. 152. — Access mode: https://arxiv.org/abs/1005.0973v1.

25. Lefever Koen. Using Logical Interpretation and Definitional Equivalence to Compare Classical Kinematics and Special Relativity Theory : Ph. D. thesis. — Vrije Universitet Brussel : Letteren & Wijsbegeerte, 2017. — P. 1–83.

26. Lefever Koen, Székely Gergely. Comparing Classical and Relativistic Kinematics in First-Order Logic // Logique et Analyse. — 2018. — March. — Vol. 61, no. 241. — Access mode: http://philsci-archive.pitt.edu/13200.

27. Левич А.П. Методологические трудности на пути к пониманию феномена времени // Время конца времен. — Москва : Московско-Петербургский Философский Клуб, 2009. — С. 66–88. — Режим доступа: http://www.chronos.msu.ru/old/RREPORTS/levich_trudnosti.pdf.

28. Левич А.П. Почему скромны успехи в изучении времени // На пути к пониманию феномена времени: конструкции времени в естествознании. Часть 3. Методология. Физика. Биология. Математика. Теория систем. — Москва : Прогресс-Традиция, 2009. — С. 15–29. — Режим доступа: http://www.chronos.msu.ru/old/RREPORTS/levich_pochemu.pdf.

29. Levich A.P. Time as variability of natural systems: ways of quantitative description of changes and creation of changes by substantial flows // On the Way to

Understanding the Time Phenomenon: the Constructions of Time in Natural Science. Part 1. Interdisciplinary Time Studies. — Singapore, New Jersey, London, Hong Kong : World Scientific, 1995. — P. 149–192. — Access mode: http://www.chronos.msu.ru/old/EREPORTS/levich1.pdf.

30. Левич А.П. Моделирование “динамических множеств” // Необратимые процессы в природе и технике. — Москва : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. — С. 43–46. — Режим доступа: http://www.chronos.msu.ru/old/RREPORTS/levich_dinamich.html.

31. Rubin Herman, Suppes Patrick. Transformations of systems of relativistic particle mechanics. // Pacific J. Math. — 1954. — Vol. 4, no. 4. — P. 563–601. — Access mode: https://projecteuclid.org/euclid.pjm/1103044692.

32. Suppes P. Axioms for relativistic kinematics with or without parity // Symposium on the Axiomatic Method with Special Reference to Physics. — North-Holland, 1959. — P. 291–307.

33. Szekeres G. Kinematic geometry: an axiomatic system for Minkowski space-time // Journal of the Australian Mathematical Society. — 1968. — no. 8. — P. 134–160. — Access mode: https://doi.org/10.1017/S1446788700005188.

34. Fine Arthur. Review on “A Deductive Theory of Space and Time by Saul A. Basri” // The Philosophical Review. — 1968. — Vol. 77, no. 4. — P. 522–524. — Access mode: http://www.jstor.org/stable/2183019.

35. Latzer Robert W. Nondirected light signals and the structure of time // Synthese. — 1972. — Mar. — Vol. 24, no. 1. — P. 236–280. — Access mode: https://doi.org/10.1007/BF00540151.

36. Александров А.Д. К основаниям геометрии пространства-времени. I // Докл. АН СССР. — 1974. — Т. 219, № 1. — С. 11–14.

37. Александров А.Д. К основаниям геометрии пространства-времени. II // Докл. АН СССР. — 1974. — Т. 219, № 2. — С. 265–267.

38. Ax James. The elementary foundations of spacetime // Foundations of Physics. — 1978. — Aug. — Vol. 8, no. 7. — P. 507–546. — Access mode: https://doi.org/10.1007/BF00717578.

39. Schutz John W. An axiomatic system for Minkowski space–time // Journal of Mathematical Physics. — 1981. — Vol. 22, no. 2. — P. 293–302. — https://doi.org/10.1063/1.524877.

40. Benda Thomas. An Axiomatic Foundation of Relativistic Spacetime // Synthese. — 2015. — Vol. 192, no. 7. — P. 1–16. — Access mode: http://doi.org/10.1007/s11229-013-0345-6.

41. Benda Thomas. A Formal Construction of the Spacetime Manifold // Journal of Philosophical Logic. — 2008. — Vol. 37, no. 5. — P. 441–478. — Access mode: https://doi.org/10.1007/s10992-007-9075-x.

42. Lefever Koen, Szekely Gergely. Comparing Classical and Relativistic Kinematics in First-Order Logic // Logique et Analyse. — 2018. — Vol. 61, no. 241.

43. Andréka Hajnal, Madarász Judit X., Németi István. Logical Axiomatizations of Space-Time. Samples from the Literature // Non-Euclidean Geometries: János Bolyai Memorial Volume / ed. by Prékopa András, Molnár Emil. — Boston, MA : Springer US, 2006. — P. 155–185. — ISBN: 978-0-387-29555-8. — Access mode: https://doi.org/10.1007/0-387-29555-0_8.

44. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. — Издание второе, стереотипное изд. — Санкт Петербург : “Лань”, 2010. — С. 1–368. — ISBN: 978-5-8114-0981-5.

45. Barr Michael, Mclarty Colin, Wells Charles. Variable Set Theory. — 1986. — P. 1–12. — Access mode: http://www.math.mcgill.ca/barr/papers/vst.pdf.

46. Bell. John L. Abstract and Variable Sets in Category Theory // What is Category Theory? — Monza (Italy) : Polimetrica International Scientific Publisher, 2006. — P. 9–16. — Access mode: http://publish.uwo.ca/~jbell/Bell2.pdf.

47. Space-time as a causal set / Bombelli Luca, Lee Joohan, Meyer David, and Sorkin Rafael D. // Phys. Rev. Lett. — 1987. — Aug. — Vol. 59. — P. 521–524. — Access mode: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.59.521.

48. Dowker Fay. Causal sets as discrete spacetime // Contemporary Physics. — 2006. — Vol. 47, no. 1. — P. 1–9. — https://doi.org/10.1080/17445760500356833.

49. Major Seth, Rideout David, Surya Sumati. On recovering continuum topology from a causal set // Journal of Mathematical Physics. — 2007. — Vol. 48, no. 3. — P. 032501. — https://doi.org/10.1063/1.2435599.

50. Dowker Fay. Introduction to causal sets and their phenomenology // General Relativity and Gravitation. — 2013. — Sep. — Vol. 45, no. 9. — P. 1651–1667. — Access mode: https://doi.org/10.1007/s10714-013-1569-y.

51. Hudetz Laurenz. Linear structures, causal sets and topology // Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics. — 2015. — Vol. 52. — P. 294–308. — Access mode: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1355219815000842.

52. Кривые в кинематиках и смежные вопросы физики и космологии / Белов С.Н., Громов Н.А., Крейнович В. Я. и Пименов Р. И. Серия препринтов "Научный доклад". — Сыктывкар : Коми филиал АН СССР, 1976. — С. 1–16.

53. Bilaniuk O.-M. P., Deshpande V. K., Sudarshan E. C. G. "Meta" Relativity // American Journal of Physics. — 1962. — Vol. 30, no. 10. — P. 718–723. — Access mode: http://dx.doi.org/10.1119/1.1941773.

54. Bilaniuk O.-M. P., Sudarshan E. C. G. Particles beyond the Light Barrier // Physics Today. — 1969. — Vol. 22, no. 5. — P. 43–51. — Access mode: http://dx.doi.org/10.1063/1.3035574.

55. Біланюк О. Тахіони. Вибрані публікації до 40-річчя тахіонової гіпотези. — Львів : Євросвіт, 2002. — С. 1–160. — ISBN: 966-7343-33-2.

56. Recami E. Classical Tachyons and Possible Applications // Riv. Nuovo Cim. — 1986. — Vol. 9, no. 6. — P. 1–178. — Access mode: http://dx.doi.org/10.1007/BF02724327.

57. Vieira Ricardo S. An Introduction to the Theory of Tachyons // Revista Brasileira de Ensino de Fisica. — 2012. — Vol. 34, no. 3. — P. 1–15. — Access mode: http://dx.doi.org/10.1590/S1806-11172012000300006.

58. Hill James M., Cox Barry J. Einstein's special relativity beyond the speed of light // Proceedings of the Royal Society A. — 2012. — Vol. 468. — P. 4174–4192. — Access mode: http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2012.0340.

59. Hassani Mohamed. Foundations of Superluminal Relativistic Mechanics // Communications in Physics. — 2015. — Vol. 24, no. 4. — P. 313–332. — Access mode: http://dx.doi.org/10.15625/0868-3166/24/4/4850.

60. Lachowicz Miroslaw. From microscopic to macroscopic descriptions of complex systems // Comptes Rendus Mécanique. — 2003. — Vol. 331, no. 11. — P. 733–738. — Access mode: http://dx.doi.org/10.1016/j.crme.2003.09.003.

61. Lachowicz Miroslaw. On bilinear kinetic equations. Between micro and macro descriptions of biological populations // Banach Center Publications. — 2003. — Vol. 63, no. 1. — P. 217–230. — online; accessed: http://dx.doi.org/10.4064/bc63-0-10.

62. Lachowicz Mirosław. General population systems. Macroscopic limit of a class of stochastic semigroups // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2005. — Vol. 307, no. 2. — P. 585–605. — Access mode: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X0500209X.

63. Lachowicz Miroslaw. MICRO AND MESO SCALES OF DESCRIPTION CORRESPONDING TO A MODEL OF TISSUE INVASION BY SOLID TUMOURS // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. — 2005. — Vol. 15, no. 11. — P. 1667–1683. — https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/S0218202505000935.

64. Lachowicz Mirosław. Lins Between Microscopic and Macroscopic Descriptions // Multiscale Problems in the Life Sciences: From Microscopic to Macroscopic / ed. by Capasso Vincenzo, Lachowicz Mirosław. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2008. — P. 201–267. — ISBN: 978-3-540-78362-6. — Access mode: https://doi.org/10.1007/978-3-540-78362-6_4.

65. Lachowicz Miroslaw. Microscopic, mesoscopic and macroscopic descriptions of complex systems // Probabilistic Engineering Mechanics. — 2011. — Vol. 26, no. 1. — P. 54–60. — Special Issue: Stochastic Methods in Mechanics — Status and Challenges. Access mode: http://dx.doi.org/10.1016/j.probengmech.2010.06.007.

66. Banasiak Jacek, Lachowicz Miroslaw. Methods of Small Parameter in Mathematical Biology. — Birkhäuser Basel, 2014. — P. i–xi,1–285. — ISBN: 978-3-319-05139-0. — Access mode: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-05140-6.

67. Грушка Я.І. Мінливі множини та їх властивості // Доповіді Національної академії наук України. — 2012. — № 5. — С. 12–18. — Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/236120448.

68. Грушка Я.І. Примітивні мінливі множини та їх властивості // Математичний вісник НТШ. — 2012. — Т. 9. — С. 52–80. — Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/236120647.

69. Grushka Ya.I. Changeable sets and mathematical modeling of the evolution of systems // Workshop on Mathematics for Life Sciences. Book of Abstracts. — Kyiv. — 2012. — P. 34. — Access mode: http://www.math.uni-luebeck.de/EUMLS/abstracts-EUMLS2012.pdf.

70. Grushka Ya.I. Changeable sets and mathematical modeling of the evolution of systems // International Conference dedicated to 120-th anniversary of STEFAN BANACH. Abstracts of Reports. — Lviv. — 2012. — P. 192.

71. Грушка Я.І. Мінливі множини та математичне моделювання еволюції систем // Четверта Міжнародна конференція молодих математиків з диференціальних рівнянь та їх застосувань, присвячена Я.Б. Лопатинському. Тези доповідей. — Донецьк. — 2012. — С. 37–38.

72. Девис М. Прикладной нестандартный анализ. — Москва : “Мир”, 1980. — С. 1–236.

73. Биркгоф Г. Теория решеток. — Москва : “Наука”, 1984. — С. 1–568.

74. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. — Москва : “Мир”, 1970. — С. 1–417.

75. Грушка Я.І. Необхідна і достатня ознака існування точкового часу на орієнтованій множині // Доповіді Національної академії наук України. — 2019. — № 8. — С. 9–15. — Режим доступу: https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.08.009.

76. Грушка Я.І. Про точкову хронологізацію орієнтованих множин // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2022 (опубліковано в 2023). — Т. 19, № 1. — С. 42–87. — Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/375640660.

77. Grushka Ya.I. On One-Point Time on an Oriented Set. — Preprint: Preprints (www.preprints.org), 2022. — P. 1–32. — Access mode: http://doi.org/10.20944/preprints202212.0075.v1.

78. Грушка Я.І. Про орієнтовані множини та хронологізацію // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Тези доповідей. — Ворохта. — 2019. — С. 4–5.

79. Grushka Ya.I. Necessary and sufficient condition for the existence of one-point time on an oriented set // XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky. Abstracts. — Vinnytsia. — 2019. — P. 39–40. — Access mode: https://www.researchgate.net/publication/334429730.

80. Grushka Ya.I. On the Existence of One-point Time on an Oriented Set // Winter School in Abstract analysis – WS2020. — Czech Republic, Prague-Hejnice. — 2020. — Access mode: https://www.researchgate.net/publication/339029265.

81. Карнаух Т.О, Ставровський А.Б. Вступ до дискретної математики. — Київ : Київський університет, 2006. — С. 1–109.

82. Grushka Ya.I. On the Existence of Internal Time on an Oriented Set // 18th Triennial Conference of the International Society for the Study of Time (ISST). —

Japan, Yamaguchi. — 2023. — Access mode: http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.19916.59529.

83. Грушка Я.І. Необхідна і достатня ознака існування внутрішнього часу на орієнтованій множині // Міжнародна наукова конференція "Математика та інформаційні технології". Тези доповідей. — Чернівці : Чернівецький національний ун-т ім. Ю.Федьковича. — 2023. — С. 182–184.

84. Грушка Я.І. Еволюційні розширення та аналоги операції об'єднання для базових мінливих множин // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 2. — С. 66–99. — Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/270686197.

85. Грушка Я.І. Базові мінливі множини та математичне моделювання еволюції систем // Укр. мат. журн. — 2013. — Т. 65, № 9. — С. 1198–1218. — Режим доступу: http://umj.imath.kiev.ua/article/?lang=ua&article=8385.

86. Грушка Я.І. Мінливі множини та їх застосування для побудови кінематики тахіонів // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 1. — С. 192–227. — Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/268069239.

87. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е. Лекции по нелинейной динамике. — Москва - Ижевск : НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2011. — С. 1–516. — ISBN: 978-5-93972-920-8.

88. Паули В. Теория относительности. — Москва : "Наука", 1991. — С. 1–328. — ISBN: 5-02-014346-4.

89. Грушка Я.І. Еволюційні розширення та аналоги операції об'єднання для базових мінливих множин // П'ятнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука. Матеріали конференції. Том 2. — Київ. — 2014. — С. 76. — Режим доступу: http://matan.kpi.ua/media/2014/kravchuk-conf2014-section2.abstracts.pdf.

90. Грушка Я.І. Еволюційні розширення та аналоги операції об'єднання для кінематичних мінливих множин // Міжнародна конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К.М.Фішмана та М.К.Фаґе. Тези доповідей. — Чернівці. — 2015. — С. 35–36.

91. Grushka Ya.I. Evolutional extensions and analogues of the operation of union for kinematic sets // 3rd EUMLS Conference "Mathematics for Life Sciences". Book of Abstracts. — Rivne. — 2015. — P. 16. — Access mode: http://www.math.uni-luebeck.de/EUMLS/abstracts-EUMLS2015.pdf.

92. Grushka Ya.I. Abstract concept of changeable set. — Preprint: arXiv:1207.3751, 2012. — P. 1–54. — Access mode: https://arxiv.org/abs/1207.3751v1.

93. Грушка Я.І. Видимість у мінливих множинах // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2012. — Т. 9, № 2. — С. 122–145. — Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/236217050.

94. Grushka Ya.I. Changeable sets and their application to investigation of abstract kinematics // Humboldt Kolleg "The Education and Science and their Role in Social and Industrial Progress of Society". Book of Abstracts. — Kyiv. — 2014. — P. 15. — Access mode: http://hk2014.humboldt.org.ua//abstracts/pdf/512.pdf.

95. Грушка Я.І. Мінливі множини та їх застосування до дослідження абстрактних кінематик // IV Міжнародна Ганська конференція. Тези доповідей. — Чернівці. — 2014. — С. 46–47.

96. Grushka Ya.I. Changeable Sets and their Possible Applications // International conference dedicated to the 120th anniversary of Kazimierz Kuratowski. Abstracts of Reports. — Lviv. — 2016. — P. 19. — Access mode: http://www.math.lviv.ua/conf-2016/2016-Kuratowski_Conf.pdf.

97. Грушка Я.І. Мінливі множини та породжені ними математичні об'єкти // XII-та літня школа "Алгебра, топологія, аналіз". Тези доповідей. — село Колочава, Закарпатська обл., Міжгірський район. — 2017. — С. 1. — Режим доступу: https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/ata12/theses/ata12_abstracts.pdf.

98. Grushka Ya.I. Changeable sets and their possible applications to the foundations of physics // 3rd conference "Logic, Relativity and Beyond" honoring Hajnal Andreka's 70th birthday. — Alfred Renyi Institute of Mathematics, Budapest, Hungary. — 2017. — Access mode: https://www.renyi.hu//conferences/lrb17/pdf/Grushka.pdf.

99. Наймарк М.А. Линейные представления группы Лоренца // Успехи математических наук. — 1954. — Т. IX, № 4 (62). — С. 19–93.

100. Грушка Я.І. Кінематичні мінливі множини із заданим універсальним перетворенням координат // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2015. — Т. 12, № 1. — С. 74–118. — Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/317369478.

101. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. — Москва : Энергоатомиздат, 1988. — С. 1–480.

102. Baccetti Valentina, Tate Kyle, Visser Matt. Inertial frames without the relativity principle // J. High Energ. Phys. — 2012. — Vol. 2012, no. 5. — P. 1–43. — Access mode: http://dx.doi.org/10.1007/JHEP05(2012)119.

103. Baccetti Valentina, Tate Kyle, Visser Matt. Lorentz violating kinematics: Threshold theorems // J. High Energ. Phys. — 2012. — Vol. 2012, no. 3. — P. 1–28. — Access mode: http://dx.doi.org/10.1007/JHEP03(2012)087.

104. Baccetti Valentina, Tate Kyle, Visser Matt. Inertial frames without the relativity principle: breaking Lorentz symmetry // Proceedings of the Thirteenth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity. — World Scientific. — 2013. — P. 1189–1191. — Access mode: https://arxiv.org/abs/1302.5989.

105. Recami E., Olkhovsky V.S. About Lorentz transformations and tachyons // Lettere al Nuovo Cimento. — 1971. — Vol. 1, no. 4. — P. 165–168. — Access mode: http://dx.doi.org/10.1007/BF02799345.

106. Recami E., Mignani. R. More about Lorentz transformations and tachyons // Lettere al Nuovo Cimento. — 1972. — Vol. 4, no. 4. — P. 144–152.

107. Goldoni R. Faster-than-light inertial frames, interacting tachyons and tadpoles // Lettere al Nuovo Cimento. — 1972. — Vol. 5, no. 6. — P. 495–502. — Access mode: http://dx.doi.org/10.1007/BF02785903.

108. Adam T. et al [OPERA Collaboration]. Measurement of the neutrino velocity with the OPERA detector in the CNGS beam. — https://arxiv.org, 2011. — P. 1–32. — Access mode: https://arxiv.org/abs/1109.4897v2.

109. Castro Carlos. On Superluminal Particles and the Extended Relativity Theories // Foundations of Physics. — 2012. — Vol. 42, no. 9. — P. 1135–1152. — Access mode: https://doi.org/10.1007/s10701-012-9659-3.

110. Grushka Ya.I. Tachyon generalization for Lorentz transforms // Methods Funct. Anal. Topology. — 2013. — Vol. 19, no. 2. — P. 127–145. — Access mode: http://mfat.imath.kiev.ua/article/?id=682.

111. Грушка Я.І. Алгебраїчні властивості тахіонних перетворень Лоренца // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2013. — Т. 10, № 2. — С. 138–169. — Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/257933423.

112. Грушка Я.І. Перетворення координат у кінематичних мінливих множинах // Доповіді Національної академії наук України. — 2015. — № 3. — С. 24–31. — Режим доступу: http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2015.03.024.

113. Грушка Я.І. Критерій існування універсального перетворення координат у кінематичних мінливих множинах // Буковинський математичний журнал. — 2014. — Т. 2, № 2-3. — С. 59–71. — Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/270647695.

114. Грушка Я.І. Про перетворення координат у кінематичних мінливих множинах // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Тези доповідей. — Ворохта. — 2017. — С. 64.

115. Barut Asim Orhan, Raczka Ryszard. Theory of Group Representations and Applications. — World Scientific, 1986. — P. 1–717.

116. Фущич В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф. Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений. — Київ : Наукова думка, 1991. — P. 1–304.

117. Винберг Э.Б. Курс алгебры. — Москва : Факториал Пресс, 2001. — С. 1–544.

118. A note on “Einstein’s special relativity beyond the speed of light by James M. Hill and Barry J. Cox” / Andréka Hajnal, Madarász Judit X., Németi István, and Székely Gergely // Proceedings of the Royal Society of London A. — 2013. — Vol. 469, no. 2154. — Access mode: http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2012.0672.

119. Casola Eolo Di. Sieving the Landscape of Gravity Theories : Ph. D. thesis ; SISSA. — SISSA, 2014. — P. 1–183.

120. Liberati S. Tests of Lorentz invariance: a 2013 update // Classical Quantum Gravity. — 2013. — Vol. 30, no. 13. — P. 133001, 50. — Access mode: http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/30/13/133001.

121. Shan Gao. How to realize quantum superluminal communication. — https://arxiv.org, 1999. — P. 1–4. — Access mode: https://arxiv.org/abs/quant-ph/9906116.

122. The special relativity principle and superluminal velocities / Kholmetskii A. L., Missevitch Oleg V., Smirnov Rueda Roman, and Yarman T. // Physics essays. — 2012. — Vol. 25, no. 4. — P. 621–626. — Access mode: http://dx.doi.org/10.4006/0836-1398-25.4.621.

123. Grushka Ya.I. On Universal Coordinate Transform in Kinematic Changeable Sets // Methods Funct. Anal. Topology. — 2017. — Vol. 23, no. 2. — P. 133–154. — Access mode: http://mfat.imath.kiev.ua/article/?id=968.

124. Grushka Ya.I. Abstract Coordinate Transforms in Kinematic Changeable Sets and their Properties. — Preprint: arXiv:1504.02685, 2015. — P. 1–31. — Access mode: https://arxiv.org/abs/1504.02685v2.

125. Coleman S. R., Glashow S. L. Cosmic ray and neutrino tests of special relativity // Physics Letters B. — 1997. — Vol. 405, no. 3-4. — P. 249–252. — Access mode: http://dx.doi.org/10.1016/S0370-2693(97)00638-2.

126. Coleman S. R., Glashow S. L. High-energy tests of Lorentz invariance // Phys. Rev. D. — 1999. — Vol. 59, no. 11. — P. 116008. — Access mode: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.59.116008.

127. The Hypothesis of Superluminal Neutrinos: comparing OPERA with other Data / Drago A., Masina I., Pagliara G., and Tripiccione R. // Europhysics Letters. — 2012. — Vol. 97, no. 2. — P. 21002. — Access mode: http://dx.doi.org/10.1209/0295-5075/97/21002.

128. Gertov Helene. Lorentz Violations : Ph.D. thesis ; University of Southern Denmark. — University of Southern Denmark, 2012. — P. 1–43.

129. Ter-Kazarian G. Extended Lorentz code of a superluminal particle. — Preprint: arXiv: 1202.0469, 2012. — P. 1–5. — Access mode: https://arxiv.org/abs/1202.0469.

130. Special Theory for Superluminal Particle / Xiang-Yao Wu, Bo-Jun Zhang, Xiao-Jing Liu, Nuo Ba, and Wang Yan. — Preprint: arXiv:1110.0882, 2011. — P. 1–19. — Access mode: https://arxiv.org/abs/1110.0882.

131. Grushka Ya.I. Draft introduction to abstract kinematics. (Version 2.0). — Preprint: ResearchGate, 2017. — P. 1–208. — Access mode: https://doi.org/10.13140/RG.2.2.28964.27521.

132. Faroughy Dara. Extended Linear and Nonlinear Lorentz Transformations and Superluminality // Advances in High Energy Physics. — 2013. — Vol. 2013. — P. 20, article ID: 760916. — Access mode: http://dx.doi.org/10.1155/2013/760916.

133. Корухов В.В. Теоретические и методологические аспекты кинематики тахионов // Гуманитарные науки в Сибири. — 1994. — № 1. — С. 25–31.

134. Корухов В.В., Наберухин Ю.И. Сверхсветовые явления и пространственно-временные отношения в тахионных мирах // Философия науки. — 1995. — Т. 1, № 1. — С. 58–64.

135. Grushka Ya. I. Notes on Extended Lorentz Transformations for Superluminal Reference Frames // Progress in Physics. — 2017. — 07. — Vol. 13, no. 4. — P. 200–201. — Access mode: https://www.researchgate.net/publication/322209840.

136. Grushka Ya.I. Comment on the Article "Extended Linear and Nonlinear Lorentz Transformations and Superluminality". — Preprint: viXra:1505.0053, 2015. — P. 1–3. — Access mode: http://vixra.org/abs/1505.0053.

137. Грушка Я.І. Еволюційні розширення кінематичних множин та універсальних кінематик // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2015. — Т. 12, № 2. — С. 139–204. — Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/317428774.

138. Грушка Я.І. Теорема про еволюційне розширення для універсальних кінематик // Буковинський математичний журнал. — 2015. — Т. 3, № 3-4. — С. 67–77. — Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/317429219.

139. Einstein A. Über die vom Relativitätsprinzip geforderte Trägheit der Energie // Annalen der Physik. — 1907. — Vol. 328, no. 7. — P. 371–384.

140. Tolman R.C. The Theory of the Relativity of Motion. — Berkeley : University of California Press, 1917. — P. I–225.

141. Bohm David. The special theory of relativity. — New York : Routledge, 1965. — P. 1–155.

142. Терлецкий Я.П. Парадоксы теории относительности. — Москва : "Наука", 1966. — С. 1–120.

143. Kacser C. Introduction to the special theory of Relativity. — Prentice Hall, 1967. — P. 1–229.

144. French A.P. Special Relativity. M.I.T. Introductory Physics. — W.W. Norton & Company, 1968. — P. i–x, 1–295. — ISBN: 0-3930-9793-5.

145. Resnick Robert. Introduction to Special Relativity. — New York : John Wiley and Sons, Inc., 1968. — P. i–xii, 1–248. — ISBN: 0-4717-1725-8.

146. Schwartz Herman M. Introduction to Special Relativity. — New York : McGraw-Hill Book Company, 1968. — P. 1–432. — ISBN: 0-0705-5765-9.

147. Барашенков В.С. Тахионы. Частицы, движущиеся со скоростями больше скорости света // Успехи физических наук. — 1974. — Т. 114, № 1. — С. 133–149. — Режим доступа: http://dx.doi.org/10.3367/UFNr.0114.197409f.0133.

148. Arntzenius F. Causal paradoxes in special relativity // British Journal for the Philosophy of Science. — 1990. — Vol. 41, no. 2. — P. 223–243.

149. Taylor E.F., Wheeler J.A. Spacetime Physics. — 2nd ed. — New York : W. H. Freeman, 1992. — P. I–313. — ISBN: 0-7167-2327-1.

150. Іляшевич В.І., Медведєв С.Ю. Тахіонні акаузальні петлі // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Фізика. — 2010. — Т. 2010, № 27. — С. 103–111.

151. Faster than light motion does not imply time travel / Andréka Hajnal, Madarász J.X., Németi I., Stannett M., and Székely G. // Classical and Quantum Grav. — 2014. — Vol. 31, no. 9. — P. 095005. — Access mode: http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/31/9/095005.

152. Bilaniuk O. -M., Sudarshan E. C. G. Causality and Space-like Signals // Nature. — 1969. — Vol. 223. — P. 386–387. — Access mode: http://dx.doi.org/10.1038/223386b0.

153. Camenzind M. Relativity and free tachyons // General Relativity and Gravitation. — 1970. — Vol. 1, no. 1. — P. 41–62. — Access mode: https://doi.org/10.1007/BF00759202.

154. Recami Erasmo. Tachyon kinematics and causality: A systematic thorough analysis of the tachyon causal paradoxes // Foundations of Physics. — 1987. — Vol. 17, no. 3. — P. 239–296. — Access mode: https://doi.org/10.1007/BF00733092.

155. Recami Erasmo, Fontana Flavio, Garavaglia Roberto. Special Relativity and Superluminal Motions: A Discussion of Some Recent Experiments // International Journal of Modern Physics A. — 2000. — Vol. 15, no. 18. — P. 2793–2812. — https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/S0217751X00001403.

156. Liberati Stefano, Sonego Sebastiano, Visser Matt. Faster-than-c Signals, Special Relativity, and Causality // Annals of Physics. — 2002. — Vol. 298, no. 1. — P. 167–185. — Access mode: http://dx.doi.org/10.1006/aphy.2002.6233;https://arxiv.org/abs/gr-qc/0107091.

157. Реками Э. Теория относительности и ее обобщение // Астрофизика, кванты и теория относительности. — Москва : Мир, 1982. — С. 53–128.

158. Грушка Я.І. Про часонезворотність універсальних кінематик // Доповіді Національної академії наук України. — 2016. — № 7. — С. 14–21. — Режим доступу: http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.07.014.

159. Грушка Я.І. Про часозворотність тахіонових кінематик // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2016. — Т. 13, № 2. — С. 125–174. — Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/317429152.

160. Grushka Ya.I. Theorem of Non-Returning and Time Irreversibility of Tachyon Kinematics // Progress in Physics. — 2017. — 09. — Vol. 13, no. 4. — P. 218–228. — Access mode: http://www.ptep-online.com/2017/PP-51-08.PDF.

161. Грушка Я.І. Проблема часонезворотності тахіонових кінематик // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Тези доповідей. — Ворохта. — 2016. — С. 72–73.

162. Grushka Ya.I. Problem of the Irreversibility of Time for Tachyon Kinematics // International Conference on Differential Equations Dedicated to the 110th Anniversary of Ya.B. Lopatynsky. Book of Abstracts. — Lviv. — 2016.

163. Grushka Ya.I. Theorem of non returning for universal kinematics // International Conference Differential Equations, Mathematical Physics and Applications. Book of Abstracts. — Cherkasy, Ukraine. — 2017. — P. 119–120.

164. Исакович М.А. Теория полёта. — Москва-Ленинград : ОГИЗ, Государственное изд-во физико-технической литературы, 1947. — С. 1–328.

165. Аппель П. Теоретическая механика, том 1. — Москва : Государственное изд-во физико-математической литературы, 1960. — С. 1–515.

166. Павловський М.А. Теоретична механіка. — Київ : “Техніка”, 2002. — С. 1–511.

167. Мёллер К. Теория относительности. — Москва : Атомиздат, 1975. — С. 1–400.

168. Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A. Gravitation. Part 1. — W. H. Freeman, 1973. — ISBN: 9780716703341.

169. Энгелькинг Р. Общая топология. — Москва : Мир, 1986. — С. 1–752.

170. Hoffmann Heiko. On the continuity of the inverses of strictly monotonic functions // Irish Math. Soc. Bulletin. — 2015. — no. 75. — P. 45–57.

171. Karlova Olena, Mykhaylyuk Volodymyr, Sobchuk Oleksandr. Diagonals of separately continuous functions and their analogs // Topology and its Applications. — 2013. — Vol. 160, no. 1. — P. 1–8. — Access mode: http://dx.doi.org/10.1016/j.topol.2012.09.003.

172. Маслюченко В.К. Нарізно неперервні відображення і простори Кете / Чернівецький національний ун-т ім. Ю.Федьковича. Дис.... докт. фіз.-матем. наук. — Чернівці : Чернівецький національний ун-т ім. Ю.Федьковича, 1999. — С. 345.

173. Волошин Г., Маслюченко В., Маслюченко О. Про пошарово рівномірне наближення нарізно неперервних функцій многочленами // Математичний вісник НТШ. — 2013. — Т. 10. — С. 135–158.

174. Grushka Yaroslav I. On monotonous separately continuous functions // Applied General Topology. — 2019. — Apr. — Vol. 20, no. 1. — P. 75–79. — Access mode: https://polipapers.upv.es/index.php/AGT/article/view/9817.

175. Grushka Ya.I. On Monotonous Separately Continuous Functions. — Preprint: arXiv:1801.03538, 2018. — P. 1–5. — Access mode: https://arxiv.org/abs/1801.03538v1.

176. Келли Дж.Л. Общая топология. — 2 изд. — Москва : “Наука”, 1981. — С. 1–432.

177. Baggett L.W. Functional Analysis: A Primer. Chapman & Hall Pure and Applied Mathematics. — New York : Marcel-Dekker, 1991. — P. 1–288. — ISBN: 9780824785987. — Access mode: http://spot.colorado.edu/~baggett/funcbook.pdf.

178. Грушка Я.І. Одностайно-поступальний рух систем відліку в універсальних кінематиках // Буковинський математичний журнал. — 2017. — Т. 5, № 3-4. — С. 56–70. — Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/322685969.

179. Грушка Я.І. Критерій одностайної поступальності систем відліку в універсальних кінематиках // Вісник Черкаського університету: Серія фізико-математичні науки. — 2017. — № 1. — С. 122–137. — Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/326234926.

180. Grushka Ya.I. Self-consistently Translational Motion of Reference Frames and Sign-definiteness of Time in Universal Kinematics // Methods Funct. Anal. Topology. — 2018. — Vol. 24, no. 2. — P. 107–119. — Access mode: http://mfat.imath.kiev.ua/article/?id=1052.

181. Грушка Я.І. Узагальнення теореми Юнга і його застосування в теорії універсальних кінематик // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Тези доповідей. — Ворохта. — 2018. — С. 48–49.

182. Грушка Я.І. Про неперервність нарізно неперервного і одностайно поступального перетворення координат // Сучасні проблеми механіки та математики. Збірник наукових праць. / під ред. Самойленко А.М., Кушнір Р.М. — Львів. — 2018. — Т. 3. — С. 195–196. — Режим доступу: http://www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018/Volume_3.pdf.

183. Грушка Я.І. Траєкторно регулярні та одностайно поступальні оператори перетворення координат // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Тези доповідей. — Ворохта. — 2020.

184. Грушка Я.І. Критерій одностайної поступальності систем відліку в універсальних кінематиках. — Preprint: ResearchGate, 2017. — С. 1–15. — Режим доступу: https://doi.org/10.13140/RG.2.2.11087.59041.

185. Грушка Я.І. Критерій трансляційної одностайної поступальності для операторів перетворення координат та систем відліку в універсальних кінематиках // Буковинський математичний журнал. — 2021. — Т. 9, № 1. — С. 128–139. — Режим доступу: https://doi.org/10.31861/bmj2021.01.10.

186. Gerasimenko V.I. Groups of Operators for Evolution Equations of Quantum Many-particle Systems // Operator Theory: Advances and Applications. — Birkhauser Verlad Basel, 2009. — Vol. 191. — P. 341–355.

187. Герасименко В.І., Малишев П.В. Творчий внесок Д.Я. Петрини у розвиток сучасної математичної фізики // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, № 3. — С. 293–308.

188. Petrina D.Ya. Equilibrium and Nonequilibrium States of Model Frohlich–Peierls Hamiltonian // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 8. — С. 1069–1086.

189. Petrina D.Ya., Gredzhuk V.I. On two models of interacting Bose gas: Bogolyubov's model of superfluidity and Huang-Yang–Luttinger model // Mat. Fiz. Anal. Geom. — 1996. — Vol. 3, no. 3/4. — P. 370–405.

190. Петрина Д.Я. О гамильтонианах квантовой статистики и о модельном гамильтониане теории сверхпроводимости // Теоретическая и математическая физика. — 1970. — Т. 4, № 3. — С. 394–411.

191. Петрина Д.Я., Яцишин В.П. О модельном гамильтониане теории сверхпроводимости // Теоретическая и математическая физика. — 1972. — Т. 10, № 2. — С. 283–300.

192. Боголюбов Н.Н., Петрина Д.Я. Об одном классе модельных систем, допускающих понижение степени гамильтониана в термодинамическом пределе. I // Теоретическая и математическая физика. — 1977. — Т. 33, № 2. — С. 231–245.

193. Боголюбов Н.Н., Петрина Д.Я. Об одном классе модельных систем, допускающих понижение степени гамильтониана в термодинамическом пределе. II // Теоретическая и математическая физика. — 1978. — Т. 37, № 2. — С. 246–257.

194. Петрина Д.Я. О гамильтонианах в пространствах трансляционно-инвариантных функций // Методы мат. физики бесконечных систем. Сб. науч. тр. — Киев, 1991. — С. 4–21.

195. Петрина Д.Я. Стани нескінченних рівноважних класичних систем // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 3. — С. 389–399.

196. Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. Курс лекций. — Киев : Выща школа, 1990. — С. 1–600. — ISBN: 5-11-001329-2.

197. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — Киев : Наукова думка, 1965. — С. 1–798.

198. Березанский Ю.М. Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных. — Киев : Наукова думка, 1978. — С. 1–360.

199. Березанский Ю.М., Кондратьев Ю.Г. Спектральные методы в бесконечномерном анализе. — Киев : Наукова думка, 1988. — С. 1–680. — ISBN: 5-12-009292-6.

200. Berezansky Yu.M., Brasche J. Generalized selfadjoint operators and their singular perturbations // Methods Funct. Anal. Topology. — 2002. — Vol. 8, no. 4. — P. 1–14. — Access mode: `http://mfat.imath.kiev.ua/article/?id=227`.

201. Berezansky Yu.M., Brasche J., Nizhnik L. P. On generalized selfadjoint operators on scales of Hilbert spaces // Methods Funct. Anal. Topology. — 2011. — Vol. 17, no. 3. — P. 193–198. — Access mode: `http://mfat.imath.kiev.ua/article/?id=587`.

202. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. — Москва : Высшая Школа, 1981. — Т. II. — С. 1–584.

203. Dudley R.M. On sequential convergence // Trans. Amer. Math. Soc. — 1964. — Vol. 112. — P. 483–507. — Access mode: `https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1964-0175081-6`.

204. Мосягин В.В., Широков Б.М. Линейные пространства со сходимостью и конусом // Труды Петрозаводского государственного университета, серия “Математика”. — 2001. — Т. 8. — С. 14–19. — Режим доступа: http://issuesofanalysis.petrsu.ru/article/genpdf.php?id=1964.

205. Грушка Я.І. Простори операторів з обмеженим проекційним слідом // Математичний вісник НТШ. — 2009. — Т. 6. — С. 73–86. — Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/267123133.

206. Грушка Я.І. Простори узагальнених трансляційно інваріантних операторів та операторний аналог сліду за різницевою змінною // Міжнародна конференція до 100-річчя М.М. Боголюбова та 70-річчя М.І. Нагнибіди: Тези доповідей. — Чернівці. — 2009. — С. 34–36.

207. Grushka Ya.I. Translation-invariant operators and abstract difference variable trace // Bogolubov Kyiv Conference “Modern Problems of Theoretical and Mathematical Physics”: Book of Abstracts. — Kyiv. — 2009. — P. 128.

208. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. — Киев : Наукова Думка, 1984. — С. 1–284.

209. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Тригонометрические ряды и обобщенные периодические функции // Докл. АН СССР. — 1981. — Т. 257, № 4. — С. 799–804.

210. Michelangeli Alessandro. Bose-Einstein condensation: analysis of problems and rigorous results : Ph. D. thesis. — SISSA, 2007. — P. 1–151. — Access mode: http://preprints.sissa.it/xmlui/handle/1963/5272.

211. Грушка Я.І. Трансляційно інваріантні оператори та операторний аналог сліду за різницевою змінною // Доповіді Національної академії наук України. — 2010. — № 3. — С. 13–18. — Режим доступу: http://www.researchgate.net/publication/236120894.

212. Грушка Я.І. Простори узагальнених операторів з обмеженим проекційним слідом // Укр. мат. журн. — 2011. — Т. 63, № 1. — С. 24–39. — Режим доступу: http://umj.imath.kiev.ua/article/?lang=ua&article=5391.

213. Grushka Ya.I. Translation-invariant Operators and Generalized Difference Variable Trace // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series: Physics & Mathematics. — 2010. — no. 3. — P. 24–27. — Access mode: http://www.researchgate.net/publication/236121509.

214. Grushka Ya.I. Translation-invariant operators and abstract difference variable trace // Humbolt-Kolleg for Research Fellows and Awardees “Humboldt Cosmos: Science and Society”: Book of Abstracts. — Kyiv. — 2009. — P. 27–28. — Access mode: http://humboldt.org.ua/news/?id=14&article=366.

215. Grushka Ya.I. The constancy problem of projection trace // Humbolt-Kolleg “Mathematics and Life Sciencies”: Book of Abstracts. — Kyiv. — 2010. — P. 36. — Access mode: http://hk2010.rivok.com//abstracts/pdf/228.pdf.

216. Грушка Я.І. Проблема сталості проекційного сліду трансляційно інваріантного оператора // Міжнародна конференція “Сучасні проблеми аналізу”: Тези доповідей. — Чернівці. — 2010. — С. 27.

217. Грушка Я.І. Групи унітарних операторів в просторах псевдооператорів з обмеженим проекційним слідом // Збірник праць II Всеукраїнського наукового семінару “Українська школа групового аналізу диференціальних рівнянь: здобутки і перспективи”. — Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка. — 2012. — С. 13–23. — Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/236121509.

218. Грушка Я.І. Групи унітарних операторів в просторах псевдооператорів з обмеженим проекційним слідом // II всеукраїнський семінар “Українська школа групового аналізу диференціальних рівнянь”. — Доповідь на конференції, Полтава. — 2011.

219. Madarász Judit X., Szekely Gergely. The existence of superluminal particles is independent of a relativistic dynamics. — Budapest : First International Conference on Logic and Relativity. — 2012. — P. 29. — Access mode: http://www.renyi.hu/conferences/nemeti70/LR12Talks/madarasz-szekely.pdf.

220. Szekely Gergely. The existence of superluminal particles is consistent with the kinematics of Einstein’s special theory of relativity // Reports on Mathematical Physics. — 2013. — Vol. 72, no. 2. — P. 133–152. — Access mode: http://arxiv.org/abs/1202.5790v2.

221. Hill James M., Cox Barry J. Generalised Einstein mass-variation formulae: II Superluminal relative frame velocities // Results in Physics. — 2016. — Vol. 6. — P. 122–130. — Access mode: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S221137971600022X.

222. Hill James M., Cox Barry J. Generalised Einstein mass-variation formulae: I Subluminal relative frame velocities // Results in Physics. — 2016. — Vol. 6. —

P. 112–121. — Access mode: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2211379715000686.

223. Madarász Judit X., Székely Gergely. The existence of superluminal particles is consistent with relativistic dynamics // Journal of Applied Logic. — 2014. — Vol. 12, no. 4. — P. 477–500. — Access mode: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1570868314000597.

224. Mantegna Michele. Revisiting Barry Cox and James Hill's theory of superluminal motion: a possible solution to the problem of spinless tachyon localization // Proceedings Of The Royal Society A. — 2015. — March. — Vol. 471, no. 2175.

225. Hill James M., Cox Barry J. Dual universe and hyperboloidal relative velocity surface arising from extended special relativity // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. — 2014. — Dec. — Vol. 65, no. 6. — P. 1251–1260. — Access mode: https://doi.org/10.1007/s00033-013-0388-z.

226. Jin C., Lazar M. A note on Lorentz-like transformations and superluminal motion // ZAMM Journal of applied mathematics and mechanics. — 2015. — Vol. 95, no. 7. — P. 690–694.

227. Superluminal Motion of Free Spin-half Particles in a Fiber Bundle Formalism / Gazoya Emmanuel, Oduro Francis, Prempeh Edward, Miguel Dias Joao, and Xu Wei-Xing // British Journal of Applied Science & Technology. — 2016. — Vol. 16, no. 5.

228. Mychelkin Eduard G., Makukov Maxim A. Fundamental scalar fields and the dark side of the universe // International Journal of Modern Physics D. — 2015. — Vol. 24, no. 12. — P. 1544025. — Access mode: http://dx.doi.org/10.1142/S0218271815440253.

229. Медведєв С.Ю. Про можливість розширення спеціальної теорії відносності за світловий бар'єр // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Фізика. — 2005. — № 18. — С. 7–15.

230. Hari Syamala. Mind and Tachyons: How Tachyon Changes Quantum Potential and Brain Creates Mind // NeuroQuantology. — 2011. — Vol. 9, no. 2. — P. 255–270. — Access mode: http://dx.doi.org/10.14704/nq.2011.9.2.320.

231. Hari Syamala. Mind and Tachyons: Six-dimensional Special Relativity - Tachyons may inform us about our future // NeuroQuantology. — 2016. — Vol. 14, no. 1. — P. 94–105. — Access mode: http://dx.doi.org/10.14704/nq.2016.14.1.881.

232. Lord E. A., Shankara T. S. Rest frames for tachyons and photons // Foundations of Physics. — 1977. — Vol. 7, no. 7. — P. 459–474. — Access mode: https://doi.org/10.1007/BF00708863.

233. Sutherland Roderick I., Shepanski John R. Superluminal reference frames and generalized Lorentz transformations // Phys. Rev. D. — 1986. — Vol. 33, no. 8. — P. 2896–2902. — Access mode: https://doi.org/10.1103/PhysRevD.33.2896.

234. Pfeffer W.F. Lorentz Transformations of a Hilbert Space // American Journal of Mathematics. — 1981. — Vol. 103, no. 4. — P. 691–709.

235. Benz W. Lorentz–Minkowski distances in Hilbert spaces // Geom. Dedicata. — 2000. — Vol. 81, no. 1-3. — P. 219–230. — Access mode: http://dx.doi.org/10.1023/A:1005235923736.

236. Benz W. On Lorentz-Minkowski geometry in real inner product spaces // Advances in Geometry. — 2003. — Vol. 3, no. Special Issue 1. — P. 1–12. — Access mode: https://doi.org/10.1515/advg.2003.2003.s1.1.

237. Певзнер М.Ш. Основи теорії відносності. — Дніпро : Національний гірничий університет, 2013. — С. 1–153.

238. Judson Thomas W. Abstract Algebra: Theory and Applications. — Orthogonal Publishing L3C, 2016. — P. 340. — Access mode: http://abstract.ups.edu/download/aata-20160809.pdf.

239. Lightstone A.H. Fundamentals of Linear Algebra. Appleton-Century mathematics series. — New York : Appleton-Century-Crofts, 1969. — P. 1–340. — ISBN: 0390560502.

240. Grushka Ya.I. Logarithmic extension of real numbers and hyperbolic representation of generalized Lorentz transforms // International Journal of Algebra. — 2017. — Vol. 11, no. 4. — P. 159–170. — Access mode: https://doi.org/10.12988/ija.2017.7315.

241. Grushka Ya.I. Generalized Lorentz transforms and application of changeable sets for mathematically strict foundation of tachyon kinematics // 2nd EUMLS Conference "Mathematics for Life Sciences". Book of Abstracts. — Kyiv. — 2013. — P. 11.

242. Грушка Я.І. Узагальнені перетворення Лоренца і застосування теорії мінливих множин для математично строгого обґрунтування тахіонної кінематики // Крымская международная математическая конференция КММК-2013. Сборник тезисов. Том 1. — Судак. — 2013. — С. 28.

243. Грушка Я.І. Логарифмічне розширення дійсних чисел і гіперболічне зображення узагальнених перетворень Лоренца // Міжнародний семінар “Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики”, присвячений Вільгельму Іллічу Фущичу. — Київ. — 2016. — Режим доступу: https://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2016/Grushka.pdf.

244. Грушка Я.І. Узагальнені перетворення Лоренца та їх застосування для математичного обґрунтування тахіонової кінематики // Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях”. Матеріали конференції. — Чернівці. — 2018. — С. 175. — Режим доступу: http://fmi50.pp.ua/files/FMI50-Materials.pdf.

245. Hassani Mohamed. Superluminalization of special relativity theory. — Preprint: ResearchGate, 2013. — P. 1–20. — Access mode: https://doi.org/10.13140/RG.2.1.1440.7524.

246. Hassani Mohamed. Superluminal spatio-temporal transformations: First basic step toward the Superluminal Relativistic Mechanics. — Preprint: ResearchGate, 2013. — P. 1–30. — Access mode: https://doi.org/10.13140/RG.2.1.3561.4567.

247. Grushka Ya. I. On some properties of Hassani transforms // Matematychni Studii. — 2022. — Mar. — Vol. 57, no. 1. — P. 79–91. — Access mode: https://doi.org/10.30970/ms.57.1.79-91.

248. Grushka Ya.I. On Group Property of Hassani Transforms and Relativity Principle in Hassani Kinematics. — Preprint: Preprints (www.preprints.org), 2021. — P. 1–13. — Access mode: http://doi.org/10.20944/preprints202102.0333.v1.

249. Grushka Ya.I. On time irreversibility of generalized Hassani kinematics // Прикл. проблеми механіки і математики. — 2022 (опубліковано в 2023). — Vol. 20. — P. 88–108. — Access mode: https://doi.org/10.15407/apmm2022.20.88-108.

250. Grushka Ya.I. On Time Irreversibility of Generalized Hassani Kinematics. — Preprint: Cambridge Open Engage, 2022. — P. 1–18. — Access mode: https://doi.org/10.33774/coe-2022-tk8bw.

251. Грушка Я.І. Про часонезворотність узагальнених кінематик Хассані // Міжнародна наукова конференція “Прикладна математика та інформаційні технології”. Тези доповідей. — Чернівці : Чернівецький національний ун-т ім. Ю.Федьковича. — 2022. — С. 162. — Режим доступу: http://www.amit60.fmi.org.ua/files/AMIT2022-Materials.pdf.

252. Грушка Я.І. Теорема про неповернення для універсальних кінематик та деякі її застосування // Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми механіки та математики – 2023”: збірник наукових праць. — Львів : Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. — 2023. — С. 407–408. — Режим доступу: `http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_14.pdf`.

253. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. — Москва : “Наука”, 1971. — С. 1–320.